Kapitel 19

Absolut stetige Funktionen*

19.1 Verteilungsfunktionen

Wir schließen hier thematisch an Beispiel 14.10.12 an.

19.1.1 Definition. Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Verteilungsfunktion eines Borelmaßes* $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$, wenn $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt.

19.1.2 Satz. *Ist $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß, so gibt es immer eine dazugehörige Verteilungsfunktion F. Diese ist bis auf eine additive Konstante eindeutig, monoton wachsend und rechtsstetig.*
Ist umgekehrt $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsstetig, so ist das in Beispiel 14.10.12 mit F konstruierte Borelmaß ω_F das eindeutige Borelmaß $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ mit der Eigenschaft, dass F die Verteilungsfunktion von μ ist.

Beweis. Ein Borelmaß μ hat endliche Werte auf kompakten und infolge auch auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ aus $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$. Somit ist durch

$$F(t) := \begin{cases} \mu(0, t] & \text{für } t \geq 0\,, \\ -\mu(t, 0] & \text{für } t < 0\,, \end{cases} \tag{19.1}$$

eine bei 0 verschwindende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert. Wie man leicht überprüft, ist diese Funktion monoton wachsend und erfüllt $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$. Die Rechtsstetigkeit folgt aus $F(x_n) - F(x) = \mu(x, x_n] \to \mu(\emptyset) = 0,\ n \to \infty$, für jede monoton fallende und gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}$; siehe Fakta 14.3.9, 5. Jede andere Verteilungsfunktion G von μ erfüllt wegen $G(t) - G(0) = \mu(0, t] = F(t)$ für $t \geq 0$ und wegen $-F(t) = \mu(t, 0] = G(0) - G(t)$, dass $G(t) = F(t) + G(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Für eine monoton wachsende und rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach (14.38) die Funktion F eine Verteilungsfunktion des Borelmaßes ω_F. Ist F die Verteilungsfunktion eines weiteren Borelmaßes μ, so folgt $\mu(a, b] = F(b) - F(a) = \omega_F(a, b]$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Nun kann jede offene Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}$ als Vereinigung von abzählbar vielen Intervallen der Form $(a, b]$ geschrieben werden. Infolge wird $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ auch von dem durchschnittsstabilen Mengensystem $\{(a, b] : -\infty < a < b < +\infty\}$ erzeugt, weshalb $\mu = \omega_F$ aus Satz 14.9.5 folgt. ❑

Folgende Aussage erinnert stark an die Regel der partiellen Integration.

19.1.3 Proposition. *Seien F und G die Verteilungsfunktionen der Borelmaße $\mu, \nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0,+\infty]$ auf $\mathbb{R}$ wie in Definition 19.1.1. Dann sind F, G und $t \mapsto F(t-)$ sowie $t \mapsto G(t-)$ Borel-messbar und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt*

$$\int_{(a,b]} G(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{(a,b]} F(t-)\, \mathrm{d}\nu(t)\,, \tag{19.2}$$

wobei $F(t-) = \lim_{\tau \to t-} F(\tau)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die vier genannten Funktionen sind messbar, da sie monoton wachsend sind; siehe Beispiel 14.4.8 und Fakta 14.7.4, 3 und 4. Für die zu beweisende Gleichung können wir $F(0) = 0 = G(0)$ und damit (19.1) annehmen, da die Gleichung genau dann für F, G gilt, wenn sie für $F + \alpha, G + \beta$ mit beliebigen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt.
Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x,y) = \mathbb{1}_{\{(\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 < \xi \le \eta\}}(x,y), \quad f_2(x,y) = \mathbb{1}_{\{(\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \eta < \xi \le 0\}}(x,y)\,,$$

sind $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$-$\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$-messbar. Nach Korollar 14.14.3 ist $y \mapsto \int f_j(\xi, y)\, \mathrm{d}\nu(\xi)$ für $j = 1, 2$ messbar mit Werten in $[0, +\infty)$. Setzen wir $f = f_1 - f_2$, so ist wegen Satz 14.14.4 die messbare Abbildung $y \mapsto \int f(\xi, y)\, \mathrm{d}\nu(\xi)$ auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert und hat Werte in $\mathbb{R}$. Wegen (19.1) gilt

$$G(y) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi, y)\, \mathrm{d}\nu(\xi)\,,$$

und daher

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b]} G\, \mathrm{d}\mu &= \int_{(a,b]} \int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, \mathrm{d}\nu(s)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{(a,b]} f(s,t)\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\nu(s) \\
&= \int_{(0,+\infty)} \mu((a,b] \cap [s,+\infty))\, \mathrm{d}\nu(s) - \int_{(-\infty,0]} \mu((a,b] \cap (-\infty,s))\, \mathrm{d}\nu(s) \\
&= \int_{(0,b]} \mu((a,b] \cap [s,+\infty))\, \mathrm{d}\nu(s) - \int_{(a,0]} \mu((a,b] \cap (-\infty,s))\, \mathrm{d}\nu(s)\,.
\end{aligned}$$

Für $a \ge 0$ stimmt dieses Integral überein mit

$$\nu(0,a]\,\mu(a,b] + \int_{(a,b]} \mu[s,b]\, \mathrm{d}\nu(s) = \nu(0,a]\,\mu(a,b] + \int_{(a,b]} (F(b) - F(s-))\, \mathrm{d}\nu(s) =$$

$$G(a)(F(b) - F(a)) + F(b)(G(b) - G(a)) - \int_{(a,b]} F(s-)\, \mathrm{d}\nu(s)$$

und für $b < 0$ mit

$$-\nu(b,0]\,\mu(a,b] - \int_{(a,b]} \mu(a,s)\, \mathrm{d}\nu(s) = -\nu(b,0]\,\mu(a,b] - \int_{(a,b]} (F(s-) - F(a))\, \mathrm{d}\nu(s) =$$

$$G(b)(F(b) - F(a)) + F(a)(G(b) - G(a)) - \int_{(a,b]} F(s-)\, \mathrm{d}\nu(s)\,.$$

Schließlich gilt für $a < 0 \le b$

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b]} G\, \mathrm{d}\mu &= \int_{(0,b]} \mu[s,b]\, \mathrm{d}\nu(s) - \int_{(a,0]} \mu(a,s)\, \mathrm{d}\nu(s) \\
&= \int_{(0,b]} (F(b) - F(s-))\, \mathrm{d}\nu(s) - \int_{(a,0]} (F(s-) - F(a))\, \mathrm{d}\nu(s)\,.
\end{aligned}$$

In jedem Fall erhalten wir (19.2). ❑

19.2 Existenz der Ableitung fast überall

19.2.1 Definition. Für eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$D^{\pm}F(x) := \limsup_{h \to 0+} \pm \frac{F(x \pm h) - F(x)}{h} \quad \text{und} \quad D_{\pm}F(x) := \liminf_{h \to 0+} \pm \frac{F(x \pm h) - F(x)}{h}$$

als Elemente von $[-\infty, +\infty]$.

19.2.2 Fakta. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Für x gilt offenbar

$$\begin{aligned} -D^{\pm}F(x) &= -\limsup_{h \to 0+} \pm \frac{F(x \pm h) - F(x)}{h} \\ &= \liminf_{h \to 0+} \pm \frac{(-F)(x \pm h) - (-F)(x)}{h} = D_{\pm}(-F)(x) \end{aligned}$$

sowie $D_{-}F(x) \leq D^{-}F(x)$ und $D_{+}F(x) \leq D^{+}F(x)$. Außerdem existiert $F'(x)$ genau dann als Element von $\mathbb{R}$, wenn $D_{-}F(x) = D^{-}F(x) = D_{+}F(x) = D^{+}F(x) \in \mathbb{R}$. Im Falle der Existenz von $F'(x) \in \mathbb{R}$ gilt wegen

$$\begin{aligned} F'(x) - &\frac{F(x+t) - F(x-s)}{t+s} \\ &= \frac{1}{t+s}\Big(t \cdot F'(x) - \big(F(x+t) - F(x)\big)\Big) + \frac{1}{t+s}\Big(s \cdot F'(x) - \big(F(x) - F(x-s)\big)\Big) \end{aligned}$$

für $(s,t)^T \in [0,+\infty)^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ auch

$$F'(x) = \lim_{(s,t)^T \to (0,0)^T} \frac{F(x+t) - F(x-s)}{t+s}, \tag{19.3}$$

wobei hier $(s,t)^T$ in $[0,+\infty)^2 \setminus \{(0,0)^T\}$ läuft. Existiert umgekehrt die rechte Seite von (19.3) als Element von $\mathbb{R}$, so folgt mit $s = 0$, $t = h \to 0$ ebenfalls (19.3).

2. Für stetiges F erhalten wir aus

$$D^{\pm}F(x) = \lim_{h \to 0+} \sup_{t \in (0,h)} \pm \frac{F(x \pm h) - F(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} \sup_{t \in (0,\frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}} \pm \frac{F(x \pm h) - F(x)}{h}$$

und aus $-D^{\pm}(-F) = D_{\pm}F$ die $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$-$\mathcal{E}$-Messbarkeit von $D^{\pm}F$ und $D_{\pm}F$. Nach dem vorherigen Punkt gilt daher $\{x \in \mathbb{R} : F'(x) \text{ existiert als Element von } \mathbb{R}\} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$.

3. Für monoton wachsendes $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h > 0$ ist

$$\pm \frac{(F+G)(x \pm h) - (F+G)(x)}{h} = \pm \frac{F(x \pm h) - F(x)}{h} \pm \frac{G(x \pm h) - G(x)}{h} \tag{19.4}$$

größer oder gleich $\pm\frac{F(x \pm h) - F(x)}{h}$. Wir schließen auf $D_{\pm}(F+G)(x) \geq D_{\pm}F(x)$ sowie $D^{\pm}(F+G)(x) \geq D^{\pm}F(x)$. Ist G monoton fallend, so erhalten wir in analoger Weise $D_{\pm}(F+G)(x) \leq D_{\pm}F(x)$ und $D^{\pm}(F+G)(x) \leq D^{\pm}F(x)$.

