Erste Übung zu Komplexe Analysis (SS 2023)

1. Zeigen Sie, dass für ein holomorphes und injektives $f : D \to \mathbb{C}$ mit offener Mengen $D \subseteq \mathbb{C}$ so, dass $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, die Bildmenge $G := f(D)$ offen ist und auch die Umkehrfunktion holomorph ist, wobei $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ für alle $w \in G$.

   Hinweis: Umkehrsatz aus der Analysis.

2. Sei $f : D \to Y$ aus $C^1(D)$, wobei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind, wobei (c) nur im Fall $Y = \mathbb{C}$ Sinn macht:

   (a) f ist holomorph.

   (b) f erfüllt $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, wobei $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

   (c) für alle $z \in D$ ist entweder $df(z)$ die Nullmatrix oder es gibt ein $\eta > 0$ derart, dass $\eta\, df(z) \in SO(2)$. Dabei ist $SO(2)$ die Menge aller reellen, orthogonalen 2×2-Matrizen mit positiver Determinante.

   Bestimmen Sie im Falle von Holomorphie dieses $\eta > 0$, und zeigen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial z}(z) = f'(z),\ z \in D$, wobei $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$.

   Anmerkung: $\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$ heißen Wirtinger Ableitungen.

3. Zeigen Sie, dass für ein $f : D \to Y$ aus $C^1(D)$ ($D \subseteq \mathbb{C}$ offen) die Abbildung $g : \{\bar{z} : z \in D\} = \bar{D} \ni z \mapsto f(\bar{z}) \in Y$ genau dann holomorph, wenn $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$. Man spricht dann von einer anti-holomorphen Funktion f. Zeigen Sie, dass in dem Fall $g'(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z})$.

   Wie lässt sich im Fall $Y = \mathbb{C}$ die Holomorphie von g mit Hilfe von $df(z)$ analog zum letzten Beispiel charakterisieren?

4. Zeigen Sie für stetig differenzierbares $f : D \to \mathbb{C}$, dass $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$. Ist noch $g : G \to Y$ aus C^1 mit $f(D) \subseteq G$, so zeige man auch folgende Kettenregeln für den Wirtinger Kalkül:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0)) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(f(z_0)) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0)$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0)) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(f(z_0)) \cdot \frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}}(z_0).$$

   Was besagen diese Regeln für $f(z) = \bar{z}$? Zeigen Sie damit auch, dass die der Kettenregel für holomorphe Funktionen sogar richtig ist, wenn nur eine der beiden Funktionen holomorph ist.

5. Zeigen Sie, dass $4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \Delta f$, wenn $f \in C^2(D)$, wobei Δ den Laplace Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ bezeichnet.

   Zeigen Sie weiters, dass für ein harmonisches $f : D \to Y$, dh. $f \in C^2(D)$ mit $\Delta f \equiv 0$, auch die Funktion $\frac{\partial f}{\partial z}$ holomorph und die Funktion $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ anti-holomorph ist.

6. Zeigen Sie, dass die dritten Charakterisierung der Holomorphie in der zweiten Aufgabe für ein holomorphes $f : D \to \mathbb{C}$ bedeutet, dass $df(z)$ immer eine Drehstreckung ist. Insbesondere rechne man nach, dass für stetig differenzierbare $\gamma_1, \gamma_2 : (a,b) \to D$ mit $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$ für ein $c \in (a,b)$ der Winkel zwischen den Tangenten $\gamma_1'(c)$ und $\gamma_2'(c)$ mit dem Winkel zwischen den Tangenten $(f \circ \gamma_1)'(c)$ und $(f \circ \gamma_2)'(c)$ übereinstimmt, und dass $\frac{\|(f\circ\gamma_1)'(c)\|_2}{\|\gamma_1'(c)\|_2} = \frac{\|(f\circ\gamma_2)'(c)\|_2}{\|\gamma_2'(c)\|_2}$.

   Schließlich zeige man, dass die Weglänge von $f \circ \gamma_1$ gleich $\int_a^b |f'(\gamma(t))| \cdot |\gamma_1'(t)|\, dt$ ist.

7. Sei $f(z) := |z|^2$, und sei γ der Weg der aus den Seiten des Quadrates mit den Eckpunkten $0, 1, 1+i, i$ besteht, die der Reihe nach im mathematisch positiven Sinne (also gegen den Uhrzeiger) durchlaufen werden. Berechne, durch tatsächliches Ausrechnen, das Integral $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$.

8. Sei $f(z) := \frac{1}{z-z_0}$, $a > 0$, und sei γ der Weg der aus den Seiten des Quadrates mit den Eckpunkten $z_0 \pm a \pm ia$ besteht, die der Reihe nach im positiven Sinne durchlaufen werden. Berechne das Integral $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$.

9. Zeigen Sie, dass stetige Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkt genau dann homotop sind, wenn es eine stetige Abbildung $\Lambda : \overline{\mathbb{D}} \to D$ mit $\gamma_0(t) = \Lambda(\exp(i\pi t))$ und $\gamma_1(t) = \Lambda(\exp(-i\pi t))$ gibt.

   Zeigen Sie auch, dass ein stetiger und geschlossener Weg $\gamma : [-1,1] \to D$ genau dann in D null-homotop ist, wenn es eine stetige Abbildung $\Lambda : \overline{\mathbb{D}} \to D$ mit $\gamma_0(t) = \Lambda(\exp(i\pi t))$ gibt.