Fünfte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2023)

1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in G$, und $f \in H(G \setminus \{w\})$. Hat f habe an der Stelle w eine Polstelle der Ordnung m, dann zeige man, dass

$$\operatorname{Res}(f, w) = \frac{1}{(m-1)!} \Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \Big((z-w)^m f(z) \Big) \Big]_{z=w}$$

   Man zeige weiters, dass für $f = \frac{h}{g}$ mit auf G holomorphen h, g, sodass $h(w) \neq 0$ und g bei w eine einfache Nullstelle hat,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{h}{g}, w\right) = \frac{h(w)}{g'(w)}$$

2. Berechne die Residuen von $f(z)$ an allen isolierten singulären Stellen in $\mathbb{C}$:

   (a) $f(z) := \frac{\sin^{100}(z)}{z}$

   (b) $f(z) := \frac{z^2+2}{z^2-4}$,

   (c) $f(z) := \frac{z^3+z^2}{\sin^3 z}$,

   (d) $f(z) := e^{\frac{1}{z}}$.

3. Die Funktion $f \in M(D)$ habe an der Stelle w einen einfachen Pol. Sei $\alpha \geq 0$, und sei $\gamma_r^{w,\alpha}$ der Weg $\gamma_r^{w,\alpha}(t) := w + re^{i\alpha t}$, $t \in [0,1]$, mit $K_r(w)$. Dann gilt

$$\lim_{r \searrow 0} \int_{\gamma_r^{w,\alpha}} f(\zeta)\, d\zeta = \alpha i \operatorname{Res}(f, w)\,.$$

4. Seien p, q Polynome mit $\operatorname{grad} q \geq \operatorname{grad} p + 2$, und sei $q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Seien $\{w_1, \dots, w_n\}$ die Menge der Nullstellen von q in der oberen Halbebene. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\big(\frac{p}{q}, w_k\big)$$

   Hinweis: Integrieren Sie die Funktion $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ längs des Weges aus Beispiel 2.7.4. aus der Vorlesung und lassen Sie R gegen $+\infty$ streben.

5. Berechne das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx\,.$$

   Hinweis: Es bezeichne $\log z$ jenen Zweig des Logarithmus, der auf $\mathbb{C} \setminus \big((-i)[0,\infty)\big)$ analytisch ist und $\log(1) = 0$ erfüllt; siehe Beispiel 8 der zweiten Übung mit $D = \mathbb{C} \setminus \big((-i)[0,\infty)\big)$ statt $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Integrieren Sie für $R > 0$ (groß) und $\epsilon > 0$ (klein) die Funktion $f(z) := \frac{\log z}{z^2+1}$ längs des geschlossenen Weges, der sich aus der Zusammensetzung von geeigneten Umparametrisierungen von $[0,\pi] \ni t \mapsto R\exp(it) \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{(-R)(-\epsilon)}$, $[0,\pi] \ni t \mapsto \epsilon\exp(i(\pi - t)) \in \mathbb{C}$ und $\overrightarrow{\epsilon R}$ ergibt. Skizze! Lassen Sie R gegen $+\infty$ und ϵ gegen 0 gehen.

6. Berechne das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$
Hinweis: Integrieren Sie für $R > 0$ (groß) und $\epsilon > 0$ (klein) die Funktion $f(z) := \frac{e^{iz}}{z}$ längs des geschlossenen Weges, der sich aus der Zusammensetzung von geeigneten Umparametrisierungen von $[0,\pi] \ni t \mapsto R\exp(it) \in \mathbb{C}$, $\overrightarrow{(-R)(-\epsilon)}$, $[\pi, 2\pi] \ni t \mapsto \epsilon\exp(it) \in \mathbb{C}$ und $\overrightarrow{\epsilon R}$ ergibt. Skizze! Lassen Sie R gegen $+\infty$ und ϵ gegen 0 gehen. Dabei könnte es hilfreich sein, $\int_0^\pi e^{-R\sin x}\,dx$ durch eine Konstante mal $\frac{1}{R}$ abzuschätzen, was sich mit Hilfe von $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, zeigen lässt.

7. Mit den Voraussetzungen wie im Satz vom logarithmischen Residuum sei zusätzlich $h \in H(D)$. Verwende den Residuensatz um zu zeigen, dass
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma h(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \sum_{w\in N}\alpha_f(w)n(\gamma,w)h(w) - \sum_{w\in P}\beta_f(w)n(\gamma,w)h(w)\,.$$

8. Berechnen Sie $f'(z)$ für $f(z) = \cot(z)$, $z \in \mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$, sowie $\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)\cos(z)}\,dz$ für $\gamma(t) = 10\exp(it2\pi)$, $t \in [0,1]$.

9. Für $h(z) = z^4 + 6z + 3$ zeige man, dass die Anzahl der Nullstellen von h in $U_2^{\mathbb{C}}(0)$ genau vier und von h in $U_1^{\mathbb{C}}(0)$ genau eins ist. Hinweis: Satz von Rouché mit geeigneter Funktion g, welche im ersten Fall ein Polynom vom Grad vier und im zweiten Fall eines vom Grad eins ist.