Für $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit existierendem $G'(x)$ folgt wegen (19.4)

$$D_{\pm}(F+G)(x) = D_{\pm}F(x) + G'(x) \quad \text{und} \quad D^{\pm}(F+G)(x) = D^{\pm}F(x) + G'(x).$$

4. Seien $c, d, t \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ und sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Aus $D_+F(x) \le t$ für alle $x \in (c, d)$ oder $D_-F(x) \le t$ für alle $x \in (c, d)$ folgt $F(d) - F(c) \le t \cdot (d - c)$.

   In der Tat zieht $F(d) - F(c) > t \cdot (d - c)$ die Ungleichung $F(d) - F(c) > s \cdot (d - c)$ bzw. $F(d) - sd > F(c) - sc$ mit hinreichend kleinem $s > t$ nach sich. Wegen der Stetigkeit von $G(\xi) := F(\xi) - s\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, gilt

$$(G(c), G(d)) = [G(c), G(d)] \setminus \{G(c), G(d)\} \subseteq G([c, d]) \setminus \{G(c), G(d)\} \subseteq G((c, d)) .$$

   Für $y \in (G(c), G(d))$ und $x := \sup\{\xi \in (c, d) : G(\xi) = y\}$ erhalten wir $G(x) = y$ und infolge $x \in (c, d)$. Weil $G((x, d])$ ein y nicht enthaltendes Intervall mit $G(d) \in G((x, d])$ ist, gilt $F(x + h) - s(x + h) = G(x + h) > y = G(x) = F(x) - sx$ und folglich $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} > s$ für alle $h \in (0, d - x)$, woraus wir $D_+F(x) \ge s > t$ erhalten. Entsprechend gilt $D_-F(\inf\{\xi \in (c, d) : G(\xi) = y\}) \ge s > t$.

Das folgende Resultat wurde aus [Z] übernommen.

19.2.3 Lemma. *Gibt es zu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein $C > 0$ derart, dass $|F(x) - F(y)| \le C \cdot |x - y|$ für alle x, y, so existiert $F'(x)$ als Element von $\mathbb{R}$ für λ-fast alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Laut Voraussetzung gilt $|D_\pm F(x)|, |D^\pm F(x)| \le C$ für alle $x \in \mathbb{R}$, womit es nach Fakta 19.2.2, 1, reicht,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : D_-F(x) = D^-F(x) = D_+F(x) = D^+F(x)\}) \\ &= \lambda(\{x \in \mathbb{R} : D_-F(x) < D^+F(x)\} \cup \{x \in \mathbb{R} : D^-F(x) > D_+F(x)\}) \end{aligned}$$

zu zeigen. Wegen

$$\{x \in \mathbb{R} : D_-F(x) < D^+F(x)\} = \bigcup_{p,q,\alpha,\beta \in \mathbb{Q}} \{x \in (\alpha, \beta) : D_-F(x) < p < q < D^+F(x)\}$$

würde aus $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : D_-F(x) < D^+F(x)\}) > 0$ auch $\lambda(M) > 0$ für die Menge $M = \{x \in (\alpha, \beta) : D_-F(x) < p < q < D^+F(x)\}$ mit gewissen $p, q, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ folgen, wobei $|p|, |q| \le \max(|D^+F(x)|, |D_-F(x)|) \le C$ für $x \in M \ne \emptyset$. Wegen $p < q$ gibt es dann ein $\epsilon > 0$ derart, dass

$$p + 4C\epsilon < q . \tag{19.5}$$

Nach Definition 14.11.1 ist λ Riesz-regulär, wodurch $\lambda(M) > (1 - \epsilon) \cdot \lambda(G)$ für ein offenes $G \subseteq \mathbb{R}$ mit $M \subseteq G \subseteq (\alpha, \beta)$. Da sich G wegen Proposition 11.3.6, Satz 6.2.3 und der in Beispiel 12.5.4 gezeigten Gültigkeit des zweiten Abzählbarkeitsaxioms auf $\mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter offener Intervalle schreiben lässt, gilt für ein $(c, d) \ne \emptyset$ mit $(c, d) \subseteq G \subseteq (\alpha, \beta)$

$$\lambda(M \cap (c, d)) > (1 - \epsilon) \cdot \lambda((c, d)) = (1 - \epsilon) \cdot (d - c) .$$

Wegen Satz 14.12.5, (v), ist λ regulär, weshalb $\lambda(K) > (1-\epsilon)\cdot(d-c)$ für ein kompaktes $K \subseteq M \cap (c, d)$. Wir bezeichnen mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die zu $\mathbb{1}_{(c,d)\setminus K} \cdot \lambda$ gemäß Satz 19.1.2 existierende Verteilungsfunktion, welche monoton wachsend ist. Wegen Fakta 19.2.2, 3, erhalten wir

$$D_-(F - 2C \cdot g)(x) \le D_-F(x) < p < q < D^+F(x) \le D^+(F + 2C \cdot g)(x) \quad \text{für} \quad x \in K ,$$

und wegen

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\mathbb{1}_{(c,d)\setminus K} \cdot \lambda)((\min(x, x+h), \max(x, x+h)])}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\lambda((\min(x, x+h), \max(x, x+h)] \cap (c,d) \setminus K)}{h} = 1 \end{aligned}$$

für x in dem offenem $(c, d) \setminus K$ die Ungleichungen

$$D_-(F - 2C \cdot g)(x) = D_-F(x) - 2C \le -C \le p, \quad D^+(F + 2C \cdot g)(x) = D^+F(x) + 2C \ge C \ge q\,.$$

Zudem gilt $g(d) - g(c) = \lambda((c, d) \setminus K) = (d - c) - \lambda(K) < (d - c) - (1 - \epsilon) \cdot (d - c) = \epsilon \cdot (d - c)$. Wegen $D_-(F - 2C \cdot g) \le p$ und $D_+(-F - 2C \cdot g) = -D^+(F + 2C \cdot g) \le -q$ auf (c, d) folgt aus Fakta 19.2.2, 4,

$$\begin{aligned} q \cdot (d - c) &\le (F + 2C \cdot g)(d) - (F + 2C \cdot g)(c) = F(d) - F(c) + 2C \cdot (g(d) - g(c)) \\ &\le F(d) - F(c) + 2C\epsilon \cdot (d - c) = F(d) - F(c) - 2C\epsilon \cdot (d - c) + 4C\epsilon \cdot (d - c) \\ &\le (F - 2C \cdot g)(d) - (F - 2C \cdot g)(c) + 4C\epsilon \cdot (d - c) \le (p + 4C\epsilon) \cdot (d - c)\,, \end{aligned}$$

woraus $p + 4C\epsilon \ge q$ im Widerspruch zu (19.5) folgt. Entsprechend führt man die Ungleichung $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : D^-F(x) > D_+F(x)\}) > 0$ auf einen Widerspruch. Also existiert $F'(x)$ als Element von $\mathbb{R}$ für λ-fast alle $x \in \mathbb{R}$. ❑

19.2.4 Korollar. *Für* $g \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \lambda, \mathbb{C})$ *und* $G(x) := \int_{(0,x]} g \,\mathrm{d}\lambda,\ x \in [0, +\infty)$, *sowie* $G(x) := -\int_{(x,0]} g \,\mathrm{d}\lambda,\ x \in (-\infty, 0)$, *gilt*

$$G'(x) = g(x) \quad \textit{für } \lambda\textit{-fast alle} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis. Durch die Zerlegung $g = (\operatorname{Re} g)^+ - (\operatorname{Re} g)^- + \mathrm{i}((\operatorname{Im} g)^+ - (\operatorname{Im} g)^-)$ in Real- und Imaginärteil können wir $g \ge 0$ annehmen. Dann gilt $|G(y) - G(x)| = |\int_{(x,y]} g \,\mathrm{d}\lambda| \le \|g\|_\infty \cdot |y - x|$ für reelle $x \le y$. Nach Lemma 19.2.3 ist G λ-fast überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für eine Nullfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(0, +\infty)$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt zudem

$$\left|\frac{G(t + t_n) - G(t)}{t_n}\right| = \frac{1}{t_n}\left|\int_{(t,t+t_n]} g \,\mathrm{d}\lambda\right| \le \|g\|_\infty\,.$$

Aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5, folgt für $x < y$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(x,y]} \frac{G(t + t_n) - G(t)}{t_n} \,\mathrm{d}\lambda(t) = \int_{(x,y]} D^+G(t) \,\mathrm{d}\lambda(t)\,.$$

Andererseits erhalten wir aus der Stetigkeit von G

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{(x,y]} \frac{G(t + t_n) - G(t)}{t_n} \,\mathrm{d}\lambda(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_{(x+t_n,y+t_n]} G(t) \,\mathrm{d}\lambda(t) - \frac{1}{t_n} \int_{(x,y]} G(t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_{(y,y+t_n]} G(t) \,\mathrm{d}\lambda(t) - \frac{1}{t_n} \int_{(x,x+t_n]} G(t) \,\mathrm{d}\lambda(t) &= G(y) - G(x) = (g \cdot \lambda)(x, y]\,. \end{aligned}$$

Nach Satz 14.9.5 folgt $g \cdot \lambda = D^+G \cdot \lambda$ und dann aus Satz 18.1.5 $g = D^+G = G'$ λ-fast überall. ❑

19.3 Transformation via Verteilungsfunktion

19.3.1 Fakta. Sei $I \subseteq [-\infty, +\infty]$ ein Intervall und $F : I \to [-\infty, +\infty]$ monoton wachsend und rechtsstetig. Weiters sei $J \subseteq [-\infty, +\infty]$ das kleinste $F(I)$ umfassende Intervall. Schließlich setzen wir voraus, dass I seine linke Intervallgrenze enthält, wenn die linke Intervallgrenze von J in J liegt.

