# Zweite Übung zu Komplexe Analysis (SS 2023)

1. Man zeige die Holomorphie von $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Für $\gamma(t) = \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, berechne man auch die Integrale $\int_\gamma \frac{\exp 2\zeta}{(3\zeta+1-i)^3}\, d\zeta$ und $\int_\gamma \frac{\sin(\pi\zeta^2)}{2\zeta-i}\, d\zeta$.

2. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige, dass aus $\operatorname{Re} f \equiv \operatorname{Re} g$ bzw. $\operatorname{Im} f \equiv \operatorname{Im} g$ auf $D$ folgt, dass sich $f$ und $g$ nur um eine imaginäre (reelle) Konstante unterscheiden.

   Weiters bestimme man alle holomorphen Funktionen $h : D \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

   (a) Längs aller Geraden $\operatorname{Im} z = \text{const}$ ist $\operatorname{Re} h(z)$ konstant.

   (b) Längs aller Kreise $x^2 + y^2 = cx$ ist $\operatorname{Re} h(z)$ konstant.

   Hinweis: Im Fall (b) betrachte $h(\frac{1}{z})$.

3. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in D$ und $r, \rho > 0$ mit $K_r(z) \subseteq K_\rho(w) \subseteq D$. Zeigen Sie, dass $\gamma_r^z$ in $D \setminus K_{r-\epsilon}(z)$ mit $\epsilon \in (0, r)$ zu $\gamma_\rho^w$ in $D \setminus \{z\}$ radial homotop ist.

   Für $\zeta \in \mathbb{C}$ und $s \geq 0$ ist dabei $\gamma_s^\zeta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ der durch $\gamma_s^\zeta(t) = \zeta + s\exp(\mathrm{i}t)$ definierte Weg.

   Hinweis: Verwenden Sie, dass $K_r(z) \subseteq K_\rho(w)$ genau $|z - w| + r \leq \rho$ bedeutet.

4. Sei $f : \mathbb{D} \to \ell_2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ definiert durch $f(z) = (z^n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$, wobei $z^0 = 1$. Zeigen Sie, dass $f$ holomorph ist, und bestimmen Sie $f'(z)$. Ist dann auch $\mathbb{D} \ni z \mapsto (f(z), (a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}})_{\ell_2(\mathbb{N}\cup\{0\})} \in \mathbb{C}$ holomorph, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in \ell_2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ fest ist und $(.,.)_{\ell_2(\mathbb{N}\cup\{0\})}$ das Skalarprodukt in $\ell_2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ bezeichnet? Wenn ja, so bestimme man die Ableitung dieser Funktion an einer Stelle $w$! Zeige Sie schließlich, dass die lineare Hülle von $f(\mathbb{D})$ dicht in $\ell_2(\mathbb{N} \cup \{0\})$ enthalten ist, indem Sie $f(\mathbb{D})^\perp$ betrachten!

5. Sei $H$ ein Hilbertraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to H$ holomorph und $M \subseteq D$ mit Häufungspunkt in $D$. Zeigen Sie, dass die lineare Hülle von $f(M)$ dicht im Abschluss der linearen Hülle von $f(D)$ enthalten ist.

6. Sei $D$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $Y$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Man zeige, dass es zu jedem harmonischen $h : D \to Y$ eine holomorphes $f : D \to Y$ und ein anti-holomorphes $g : D \to Y$ ($\frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0$) derart gibt, dass $h = f + g$. Man zeige auch, dass $f$ und $g$ bis auf additive Konstante eindeutig sind.

   Hinweis: Für die Existenz von $f$ betrachte man eine holomorphe Stammfunktion von $\frac{\partial h}{\partial z}$ (also ein holomorphes $f$ mit $f' = \frac{\partial h}{\partial z}$) und setze $g = h - f$.

7. Zeigen Sie, dass für ein holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ die Funktionen $f$, $\{\bar{z} : z \in D\} = \bar{D} \ni z \mapsto f(\bar{z})$, $D \ni z \mapsto \overline{f(z)}$, $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch sind.

   Zeigen Sie umgekehrt, dass es für einfach zusammenhängendes $D$ und für ein harmonisches $h : D \to \mathbb{R}$ ein bis auf eine imaginäre Konstante eindeutiges, holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $\operatorname{Re} f \equiv h$.

   Hinweis: Mit $f$ und $g$ wie im vorherigen Beispiel betrachte man den Imaginärteil von $f + g$.

8. Mithilfe von Beispiel 1.10.3 angewendet auf $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $f(z) = z$ sei $G : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, welche $\exp \circ G = f$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $G$ eindeutig bestimmt ist, wenn man auch $G(1) = 0$ verlangt; wir schreiben dann log statt $G$. Schließlich weise man unter Zuhilfenahme des Wissens über die Exponentialfunktion aus der Analysis nach, dass log die Menge $D$ bijektiv auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (-\pi, +\pi)\}$ abbildet.

9. Man zeige, dass für jedes holomorphe $f : D \to \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$, welches auf $D$ keine Nullstellen hat, die Funktion $z \mapsto \ln(|f(z)|)$ harmonisch ist.

   Weiters bestimme man für ein Gebiet $D$ alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ ($f$ Nullstellenfrei), für die $|f(z)|$ konstant auf jeder Gerade $\operatorname{Im} z = const$ ist.

   Hinweis: Eine Möglichkeit ist, zunächst für $w \in D$ Beispiel 1.10.3 auf $f|_{D(w)}$ mit einem einfach zusammenhängenden Gebiet $w \in D(w) \subseteq D$ anzuwenden und $\operatorname{Re} G$ für die erhaltene Funktion $G$ zu betrachten.

10. Bestimmen Sie nacheinander die Potenzreihenentwicklung von $f(z) = \frac{1}{1-z}$ und $g(z) = \log(\frac{1}{1-z})$ (der Zweig von log mit $\log(1) = 0$) um Null. Weiters gebe man die Potenzreihenentwicklung von $z \mapsto \int_{\overrightarrow{0z}} \frac{g(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta,\ z \in \mathbb{D}$ an.