Kapitel 17

Integraltransformationen und Fourierreihen

17.1 Fouriertransformation von L^1 Funktionen

Wir werden in diesem Abschnitt einer Funktion aus dem Raum $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \lambda, \mathbb{C})$ – wir schreiben meist $L^1(\mathbb{R})$ dafür – eine neue Funktion zuordnen. Zunächst sei bemerkt, dass für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\zeta \in \mathbb{R}$ wegen $|f(\xi)\exp(-i\xi\zeta)| = |f(\xi)|$ auch $\xi \mapsto f(\xi)\exp(-i\xi\zeta)$ in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, wodurch folgende Definition Sinn macht.

17.1.1 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ sei die *Fouriertransformierte* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von f definiert durch

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\exp(-i\xi\zeta)\, d\lambda(\xi)\,.$$

Wir erinnern an den Raum $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller komplexwertigen, beschränkten, stetigen und im Unendlichen verschwindenden[1] Funktionen aus Definition 12.17.6. $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist ein Unterraum des Raumes $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller komplexwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen, und letzterer ist wiederum ein Unterraum des Raumes $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ aller komplexwertigen, beschränkten Funktionen. Wir haben in Beispiel 9.1.9 gesehen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ ein Banachraum ist, und dass $(C_b(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ als abgeschlossener Teilraum ebenfalls ein Banachraum ist.

$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist seinerseits in $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ abgeschlossen und somit selbst ein Banachraum. Um das einzusehen, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, die bezüglich $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig, gegen $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert. Nach Lemma 8.7.1 gilt

$$\lim_{|t|\to+\infty} f(t) = \lim_{|t|\to+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{|t|\to+\infty} f_n(t) = 0\,,$$

womit $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; vgl. auch Fakta 12.17.7. Wir wollen noch bemerken, dass $(C_0(\mathbb{R}), \cdot, \|.\|_\infty)$ mit der punktweisen Multiplikation sogar eine Banachalgebra ist.

17.1.2 Satz. *Für $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt immer $\hat{f}, \hat{g} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, wobei $(\widehat{af + bg}) = a\hat{f} + b\hat{g}$ und $\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$. Also ist $\hat{}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ eine beschränkte lineare Abbildung mit einer Abbildungsnorm kleiner oder gleich $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.*

[1]Die Bedingung aus Definition 12.17.6 ist für $X = \mathbb{R}$ zu $\lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$ äquivalent.

Beweis. Aus der Linearität des Integrals folgt sofort $(\widehat{af+bg})(\zeta) = a\hat{f}(\zeta) + b\hat{g}(\zeta)$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$. Weiters gilt wegen $|f(\xi)\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)| = |f(\xi)|$

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|\, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1 , \tag{17.1}$$

womit $\hat{f}$ eine beschränkte, komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.
Also ist $\hat{}: L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine lineare Abbildung, die wegen (17.1) beschränkt mit einer Abbildungsnorm kleiner oder gleich $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass diese Abbildung sogar nach $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hinein abbildet. Für $-\infty < c < d < +\infty$ und $\zeta \neq 0$ gilt

$$\widehat{\mathbb{1}_{[c,d)}}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\, \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}\zeta} \big(\exp(-\mathrm{i}d\zeta) - \exp(-\mathrm{i}c\zeta) \big) ,$$

und infolge $\lim_{|\zeta|\to+\infty} \widehat{\mathbb{1}_{[c,d)}}(\zeta) = 0$, womit $\widehat{\mathbb{1}_{(c,d]}} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Wegen der Linearität von $\hat{}$ gilt für den Raum $\mathcal{M}$ aller Treppenfunktionen der Form $\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{[c_j,d_j)}$, dass $\hat{\mathcal{M}} \subseteq C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Gemäß Proposition 16.6.4 ist $\mathcal{M}$ dicht in $L^1(\mathbb{R})$, und wegen der Stetigkeit von $\hat{}: L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ folgt aus Satz 12.4.7

$$\widehat{L^1(\mathbb{R})} = \widehat{c\ell(\mathcal{M})} \subseteq c\ell(\widehat{\mathcal{M}}) \subseteq c\ell(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})) = C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) .$$

❑

17.1.3 Bemerkung. Wegen der Stetigkeit von $\zeta \mapsto f(\xi)\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)$ und der Integrierbarkeit von $\xi \mapsto |f(\xi)\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)| = |f(\xi)|$ folgt die Stetigkeit von $\hat{f}$ auch aus Lemma 14.15.3.

17.1.4 Fakta. Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $r, t \in \mathbb{R}, r \neq 0$.

1. Ist auch $g \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi - \eta) g(\eta)\, \mathrm{d}\lambda(\eta) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi - \eta) \exp\big(- \mathrm{i}(\xi - \eta)\zeta\big)\, \mathrm{d}\lambda(\xi)\, g(\eta) \exp(-\mathrm{i}\eta\zeta)\, \mathrm{d}\lambda(\eta) \\ &= \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(\zeta)\hat{g}(\zeta) . \end{aligned}$$

2. Für die Funktion $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_t(\xi) = f(\xi + t)$, $\xi \in \mathbb{R}$, folgt $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f_t\|_1 = \|f\|_1$ aus Korollar 16.6.6. Zudem gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \widehat{f_t}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi + t) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp\big(- \mathrm{i}(\xi - t)\zeta\big)\, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \exp(\mathrm{i}t\zeta)\hat{f}(\zeta) . \end{aligned}$$

3. Setzen wir $g(\xi) = \exp(\mathrm{i}t\xi) f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, so folgt aus $|\exp(\mathrm{i}t\xi)| = 1$ sofort $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$. Dabei gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \hat{g}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(\mathrm{i}t\xi) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\, \mathrm{d}\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp\big(- \mathrm{i}\xi(\zeta - t)\big)\, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \hat{f}(\zeta - t) . \end{aligned}$$

4. Für $g(\xi) = |r| f(r\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, folgt aus (15.3) angewendet auf : $\xi \mapsto \frac{\xi}{r}$, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\|g\|_1 = \|f\|_1$ und für alle $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |r| f(r\xi) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) \, \mathrm{d}\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-\mathrm{i}\xi\frac{\zeta}{r}) \, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \hat{f}(\frac{1}{r}\zeta) \,.\end{aligned}$$

5. Setzen wir $g(\xi) = \overline{f(-\xi)}$, $\xi \in \mathbb{R}$, so folgt $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$ und für alle $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\hat{g}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-\xi)} \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) \, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(-\xi) \exp(\mathrm{i}\xi\zeta) \, \mathrm{d}\lambda(\xi)} = \overline{\hat{f}(\zeta)} \,.$$

6. Definieren wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $g(\xi) = -\mathrm{i}\xi f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, und nehmen $g \in L^1(\mathbb{R})$ an, so ist $\frac{\partial}{\partial\zeta} f(\xi) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) = g(\xi) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)$ vom Betrag her durch $|g(\xi)|$ gleichmäßig in ζ beschränkt. Nach Lemma 14.15.4 gilt für alle $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)(-\mathrm{i})\xi \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) \, \mathrm{d}\lambda(\xi) = \hat{g}(\zeta) \,.$$

7. Setzen wir $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $f' \in L^1(\mathbb{R})$ voraus, dann folgt zunächst wegen Proposition 14.11.7, dass f' uneigentlich Riemann-integrierbar ist, wobei für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \, \mathrm{d}t \overset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t) \, \mathrm{d}t \,.$$

Also existieren die Limites $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Diese Grenzwerte müssen aber verschwinden, da anderenfalls f nicht integrierbar wäre. Durch partielle Integration erhalten wir für $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\int_{-N}^{N} f'(t) \exp(-\mathrm{i}t\zeta) \, \mathrm{d}t = (\exp(-\mathrm{i}t\zeta) f(t)) \Big|_{t=-N}^{N} + \mathrm{i}\zeta \int_{-N}^{N} f(t) \exp(-\mathrm{i}t\zeta) \, \mathrm{d}t \,.$$

Lassen wir N gegen $+\infty$ streben, so folgt $\widehat{(f')}(\zeta) = i\zeta \hat{f}(\zeta)$.

17.1.5 Bemerkung. Die vorletzte Behauptung in Fakta 17.1.4 kann so interpretiert werden, dass $\hat{f}$ umso öfter ableitbar ist, desto schneller f im Unendlichen gegen Null konvergiert. Insbesondere sind die Fouriertransformierten von Funktionen mit kompaktem Träger beliebig oft ableitbar. In der Tat ist $\hat{f}$ für einen kompakten Träger $K := \mathrm{supp}(f)$ sogar auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzbar, da ja

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K f(\xi) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) \, \mathrm{d}\lambda(\xi)$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ integrierbar ist. Wir können hier Lemma 14.15.5 anwenden und sehen, dass $\zeta \mapsto \hat{f}(\zeta)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, also $\hat{f}$ eine *ganze Funktion* ist.