1. Für $y \in J$ ist $\{x \in I : y \leq F(x)\}$ nichtleer, womit durch
$$F^-(y) := \inf\{x \in I : y \leq F(x)\}$$
eine Abbildung $F^- : J \to [-\infty, +\infty]$ wohldefiniert ist.

   Ist y im Inneren von J, so folgt $F(s) < y$ für ein $s \in I$, wodurch $s \leq F^-(y)$ und infolge $F^-(y) \in I$. Im Falle $y = \min J$ gilt $y \in F(I)$, also $y = F(t)$ für $t \in I$. Monotoniebedingt gilt auch $F(s) = y$ für alle $s \in (-\infty, t] \cap I$. Für s können wir die voraussetzungsgemäß existierende linke Intervallgrenze von I nehmen und sehen, dass $F^-(y)$ mit dieser übereinstimmt, womit wieder $F^-(y) \in I$.

   Also gilt $F^- : J \to I$, wobei F^- offenbar monoton wachsend ist. Die Rechtsstetigkeit von F impliziert $y \leq F(F^-(y))$, wodurch
$$F^-(y) = \min\{x \in I : y \leq F(x)\} . \tag{19.6}$$
   Wegen der Monotonie ist $F^{-1}((y, +\infty])$ für $y \in J$ ein in I enthaltenes Intervall, woraus die $\mathcal{E}_I$-$\mathcal{E}$ Messbarkeit von F folgt. Entsprechend ist F^- $\mathcal{E}_J$-$\mathcal{E}$ messbar.

2. Für $x \in I, y \in J$ mit $y \leq F(x)$ gilt $y \leq F(F^-(y)) \leq F(x)$ wegen (19.6), weshalb
$$F^-(y) = \min\{x \in I : y \leq F(x)\} = \min\{x \in I : F(F^-(y)) \leq F(x)\} = F^-\big(F(F^-(y))\big) .$$
   Weiters gilt $F(F^-(F(s))) = F(\min\{x \in I : F(s) = F(x)\}) = F(s)$ für $s \in I$. Also ist $F^-|_{F(I)} : F(I) \to F^-(J)$ eine streng monoton wachsende Bijektion mit $F|_{F^-(J)}$ als Inverser.

3. Nach (19.6) und 2 gilt $y \leq F(F^-(y)) \in (F^-)^{-1}\{F^-(y)\}$ für $y \in J$, womit $F(F^-(y)) = \max (F^-)^{-1}\{F^-(y)\} = \max (F^-)^{-1}\{F^-(z)\}$ für $z = F(F^-(y)) \in F(I)$. Infolge ist $(F^-)^{-1}\{F^-(y)\} = (F^-)^{-1}\{F^-(z)\}$ ein nach oben abgeschlossenes Intervall, wobei $\{z\} = (F^-)^{-1}\{F^-(y)\} \cap F(I)$ weil $F^-|_{F(I)}$ injektiv ist. Insbesondere gilt $(F^-)^{-1}\{F^-(z_1)\} \cap (F^-)^{-1}\{F^-(z_2)\} = \emptyset$ für ungleiche $z_1, z_2 \in F(I)$ sowie
$$J = \bigcup_{z \in F(I)} (F^-)^{-1}\{F^-(z)\} . \tag{19.7}$$
   Setzen wir $M := \{z \in F(I) : \{z\} \subsetneq (F^-)^{-1}\{F^-(z)\}\}$, so hat $(F^-)^{-1}\{F^-(z)\}$ für $z \in M$ nichtleeres Inneres, wodurch wir $q_z \in (F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \cap \mathbb{Q}$ wählen können. Wegen der Injektivität von $M \ni z \mapsto q_z$ ist M abzählbar. Als Folge erhalten wir
$$J \setminus F(I) = \bigcup_{z \in F(I)} ((F^-)^{-1}\{F^-(z)\}) \setminus \{z\} = \bigcup_{z \in M} ((F^-)^{-1}\{F^-(z)\}) \setminus \{z\} . \tag{19.8}$$
   womit $J \setminus F(I) \in \mathcal{E}$ und infolge $F(I) \in \mathcal{E}$.

4. Nach 2 gilt $F^-(J) \ni F^-(F(s)) \leq s$ für $s \in I$, womit $F^-(F(s)) = \min F^{-1}\{F(s)\} = \min F^{-1}\{F(t)\}$ für $t = F^-(F(s)) \in F^-(J)$. Infolge ist $F^{-1}\{F(s)\} = F^{-1}\{F(t)\}$ ein nach unten abgeschlossenes Intervall, wobei $\{t\} = F^{-1}\{F(s)\} \cap F^-(J)$ weil $F|_{F^-(J)}$ injektiv ist. Insbesondere gilt $F^{-1}\{F(t_1)\} \cap F^{-1}\{F(t_2)\} = \emptyset$ für $t_1, t_2 \in F^-(J)$ und
$$I = \bigcup_{t \in F^-(J)} F^{-1}\{F(t)\}\,.$$
Setzen wir $L := \{t \in F^-(J) : \{t\} \subsetneq F^{-1}\{F(t)\}\}$, so hat $F^{-1}\{F(t)\}\}$ für $t \in L$ nichtleeres Inneres, wodurch wir $r_t \in F^{-1}\{F(t)\} \cap \mathbb{Q}$ wählen können. Wegen der Injektivität von $L \ni t \mapsto r_t$ ist L abzählbar. Als Folge erkennen wir
$$I \setminus F^-(J) = \bigcup_{t \in F^-(J)} F^{-1}\{F(t)\} \setminus \{t\} = \bigcup_{t \in L} F^{-1}\{F(t)\} \setminus \{t\}\,, \tag{19.9}$$
womit $I \setminus F^-(J) \in \mathcal{E}$ und infolge $F^-(J) \in \mathcal{E}$.

5. Für $t \in F^-(J)$ und $I \ni s < t$ folgt $F(s) < F(t)$, da F monoton ist und da $t = \min F^{-1}\{F(t)\}$. Weil in dem Intervall $(F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\}$ nur ein Punkt aus $F(I)$, nämlich $F(t)$, liegt, erhalten wir sogar $F(s) < y$ für alle $y \in (F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\} = (F^-)^{-1}\{t\}$, also $\sup F([-\infty, t) \cap I) \leq \inf (F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\} \leq \max (F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\} = F(t)$, wenn $[-\infty, t) \cap I \neq \emptyset$.

   Für $w \in (\sup F([-\infty, t) \cap I), \inf (F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\})$ wäre $w \in (F^-)^{-1}\{F^-(z)\}$ gemäß (19.7) mit einem $z = F(x) \in F(I) = F(F^-(J))$ mit $x \in F^-(J)$. Dabei gilt offenbar $x \geq t$. Andererseits folgt aus $w < \inf (F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\}$ die Ungleichung $x = F^-(F(x)) = F^-(z) = F^-(w) < F^-(F(t)) = t$. Im Falle $[-\infty, t) \cap I \neq \emptyset$ muss also
$$F(t-) = \lim_{s \to t-} F(s) = \sup F([-\infty, t) \cap I) = \inf (F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\}\,.$$

6. Gemäß 3 gilt für die Funktion $F \circ F^- : J \to F(I)$, dass $F \circ F^-(z) = z$ für $z \in F(I)$ und $F \circ F^-(y) = z$ für $y \in (F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \setminus \{z\}$ und $z \in M$. Sei C die initiale σ-Algebra auf J bezüglich der Abbildung $F \circ F^- : J \to F(I)$, wobei $F(I)$ mit $\mathcal{E}_{F(I)}$ ($\subseteq \mathcal{E}$) versehen ist.

   Wegen der Monotonie von $F \circ F^-$ ist $F \circ F^- : J \to F(I)$ $\mathcal{E}_J$-$\mathcal{E}_{F(I)}$ messbar, womit $C \subseteq \mathcal{E}_J$.

   Aus Bemerkung 14.13.3 folgern wir für $A \in \mathcal{E}_J$, dass $A \in C$ genau dann, wenn für $z \in M$ aus $z \in A$ immer $(F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \subseteq A$ und aus $z \notin A$ immer $(F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \cap A = \emptyset$ folgt. Insbesondere gilt für $A \in C$ und $y \in J$, dass $F \circ F^-(y) \in A$ zu $y \in A$ äquivalent ist, womit
$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{F^{-1}(A)} \circ F^-\,. \tag{19.10}$$

7. Nach Lemma 14.13.4 und Lemma 14.13.2 ist $\{(F \circ F^-)^{-1}(-\infty, d] : d \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von C. Man überprüft leicht, dass $(F \circ F^-)^{-1}(-\infty, y] = (-\infty, y]$ für $y \in F(I)$, $(F \circ F^-)^{-1}(-\infty, y] = (-\infty, z] \setminus (F^-)^{-1}\{F^-(z)\}$ für $y \in J \setminus F(I)$ und $z = F(F^-(y))$, und $(F \circ F^-)^{-1}(-\infty, y] \in \{J, \emptyset\}$ für alle anderen $y \in \mathbb{R}$. Daraus zusammen mit 5 leitet man unschwer her, dass auch $\{(a, b] \cap J : a, b \in F(I),\ a < b\}$ einen Erzeuger von C abgibt.

