Vierte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2023)

Zunächst sei an die cordale Metrik auf $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ erinnert: Dazu betrachte die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{S}^2 := \left\{(X,Y,Z)^T \in \mathbb{R}^3 : X^2+Y^2+Z^2 = 1\right\},$$

und definiere eine Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2$ wie folgt:

Man betrachte die komplexe Zahl z als Punkt in der (X,Y)-Ebene, und schneide die Gerade durch die Punkte $N = (0,0,1)$ und z mit $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Dann erhält man genau einen Punkt und dieser sei $\phi(z)$. In Formeln schreibt sich ϕ als ($x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$)

$$X = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

Die Abbildung ϕ ist eine Bijektion von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Ihre Inverse $\sigma = \phi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ heißt *stereographische Projektion.*

Sei $d_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$ die euklidische Metrik am $\mathbb{R}^3$, d.h.

$$d_{\mathbb{R}^3}\big((X_1,Y_1,Z_1)^T,(X_2,Y_2,Z_2)^T\big) = \|(X_1,Y_1,Z_1)^T - (X_2,Y_2,Z_2)^T\|_2 =$$

$$\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}$$

Dann ist $\langle \mathbb{S}^2, d_{\mathbb{R}^3}\rangle$ ein kompakter metrischer Raum.

Die Abbildung ϕ ist ein Homöomorphismus von $\langle \mathbb{C}, d\rangle$ auf $\langle \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, d_{\mathbb{R}^3}\rangle$. Achtung: ϕ ist sogar gleichmäßig stetig, nicht (!) jedoch σ. Definiert man

$$\chi(z,w) := d_{\mathbb{R}^3}\big(\phi(z),\phi(w)\big), \quad z,w \in \mathbb{C},$$

so erhält man also eine Metrik auf $\mathbb{C}$, die die gleiche Topologie erzeugt wie d (euklidische Metrik auf $\mathbb{C}$, dh. $d(z,w) = |z-w|$), aber nicht zu d äquivalent ist. Man bezeichnet χ als *chordale Metrik* auf $\mathbb{C}$. Explizit ist χ gegeben als

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}.$$

Wir werden oft $\mathbb{C}$ vermöge ϕ als Teilmenge von $\mathbb{S}^2$ betrachten. Um bequemlichkeitshalber die Einbettung ϕ notationell zu unterdrücken, definieren wir

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

wobei „∞“ ein formales Element ist, das nicht zu $\mathbb{C}$ gehört. Setzt man nun χ fort auf $\mathbb{C}_\infty$ durch

$$\chi(z,\infty) := d_{\mathbb{R}^3}(\phi(z),N) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \ \chi(\infty,\infty) := 0,$$

so ist die Abbildung $\lambda : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}^2$

$$\lambda(z) := \begin{cases} \phi(z), & z \in \mathbb{C} \\ N \quad , & z = \infty \end{cases}$$

eine Isometrie von $\langle \mathbb{C}_\infty, \chi \rangle$ auf $\langle \mathbb{S}^2, d_{\mathbb{R}^3} \rangle$. Insbesondere ist die von χ auf $\mathbb{C}_\infty$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}(\chi)$ eine kompakte Topologie auf $\mathbb{C}_\infty$, und als metrische Topologie ist sie auch Hausdorffsch. Somit ist $(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}(\chi))$ auch die Einpunkt- bzw. Alexandroffkompaktifizierung des lokalkompakten Raumes $(\mathbb{C}, \mathcal{T}(d))$.

Schließlich erkennt man aus den expilziten Formeln für χ für eine komplexe Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass $z_n \to z$ bzgl. d genau dann, wenn $z_n \to z$ bzgl. χ, und dass $|z_n| \to +\infty$ genau dann, wenn $z_n \to \infty$ bzgl. χ.

1. Man weise nach, indem Sie die Vektorraumaxiome sorgfältig überprüfen, dass für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ und einen Banachraum Y über $\mathbb{C}$ die Menge $M(D, Y)$ mit der Addition und skalaren Multiplikation wie aus der Vorlesung einen Vektorraum bilden.

   Zeigen Sie auch, dass $M(D) = M(D, \mathbb{C})$ mit der punktweisen Multiplikation eine Algebra mit Einselement und im Fall eines Gebietes D jedes $f \in M(D) \setminus \{0\}$ invertierbar ist.

2. Sei $\phi : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Abildung (vgl. den Absatz über die chordale Metrik)

$$\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass die Ableitung $d\phi\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ein skalares Vielfaches einer isometrischen Matrix ist. Bestimmen Sie dieses (positive) Vielfache.

   Zeigen Sie auch, dass für ein holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ die Ableitung $df(z)$ $(\in \mathbb{R}^{2\times 2})$ ein skalares Vielfaches einer orthogonalen Matrix ist, wobei $|f'(z)|$ diese Vielfache ist.

   Schließlich zeige man, dass auch die Hintereinanderausführung $\phi \circ f : D \to \mathbb{R}^3$ die Eigenschaft, dass $d(\phi \circ f)(z)$ ein skalares Vielfaches einer isometrischen Matrix ist, und dass dieses Vielfache mit $\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ und der Abbildungsnorm (in $L_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ vorne und hinten mit der zwei-Norm versehen) $\|d(\phi \circ f)(z)\|$ übereinstimmt!

   Dabei ist $M \in \mathbb{R}^{p\times q}$ isometrisch, wenn $(x, y) = (Mx, My)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^q$. Notwendig und hinreichend dafür ist, dass die Spalten ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^p$ bilden. Warum ?

3. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to D$ ein stetiger und stetig differenzierbarer Weg. Man zeige, dass die Weglänge von $\phi \circ f \circ \gamma$ übereinstimmt mit

$$\int_a^b \frac{2|f'(\gamma(t))|}{1 + |f(\gamma(t))|^2} \cdot |\gamma'(t)| \, dt .$$

4. Für $z \simeq \binom{x}{y}$ ungleich Null aus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ zeige man $\phi(\frac{1}{z}) = \operatorname{diag}(1, -1, -1)\phi(z)$.

   Weiters zeige man, dass für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$, $f \in M(D)$ und die Fortsetzung von f zu der Abbildung $f : D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, indem man $f(w) = \infty$ für $w \in P(f)$ setzt, die Abbildung $\phi \circ f : D \to \mathbb{R}^3$ unendlich oft differenzierbar ist.

   Schließlich zeige man, dass für $w \in P(f)$ die Ableitung $d(\phi \circ f)(w)$ das $2|(\frac{1}{f})'(w)|$-fache einer isometrischen Matrix ist und $\|d(\phi \circ f)(w)\| = 2|(\frac{1}{f})'(w)| = \frac{2\delta_{1\beta_f(w)}}{|a_{-1}|}$ (Kronecker-δ), wobei a_{-1} das Residuum von f bei w, also der (-1)-te Koeffizient in der Laurentreihenentwicklung von f bei w ist.

5. Sei $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $M = (m_{jk})_{j,k=1}^2$ mit $\det M \neq 0$, dh. $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Die Abbildung $f_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$

$$f_M(z) := \begin{cases} \frac{m_{11}}{m_{21}}, & m_{21} \neq 0,\ z = \infty, \\ \infty, & m_{21} = 0,\ z = \infty, \\ \frac{m_{11}z+m_{12}}{m_{21}z+m_{22}}, & z \in \mathbb{C},\ m_{21}z + m_{22} \neq 0, \\ \infty, & z \in \mathbb{C},\ m_{21}z + m_{22} = 0, \end{cases}$$

heißt *Möbiustransformation mit Koeffizienten M*.

Zeigen Sie, dass $f_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ stetig bzgl. der chordalen Metrik ist!

Zeigen Sie weiters, dass $f_{MN} = f_M \circ f_N$ für $M, N \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Bestimmen Sie alle $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mit $f_M = \mathrm{id}_{\mathbb{C}_\infty}$, und zeigen Sie, dass f_M bijektiv ist. Bestimmen Sie die Inverse Funktion zu f_M. Was ist der Kern des Gruppenhomomorphismus $M \mapsto f_M$ von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ in die Menge aller Homöomorphismen auf $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$.

6. Zeigen Sie, dass sich Translationen $f_\beta(z) := z + \beta$ mit $\beta \in \mathbb{C}$, Drehstreckungen $f_\alpha(z) := \alpha z$ mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Inversionen $I(z) := \frac{1}{z}$ jeweils als Möbiustransformation schreiben lassen.

   Zeigen Sie weiters, dass sich jede Möbiustransformation f_M schreiben läßt als Hintereinanderausführung von Translationen $f_\beta(z) := z + \beta$, Drehstreckungen $f_\alpha(z) := \alpha z$ und Inversionen $I(z) := \frac{1}{z}$, wobei zu gegebenen M nicht immer alle drei dieser elementaren Transformationen auftauchen müssen.

   Zeige schließlich, dass das Bild eines allgemeinen Kreises (also ein Kreis in $\mathbb{C}$ oder eine Gerade samt dem Punkt ∞) in $\mathbb{C}_\infty$ unter einer Möbiustransformation auf einen allgemeinen Kreis abgebildet wird!

7. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und bezeichne $L^2(D, \mathcal{A}, \lambda_2|_\mathcal{A}, \mathbb{C})$ den Hilbertraum aller komplexwertigen Funktionen f auf D, die messbar bezüglich der Borelteilmengen $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T}|_D)$ von D sind und für die $|f|^2$ bezüglich λ_2 integrierbar ist, wobei wie üblich zwei Funktion identifiziert werden, wenn sie λ_2-fast überall übereinstimmen.

   Man zeige mit Hilfe der letzten Übungsangabe der dritten Übung, dass die Menge H aller $f \in L^2(D, \mathcal{A}, \lambda_2|_\mathcal{A}, \mathbb{C})$, die bis auf eine Nullmenge mit einer holomorphen Funktion auf D übereinstimmen, einen abgeschlossenen Unterraum von $L^2(D, \mathcal{A}, \lambda_2|_\mathcal{A}, \mathbb{C})$ bilden und dass für $z \in D$ das Funktional $H \ni f \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ beschränkt und linear ist. Hier bezeichnet f den holomorphen Repräsentanten der entsprechenden Restklasse aus $H \subseteq L^2$.

8. Zeige: Ist $p \in \mathbb{N}, p > 1$, D offen und einfach zusammenhängend, und $f : D \to \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$, holomorph und derart, dass die Vielfachheit einer jeden Nullstelle durch p teilbar ist. Zeigen Sie unter der zusätzlichen Annahme, dass $f^{-1}\{0\}$ endlich ist, dass f genau p-viele paarweise verschiedene eine holomorphe p-te Wurzeln hat, es also p-viele $g : D \to \mathbb{C}$ gibt mit $g^p = f$.