17.1.6 Beispiel.

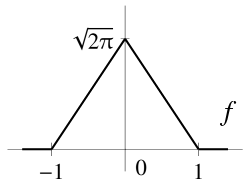
(i) Für $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ berechnet man elementar

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) \, \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}\zeta} (\exp(-\mathrm{i}\zeta) - 1) \,.$$

(ii) Um die Fouriertransformierte von $f(t) = (-\mathrm{i}) \cdot t \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ zu bestimmen, verwenden wir Fakta 17.1.4, 6:
$$\hat{f}(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\widehat{\mathbb{1}_{[0,1]}}(\zeta) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-\mathrm{i})\exp(-\mathrm{i}\zeta)\zeta - \exp(-\mathrm{i}\zeta) + 1}{\zeta^2}\,.$$

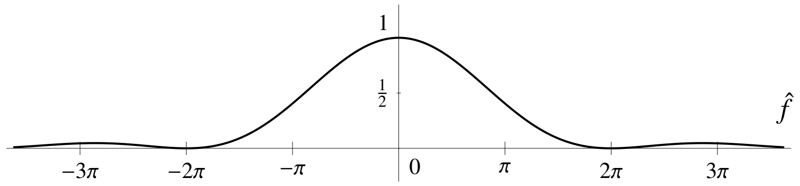
17.1.7 Beispiel. Wir wollen die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\max(1 - |\xi|, 0)$$



berechnen, für die offensichtlich $\|f\|_1 = \sqrt{2\pi}$ gilt. Wir zerlegen $\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)$ in Real- und Imaginärteil, also $\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) = \cos(\xi\zeta) - \mathrm{i}\sin(\xi\zeta)$. Da für festes $\zeta \in \mathbb{R}$ die Funktion $\xi \mapsto f(\xi)\sin(\xi\zeta)$ ungerade ist, verschwindet das Integral darüber. Also gilt für $\zeta \neq 0$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\zeta) &= \int_{[-1,1]} (1 - |\xi|)\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\,\mathrm{d}\lambda(\xi) = \int_{-1}^{1} (1 - |x|)\cos(x\zeta)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1 - x)\cos(x\zeta)\,\mathrm{d}x \\ &= 2(1 - x)\frac{\sin(x\zeta)}{\zeta}\bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(x\zeta)}{\zeta}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\zeta^2}(1 - \cos(\zeta)) = \left(\frac{\sin\frac{\zeta}{2}}{\frac{\zeta}{2}}\right)^2.\end{aligned}$$



Diese Funktion liegt auch in $L^1(\mathbb{R})$ und hat damit ihrerseits eine Fouriertransformierte:
$$\hat{\hat{f}}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\xi)}{\xi^2} \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\,\mathrm{d}\lambda(\xi)\,. \tag{17.2}$$

Wir zerlegen wieder $\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)$ in Real- und Imaginärteil. Da $\xi \mapsto \frac{(\cos(\xi)-1)}{\xi^2}\mathrm{i}\sin(\xi\zeta)$ eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral darüber. Also gilt

$$\begin{aligned}\hat{\hat{f}}(\zeta) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(\xi)}{\xi^2} \cos(\xi\zeta)\,\mathrm{d}\lambda(\xi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\xi^2}\Big(2\big(\cos(\xi\zeta) - 1\big) - \big(\cos(\xi(\zeta + 1)) - 1\big) - \big(\cos(\xi(\zeta - 1)) - 1\big)\Big)\,\mathrm{d}\lambda(\xi)\,.\end{aligned}$$

Für $\zeta \notin \{-1, 0, 1\}$ stimmt das überein mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg(&\int_{\mathbb{R}} \frac{2|\zeta|^2\big(\cos(\xi\zeta) - 1\big)}{(\xi\zeta)^2}\,\mathrm{d}\lambda(\xi) \\ &- \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta + 1|^2\big(\cos(\xi(\zeta + 1)) - 1\big)}{(\xi(\zeta + 1))^2}\,\mathrm{d}\lambda(\xi) - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta - 1|^2\big(\cos(\xi(\zeta - 1)) - 1\big)}{(\xi(\zeta - 1))^2}\,\mathrm{d}\lambda(\xi)\Bigg)\,.\end{aligned}$$

Wegen (15.3) gleicht das dem Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg(\int_{\mathbb{R}} \frac{2|\zeta|(\cos(\eta)-1)}{\eta^2}\,d\lambda(\eta) \\ - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta+1|(\cos(\eta)-1)}{\eta^2}\,d\lambda(\eta) - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta-1|(\cos(\eta)-1)}{\eta^2}\,d\lambda(\eta)\Bigg) =$$

$$= (2|\zeta| - |\zeta+1| - |\zeta-1|)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(\eta)-1}{\eta^2}\,d\lambda(\eta)$$

$$= (2|\zeta| - |\zeta+1| - |\zeta-1|)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot(-\pi)\,,$$

da mittels partieller Integration und wegen Beispiel 8.7.14

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Außerdem zeigt man leicht durch Fallunterscheidung, dass

$$-(2|\zeta| - |\zeta+1| - |\zeta-1|) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } |\zeta| > 1\,,\\ 2(1-\zeta)\,, & \text{falls } \zeta\in(0,1)\,,\\ 2(1+\zeta)\,, & \text{falls } \zeta\in(-1,0)\,.\end{cases}$$

Somit gilt

$$\hat{\hat{f}}(\zeta) = \sqrt{2\pi}\,\max(1-|\zeta|,0) = f(\zeta),\quad \zeta\notin\{-1,0,1\}\,.$$

Wegen der Stetigkeit von $\hat{\hat{f}}$ und f stimmen diese Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ überein.

17.1.8 Beispiel. Sei $f(\xi) = \sqrt{2\pi}\,\max(1-|\xi|,0)$ die Funktion aus Beispiel 17.1.7 und sei

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,f(\xi-2n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,f_{-2n}(\xi)\,.$$

Da $f(\xi-2n)$ außerhalb von $(2n-1,2n+1)$ verschwindet, ist für ein festes $\xi\in\mathbb{R}$ höchstens ein Summand von $g(\xi)$ ungleich Null. Insbesondere konvergiert obige Funktionenreihe punktweise. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\|g\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{\mathbb{R}} f(\xi-2n)(\xi)\,d\lambda(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi}\,.$$

Wegen

$$\Big\|g-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}f_{-2n}\Big\|_1 = \Big\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,f(\xi-2n)(\xi)\Big\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{2^N}\sqrt{2\pi}$$

konvergiert die Folge $s_N(\xi)$ der Partialsummen in $L^1(\mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_1$ gegen g. Wegen Satz 17.1.2 konvergiert infolge die Folge (siehe Fakta 17.1.4, 2, sowie Beispiel 17.1.7)

$$\widehat{s_N}(\zeta) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\,\hat{f}_{-2n}(\zeta) = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\,\exp(-i2n\zeta)\,\hat{f}(\zeta) = \frac{2}{\zeta^2}(1-\cos(\zeta))\cdot\frac{1-\left(\frac{\exp(-i2\zeta)}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{\exp(-i2\zeta)}{2}}$$

der Fouriertransformierten der Partialsummen bezüglich $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig, im Banachraum $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gegen $\hat{g}(\zeta)$. Also gilt

$$\hat{g}(\zeta) = \frac{4}{\zeta^2} \cdot \frac{1 - \cos(\zeta)}{2 - \exp(-\mathrm{i}2\zeta)}\,.$$

17.1.9 Bemerkung (*). Setzen wir $m := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$ sowie $|||.|||_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|.\|_1$, dann stimmt $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}), \lambda, \mathbb{C})$ mit $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}), m, \mathbb{C})$ als Vektorraum überein. Klarerweise ist die 1-Norm $|||.|||_1$, die zum Maß m gehört, äquivalent zu $\|.\|_1$.
Weiters überprüft man leicht, dass $(L^1(\mathbb{R}), \star, |||.|||_1)$, wobei $f \star g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g$, ebenfalls eine Banachalgebra ist. Die Fouriertransformation von f hat dann die Form

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\, \mathrm{d}m(\xi)\,,$$

und aus Satz 17.1.2 folgt, dass $f \mapsto \hat{f}$ eine beschränkte lineare Abbildung mit Abbildungsnorm ≤ 1 von $(L^1(\mathbb{R}), |||.|||_1)$ nach $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ ist. Darüber hinaus folgt aus Fakta 17.1.4, 1, dass diese Abbildung sogar mit den multiplikativen Strukturen verträglich ist. Also ist die Fouriertransformation ein beschränkter Banachalgebren-Homomorphismus von $(L^1(\mathbb{R}), \star, |||.|||_1)$ nach $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \cdot, \|.\|_\infty)$.