8. Man überprüft elementar, dass für einen Messraum $(\Sigma, \mathcal{B})$ eine Funktion $f : J \to \Sigma$ genau dann C-$\mathcal{B}$-messbar ist, wenn sie $\mathcal{E}_J$-$\mathcal{B}$-messbar ist und $f(y) = f(z)$ für alle $y \in (F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \setminus \{z\}$ und $z \in M$ gilt.

   Für ein $\mathcal{E}_I$-$\mathcal{B}$-messbares $g : I \to \Sigma$ ist die Funktion $f := g \circ F^-$ wegen der $\mathcal{E}_J$-$\mathcal{B}$-Messbarkeit auf J somit C-$\mathcal{B}$-messbar. Die Funktionen $f \circ F = g \circ F^- \circ F$ und g stimmen auf $F^-(J)$ ($\subseteq I$) überein; siehe 2.

Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine dazugehörige Verteilungsfunktion und $J \subseteq \mathbb{R}$ das kleinste $F(\mathbb{R})$ enthaltende Intervall.
Um die Erkenntnisse von Fakta 19.3.1 verwenden zu können, setzen wir $I := [-\infty, +\infty)$ und $F(-\infty) = \min J$ in dem Fall, dass J ein Minimum hat. In dem Fall gilt $F^-(\min J) = -\infty$. Anderenfalls sei $I := \mathbb{R}$. In jedem Fall gilt

$$F(I) = F(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad I \setminus F^-(J) \subseteq \mathbb{R}\,,$$

womit J das kleinste $F(I)$ enthaltende Intervall ist. Für die gemäß Fakta 19.3.1, 6, definierte σ-Algebra C gilt $C \subseteq \mathcal{E}_J = \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_J$ wegen $J \subseteq \mathbb{R}$; siehe Fakta 14.10.2. Nach Fakta 19.3.1, 7, ist $\{(a, b] \cap J : a, b \in F(\mathbb{R}),\ a < b\}$ ein Erzeuger von C.

19.3.2 Lemma. *Für das Borelmaß $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ und eine dazugehörige Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\mu(I \setminus F^-(J)) = 0$. Zudem stimmen λ und $\mu \circ F^{-1}$ auf C überein.*

Beweis. Für $x \in F^-(J)$ ist das links offene und in $\mathbb{R}$ enthaltene Intervall $(F^{-1}\{F(x)\} \setminus \{x\})$ Vereinigung von abzählbar vielen Intervallen der Form $(x, y]$ mit $y \in F^{-1}\{F(x)\}$, wobei $\mu(x, y] = F(y) - F(x) = 0$. Folglich gilt $\mu(F^{-1}\{F(x)\} \setminus \{x\}) = 0$, woraus wir $\mu(I \setminus F^-(J)) = 0$ wegen (19.9) erhalten.
Sind $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$, so gilt $F(s) = F(u)$ und $F(t) = F(v)$ mit $u := F^-(F(s)) \leq s$ und $v := F^-(F(t)) \leq t$. Wir schließen auf

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(s), F(t)] &= F^{-1}(-\infty, F(v)] \setminus F^{-1}(-\infty, F(u)] \\ &= ((-\infty, t] \cup (F^{-1}\{F(v)\} \setminus \{v\})) \setminus ((-\infty, s] \cup (F^{-1}\{F(u)\} \setminus \{u\})) \\ &= (\,(s, t] \setminus N_1\,) \cup N_2\,, \end{aligned} \tag{19.11}$$

wobei $N_1, N_2 \subset I \setminus F^-(J)$. Also erhalten wir

$$\mu(F^{-1}(F(s), F(t)]) = \mu(s, t] = F(t) - F(s) = \lambda(F(s), F(t)]\,. \tag{19.12}$$

Da $\{(a, b] \cap J : a, b \in F(\mathbb{R}),\ a < b\}$ ein Erzeuger von C ist, folgt $\lambda|_C = \mu \circ F^{-1}|_C$ wegen (19.12) aus Satz 14.9.5. ❑

Für allgemeines $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ gilt wegen $(A \cap F(\mathbb{R})) \cup \bigcup_{z \in A \cap M} (F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \setminus \{z\} \in C$

$$\begin{aligned} \mu \circ F^{-1}(A) = \mu \circ F^{-1}(A \cap F(\mathbb{R})) &= \mu \circ F^{-1}\Big((A \cap F(\mathbb{R})) \cup \bigcup_{z \in A \cap M} (F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \setminus \{z\}\Big) \\ &= \lambda\Big((A \cap F(\mathbb{R})) \cup \bigcup_{z \in A \cap M} (F^-)^{-1}\{F^-(z)\} \setminus \{z\}\Big)\,. \end{aligned}$$

19.3.3 Korollar. *Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die dazugehörige Verteilungsfunktion. Ist g eine bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ messbare Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[-\infty, +\infty]$ bzw. $\mathbb{C}$, so gilt für die in Fakta 19.3.1, 8, auf J definierte Funktion $g \circ F^-$*

$$\int_J g \circ F^- \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\mu$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut.

Beweis. Ist g messbar bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$, so ist $g \circ F^-$ nach Fakta 19.3.1, 8, messbar bezüglich C und es gilt $(g \circ F^-) \circ F = g$ auf $F^-(J)$. Im Falle $I := [-\infty, +\infty)$ setzen wir dabei $g(-\infty) := 0$. Gemäß Lemma 19.3.2 gilt $\mu(I \setminus F^-(J)) = 0$, weshalb $(g \circ F^-) \circ F = g$ auf $\mathbb{R}$ μ-fast überall. Aus Lemma 14.7.3, Lemma 19.3.2 und Satz 14.7.5 folgt

$$\int_J g \circ F^- \,\mathrm{d}\lambda = \int_J g \circ F^- \,\mathrm{d}(\lambda|_C) = \int_J g \circ F^- \,\mathrm{d}(\mu \circ F^{-1}) = \int_{\mathbb{R}} (g \circ F^-) \circ F \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}\mu\,.$$

❑

19.3.4 Bemerkung. Für ein Borelmaß ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ mit $\nu \ll \mu$, also $\nu = g \cdot \mu$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ messbarem $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, erhalten wir aus Korollar 19.3.3 und (19.10)

$$\nu \circ F^{-1}|_C = (g \circ F^-) \cdot \lambda|_C \ll \lambda|_C\,.$$

Wir setzen $g \circ F^-$ auf $\mathbb{R} \setminus J$ mit Null fort und bezeichnen mit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion von dem Maß $(g \circ F^-) \cdot \lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$. Für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ gilt dann wegen Fakta 19.3.1,7, (19.11) und $\mu(I \setminus F^-(J)) = 0$

$$H(F(t)) - H(F(s)) = \int_{(F(s),F(t)]} g \circ F^- \,\mathrm{d}\lambda = \nu \circ F^{-1}(F(s), F(t)] = \nu(s, t] = G(t) - G(s)\,,$$

wobei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion von ν ist. Also ist $H \circ F$ auch eine Verteilungsfunktion von ν.

19.3.5 Satz. *Seien ν und μ Borelmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ und sei $\nu = \nu_a + \nu_s$ die Zerlegung gemäß Satz 18.1.6 mit $\nu_a \ll \mu$ und $\nu_s \perp \mu$. Für die Dichte g von ν_a bezüglich μ wie in Satz 18.1.5 gilt*

$$g(t) = \lim_{h \to 0+} \frac{\nu(t-h, t+h]}{\mu(t-h, t+h]} \quad \textit{für } \mu\textit{-fast alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis. Wir setzen $\sigma := \mu + \nu$. Nach Lemma 18.1.4 gibt es messbare $g_\mu, g_\nu : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $\mu = g_\mu \cdot \sigma$, $\nu = g_\nu \cdot \sigma$ und $g_\mu + g_\nu = 1$ überall. Weiters gilt für $\nu_a = \mathbb{1}_{g_\mu^{-1}(0,1]} \cdot \nu$ und $\nu_s = \mathbb{1}_{g_\mu^{-1}\{0\}} \cdot \nu$, dass $\nu_a = g \cdot \mu \ll \mu$ mit $g|_{g_\mu^{-1}\{0\}} = 0$ und $g|_{g_\mu^{-1}(0,1]} = \frac{g_\nu}{g_\mu}$. Nach Satz 18.1.5 ist die Dichte g mit $\nu_a = g \cdot \mu \ll \mu$ bis auf eine μ-Nullmenge eindeutig.
Bezeichne F die zu σ gehörige Verteilungsfunktion. Nach Bemerkung 19.3.4 gilt dann $\nu \circ F^{-1}|_C = (g_\nu \circ F^-) \cdot \lambda|_C$. Wir setzen $g_\nu \circ F^-$ auf $\mathbb{R} \setminus J$ mit Null fort und erhalten eine Funktion auf $\mathbb{R}$, deren Betrag durch eins beschränkt ist. Für die dazugehörigen Verteilungsfunktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $H \circ F$ gemäß Bemerkung 19.3.4 Verteilungsfunktion von ν. Nach Korollar 19.2.4 gilt $H'(x) = g_\nu \circ F^-(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus N$ mit $N \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$, $\lambda(N) = 0$.
Für $t \in F^-(J)$ gilt nach Fakta 19.3.1, 5, $\lim_{h \to 0+} F(t-h) = \inf(F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\}$, wobei $F(t) - F(t-h) > 0$ für $h > 0$. Falls zusätzlich $F(t) \in M = \{z \in F(I) : \{z\} \subsetneq (F^-)^{-1}\{F^-(z)\}\}$, so folgt $F(t-) = \inf(F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\} < F(t) = F(t+)$, womit

