Dritte Übung zu Komplexe Analysis (SS 2023)

1. Sei $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Man berechne die Integrale
$$\int_0^\infty e^{-x^2 \cos(2\alpha)} \cdot \cos\Big(x^2 \sin(2\alpha)\Big)\, dx$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2 \cos(2\alpha)} \cdot \sin\Big(x^2 \sin(2\alpha)\Big)\, dx$$
Als Sonderfall für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ berechne man die sogenannten *Fresnelschen Integrale*
$$\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\, dx, \int\limits_0^\infty \sin(x^2)\, dx.$$
Hinweis: Man integriere die Funktion $f(z) := e^{-z^2}$ längs dem Weg γ, der sich aus der Strecke $[0, R]$, dem Kreisbogen von R zu $Re^{i\alpha}$, und aus der Strecke $[Re^{i\alpha}, 0]$ besteht.

2. Man bestimme die Laurantreihe von $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2)} + \exp(z^2)$ für $w = 0$, $r_w = 0$, $R_w = 1$, für $w = 0$, $r_w = 1$, $R_w = 2$ und für $w = 0$, $r_w = 2$, $R_w = +\infty$.

   Hinweis: Partialbruachzerlegung; stellen Sie ähnlich wie im Beweis zur Laurantreihe die rationale Funktion im jeweiligen Bereich als Reihe dar!

3. Zu jeder der unten stehenden Funktionen f gebe man das maximale $D \subseteq \mathbb{C}$ an, worauf f unmittelbar definiert – wo also alle Terme in der beschreibenden Formel in $\mathbb{C}$ existieren und wo etwaige Nenner nicht Null werden – und holomorph ist. Man bestimme weiters alle Nullstellen von f in D und die entsprechende Nullstellenvielfachheit. Schließlich bestimme man alle isolierte Singularitäten $w \in \mathbb{C}$ von $f : D \to \mathbb{C}$, dh. alle $w \in \mathbb{C} \setminus D$, sodass $D \cup \{w\}$ offen ist. Bestimme dabei den Typ der Singularität und die entsprechende Polordnung!

   (a) $f(z) := \frac{(z^2+9)^2}{(z^2-1)(z+i)}$,

   (b) $f(z) := \cot\left(\frac{1}{z}\right)$,

   (c) $f(z) := \frac{e^z}{z^2}$,

4. Sei Y ein komplexer Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : D \to Y$ schwach holomorph, dh. $z \mapsto y' \circ f(z)$ is holomorph auf D für alle $y \in Y'$ (topologische Dualraum). Zeigen Sie, dass dann f auch holomorph ist.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass $\|f(z)\|_Y \leq C_K,\ z \in K$, für jedes kompakte $K \subseteq D$. Dabei könnte es hilfreich sein die $f(z)$ als Elemente von Y'' zu betrachten. Anschließend zeige man, dass f stetig ist, indem man mit der Cauchyschen Integralformel
$$\sup_{\|y'\| \leq 1,\ z \in U_\epsilon(w)} \left| \frac{y' \circ f(z) - y' \circ f(w)}{z - w} \right| < +\infty$$
für jedes fest $w \in D$ mit $K_{2\epsilon}(w) \subseteq D$ zeigt. Schießlich wende man den Satz von Morera an!

5. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei $f : D \backslash \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ holomorph und auf D stetig fortsetzbar. Zeigen Sie, dass diese stetige Fortsetzung sogar auf D holomorph ist.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $w \in D \cap \mathbb{R}$ und $r > 0$ so, dass $K_r^{\|\cdot\|_\infty}(w) \subseteq D$ auch $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ z \in U_r^{\|\cdot\|_\infty}(w) \setminus \mathbb{R}$, wobei γ der mathematisch positiv durchlaufene Polygonzug durch die Ecken des Quadrates $K_r^{\|\cdot\|_\infty}(w)$ ist. Dafür betrachte man die Summe der zwei Wegintegrale mit dem selben Integranden über die Wege γ_ϵ^+ und γ_ϵ^- und lasse $\epsilon > 0$ gegen Null gehen Hier ist γ_ϵ^+ der geschlossene Polygonzug durch $w + r + i\epsilon, w + r + ir, w - r + ir, w - r + i\epsilon$ und γ_ϵ^- der geschlossene Polygonzug durch $w + r - i\epsilon, w - r - i\epsilon, w - r - ir, w + r + ir$.

6. Schwarzsches Spiegelungsprinzip: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und symmetrisch bzgl. $\mathbb{R}$. Weiters sei $f : D \cap \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^+$ ist die obere Halbebene) holomorph und derart, dass f eine stetige Fortsetzung auf $D \setminus \mathbb{C}^-$ hat, wobei diese Fortsetzung bei rellen Zahlen auch reelle Werte annimmt. Zeigen Sie, dass dann f eine holomorphe Fortsetzung (wieder f genannt) auf ganz D gestattet, wobei $f(\bar{z}) = \overline{f(z)},\ z \in D$.

7. Betrachtet man das Verhalten einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ am Rand ihres Konvergenzkreises, so könnte es sein, dass sich die Grenzfunktion holomorph auf eine größere Menge Fortsetzen lässt. Dabei kann alles mögliche passieren.

   Man zeige:

   (a) Die Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^\infty z^n$ ist auf der gesamten Einheitskreislinie divergent. Bestimme die Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ und zeige, dass es ein Gebiet G mit $G \supseteq \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ gibt, sodass f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat.

   (b) Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^2}$ ist auf der gesamten Einheitskreislinie konvergent. Bestimme die Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ und zeige, dass es kein Gebiet G mit $G \supseteq \mathbb{D} \cup \{1\}$ gibt, sodass f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat.

   (c) Die Lückenreihe $f(z) := \sum_{n=0}^\infty z^{n!}$ hat Konvergenzradius 1, also ist $f \in H(\mathbb{D})$. Es gibt kein Gebiet $G \supsetneq \mathbb{D}$, sodass f eine Fortsetzung $g \in H(G)$ hat.
   Hinweis: Zeige, dass $\lim_{r \nearrow 1} f(r\xi) = +\infty$, für alle $\xi \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, wobei E_n wieder die Menge aller n-ten Einheitswurzeln bezeichnet.

8. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K_r(w) \subseteq D$ für $r > 0$, $\rho \in (0, r)$ und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten und der Cauchyschen Integralformel, dass

$$f(z) = \frac{1}{2(r - \rho)\pi} \int_{U_r(0) \setminus K_\rho(0)} \frac{f(w + \zeta)}{\zeta + w - z} \cdot \frac{\zeta}{|\zeta|}\, d\lambda_2(\zeta),\ z \in U_\rho(w)\ ,$$

   wobei wir hier das ζ in $d\lambda_2(\zeta)$ als Element von $\mathbb{R}^2$ und das ζ im Integranden als Element von $\mathbb{C}$ zu verstehen ist.