17.1.10 Beispiel. Die Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ liegt in $L^1(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_1 = \sqrt{2\pi}$; siehe Beispiel 8.7.13. Wie man aus Lemma 14.15.4 leicht folgert, ist die komplexwertige Funktion

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{t^2}{2} + \mathrm{i}tx)\, d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

stetig differenzierbar und erfüllt $F'(x) + xF(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$. Löst man diese Differentialgleichung und beachtet $F(0) = \|f\|_1 = \sqrt{2\pi}$, so folgt $F(x) = \sqrt{2\pi}\exp(-\frac{x^2}{2})$, wodurch

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \exp(-\mathrm{i}t\zeta)\, \mathrm{d}\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(-\zeta) = \exp(-\frac{\zeta^2}{2}) = f(\zeta)\,.$$

17.1.11 Bemerkung (*). Gemäß Lemma 16.7.4 hat $L^1(\mathbb{R})$ eine approximative Einheit. Nun werden wir sehen, dass es eine Einheit e im Sinne von $f * e = f$ für alle f nicht geben kann.
In der Tat folgt aus $f * e = f$ für die Funktion $f(t) = \exp(-\frac{t^2}{2})$ wegen $\hat{f} = f$ die Gleichung $\sqrt{2\pi}\, \hat{f} \cdot \hat{e} = \hat{f}$ ($\in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), was wiederum $\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ zur Folge hätte. Diese Funktion liegt im Widerspruch zu Satz 17.1.2 aber nicht in $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Die schlagende Eigenschaft der Fouriertransformation ist, dass sie fast involutorisch ist, also dass sie zweimal auf eine Funktion angewendet – falls das möglich ist – fast die Funktion ergibt, mit der man gestartet ist.

17.1.12 Satz. *Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ derart, dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt*

$$\hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi) \quad \textit{für}\ \ \lambda\textit{-fast alle}\ \ \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis. Wir setzen

$$k_n(\xi) = \sqrt{2\pi}\, \max(n - n^2|\xi|, 0)\,,$$

und folgern wegen $k_n(\xi) = nk_1(n\xi)$ aus Beispiel 17.1.7 und Fakta 17.1.4, 4, dass für $\zeta \in \mathbb{R}$

$$\hat{k}_n(\zeta) = \left(\frac{\sin\frac{\zeta}{2n}}{\frac{\zeta}{2n}}\right)^2, \quad \hat{\hat{k}}_n = k_n \quad \text{und daher} \quad |\hat{k}_n(\zeta)| \leq 1, \quad \hat{k}_n(\zeta) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Somit folgt $\hat{k}_n\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, wobei wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5,

$$\|\hat{k}_n\hat{f} - \hat{f}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}| \cdot |\hat{k}_n - 1| \, \mathrm{d}\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Wegen Satz 17.1.2 und der Tatsache, dass eine lineare Abbildung genau dann stetig ist, wenn sie beschränkt ist, gilt infolge $\widehat{\hat{k}_n\hat{f}}(\xi) \to \hat{\hat{f}}(\xi)$ im Banachraum $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, also gleichmäßig.
Andererseits folgt aus dem Satz von Fubini und aus $\hat{\hat{k}}_n(\eta) = k_n(\eta) = k_n(-\eta)$

$$\begin{aligned}
\widehat{\hat{k}_n\hat{f}}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{k}_n(\zeta)\hat{f}(\zeta)\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta)\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{k}_n(\zeta)\exp(-\mathrm{i}\xi\zeta) \int_{\mathbb{R}} f(\eta)\exp(-\mathrm{i}\eta\zeta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta)\,\mathrm{d}\lambda(\zeta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\eta) \int_{\mathbb{R}} \hat{k}_n(\zeta)\exp\big(-\mathrm{i}(\xi+\eta)\zeta\big)\,\mathrm{d}\lambda(\zeta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\eta)\,\hat{\hat{k}}_n(\xi+\eta)\,\mathrm{d}\lambda(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} k_n * f(-\xi)\,.
\end{aligned}$$

Nun erfüllt aber $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}k_n$ die Voraussetzungen von Lemma 16.7.4, wodurch $\widehat{\hat{k}_n\hat{f}}(\xi) \to f(-\xi)$ in $L^1(\mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_1$ für $n \to \infty$.
Da auch $\widehat{\hat{k}_n\hat{f}} \to \hat{\hat{f}}$ für $n \to \infty$ und zwar gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, konvergiert ein und dieselbe Folge im Maß gegen $\hat{\hat{f}}$ und $f(-.)$; siehe Fakta 16.4.3, 7. Gemäß Fakta 16.4.3, 1, gilt dann $\hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi)$ für λ-fast alle $\xi \in \mathbb{R}$. ❑

Aus Satz 17.1.12 erkennen wir, warum bei der Definition der Fouriertransformation die Konstante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ auftaucht. Ohne diese Konstante würde nämlich nicht $\hat{\hat{f}}(\xi) = f(-\xi)$ gelten.

17.1.13 Korollar. *Die Fouriertransformation ist injektiv. Sind also $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $f \neq g$ als Elemente von $L^1(\mathbb{R})$, so folgt $\hat{f} \neq \hat{g}$.*

Beweis. Wäre nämlich $\hat{f} = \hat{g}$, so wären $f - g$ und $\hat{f} - \hat{g} = (\widehat{f - g}) = 0$ beide in $L^1(\mathbb{R})$. Also müsste nach Satz 17.1.12 $(\widehat{\widehat{f - g}}) = \hat{0} = 0$ gleich $(f - g)(-.)$ sein. ❑

17.1.14 Beispiel.

(i) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ liegt die Funktion $t^n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ in $L^1(\mathbb{R})$. Um das einzusehen, sei zunächst bemerkt, dass für $|t| > 2$

$$|t^n| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leq |t^n| \cdot \mathrm{e}^{-|t|} = |t^n| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{2}}\,. \tag{17.3}$$

Aus der Regel von de L'Hospital, Satz 7.2.14, folgert man $\lim_{|t|\to+\infty} |t^n| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{2}} = 0$. Also gilt $|t^n| \cdot \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{2}} \leq 1$ außerhalb eines bestimmten kompakten Intervalls $[-K, K]$, und wegen (17.3) ist $t^n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ über $\mathbb{R} \setminus [-K, K]$ nach dem Lebesgue-Maß integrierbar. Auf $[-K, K]$ ist diese Funktion stetig und daher beschränkt. Somit ist $t^n \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ auch über $[-K, K]$ integrierbar.

(ii) Wir behaupten, dass für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ mit Grad kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Fouriertransformierte der Funktion $p(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ auch von der Form $q(\zeta) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$ mit einem Polynom $q \in \mathbb{C}[\zeta]$ mit Grad kleiner oder gleich n ist.

Für $n = 0$ folgt diese Behauptung sofort aus Beispiel 17.1.10. Wir nehmen an, dass sie für Polynome vom Grad kleiner oder gleich n gilt, und betrachten ein Polynom $p(t)$ vom Grad kleiner oder gleich $n + 1$. Wir schreiben es als $p(t) = a_0 + t \cdot r(t)$ für ein $a_0 \in \mathbb{C}$ und einem Polynom $r(t)$ vom Grad kleiner oder gleich n. Aus Fakta 17.1.4 folgt

$$[\widehat{p(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}](\zeta) = a_0[\widehat{e^{-\frac{t^2}{2}}}](\zeta) + i\frac{d}{d\zeta}[\widehat{r(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}](\zeta) .$$

Wegen der Induktionsvoraussetzung stimmt das mit

$$\begin{aligned} a_0 e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + i\big(u(\zeta) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\big)' &= a_0 e^{-\frac{\zeta^2}{2}} + iu'(\zeta) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}} - i\zeta u(\zeta) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \\ &= (a_0 + iu'(\zeta) - i\zeta u(\zeta)) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}} \end{aligned}$$

überein, wobei $u(\zeta)$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n ist. Da dann $a_0 + iu'(\zeta) - i\zeta u(\zeta)$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $n + 1$ ist, haben wir durch vollständige Induktion die Behauptung gezeigt.

(iii) Offensichtlich ist der Funktionenraum

$$\mathcal{P}_n := \{p(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} : p(t) \in \mathbb{C}[t] \text{ mit Grad strikt kleiner als } n\}$$

ein linearer Teilraum von $L^1(\mathbb{R})$ von der Dimension n. Wir haben eben gesehen, dass die Fouriertransformation $\mathcal{P}_n$ in $\mathcal{P}_n$ abbildet. Also ist $\hat{}: \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ eine nach Korollar 17.1.13 injektive und daher auch surjektive lineare Abbildung.

Ist $p(t)$ vom Grad n, und $q(\zeta) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$ die Fouriertransformierte von $p(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$, so muss der Grad von $q(\zeta)$ genau n sein. Wäre dieser echt kleiner, also gleich $k < n$, so wäre $q(\zeta) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{2}}$ wegen der Surjektivität von $\hat{}: \mathcal{P}_{k+1} \to \mathcal{P}_{k+1}$ auch Bild unter der Fouriertransformation einer Funktion aus $\mathcal{P}_{k+1}$. Ein Gradvergleich zeigt, dass diese Funktion ungleich $p(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$ ist. Also wäre die Fouriertransformation nicht injektiv.

17.2 Fouriertransformation von L^2 Funktionen

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, die Fouriertransformierte auch für Funktionen aus $L^2(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}), \lambda, \mathbb{C})$ zu definieren.

17.2.1 Definition. Die *Schwartz Klasse* sei die folgende Menge komplexwertiger Funktionen auf $\mathbb{R}$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)| < +\infty \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} .$$

17.2.2 Beispiel. Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und hat f kompakten Träger, so haben auch alle Ableitungen von f kompakten Träger. Also sind alle Funktionen der Bauart $x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$ beschränkt und liegen infolge in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Somit gilt $C_{00}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Eine $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$-Funktion, die in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ aber nicht in $C_{00}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt, ist etwa $f(x) = e^{-x^2}$.