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0+} \frac{\nu(t-h, t+h]}{\sigma(t-h, t+h]} &= \lim_{h \to 0+} \frac{H \circ F(t+h) - H \circ F(t-h)}{F(t+h) - F(t-h)} \\ &= \frac{H \circ F(t) - H \circ F(t-)}{F(t) - F(t-)} = \frac{\nu\{t\}}{\sigma\{t\}} = g_\nu(t)\,.\end{aligned}$$

Für $t \in F^-(J) \cap F^{-1}(\mathbb{R} \setminus M)$ gilt $F(t-) = \inf(F^-)^{-1}\{F^-(F(t))\} = F(t)$. Mit (19.3) erhalten wir

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\nu(t-h,t+h]}{\sigma(t-h,t+h]} = \lim_{h\to 0+} \frac{H(F(t+h)) - H(F(t-h))}{F(t+h) - F(t-h)} = H'(F(t)) = g_\nu \circ F^-(F(t)) = g_\nu(t)\,,$$

falls $F(t) \in \mathbb{R} \setminus N$. Also gilt $\lim_{h\to 0+} \frac{\nu(t-h,t+h]}{\sigma(t-h,t+h]} = g_\nu(t)$ für $t \in \mathbb{R} \cap F^-(J) \cap F^{-1}(M \cup (\mathbb{R} \setminus N))$. Wegen $F^{-1}((\mathbb{R} \setminus M) \cap N) = F^{-1}((F(I) \setminus M) \cap N)$ mit $(F(I) \setminus M) \cap N \in C$ folgt

$$\begin{aligned}\sigma\Big(\mathbb{R} \setminus (F^-(J) \cap F^{-1}(M \cup (\mathbb{R} \setminus N)))\Big) &\leq \sigma(\mathbb{R} \setminus F^-(J)) + \sigma(\mathbb{R} \setminus F^{-1}(M \cup (\mathbb{R} \setminus N))) \\ &= 0 + \sigma(F^{-1}((\mathbb{R} \setminus M) \cap N)) = \lambda((F(I) \setminus M) \cap N) = 0\,.\end{aligned}$$

Somit gilt $\lim_{h\to 0+} \frac{\nu(t-h,t+h]}{\sigma(t-h,t+h]} = g_\nu(t)$ für $t \in \mathbb{R} \setminus N_1$ mit $\sigma(N_1) = 0$. Entsprechend zeigt man $\lim_{h\to 0+} \frac{\mu(t-h,t+h]}{\sigma(t-h,t+h]} = g_\mu(t)$ für $t \in \mathbb{R} \setminus N_2$ mit $\sigma(N_2) = 0$.
Insbesondere gilt $\mu(t-h, t+h] > 0$ für alle $h > 0$, wenn $t \in \mathbb{R} \setminus (g_\mu^{-1}\{0\} \cup N_1 \cup N_2)$, womit auch

$$\frac{\nu(t-h,t+h]}{\mu(t-h,t+h]} = \frac{\nu(t-h,t+h]}{\sigma(t-h,t+h]} \cdot \frac{\sigma(t-h,t+h]}{\mu(t-h,t+h]}$$

für $h \to 0+$ gegen $\frac{g_\nu(t)}{g_\mu(t)} = g(t)$ konvergiert. Wegen

$$\mu(g_\mu^{-1}\{0\} \cup N_1 \cup N_2) \leq \mu(g_\mu^{-1}\{0\}) + \mu(N_1) + \mu(N_2) \leq (g_\mu \cdot \sigma)(g_\mu^{-1}\{0\}) + \sigma(N_1) + \sigma(N_2) = 0$$

gilt also $\lim_{h\to 0+} \frac{\nu(t-h,t+h]}{\mu(t-h,t+h]} = g(t)$ für μ-fast alle $t \in \mathbb{R}$. ❑

19.4 Verteilungsfunktionen von reellen und komplexen Maßen auf $\mathbb{R}$

Nach Satz 19.1.2 sind die Verteilungsfunktionen von Borelmaßen $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ genau die rechtsstetigen monoton wachsenden Funktionen auf $\mathbb{R}$. Ehe wir ein analoges Resultat für komplexe Maße bringen, sei an den Begriff der Weglänge

$$\ell(\gamma) := \sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \|\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})\|_2$$

eines Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ aus Definition 11.1.4 erinnert. Hier bezeichnet $\mathfrak{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$. Eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist eine endlichen Teilmengen von $[a, b]$ mit $a, b \in \mathcal{Z}$, wobei ihre $n(\mathcal{Z}) + 1$ vielen Elemente in aufsteigender Reihenfolge mit $a = \xi_0 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{Z})} = b$ bezeichnet werden.

19.4.1 Definition. Für eine reell- bzw. komplexwertige Funktion G auf $\mathbb{R}$ heißt $V_a^b(G) = \ell(G|_{[a,b]})$, $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$, *Variation der Funktion G*. Man nennt G von *beschränkter Variation*, wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass $V_a^b(G) \leq C$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.
Eine reell- bzw. komplexwertige Funktion F auf $\mathbb{R}$ heißt *Verteilungsfunktion* des reellen bzw. komplexen Maßes ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$, falls $\nu(a, b] = F(b) - F(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

19.4.2 Satz. *Ist ν ein reelles bzw. komplexes Maß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$, so gibt es immer eine dazugehörige Verteilungsfunktion. Diese ist bis auf eine reelle- bzw. komplexe additive Konstante eindeutig, rechtsstetig und von beschränkter Variation, wobei*

$$V_a^b(F) = |\nu|(a,b] \leq \|\nu\| \quad \textit{für alle} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a < b\,. \tag{19.13}$$

Ist umgekehrt $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ rechtsstetig und von beschränkter Variation, so ist F die Verteilungsfunktion eines eindeutigen reellen bzw. komplexen Maßes ν.
Allgemeiner gilt für ein weiteres reelles bzw. komplexes Maß σ mit Verteilungsfunktion G und $-\infty < c < d < +\infty$ die Gleichheit $\nu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}} = \sigma|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}$ genau dann wenn $(F-G)|_{[c,d]}$ konstant ist.

Beweis. Wir schreiben im reellen Fall $\nu = \nu_+ - \nu_-$ wie in Satz 18.3.4 mit endlichen nichtnegativen Maßen $\nu_\pm$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$. Für die gemäß Satz 19.1.2 existierenden Verteilungsfunktionen $F_\pm$ von $\nu_\pm$ gilt

$$\nu(a,b] = \nu_+(a,b] - \nu_-(a,b] = (F_+(b) - F_-(b)) - (F_+(a) - F_-(a))\,,$$

womit sich $F := F_+ - F_-$ als Verteilungsfunktion von ν herausstellt. F ist als Differenz rechtsstetiger Funktionen wieder rechtsstetig. Gilt $\nu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}} = \sigma|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}$, so stimmt für $c \leq a < b \leq d$ die Differenz $F(b) - F(a)$ mit $\nu(a,b] = \sigma(a,b]$ und daher mit $G(b) - G(a)$ überein. Infolge ist $(F-G)|_{[c,d]}$ konstant. Für variable $c < d$ zeigt das auch die eindeutige Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von ν bis auf eine reelle additive Konstante.
Für komplexe Maße ν erhalten wir Existenz, Rechtsstetigkeit und Eindeutigkeit einer Verteilungsfunktion F von ν, indem wir das soeben Gezeigte auf die reellen Maß $\operatorname{Re}\nu$ und $\operatorname{Im}\nu$ anwenden und für die entsprechenden Verteilungsfunktionen F_r von ν_r und F_i von ν_i dann $F := F_r + \mathrm{i}F_i$ setzen.
Um (19.13) sowohl für reelle und komplexe Maße nachzuweisen, nehmen wir eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$ von $[a,b]$. Wegen $\dot{\bigcup}_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} (\xi_{j-1}, \xi_j] = (a,b]$ folgt gemäß der Definition von $|\nu|(a,b]$ in (18.11)

$$\sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} |F(\xi_j) - F(\xi_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} |\nu(\xi_{j-1}, \xi_j]| \leq |\nu|(a,b]\,.$$

Das Supremum $V_a^b(F)$ über alle Zerlegungen ist somit höchstens $|\nu|(a,b]$.
Bezeichnet f die Dichte von ν bzgl. $|\nu|$, so wissen wir aus Korollar 18.3.14, dass $|f| = 1$, $|\nu|$-fast überall, womit wir $f(x) = \exp(\mathrm{i}\phi(x))$ für ein messbares $\phi : \mathbb{R} \to [0, 2\pi)$ annehmen können; siehe Fakta 14.15.2. Wegen $|\nu|(\mathbb{R}) < +\infty$ ist ϕ sogar integrierbar, weshalb es nach Proposition 16.6.4 zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion der Bauart $\phi_\epsilon = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{(\eta_{j-1}, \eta_j]}$ mit $-\infty < \eta_0 < \dots < \eta_m < +\infty$ gibt, so dass $\|\phi - \phi_\epsilon\|_1 < \epsilon$, wobei $\|.\|_1$ bezüglich $|\nu|$ zu verstehen ist. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so können wir $a, b \in \{\eta_0, \dots, \eta_m\}$ mit $a = \eta_p, b = \eta_q$ für $0 \leq p < q \leq b$ annehmen, denn wir fordern ja nicht $\alpha_j \neq 0$ und auch nicht, dass die α_j paarweise verschieden sind. Setzen wir $\mathcal{Z} := \{\eta_0, \dots, \eta_m\} \cap [a,b]$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq |\nu|(a,b] - \sum_{j=p+1}^{q} |F(\eta_j) - F(\eta_{j-1})| &= \sum_{j=p+1}^{q} \big(|\nu|(\eta_{j-1}, \eta_j] - |F(\eta_j) - F(\eta_{j-1})|\big) \\ = \sum_{j=p+1}^{q} \bigg(\Big| \int_{(\eta_{j-1}, \eta_j]} \exp(\mathrm{i}\alpha_j)\, d|\nu|(x) \Big| &- \Big| \int_{(\eta_{j-1}, \eta_j]} \exp(\mathrm{i}\phi(x))\, \mathrm{d}|\nu|(x) \Big| \bigg). \end{aligned}$$

Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung und wegen $\phi_\epsilon(x) = \alpha_j$ für $x \in (\eta_{j-1}, \eta_j]$ ist dieser Ausdruck kleiner oder gleich

$$\sum_{j=p+1}^{q} \left| \int_{(\eta_{j-1},\eta_j]} \exp(\mathrm{i}\phi_\epsilon(x)) - \exp(\mathrm{i}\phi(x))\, \mathrm{d}|\nu|(x) \right| \leq \sum_{j=p+1}^{q} \int_{(\eta_{j-1},\eta_j]} \left|\exp(\mathrm{i}\phi_\epsilon(x)) - \exp(\mathrm{i}\phi(x))\right| \mathrm{d}|\nu|(x)$$

$$= \int_{(a,b]} \left|\exp(\mathrm{i}\phi_\epsilon(x)) - \exp(\mathrm{i}\phi(x))\right| \mathrm{d}|\nu|(x) \leq \|\phi - \phi_\epsilon\|_1 < \epsilon\,,$$

wobei hier die Ungleichung $|\exp(\mathrm{i}x) - \exp(\mathrm{i}y)| \leq |x - y|$ eingegangen ist. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $V_a^b(F) = |\nu|(a, b]$.
Ist umgekehrt $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ rechtsstetig und von beschränkter Variation, so folgt leicht, dass dann auch $\operatorname{Re} F$ und $\operatorname{Im} F$ diese Eigenschaften haben. Definieren wir $V(\operatorname{Re} F) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $V(\operatorname{Re} F)(x) := V_0^x(\operatorname{Re} F)$ für $x \geq 0$ und durch $V(\operatorname{Re} F)(x) := -V_x^0(\operatorname{Re} F)$ für $x < 0$, so ist $V(\operatorname{Re} F)$ monoton wachsend und wegen Lemma 11.1.7 auch rechtsstetig. Die Differenz $V(\operatorname{Re} F) - \operatorname{Re} F$ ist infolge auch rechtsstetig und wegen

$$V(\operatorname{Re} F)(y) - V(\operatorname{Re} F)(x) = V_x^y(\operatorname{Re} F) \geq |\operatorname{Re} F(y) - \operatorname{Re} F(x)| \geq \operatorname{Re} F(y) - \operatorname{Re} F(x)$$

für $-\infty < x < y < +\infty$ auch monoton wachsend. Nach Satz 19.1.2 sind $V(\operatorname{Re} F)$ und $V(\operatorname{Re} F) - \operatorname{Re} F$ daher Verteilungsfunktionen zweier Borelmaße $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$. Ist $C > 0$ derart, dass $V_a^b(F) \leq C$ für alle $a < b$, so folgt $|\operatorname{Re} F(x)| \leq |V(\operatorname{Re} F)(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus schließen wir auf $\nu_j(\mathbb{R}) < +\infty$ für $j = 1, 2$, womit $\nu_1 - \nu_2$ ein reelles Maß mit Verteilungsfunktion $\operatorname{Re} F$ ist. Genauso zeigt man die Existenz zweier endlicher Borelmaße $\nu_3, \nu_4 : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ derart, dass $\operatorname{Im} F$ die Verteilungsfunktion von $\nu_3 - \nu_4$ ist. Als Folge ist F die Verteilungsfunktion von $\nu := \nu_1 - \nu_2 + \mathrm{i}(\nu_3 - \nu_4) \in M(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mathbb{C})$, wobei im Falle einer reellwertigen Funktion F gemäß obiger Konstruktion $\nu_3 = \nu_4 = 0$, also $\nu \in M(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mathbb{R})$.
Sei schließlich F Verteilungsfunktion des komplexen Maßes ν und G die Verteilungsfunktion eines komplexen Maßes σ. Ist $(F - G)|_{[c,d]}$ konstant, also $F(x) = G(x) - G(c) + F(c)$ für $x \in [c, d]$, so folgt $|\nu|(a, b] = V_a^b(F) = V_a^b(G) = |\sigma|(a, b]$, wenn $c \leq a < b \leq d$. Somit stimmen $(|\nu|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}$ und $(|\sigma|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}$ auf dem durchschnittsstabilen Erzeuger

$$\{(a, b] : c \leq a < b \leq d\} = \{(a, b] : -\infty < a < b < +\infty\} \cap (c, d]$$

von $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}$ überein; siehe Lemma 14.13.2. Nach Satz 14.9.5 erhalten wir $(|\nu|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}} = (|\sigma|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}$.
Die Dichten f und g von ν und σ bezüglich $|\nu|$ bzw. $|\sigma|$ erfüllen nach Korollar 18.3.14, $|f| = 1$ $|\nu|$-fast überall bzw. $|g| = 1$ $|\sigma|$-fast überall. Für alle Funktionen $h = \mathbb{1}_{(a,b]}$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ gilt im Falle $\alpha := \max(a, c) < \min(b, d) =: \beta$

$$\nu(\alpha, \beta] - \sigma(\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha) - G(\beta) + G(\alpha) = 0$$

und im Falle $\alpha \geq \beta$ auch $\nu(\alpha, \beta] - \sigma(\alpha, \beta] = 0$, wodurch gemäß (14.17)

$$\int (f - g) \cdot \mathbb{1}_{(c,d]} \cdot h\, \mathrm{d}|\nu| = \int_{(\alpha,\beta]} f\, \mathrm{d}(|\nu|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}} - \int_{(\alpha,\beta]} g\, \mathrm{d}(|\sigma|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}} = 0\,.$$

Wegen der Linearität und der Stetigkeit von $h \mapsto \int (f - g) \cdot \mathbb{1}_{(c,d]} \cdot h\, \mathrm{d}|\nu|$ bezüglich der Norm $\|.\|_1$ erhalten wir $\int (f - g) \cdot \mathbb{1}_{(c,d]} \cdot h\, \mathrm{d}|\nu| = 0$ für alle $h \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), |\nu|, \mathbb{C})$ aus Proposition 16.6.4.

Nehmen wir $h = \overline{(f-g)} \cdot \mathbb{1}_{(c,d]}$, so folgt $\int_{(c,d]} |f-g|^2 \, d(|\nu|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}} = 0$ gemäß (14.17) und daher $f = g$ auf $(c,d]$ bis auf eine Nullmenge bezüglich $(|\nu|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}} = (|\sigma|)|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}$, womit $\nu(A) = \sigma(A)$ für $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}$. Für variable $c < d$ zeigt das auch, dass ν eindeutig durch F bestimmt ist. ❑

19.4.3 Bemerkung. Wie im vorherigen Beweis gesehen, gilt für $\nu \in M(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mathbb{R})$ bzw. $\nu \in M(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mathbb{C})$ und eine dazugehörige Verteilungsfunktion F, dass $F = F_+ - F_-$ bzw. $F = F_r + iF_i = F_{r,+} - F_{r,-} + i(F_{i,+} - F_{i,-})$, wobei $F_\pm$ die Verteilungsfunktionen von $\nu_\pm$ mit $\nu = \nu_+ - \nu_-$ wie in Satz 18.3.4 im reellen Fall bzw. F_r, F_i und $F_{r,\pm}, F_{i,\pm}$ die Verteilungsfunktionen von $\operatorname{Re} \nu$, $\operatorname{Im} \nu$ und $(\operatorname{Re} \nu)_\pm, (\operatorname{Im} \nu)_\pm$ sind; siehe Fakta 18.3.2, 5.
Als Folge existiert $F(x-) = \lim_{t \to x-} F(t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Funktionen F sowie $x \mapsto F(x-)$ sind messbar; siehe Proposition 19.1.3. Offenbar sind diese beiden Funktionen auch beschränkt.

19.4.4 Proposition. *Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ mit einer dazugehörigen Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist ν ein reelles oder komplexes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ mit Verteilungsfunktion G, so gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall -\infty < a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_n < b_n < +\infty , \tag{19.14}$$
$$\sum_{j=1}^n F(b_j) - F(a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^n \big| G(b_j) - G(a_j) \big| < \epsilon .$$

Beweis. Dass $\nu \ll \mu$ die Bedingung (19.14) impliziert, folgt aus Fakta 18.1.3, 3, angewandt auf μ, $|\nu|$ und $A = \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]$ sowie der Abschätzung $\sum_{j=1}^n |G(b_j) - G(a_j)| \le \sum_{j=1}^n |\nu|(a_j, b_j]$.
Für die Umkehrung sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ gemäß (19.14) gewählt. Sind $-\infty < a_1 < b_1 \le \dots \le a_n < b_n < +\infty$ mit $\sum_{j=1}^n F(b_j) - F(a_j) < \delta$ und sind $\mathcal{Z}_j = \{\xi_{j,0}, \dots, \xi_{j,n(\mathcal{Z}_j)}\}$ Zerlegungen der Intervalle $[a_j, b_j]$, so gilt wegen

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n(\mathcal{Z}_j)} F(\xi_{j,k}) - F(\xi_{j,k-1}) = \sum_{j=1}^n F(b_j) - F(a_j)$$

nach Voraussetzung

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n(\mathcal{Z}_j)} \big| G(\xi_{j,k}) - G(\xi_{j,k-1}) \big| < \epsilon .$$