17.2.3 Lemma. *Die Menge $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bildet einen Vektorraum von Funktionen mit den zusätzlichen Eigenschaften, dass mit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ immer auch $f \cdot g$, $\bar{f}$ sowie $x \mapsto (x^l f(x))^{(k)}$ und $x \mapsto x^l f^{(k)}(x)$ für alle $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegen. Zudem gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, wobei $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^p(\mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_p$ für $p = 1, 2$ enthalten ist.*

Beweis. Dass $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist, der mit f auch $\bar{f}$ enthält, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit f, g auch $\alpha f + \beta g$ und $\bar{f}$ in $C^\infty(\mathbb{R})$ liegen, wobei $(\alpha f + \beta g)^{(m)} = \alpha f^{(m)} + \beta g^{(m)}$ und $(\bar{f})^{(m)} = \overline{f^{(m)}}$. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist bekannterweise mit f und g auch $f \cdot g$ unendlich oft differenzierbar, wobei

$$(f \cdot g)^{(m)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{j} f^{(j)} g^{(m-j)} .$$

Mit Hilfe dieser Formel erhalten wir $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ sowie $(x \mapsto (x^l f(x))^{(k)}), (x \mapsto x^l f^{(k)}(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Insbesondere folgt aus $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch $(x \mapsto (1 + x^2) f(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, und damit die Beschränktheit der Funktion $x \mapsto (1 + x^2) f(x)$ auf $\mathbb{R}$. Also ist

$$f(x) = (1 + x^2) f(x) \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

Produkt einer beschränkten Funktion und einer Funktion aus $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ und liegt folglich in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Zusammen mit Beispiel 17.2.2 erhalten wir $C_{00}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ für $p = 1, 2$, wobei wegen Korollar 16.6.5 der Raum $C_{00}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und infolge auch $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^p(\mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_p$ ist. ❑

Gemäß Lemma 17.2.3 hat jede Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Fouriertransformierte.

17.2.4 Lemma. *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, und die Abbildung $\hat{}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ ist eine lineare Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, wobei $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Nach Lemma 17.2.3 gilt $(x \mapsto -\mathrm{i}x f(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Also hat diese Funktion eine Fouriertransformierte, wobei nach Fakta 17.1.4, 6, $\hat{f}$ differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{d\zeta} \hat{f}(\zeta) = -\widehat{\mathrm{i}x f(x)}(\zeta) .$$

Wendet man diese Schlussweise auf $(x \mapsto -\mathrm{i}x f(x))$, $(x \mapsto (-\mathrm{i}x)^2 f(x))$ und so weiter an, dann folgt $\hat{f} \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und

$$\frac{d^m}{d\zeta^m} \hat{f}(\zeta) = \widehat{(-\mathrm{i}x)^m f}(x)(\zeta)$$

für beliebiges $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, womit $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ liegt auch $x \mapsto [(-\mathrm{i}x)^m f(x)]^{(n)}$ in der Schwartz Klasse und folglich in $L^1(\mathbb{R})$. Wiederholte Anwendung von Fakta 17.1.4, 7, zeigt, dass die Fouriertransformierte von $x \mapsto [(-\mathrm{i}x)^m f(x)]^{(n)}$ die Funktion $\zeta \mapsto \mathrm{i}^n \zeta^n [\widehat{(-\mathrm{i}x)^m f}(x)](\zeta) = \mathrm{i}^n \zeta^n (\hat{f}(\zeta))^{(m)}$ ist. Insbesondere liegt $\zeta \mapsto \zeta^n (\hat{f}(\zeta))^{(m)}$ in $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und ist damit beschränkt, womit $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Aus Satz 17.1.12 wissen wir, dass $\hat{\hat{f}} = f(-.)$ λ-fast überall. Nach Fakta 14.11.3, 5, gilt diese Gleichheit auf einer dichten Menge. Wegen der Stetigkeit von $\hat{\hat{f}}$ und von $f(-.)$ stimmen diese Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ überein. Da $f \mapsto f(-.)$ eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, muss wegen $f(-.) = \hat{\hat{f}}$ auch $\hat{}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sein. ❑

17.2.5 Lemma. *Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f \cdot \bar{g} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} \cdot \bar{\hat{g}} \, d\lambda \quad \textit{und} \quad \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 .$$

Beweis. Da $(s, t) \mapsto f(s)g(t)$ auf $\mathbb{R}^2$ nach λ_2 integrierbar ist, folgt nach dem Satz von Fubini, Satz 14.14.4, nach Fakta 17.1.4, 5, sowie Lemma 17.2.4

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\bar{\hat{g}}(t) \, d\lambda(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s) \exp(-\mathrm{i}st) \, \bar{\hat{g}}(t) \, d\lambda(s) \, d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\mathrm{i}st) \, \bar{\hat{g}}(t) \, d\lambda(t) \, d\lambda(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s) \, \hat{\bar{\hat{g}}}(-s) \, d\lambda(s) = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} \, d\lambda .\end{aligned}$$

$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ erhalten wir daraus, wenn man $f = g$ setzt und die Quadratwurzel zieht. ❑

17.2.6 Satz. *Es gibt eine eindeutige, lineare, bijektive und isometrische Abbildung*

$$U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) ,$$

die $\hat{}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *fortsetzt. Diese Abbildung erfüllt* $U(f) = \hat{f}$ *für* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. *Für* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *gilt zudem*

$$U \circ U(f) = f(-.) ,$$

und $(Uf, Ug) = (f, g)$, *wobei* $(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} \, d\lambda$.

Beweis. Da $\hat{}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gemäß Lemma 17.2.4 sowie Lemma 17.2.5 linear, bijektiv und isometrisch bezüglich $\|.\|_2$ ist und gemäß Lemma 17.2.3 sowie Lemma 17.2.4 in $L^2(\mathbb{R})$ dichten Definitionsbereich und dichten Bildbereich hat, ist aus der Funktionalanalysis bekannt, dass sich $\hat{}$ eindeutig zu einem U, wie oben beschrieben, fortsetzen lässt. Der Vollständigkeit halber wollen wir das hier auch explizit zeigen.
Zu $f \in L^2(\mathbb{R})$ gibt es wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_2$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Wegen

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$$

ist mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und wegen der Vollständigkeit von $L^2(\mathbb{R})$ konvergent. Also existiert $Uf := \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$.
Diese Definition hängt nicht von der konkreten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab, denn ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n = f$, und betrachtet man die gemischte Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also $h_1 = f_1, h_2 = g_1, h_3 = f_2, h_4 = g_2, \dots$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} h_n = f$. Wie oben gezeigt konvergiert daher die Folge $(\hat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Als Teilfolgen von $(\hat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\hat{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen $\lim_{n\to\infty} \hat{h}_n$, womit

$$Uf = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{h}_n = \lim_{n\to\infty} \hat{g}_n .$$

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ können wir $f_n := f$ setzen und erhalten $Uf = \lim_{n\to\infty} \hat{f} = \hat{f}$. Also ist U eine Fortsetzung von $\hat{}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

Aus der Linearität von Grenzwertbildung und $\hat{.}$ folgt die Linearität von $U : L^2 \to L^2$. Die Isometrieeigenschaft erhalten wir aus

$$\|Uf\|_2 = \|\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2 .$$

Insbesondere ist U beschränkt; vgl. Definition 9.2.4. Für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt auch

$$4(f,g) = \sum_{j=0}^{3} \mathrm{i}^j \|f + \mathrm{i}^j g\|_2^2 = \sum_{j=0}^{3} \mathrm{i}^j \|U(f + \mathrm{i}^j g)\|_2^2 = 4(Uf, Ug) .$$

Als Hintereinanderausführung zweier linearer und beschränkter Funktionen ist die Abbildung $U \circ U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ selber linear und beschränkt und wegen Satz 9.2.6 auch stetig. Außerdem gilt für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dass $Uf = \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und wegen Lemma 17.2.4

$$U \circ U(f) = U(\hat{f}) = \hat{\hat{f}} = f(-.) .$$

Also stimmt $U \circ U$ auf der in $L^2(\mathbb{R})$ dichten Teilmenge $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ überein mit der offensichtlich linearen, bijektiven und isometrischen Abbildung $f \mapsto f(-.)$ von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$. Nach Lemma 12.4.8 stimmen dann $U \circ U$ und $f \mapsto f(-.)$ auf ganz $L^2(\mathbb{R})$ überein, womit sich U auch als bijektiv herausstellt.
Für die Eindeutigkeit der Fortsetzung sei V eine weitere beschränkte und lineare Fortsetzung von $\hat{}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Somit sind U und V beide stetig auf $L^2(\mathbb{R})$ und stimmen auf der dichten Menge $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ überein. Wieder nach Lemma 12.4.8 folgt $U = V$.
Für ein messbares und beschränktes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger liegt f im Raum $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Ist die Funktion $k_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Definition 15.8.5, so folgt aus Lemma 16.7.4, dass $\lim_{n\to\infty} \|k_{\frac{1}{n}} * f - f\|_1 = 0$. Weil $k_{\frac{1}{n}} * f$ nach (15.34) durch $\|f\|_\infty$ beschränkt ist gilt auch

$$\|k_{\frac{1}{n}} * f - f\|_2^2 = \int |k_{\frac{1}{n}} * f - f|^2 \, \mathrm{d}\lambda \leq 2 \cdot \|f\|_\infty \cdot \int |k_{\frac{1}{n}} * f - f| \, \mathrm{d}\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Nach Lemma 15.8.3 verschwindet $k_{\frac{1}{n}} * f$ außerhalb von $K + K_{\frac{2}{n}}(0)$, und nach Fakta 15.8.1 ist es unendlich oft differenzierbar. Also gilt $k_{\frac{1}{n}} * f \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nach Konstruktion von U gilt bezüglich $\|.\|_2$

$$Uf = \lim_{n\to\infty} \widehat{k_{\frac{1}{n}} * f} .$$

Aufgrund der Beschränktheit und der damit einhergehenden Stetigkeit der linearen Abbildung $\hat{}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ erhalten wir bezüglich $\|.\|_\infty$

$$\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{k_{\frac{1}{n}} * f} .$$