Nehmen wir das Supremum über alle Zerlegungen, dann erhalten wir wegen Satz 19.4.2

$$\sum_{j=1}^n |\mu|(a_j, b_j] = \sum_{j=1}^n V_{a_j}^{b_j}(F) \le \epsilon .$$

Sei $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ mit $\mu(A) \le \frac{\delta}{2}$. Bezeichnet $\mathcal{R}_1$ den Ring aus Fakta 14.11.3, 3, für die Dimension $d = 1$, so erhalten wir aus Korollar 14.9.6

$$\mu(A) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^\infty \mu(a_j, b_j] : \bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j] \supseteq A \;\text{ mit paarweise disjunkten }\; (a_j, b_j], \; j \in \mathbb{N} \Big\} .$$

Für gewisse paarweise disjunkte $(a_j, b_j]$, $j \in \mathbb{N}$, mit $\bigcup_{j=1}^\infty (a_j, b_j] \supseteq A$ gilt also $\sum_{j=1}^\infty \mu(a_j, b_j] - \mu(A) < \frac{\delta}{2}$, womit für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^n F(b_j) - F(a_j) = \sum_{j=1}^n \mu(a_n, b_n] < \mu(A) + \frac{\delta}{2} \le \delta .$$

Nach dem oben Gezeigten folgt daraus $|\nu|(A) \leq \sum_{j=1}^{n} |\nu|(a_j, b_j] \leq \epsilon$. Gemäß Fakta 18.1.3, 3, erhalten wir $|\nu| \ll \mu$, also $\nu \ll \mu$; siehe Bemerkung 18.3.11. ❑

19.4.5 Bemerkung. Gilt (19.14), so folgt aus der Rechtsstetigkeit von F jene von G. In der Tat, gibt es für $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ wegen (19.14) ein $\delta > 0$, so dass für $b > a$ mit $F(b) - F(a) < \delta$ immer $|G(b) - G(a)| < \epsilon$ gilt. Da F rechtsstetig ist, gibt es ein $\eta > 0$ derart, dass $0 < b - a < \eta$ die Ungleichung $F(b) - F(a) < \delta$ und infolge $|G(b) - G(a)| < \epsilon$ nach sich zieht.
Ähnlich zeigt man, dass für $a \in \mathbb{R}$ derart, dass F bei a stetig ist, auch G bei a stetig ist.

19.4.6 Definition. Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ mit einer dazugehörigen Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit beschränkter Variation, welche (19.14) erfüllt, nennen wir absolut stetig bezüglich F oder auch bezüglich μ. Die Menge aller solchen G wollen wir mit $AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnen.
Ist $\mu = \lambda$ das Lebesguesche Maß, also $F(x) = x + u$ mit $u \in \mathbb{R}$, so schreiben wir kurz $AC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $AC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dafür.

19.4.7 Korollar. *Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ mit einer dazugehörigen Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Eine reell- bzw. komplexwertige Funktion G auf $\mathbb{R}$ gehört genau dann zu $AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. zu $AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, wenn G die Verteilungsfunktion eines reellen bzw. komplexen Maßes ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ mit $\nu \ll \mu$ ist. Zudem stellt*

$$G(x) = \alpha + \operatorname{sgn}(x - \theta) \cdot \int_{\left(\min(\theta,x),\max(\theta,x)\right]} g \, d\mu \tag{19.15}$$

eine bijektive Beziehung zwischen allen Paaren (α, g) aus $\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{R})$ bzw. aus $\mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{C})$ und $G \in AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $G \in AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ her, wobei G die Verteilungsfunktion von $\nu = g \cdot \mu$ mit $G(\theta) = \alpha$ ist. Für die durch G bis auf μ-Nullmengen eindeutig bestimmte Funktion g in (19.15) *schreiben wir daher auch $\frac{d}{d\mu}G$.*

Beweis. Für $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{R})$ ist $\nu := g \cdot \mu \ (\ll \mu)$ gemäß Beispiel 18.3.3 ein reelles Maß, wobei die Zuordnung $g \mapsto \nu$ injektiv ist. Man überprüft elementar durch Fallunterscheidung, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ dann die Funktion G in (19.15) die Verteilungsfunktion von ν mit $G(\theta) = \alpha$ ist. Nach Satz 19.4.2 ist das reellwertige G von beschränkter Variation und die Zuordnung $(\alpha, \nu) \mapsto G$ injektiv. Wegen Proposition 19.4.4 gilt (19.14), womit $G \in AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Ist umgekehrt G von beschränkter Variation und gilt (19.14), so ist G wegen Bemerkung 19.4.5 rechtsstetig, weshalb G die Verteilungsfunktion eines eindeutigen reellen Maßes ν ist; siehe Satz 19.4.2. Wegen (19.14) folgt $\nu \ll \mu$ und wegen Satz 18.3.12 die Existenz eines eindeutigen $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{R})$ mit $\nu = g \cdot \mu$. Da die rechte Seite von (19.15) mit $\alpha = 0$ eine Verteilungsfunktion von ν abgibt, folgt aus der Eindeutigkeit der Verteilungsfunktion bis auf eine additive Konstante die Darstellung (19.15).
Den komplexwertigen Fall behandelt man genauso. ❑

19.4.8 Fakta.

1. Da die Abbildung $(\alpha, g) \mapsto G$ von $\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ bzw. von $\mathbb{C} \times L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}^\mathbb{R}$ lineare ist, bildet $AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ einen linearen Unterraum von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ und $AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ einen linearen Unterraum von $\mathbb{C}^\mathbb{R}$.

2. Für $G \in AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dargestellt durch (19.15) mit dem Paar (α, g) gilt $G = \operatorname{Re} G + \mathrm{i} \operatorname{Im} G$, wobei $\operatorname{Re} G$ und $\operatorname{Im} G$ auch durch (19.15) mit den Paaren $(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re} g)$ und $(\operatorname{Im}\alpha, \operatorname{Im} g)$ dargestellt werden können; vgl. Definition 14.15.1.

   Für $G \in AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dargestellt durch (19.15) mit dem Paar (α, g) gilt $G = G_+ - G_-$ mit $G_\pm$ dargestellt durch Paare $(\alpha_\pm, g^\pm)$, wobei $\alpha_\pm \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$ und $g^\pm = \max(\pm g, 0)$ wie in Definition 14.6.1.

3. Für ein kompaktes Intervall $[c, d]$ ist $AC_\mu([c, d], \mathbb{R}) := \{G|_{[c,d]} : G \in AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ bzw. $AC_\mu([c, d], \mathbb{C}) := \{G|_{[c,d]} : G \in AC_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{C})\}$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^{[c,d]}$ bzw. $\mathbb{C}^{[c,d]}$. Wir nennen diese Funktionen absolut stetig auf $[c, d]$ bezüglich F oder bezüglich μ.

   Im Falle $\mu = \lambda$ schreiben wir $AC([c, d], \mathbb{R})$ bzw. $AC([c, d], \mathbb{C})$ dafür.

4. Hat G die Darstellung (19.15) und H eine entsprechende Darstellung mit Konstante β und integrierbarer Funktion h, so folgt mit Satz 19.4.2 aus $G|_{[c,d]} = H|_{[c,d]}$, dass die reellen bzw. komplexen Maße $\nu = g \cdot \mu$ und $\sigma = g \cdot \mu$, für die G und H Verteilungsfunktionen sind, auf $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}$ übereinstimmen. Mit Hilfe von Proposition 14.7.2 erhalten wir $g|_{(c,d]} = h|_{(c,d]}$ $\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}$-fast überall.

   Infolge stellt (19.15) einen bijektiven Zusammenhang zwischen $AC_\mu([c, d], \mathbb{R})$ und $\mathbb{R} \times L^1((c, d], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}, \mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}, \mathbb{R})$ bzw. zwischen $AC_\mu([c, d], \mathbb{C})$ und $\mathbb{C} \times L^1((c, d], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}, \mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d]}}, \mathbb{C})$ her.

5. Als Konsequenz des vorherigen Punktes ist $\frac{d}{d\mu} G$ eingeschränkt auf $(c, d]$ nur von $G|_{[c,d]}$ abhängig. Wir können somit $\frac{d}{d\mu} H$ auch für alle H aus $AC_\mu([c, d], \mathbb{R})$ bzw. $AC_\mu([c, d], \mathbb{C})$ definieren.

6. Für G, H aus $AC_\mu([c, d], \mathbb{R})$ bzw. $AC_\mu([c, d], \mathbb{C})$ liegt auch $G \cdot H$ in diesem Raum, wobei für μ-fast alle $x \in (c, d]$

$$\frac{d}{d\mu}(G \cdot H)(x) = H(x) \cdot \frac{d}{d\mu} G(x) + G(x-) \cdot \frac{d}{d\mu} H(x) . \tag{19.16}$$

   Um das einzusehen können wir aus Linearitätsgründen und wegen 2 annehmen, dass $G(x)$, $x \in [c, d]$, gegeben ist durch (19.15) mit $(\alpha, g) \in \mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{R})$, wobei $g \geq 0$. Entsprechend stellen wir $H(x)$, $x \in [c, d]$, dar mit einem Paar (β, h). Insbesondere ist G die Verteilungsfunktion von dem nichtnegativen Maß $g \cdot \mu$ und H die von dem nichtnegativen Maß $h \cdot \mu$. Aus Proposition 19.1.3 und Lemma 14.7.1 erhalten wir für $x \in [c, d]$

$$\begin{aligned} G(x)H(x) - G(c)H(c) &= \int_{(c,x]} H(t) \, \mathrm{d}(g \cdot \mu)(t) + \int_{(a,b]} G(t-) \, \mathrm{d}(h \cdot \mu)(t) \\ &= \int_{(c,x]} (H \cdot g + G(.-) \cdot h) \, \mathrm{d}\mu . \end{aligned}$$

   Also hat $G \cdot H$ auf $[c, d]$ eine Darstellung der Form (19.15) mit Konstante $G(c)H(c)$ und der Funktion $(H \cdot g + G(-.) \cdot h) \cdot \mathbb{1}_{(c,d]} \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{R})$, was (19.16) zeigt.