Nach Fakta 16.4.3, 7, konvergiert $(\widehat{k_{\frac{1}{n}} * f})_{n\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen Uf und $\hat{f}$, was nach Fakta 16.4.3, 1, $Uf = \hat{f}$ λ-fast überall zur Folge hat.
Ist schließlich $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, so schließen wir aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, dass $f_n := \mathbb{1}_{[-n,n]\cap f^{-1}(K_n^\complement(0))} \cdot f$ für $n \to \infty$ bezüglich $\|.\|_1$ und bezüglich $\|.\|_2$ gegen f konvergiert. Da f_n beschränkt ist und kompakten Träger hat, gilt nach dem oben Gezeigten $U(f_n) = \widehat{f_n}$ λ-fast überall. Wegen der Beschränktheit von U folgt $U(f_n) \to U(f)$ bezüglich $\|.\|_2$, und wegen der Beschränktheit von $\hat{}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ folgt $\widehat{f_n} \to \hat{f}$ bezüglich $\|.\|_\infty$, was wegen Fakta 16.4.3, 7 und 1, die Gleichheit $Uf = \hat{f}$ λ-fast überall nach sich zieht. ❑

17.2.7 Bemerkung. Mit ganz wenigen Adaptionen lässt sich die Fouriertransformation auch auf Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ definieren. Für $z \in \mathbb{R}^d$ setzt man

$$\hat{f}(z) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-\mathrm{i} \sum_{j=1}^{d} x_j z_j) \, \mathrm{d}\lambda_d(x) \, .$$

Es gelten dabei alle oben gebrachten Resultate, wobei die jeweiligen Beweise ähnlich den hier gebrachten sind.

17.3 Laplacetransformation

Sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Wir nehmen an, dass es ein $s \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $\exp(-st)f(t)$ als Funktion von $t \in [0, +\infty)$ bezüglich des Lebesgueschen Maßes integrierbar ist, also in $L^1[0, +\infty) := L^1([0, +\infty), \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,+\infty)}, \lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,+\infty)}}, \mathbb{C})$ liegt. Für $r > s$ folgt $|\exp(-rt)f(t)| \leq |\exp(-st)f(t)|$ und infolge $(t \mapsto \exp(-rt)f(t)) \in L^1[0, +\infty)$. Allgemeiner folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > s$

$$|\exp(-zt)f(t)| = \exp(-\operatorname{Re}(z)t)\, |f(t)| \leq |\exp(-st)f(t)| \, ,$$

womit auch $t \mapsto \exp(-zt)f(t)$ in $L^1[0, +\infty)$ liegt. Wegen dieser Überlegungen macht folgende Definition Sinn.

17.3.1 Definition. Sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ messbar. Liegt $t \mapsto \exp(-st)f(t)$ für kein $s \in \mathbb{R}$ in $L^1[0, +\infty)$, so setzen wir $\sigma(f) := +\infty$. Anderenfalls sei $\sigma(f) \in [-\infty, +\infty)$ das Infimum aller jener Zahlen $s \in \mathbb{R}$, für die $(t \mapsto \exp(-st)f(t)) \in L^1[0, +\infty)$ erfüllen. Wir definieren die *Laplacetransformierte* $\mathcal{L}(f) : (\sigma(f), +\infty) \to \mathbb{C}$ von f durch

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_{[0,+\infty)} f(t) \exp(-st) \, \mathrm{d}\lambda(t) \, .$$

Weiters sei $\mathcal{L}_c(f) : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\} \to \mathbb{C}$ die Fortsetzung von $\mathcal{L}(f)$ definiert durch

$$\mathcal{L}_c(f)(z) = \int_{[0,+\infty)} f(t) \exp(-zt) \, \mathrm{d}\lambda(t) \, .$$

17.3.2 Bemerkung. Für $s = \sigma(f)$ kann $\int_{[0,+\infty)} f(t) \exp(-st) \, \mathrm{d}\lambda(t)$ existieren, muss es aber nicht.

17.3.3 Beispiel. Als einfaches Beispiel betrachte die Konstante Funktion $\mathbb{1}$ auf $[0, +\infty)$. Da $t \mapsto \exp(-st)$ genau für $s \in (0, +\infty)$ über $[0, +\infty)$ integrierbar ist, gilt $\sigma(\mathbb{1}) = 0$ und für $\operatorname{Re} z > \sigma(\mathbb{1}) = 0$

$$\mathcal{L}_c(\mathbb{1})(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-zt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{z} \, .$$

17.3.4 Proposition. *Für Funktionen f, g wie in Definition 17.3.1, $\eta, b \in \mathbb{C}$ mit $\eta \neq 0$ und $a \in (0, +\infty)$ gelten folgende Aussagen.*

(i) $\mathcal{L}_c(0) = 0$.

(ii) $\sigma(\eta f) = \sigma(f)$ *und* $\mathcal{L}_c(\eta f) = \eta \mathcal{L}_c(f)$.

(iii) $\sigma(f+g) \leq \max(\sigma(f), \sigma(g))$ *und* $\mathcal{L}_c(f+g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(z) + \mathcal{L}_c(g)(z)$ *für alle komplexen* z *mit* $\operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))$.

(iv) Für reellwertige f *gilt* $\mathcal{L}_c(f)(\bar{z}) = \overline{\mathcal{L}_c(f)(z)}$. *Insbesondere ist auch* $\mathcal{L}(f)$ *reellwertig.*

(v) Für $g(t) = f(at)$ *folgt* $\sigma(g) = a\sigma(f)$ *und* $a\mathcal{L}_c(g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(\frac{z}{a})$.

(vi) Für $g(t) = f(t)\exp(tb)$ *folgt* $\sigma(g) = \sigma(f) + \operatorname{Re} b$ *und* $\mathcal{L}_c(g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(z-b)$.

(vii) $\mathcal{L}_c(f)$ *ist eine auf ganz* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$ *holomorphe Funktion.*

Beweis. Alle Punkte bis auf den letzten sind elementar nachzuprüfen. Diesen könnten wir leicht mit Hilfe von Lemma 14.15.5 beweisen. In der Tat gilt

$$\mathcal{L}_c(f)(z) = \int_{[0,+\infty)} \underbrace{f(x)\exp(-zx)}_{=:h(z,x)} \, \mathrm{d}\lambda(x)\,,$$

wobei $z \mapsto h(z,x)$ für alle $x \in [0,+\infty)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$ holomorph ist, $x \mapsto h(z,x)$ für alle komplexen z mit $\operatorname{Re} z > \sigma(f)$ integrierbar ist, und wobei

$$|h(z,x)| \leq |f(x)| \, \exp\big(-(\delta+\sigma(f))x\big) \quad \text{für alle} \quad x \in [0,+\infty)$$

und $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \geq \delta + \sigma(f)$ für jedes $\delta > 0$. Da jede kompakte Teilmenge K der Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma(f)\}$ in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \delta + \sigma(f)\}$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ enthalten ist, sind alle Voraussetzungen von Lemma 14.15.5 erfüllt und $\mathcal{L}_c(f)$ damit holomorph. ❑

Für $Re z > \sigma(f)$ schreiben wir z als $a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$ und sehen, dass

$$\mathcal{L}_c(f)(a+\mathrm{i}b) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty)} f(t)\exp(-at)\exp(-\mathrm{i}bt)\,\mathrm{d}\lambda(t) \tag{17.4}$$

betrachtet als Funktion der reellen Variablen b mit der Fouriertransformierten der Funktion $t \mapsto \sqrt{2\pi} f(t)\exp(-at)\,\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ übereinstimmt.

17.3.5 Proposition. *Sind* $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ *messbare Funktionen mit endlichen* $\sigma(f), \sigma(g)$ *und gilt* $\mathcal{L}_c(f)(z) = \mathcal{L}_c(g)(z)$, $z \in M$, *für eine Menge* $M \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))\}$ *mit Häufungspunkt in* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))\}$, *so folgt* $f = g$ *fast überall. Insbesondere ist die Laplacetransformation injektiv.*

Beweis. Wegen der Voraussetzung folgt aus dem Identitätssatz, Satz 11.6.23, dass $\mathcal{L}_c(f)(z)$ und $\mathcal{L}_c(g)(z)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))\}$ übereinstimmen. Ist $a > \max(\sigma(f), \sigma(g))$, so stimmen nach (17.4) die Fouriertransformierten von $\sqrt{2\pi}\; f(t)\exp(-at)\;\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ und von $\sqrt{2\pi}\; g(t)\exp(-at)\;\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ überein. Wegen Korollar 17.1.13 folgt die Behauptung. ❑

17.3.6 Bemerkung. Wir wollen noch zwei wichtige Eigenschaften der Laplacetransformation erwähnen, die sich entweder mit Hilfe von (17.4) oder direkt verifizieren lassen.
Die erste besagt, dass für messbare $f, g : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ immer $\sigma(f * g) \leq \max(\sigma(f), \sigma(g))$. Dabei gilt $\mathcal{L}_c(f * g)(z) = \mathcal{L}_c(f)\mathcal{L}_c(g)(z)$ für $\operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))$. Wegen

$$f * g(t) = \int_{[0,t]} f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}\lambda(s) = \mathrm{e}^{rt} \int_{[0,t]} (f(s)\mathrm{e}^{-rs})(g(t-s)\mathrm{e}^{-r(t-s)})\,\mathrm{d}\lambda(s)$$

ist $f * g$ auch definiert, wenn f und g nicht notwendigerweise integrierbar sind, sondern nur f und g eine Laplacetransformierte haben.
Schließlich gilt für $f \in C^k[0,+\infty)$ derart, dass $f, f', \dots, f^{(k)}$ alle eine Laplacetransformierte haben für $\operatorname{Re} z > \max_{j=0,\dots,k} \sigma(f^{(j)})$

$$\mathcal{L}_c(f^{(k)})(z) = z^k \mathcal{L}_c(f)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) z^{k-1-j} .$$

Diese Eigenschaft der Laplacetransformation kann zur Lösung gewisser Differentialgleichungen verwendet werden.

17.4 Fourierreihen

17.4.1 Definition. Sei H ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $(.,.) : H \times H \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ein *Skalarprodukt*, also $(.,.)$ bilinear im reellen Fall und sesquilinear im komplexen Fall, $(x,y) = \overline{(y,x)}$ und $(x,x) \geq 0$ für $x, y \in H$, wobei $(x,x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$. Unter diesen Umständen nennen wir $(H, (.,.))$ einen *Skalarproduktraum*. Zudem setzen wir für $x \in H$

$$\|x\|_{(.,.)} := \sqrt{(x,x)} .$$

Wenn keine Verwirrung auftreten kann, schreiben wir meist $\|x\|$ anstelle von $\|x\|_{(.,.)}$.
Ist der gemäß dem folgenden Lemma 17.4.2 normierte Raum $(H, \|.\|_{(.,.)})$ ein Banachraum, so nennt man $(H, (.,.))$ einen *Hilbertraum*.

17.4.2 Lemma. *Für einen Skalarproduktraum* $(H, (.,.))$ *gilt die* Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x) \cdot (y,y) \quad \textit{für alle} \quad x, y \in H . \tag{17.5}$$

und $\|.\|_{(.,.)}$ *bildet eine Norm auf H; siehe Definition 9.1.1.*

Beweis. Um (17.5) zu zeigen, können $(x,y) \neq 0$ annehmen, da anderenfalls die Ungleichung stimmt. In diesem Fall gilt $x \neq 0$. Indem wir nötigenfalls x durch $\frac{|(x,y)|}{(x,y)} \cdot x$ ersetzen, womit sich auf beiden Seiten von (17.5) nichts ändert, können wir sogar $(x,y) > 0$ annehmen. Für $x, y \in H$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$0 \leq (tx + y, tx + y) = t^2(x,x) + t \cdot 2(x,y) + (y,y) .$$

Setzen wir $t = -\frac{(x,y)}{(x,x)}$, so folgt $0 \leq -\frac{(x,y)^2}{(x,x)} + (y,y)$, womit (17.5) bewiesen ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $\|.\|$ eine Norm ist. Offenbar gilt $\|x\| \geq 0$, wobei $\sqrt{(x,x)} = \|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, da $(.,.)$ positiv definit ist. Zudem gilt $\|\alpha x\| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}\,(x,x)} = |\alpha|\,\|x\|$. Schließlich folgt wegen $|(x,y) + (y,x)| \leq |(x,y)| + |(y,x)| \leq 2\|x\|\,\|y\|$ die Ungleichung

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

❑

17.4.3 Beispiel.

(i) Versehen wir etwa $\mathbb{C}^d$ mit dem natürlichen Skalarprodukt $(x,y) := \sum_{j=1}^d x_j \bar{y}_j$, so ist die von $(.,.)$ erzeugte Norm gerade $\|.\|_2$ und $(\mathbb{C}^d, (.,.))$ ist ein Hilbertraum. Entsprechend ist $\mathbb{R}^d$ mit $(x,y) := \sum_{j=1}^d x_j y_j$ ein Hilbertraum.

(ii) Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sind $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bzw. $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ versehen mit

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int |f|^2 \, \mathrm{d}\mu}$$

Banachräume. Aus der Höldersche Ungleichung (16.2) für $p = q = 2$ folgt, dass für $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bzw. $f, g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ die Funktion $f \cdot \bar{g}$ integrierbar ist. Also ist

$$(f, g) := \int f\bar{g} \, \mathrm{d}\mu$$

eine wohldefinierte Zahl in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$. Man zeigt unschwer, dass $(.,.)$ ein Skalarprodukt ist, wobei die von $(.,.)$ erzeugte Norm gerade $\|.\|_2$ ist. Insbesondere ist $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ versehen mit $(.,.)$ ein Hilbertraum. Dasselbe gilt für $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$.

(iii) Für $\Omega \neq \emptyset$ versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Teilmengen von Ω und mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$, $\mu(A) := \sum_{k \in A} 1$, schreibt man meist $\ell^2(\Omega, \mathbb{R})$ bzw. $\ell^2(\Omega, \mathbb{C})$ statt $L^2(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L^2(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{C})$; siehe Beispiel 16.3.3. Dabei gilt

$$((z_k)_{k\in\Omega}, (w_k)_{k\in\Omega}) = \sum_{k\in\Omega} z_k \cdot \bar{w}_k$$

für $(z_k)_{k\in\Omega}, (w_k)_{k\in\Omega}$ aus $\ell^2(\Omega, \mathbb{R})$ bzw. $\ell^2(\Omega, \mathbb{C})$; siehe Beispiel 14.6.3.

17.4.4 Definition. Sei $(H, (.,.))$ ein Skalarproduktraum. Eine indizierte Menge $\{e_i : i \in I\}$ von nichtverschwindenden Elementen aus H heißt *Orthogonalsystem*, wenn $(e_i, e_j) = 0$ für alle $i, j \in I$, $i \neq j$. Ein Orthogonalsystem heißt *Orthonormalsystem*, wenn zusätzlich $\|e_i\| = 1$ für alle $i \in I$.

Offenbar lässt sich jedes Orthogonalsystem $\{e_i : i \in I\}$ durch Normierung in das Orthonormalsystem $\{\frac{1}{\|e_i\|} e_i : i \in I\}$ überführen.
Aus der Linearen Algebra ist die folgende Proposition 17.4.5 bekannt. Wir bringen im Folgenden der Vollständigkeit halber den Beweis. Dazu sei an den Begriff einer Projektion erinnert. Das ist eine lineare Abbildung $P : H \to H$ mit $P \circ P = P$. Für eine solche Projektion ist H die direkte Summe von $P(H)$ und $\ker P$. Weiters bezeichnen wir im Folgenden für einen Hilbertraum H mit $M^\perp$ das *orthogonale Komplement* einer eine Teilmenge M, also

$$M^\perp = \{x \in H : (x, y) = 0 \ \text{ für alle } \ y \in M\}.$$

17.4.5 Proposition. *Sei I endlich und $\{e_i : i \in I\}$ ein Orthonormalsystem in einem Skalarproduktraum $(H, (.,.))$ über $\mathbb{R}$ oder über $\mathbb{C}$. Dann ist $\{e_i : i \in I\}$ linear unabhängig, es gilt*

$$H = \operatorname{span}\{e_i : i \in I\} \oplus \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}^\perp,$$

und

$$P : H \to H, \quad P(x) := \sum_{i\in I} (x, e_i)\, e_i$$

ist die Projektion mit $P(H) = \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ und $\ker P = P(H)^\perp$.

Beweis. Offenbar ist $P : H \to H$ definiert durch $P(x) := \sum_{i\in I}(x, e_i)\, e_i$ linear. Weiters gilt[2]

$$P(P(x)) = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in I}(x, e_j)e_j, e_i\Big)\, e_i \tag{17.6}$$
$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}(x, e_j)\underbrace{(e_j, e_i)}_{=\delta_{ij}}\, e_i = \sum_{i\in I}(x, e_i)\, e_i = Px\,,$$

womit P eine Projektion ist. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, ist H somit die direkte Summe von $\ker P$ und von $\operatorname{ran} P$. Offenbar gilt $\operatorname{ran} P \subseteq \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ und wegen $Pe_j = e_j$ sogar $\operatorname{ran} P = \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$. Aus $(\sum_{i\in I} c_i e_i, e_j) = c_j$ für reelle bzw. komplexe Zahlen c_i folgt die lineare Unabhängigkeit von $\{e_i : i \in I\}$. Folglich gilt $Px = 0$ genau dann, wenn $(x, e_i) = 0$ für alle $i \in I$, was aber zu $x \in \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}^\perp$ äquivalent ist. ❑

17.4.6 Bemerkung. Eine Projektion $P : H \to H$ auf einem Skalarproduktraum $(H, (.,.))$ nennt man *orthogonale Projektion*, wenn $P(H)$ orthogonal auf $\ker P$ steht, also wenn $\ker P \subseteq P(H)^\perp$. Weil H die direkte Summe von $P(H)$ und $\ker P$ ist, gilt in dem Fall sogar $\ker P = P(H)^\perp$.