7. Ein Funktion $G : [c, d] \to \mathbb{R}$ bzw. $G : [c, d] \to \mathbb{C}$, welche (19.14) mit $F(x) = x$ erfüllt, wobei $c \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq d$, liegt schon in $AC([c, d], \mathbb{R})$ bzw. $AC([c, d], \mathbb{C})$.

In der Tat folgt aus (19.14) die Existenz eines $\delta > 0$ derart, dass $\sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} |G(\xi_j) - G(\xi_{j-1})| < 1$ für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von Intervallen $[a, b] \subseteq [c, d]$ mit Länge kleiner δ, womit $V_a^b(G) \leq 1$. Da $[c, d]$ mit endlich vielen derartigen Intervallen überdeckt werden kann, folgt $V_c^d(G) < +\infty$. Setzen wir G auf $\mathbb{R}$ fort mit $G(c)$ auf $(-\infty, c)$ und $G(d)$ auf $(d, +\infty)$, so erhalten wir eine Funktion auf $\mathbb{R}$ mit beschränkter Variation und derart, dass (19.14) mit $F(x) = x$ zutrifft. Gemäß Definition 19.4.6 gehört die fortgesetzte Funktion zu $AC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $AC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und damit G zu $AC([c, d], \mathbb{R})$ bzw. $AC([c, d], \mathbb{C})$.

8. Ist G auf $[c, d]$ stetig differenzierbar, so folgt aus Korollar 19.4.7 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz 8.4.5, dass G absolut stetig bezüglich λ ist und dass $\frac{d}{d\lambda}G$ mit der klassischen Ableitung λ-fast überall übereinstimmt.
9. Da aus (19.14) mit $F(x) = x$ unmittelbar die gleichmäßige Stetigkeit von G folgt, sind alle bezüglich λ absolut stetigen Funktionen auch stetig. Die Ableitungsregel (19.16) ist somit eine Verallgemeinerung der klassischen Multiplikationsregel.

19.4.9 Beispiel. Aus $H \in AC([c, d], \mathbb{C})$ und $\phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\phi \subseteq (c, d)$ folgt $\phi \cdot H \in AC([c, d], \mathbb{C})$; siehe Fakta 19.4.8, 9. Dabei gilt λ-fast überall

$$\frac{d}{d\lambda}(\phi H) = \phi' H + \phi \frac{d}{d\lambda} H$$

und wegen Korollar 19.4.7

$$\int_{(c,d]} \frac{d}{d\lambda}(\phi H) \, d\lambda = (\phi(d)H(d) - \phi(c)H(c)) = 0 \, .$$

Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \frac{d}{d\lambda} H \, d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} \phi' H \, d\lambda \, . \tag{19.17}$$

Also ist $\frac{d}{d\lambda}H$ auch die schwache Ableitung DH von $H|_{(c,d)}$; siehe Bemerkung 16.8.5.
Sei umgekehrt $H : [c, d] \to \mathbb{C}$ eine Funktionen derart, dass $H|_{(c,d)} \in L^1_{loc}(c, d)$ mit schwacher Ableitung DH. Wir nehmen zusätzlich $DH \in L^1((c, d), \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d)}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(c,d)}}, \mathbb{C})$ an, setzen $\theta = c$, $\alpha = 0$ und $g := \mathbb{1}_{(c,d)} \cdot DH$ und erhalten nach Korollar 19.4.7 durch (19.15) eine absolut stetige Funktion G auf $[c, d]$ mit $\frac{d}{d\lambda}G = DH$ λ-fast überall auf (c, d). Nach der Definition der schwachen Ableitung und nach (19.17) folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \phi' \cdot H \, d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} \phi \cdot DH \, d\lambda = - \int_{\mathbb{R}} \phi \cdot \frac{d}{d\lambda} G \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \phi' \cdot G \, d\lambda \tag{19.18}$$

für alle $\phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\phi \subseteq (c, d)$.
Wir halten nun ein $\psi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\psi \subseteq (c, d)$ und $\int_{\mathbb{R}} \psi \, d\lambda = 1$ fest. Für jedes $\phi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\phi \subseteq (c, d)$ ist die durch

$$\chi(x) := \int_{(-\infty,x]} \Big(\phi(t) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \phi(s) \, d\lambda(s)\Big) \cdot \psi(t)\Big) d\lambda$$

definierte Funktion auf $\mathbb{R}$ aus $C^\infty(\mathbb{R})$. Man überprüft leicht, dass $\chi(x) = 0$ für $x \notin [c + \delta, d - \delta]$ mit hinreichend kleinem $\delta > 0$ und daher $\chi \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\chi \subseteq (c, d)$. Wegen (19.18) gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \cdot (H - G) \, d\lambda - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \psi \cdot (H - G) \, d\lambda}_{=:\gamma} \cdot \int_{\mathbb{R}} \phi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi' \cdot (H - G) \, d\lambda = 0 \, ,$$

also $\int_{\mathbb{R}} \phi \cdot (H - G - \gamma)\, d\lambda = 0$ für alle $\phi \in C_{00}^{\infty}(c, d)$. Nach Lemma 16.8.6 folgt $H = G + \gamma$ λ-fast überall, womit H bis auf eine λ-Nullmenge mit der absolut stetigen Funktion $G + \gamma$ übereinstimmt.

19.5 Übungsaufgaben

19.1 Mit der Notation aus Korollar 19.3.3 und Fakta 19.3.1 zeige man, dass $g \mapsto g \circ F^{-}$ einen isometrischen Isomorphismus von $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \mu, \mathbb{C})$ auf $L^p(J, C, \lambda|_C, \mathbb{C})$ abgibt, wobei $p \in [1, +\infty]$.

19.2 Formulieren und beweisen Sie das Analogon zu Satz 19.3.5 für den Fall, dass μ ein Borelmaß und ν ein komplexes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$ ist.

19.3 Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit beschränkter Variation. Zeigen Sie, dass dann $F(x+) = \lim_{t \to x+} F(t)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und dass die Funktion $x \mapsto F(x+)$ von beschränkter Variation sowie rechtsstetig ist. Zeigen Sie schließlich, dass F messbar ist.

19.4 Zeigen Sie für reelle x, y die Ungleichung $|\exp(ix) - \exp(iy)| \leq |x - y|$.

19.5 Für $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \lambda, \mathbb{C})$ sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Verteilungsfunktion von $f \cdot \lambda$. Man zeige, dass

$$\lim_{r \to 0} \frac{F(. + r) - F}{r} = f\,,$$

und zwar bezüglich $\|.\|_1$, also

$$\lim_{r \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{F(x + r) - F(x)}{r} - f(x) \right| d\lambda(x) = 0\,.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\frac{F(x+r)-F(x)}{r} - f(x)$ in der Form

$$\int_{(0,1)} (f(x + rs) - f(x))\, d\lambda(s)\,,$$

und wenden den Satz 14.14.4 sowie Korollar 16.6.6 an.

19.6 Weisen Sie sorgfältig nach, dass die Funktion G in (19.15) eine Verteilungsfunktion von ν ist. Zeigen Sie auch, dass G bei allen $x \in \mathbb{R}$ mit $\mu(\{x\}) = 0$ stetig ist.

19.7 Man zeige, dass $F(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ und $F(0) = 0$ zu $AC([-1, 1], \mathbb{R})$ gehört.

19.8 Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ stetige Funktion f und derart, dass für eine Zerlegung $-1 = \xi_0 < \cdots < \xi_n = 1$ jede Einschränkung $f|_{[\xi_{j-1}, \xi_j]}$ stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass dann $f \in AC([-1, 1], \mathbb{C})$.

19.9 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Lipschitz stetig, also gilt $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für $x, y \in [a, b]$ mit festem $C \geq 0$. Man zeige, dass dann $f \in AC([a, b], \mathbb{C})$.

Finden Sie zudem eine Funktion, die zwar absolut stetig, aber nicht Lipschitz stetig ist.

19.10 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0) = 0$, $f(x) = x^a \sin(x^{-b})$, $x \in (0,1] > 0$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $x \notin [0,1]$. Unter welchen Bedingungen an a, b ist (i) f beschränkt, (ii) f stetig, (iii) g von beschränkter Variation, (iv) $f \in AC([0,1],\mathbb{R})$, (v) f bei 0 differenzierbar, (vi) $f'|_{(0,1]}$ beschränkt.

19.11 Sei $f : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ derart, dass $f(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} f(t)$ existiert und dass $f|_{[a,b]} \in AC([a,b],\mathbb{C})$ für alle kompakten $[a,b] \subseteq [0,+\infty)$. Zeigen Sie für $0 < a < b$, dass

$$\int_{[0,+\infty)} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} \, \mathrm{d}\lambda(x) = \big(f(+\infty) - f(0)\big) \cdot \ln\big(\frac{b}{a}\big).$$

Hinweis: Schreiben Sie den Integranden als Integral und verwenden Sie Satz 14.14.4.

19.12 Wir definieren zunächst

$$AC_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f|_{[a,b]} \in AC([a,b],\mathbb{R}) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\}.$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 1$ für $[x] \in 2\mathbb{Z}$ (Gaußklammer) und $g(x) = 0$ für $[x] \notin 2\mathbb{Z}$. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) - y(x) + g(x) = 0 \quad \lambda - \text{fast überall},$$

wobei $y \in AC_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ zu suchen und y' als $\frac{d}{d\lambda}y$ gemäß Korollar 19.4.7 bzw. Fakta 19.4.8 zu verstehen ist.

Hinweis: Man kann die Methode der Variation der Konstanten anwenden, wobei (19.16) hilfreich ist.