17.4.7 Lemma. *Mit der Notation aus Proposition 17.4.5 gilt* $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2$ *und infolge*

$$\|Px\| \leq \|x\| \quad \text{für alle} \quad x \in H\,. \tag{17.7}$$

Zudem gilt $\|\sum_{i\in I} c_i e_i\|^2 = \sum_{i\in I}|c_i|^2$ *für* $c_1, \dots, c_n$ *aus* $\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$, *womit* $\|Px\|^2 = \sum_{i\in I}|(x, e_i)|^2$ *für alle* $x \in H$. *Schließlich ist* $\sum_{i\in I}(x, e_i)\, e_i$ *der eindeutige Vektor in* $\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ *mit minimalem Abstand zu* x *für jedes* $x \in H$.

Beweis. Sind $u, v \in H$ mit $u \perp v$, so gilt $(u + v, u + v) = (u, u) + (v, v)$. Wenden wir diese Tatsache auf $u = Px$ und $v = (I - P)x$ ($\in \ker P$) an, so erhalten wir die erste Gleichung. Wenden wir sie n-mal auf die Summe $c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ an, und beachten, dass $\|c_j e_j\|^2 = |c_j|^2$, so folgt die zweite Gleichung.
Um die letzte Behauptung zu zeigen, sei $y \in \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ beliebig. Der Abstand zum Quadrat von y zu x ist wegen $(x - Px) \in \ker P$ und $y - Px \in P(H)$

$$(x - y, x - y) = (x - Px + (Px - y), x - Px + (Px - y))$$
$$= (x - Px, x - Px) + (Px - y, Px - y) = \|x - Px\|^2 + \|Px - y\|^2\,.$$

Also gilt immer $\|x - y\| > \|x - Px\|$ außer im Fall $\|Px - y\|^2 = 0$ bzw. $y = Px$. ❑

Wir betrachten Orthonormalsystem $\{e_i : i \in I\}$ mit beliebig großer Indexmenge I. Für $B \in \mathcal{E}(I)$, also für ein endliches $B \subseteq I$, ist $(e_i)_{i\in B}$ ein endliches Orthonormalsystem. Die orthogonale Projektion $P_B : H \to H$ mit $P(H) = \operatorname{span}\{e_i : i \in B\}$ ist nach Proposition 17.4.5 gegeben durch

$$P_B x = \sum_{k\in B}(x, e_k)\, e_k\,,$$

aus Lemma 17.4.7 wissen wir

$$\|x\|^2 = \|(I - P_B)x\|^2 + \sum_{k\in B}|(x, e_k)|^2\,. \tag{17.8}$$

Wir erhalten somit folgenden Satz.

[2]Hier steht δ_{ij} für das Kronecker Delta, also $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$.

17.4.8 Satz. *Sei $(H, (.,.))$ ein Skalarproduktraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\{e_i : i \in I\}$ ein Orthonormalsystem. Für ein $x \in H$ gilt $\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 < +\infty$, also liegt $\big((x, e_i)\big)_{i\in I}$ in $\ell^2(I, \mathbb{R})$ bzw. $\ell^2(I, \mathbb{C})$. Außerdem konvergiert $\sum_{i\in I}(x, e_i)\, e_i$ im Sinne von Definition 9.3.4 unbedingt in H bezüglich $\|.\|$ gegen x genau dann, wenn $\sum_{i\in I} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$.*

Im Falle $I = \mathbb{N}$ erkennen wir leicht, wenn wir $B = \{1, \dots, N\}$ in (17.8) betrachten, dass die Aussagen in Satz 17.4.8 richtig bleiben, wenn wir statt der unbedingten die klassische Konvergenz einer Reihe meinen; vgl. Fakta 9.3.5.

17.4.9 Definition. Man bezeichnet $\sum_{i\in I}(x, e_i)\, e_i$ als *Fourierreihe* von x bezüglich des Orthonormalsystems $\{e_i : i \in I\}$, ob sie nun konvergiert, oder nicht. Konvergiert die Fourierreihe von jedem $x \in H$ gegen x, so heißt $\{e_i : i \in I\}$ *Orthonormalbasis* von H.

17.4.10 Proposition. *Mit der Notation aus Satz 17.4.8 ist $\{e_i : i \in I\}$ genau dann eine Orthonormalbasis von H, wenn die lineare Hülle von $\{e_i : i \in I\}$ dicht in H ist.*

Beweis. Da das Netz $\big(\sum_{k\in B}(x, e_k)\, e_k\big)_{B\in\mathcal{E}(I)}$ in $\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ liegt, folgt aus der Orthonormalbasiseigenschaft, dass $\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ dicht in H liegt.
Umgekehrt folgt aus der Dichtheit $\operatorname{span}\{e_i\}_{i\in I}$, dass es zu $\epsilon > 0$ ein $\sum_{k\in A} \alpha_k e_k \in \operatorname{span}\{e_i : i \in I\}$ mit $A \in \mathcal{E}(I)$ und skalaren α_k derart gibt, dass $\|x - \sum_{k\in A} \alpha_k e_k\| < \epsilon$. Mit (17.7) folgt für $A \subseteq B \in \mathcal{E}(I)$ wegen $P_B(\sum_{k\in A} \alpha_k e_k) = \sum_{k\in A} \alpha_k e_k$

$$\|x - P_B x\| \le \|x - \sum_{k\in A} \alpha_k e_k\| + \|P_B(\sum_{k\in A} \alpha_k e_k - x)\| \le 2\|x - \sum_{k\in A} \alpha_k e_k\| < 2\epsilon\,.$$

Wir schließen damit auf $\sum_{i\in I}(x, e_i)\, e_i = x$; vgl. Definition 9.3.4. ❑

Für Hilberträume erhalten wir folgendes, schönes Resultat.

17.4.11 Satz. *Sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\{e_i : i \in I\}$ eine Orthonormalbasis von H. Dann ist die Abbildung $\psi : H \to \ell^2(I, \mathbb{R})$ bzw. $\psi : H \to \ell^2(I, \mathbb{C})$ definiert durch*

$$\psi(x) = \big((x, e_i)\big)_{i\in I}$$

linear, bijektiv und isometrisch, wobei $\psi^{-1}((c_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} c_i e_i$ für alle $(c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I, \mathbb{R})$ ($\ell^2(I, \mathbb{C})$).

Beweis. Dass ψ den Raum H isometrisch nach $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ bzw. $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ hinein abbildet, folgt aus Satz 17.4.8. Die Linearität ist auch klar. Um die Surjektivität zu zeigen, sei $(c_i)_{i\in I}$ aus $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ bzw. $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Für $A, B \in \mathcal{E}(I)$ gilt

$$\left\|\sum_{k\in A} c_k e_k - \sum_{k\in B} c_k e_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k\in A\Delta B} c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k\in A\Delta B} |c_k|^2 = \left|\sum_{k\in A} |c_k|^2 - \sum_{k\in B} |c_k|^2\right|. \tag{17.9}$$

Da $\sum_{i\in I} |c_i|^2$, also das Netz $\big(\sum_{k\in A} |c_k|^2\big)_{A\in\mathcal{E}(I)}$ konvergiert, ist es ein Cauchy-Netz. Wegen (17.9) ist auch $\big(\sum_{k\in A} c_k e_k\big)_{A\in\mathcal{E}(I)}$ ein Cauchy-Netz und zwar in H bezüglich $\|.\|$. Da H ein Hilbertraum ist, konvergiert dieses Netz und damit $\sum_{i\in I} c_i e_i$; siehe Lemma 5.3.11. Da wegen $|(x, e_k)| \le \|x\|\,\|e_k\|$ die lineare Abbildung $x \mapsto (x, e_k)$ von H nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ beschränkt und infolge stetig ist, folgt

$$\Big(\sum_{i\in I} c_i e_i, e_k\Big) = \sum_{i\in I} c_i (e_i, e_k) = c_k\,,$$

womit $\psi(\sum_{i\in I} c_i e_i) = (c_i)_{i\in I}$. ❑

Im Falle $I = \mathbb{N}$ gelten die Aussagen in Satz 17.4.11 auch, wenn wir statt der unbedingten von $\sum_{i\in I} c_i e_i$ die klassische Konvergenz von $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ meinen.

17.4.12 Korollar. *Sei $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum und $\{e_i : i \in I\}$ ein Orthogonalsystem. Dann ist*

$$Px := \sum_{i\in I} (x, e_i)\, e_i$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung $P : H \to H$. Sie ist eine orthogonale Projektion mit Bildbereich $P(H) = c\ell(\operatorname{span}\{e_i : i \in I\})$.

Beweis. Nach Proposition 17.4.10 ist $\{e_i : i \in I\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes $X := c\ell(\operatorname{span}\{e_i : i \in I\})$; siehe Lemma 9.1.8. Gemäß Satz 17.4.8 liegt $((x, e_i))_{i\in I}$ in $\ell^2(I, \mathbb{R})$ bzw. $\ell^2(I, \mathbb{C})$, weshalb $\sum_{i\in I}(x, e_i)\, e_i = \psi^{-1}\Big(((x, e_i))_{i\in I}\Big)$ ein wohldefiniertes Element des Hilbertraumes $(X, (.,.))$ ist, wobei $\psi : X \to \ell^2(I, \mathbb{R})$ bzw. $\psi : X \to \ell^2(I, \mathbb{C})$ die Abbildung aus Satz 17.4.11 angewendet auf X ist.
Nach Satz 17.4.11 gilt auch $Px = \psi^{-1}(\psi(x)) = x$ für $x \in X$, was $P \circ P = P$ und $P(H) = X$ nach sich zieht. Schließlich gilt wegen der Bijektivität von ψ, dass $Px = \psi^{-1}\Big(((x, e_i))_{i\in I}\Big) = 0$ genau dann, wenn $x \in \{e_i : i \in I\}^\perp$, wobei $\{e_i : i \in I\}^\perp = X^\perp = P(H)^\perp$ wie aus der Linearität und Stetigkeit von $x \mapsto (x, e_j)$ folgt. ❑

17.4.13 Proposition. *Ist $(H, (.,.))$ ein Hilbertraum und $\{f_j : j \in J\}$ ein Orthogonalsystem darin, so gibt es immer eine Orthonormalbasis von H, welche alle Vektor aus $\{f_j : j \in J\}$ enthält.*
Weiters gibt es zu jedem abgeschlossenen Teilraum X von H eine orthogonale Projektion $P : H \to H$ mit $P(H) = X$.

Beweis. Wir schreiben $\{f_j : j \in J\}$ als Teilmenge F von H und bezeichnen mit $\mathcal{M}$ die Menge aller Orthogonalsysteme in H, welche F umfassen. Versehen mit $\subseteq$ ist $\mathcal{M}$ eine halbgeordnete Menge. Von einer durch $\subseteq$ total geordnete Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ überzeugt man leicht, dass $\bigcup_{E\in\mathcal{N}} E$ ein F umfassendes Orthonormalsystem in H ist, also eine obere Schranke von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ bildet. Nach dem Lemma von Zorn, Satz A.2.5, hat $\mathcal{M}$ ein maximales Element $E = \{e_i : i \in I\}$.
Wir nehmen an, $\{e_i : i \in I\}$ wäre keine Orthonormalbasis. Bezeichnet P die dazugehörige orthogonale Projektion aus Korollar 17.4.12, so können wir H als direkte Summe von dem echten Unterraum $P(H) = c\ell(\operatorname{span}\{e_i : i \in I\})$ und von $P(H)^\perp$ schreiben. Weil damit $P(H)$ nicht der Nullraum wäre, gibt es ein $e \in P(H)^\perp$ mit $\|e\| = 1$. Geben wir e zu $\{e_i : i \in I\}$ hinzu, so erhalten wir ein echt größeres Element von $\mathcal{M}$ als $\{e_i : i \in I\}$, was der Maximalität von E widerspricht.
Ist schließlich X ein abgeschlossener Teilraum von H, so ist dieser für sich ein Hilbertraum und hat nach dem eben bewiesenen eine Orthonormalbasis $\{e_i : i \in I\}$. Nach Proposition 17.4.10 gilt $X = c\ell(\operatorname{span}\{e_i : i \in I\})$. Die Existenz einer orthogonalen Projektion $P : H \to H$ mit $P(H) = X$ folgt aus Korollar 17.4.12. ❑

17.5 Fourierreihen auf $L^2[-\pi, \pi]$

Wir betrachten hier den Hilbertraum $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}}, \mathbb{C})$ versehen mit

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f \cdot \bar{g}\, d\lambda\,,$$

und schreiben kurz $L^2[-\pi,\pi]$ dafür. Sind $m,n\in\mathbb{Z}$, so gilt

$$\begin{aligned}(\exp(n\mathrm{i}.),\exp(m\mathrm{i}.)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(n\mathrm{i}t)\cdot\overline{\exp(m\mathrm{i}t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp((n-m)\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases}1, & \text{falls } m=n,\\ 0, & \text{falls } m\neq n.\end{cases}\end{aligned}$$

Also bildet $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ mit $e_n(t) := \exp(n\mathrm{i}t)$ ein Orthonormalsystem in $L^2[-\pi,\pi]$.

17.5.1 Lemma. *Das Orthonormalsystem $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis in $L^2[-\pi,\pi]$.*

Beweis. Zu $f\in L^2[-\pi,\pi]$ und jedem $\epsilon>0$ gibt es nach Korollar 16.6.5 ein $g\in C_{00}^\infty((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ mit $\|f-g\|_2<\epsilon$. Weil $[-\pi,\pi)\ni t\mapsto\exp(\mathrm{i}t)\in\mathbb{T}$ bijektiv ist, gibt es eine Funktion $\phi:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ mit $g(t)=\phi(\exp(\mathrm{i}t))$ für $t\in(-\pi,\pi)$ und $\phi(-1)=0$.
Wählen wir $\alpha>0$ mit $\operatorname{supp}(g)\subseteq(-\alpha,+\alpha)\subseteq[-\alpha,+\alpha]\subseteq(-\pi,\pi)$, so gilt $\phi(\zeta)=0$ für ζ in der kompakten Menge $\exp(\mathrm{i}\cdot([-\pi,-\alpha]\cup[+\alpha,+\pi]))$, womit ϕ auf dieser Menge stetig ist. Wegen Korollar 12.12.10, angewendet auf $\exp(\mathrm{i}.):[-\alpha,+\alpha]\to\exp(\mathrm{i}\cdot[-\alpha,+\alpha])$, ist ϕ auch auf der kompakten Menge $\exp(\mathrm{i}\cdot[-\alpha,+\alpha])$ stetig. Infolge ist ϕ auf ganz $\mathbb{T}=\exp(\mathrm{i}\cdot([-\pi,-\alpha]\cup[+\alpha,+\pi]))\cup\exp(\mathrm{i}\cdot[-\alpha,+\alpha])$ stetig; vgl. Lemma 12.7.4.
Nach Beispiel 12.18.10 gibt es eine Funktion der Bauart $\sum_{n=-N}^{+N}c_n\zeta^n$ mit

$$\sup_{t\in[-\pi,\pi]}\Big|\sum_{n=-N}^{+N}c_n\exp(n\mathrm{i}t)-g(t)\Big| = \sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\Big|\sum_{n=-N}^{+N}c_n\zeta^n-\phi(\zeta)\Big|<\epsilon.$$

Somit ist das trigonometrische Polynom $h(t)=\sum_{n=-N}^{+N}c_n\exp(n\mathrm{i}t)$ ein Element aus der linearen Hülle von $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ mit $\|g-h\|_\infty<\epsilon$. Wegen $\|g-h\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}|h-g|^2\,d\lambda\le\|g-h\|_\infty^2$ folgt $\|f-h\|_2<2\epsilon$, womit die lineare Hülle von $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ dicht in $L^2[-\pi,\pi]$ liegt. Wir erhalten die Aussage daher aus Proposition 17.4.10. ❑

Nach Satz 17.4.11 stellt $f\mapsto(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit den *Fourierkoeffizienten*

$$c_n=(f,\exp(n\mathrm{i}.))=\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}f(t)\exp(-n\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}\lambda(t)\quad\text{für}\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{17.10}$$

eine lineare, isometrische Bijektion von $L^2[-\pi,\pi]$ auf $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ dar, wobei die *Fourierreihe*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\exp(n\mathrm{i}t) \tag{17.11}$$

bezüglich der von $(.,.)$ induzierten Norm $\|.\|_2$ gegen f konvergiert. Man beachte dabei, dass[3]für $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$

$$\lim_{n\to\pm\infty}c_n=0. \tag{17.12}$$

Interessant ist die Frage, ob (17.11) vielleicht auch in einem anderen Sinn, etwa im Sinne der punktweisen oder gleichmäßigen Konvergenz, konvergiert.

[3]Siehe Proposition 3.9.7.

17.5.2 Bemerkung. Fassen wir in (17.11) die Summanden $+n$ und $-n$ zusammenfassen und beachten (17.12), so erkennen wir, dass (17.11) genau dann konvergiert, wenn die Funktionenreihe

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \exp(mit) + c_{-m} \exp(-mit))$$
$$= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\underbrace{(c_m + c_{-m})}_{=:a_m} \cos(mt) + \underbrace{\mathrm{i}(c_m - c_{-m})}_{=:b_m} \sin(mt) \Big) \tag{17.13}$$

es tut, und zwar gilt diese Äquivalenz jeweils im punktweisen Sinn, im gleichmäßigen Sinn, oder bezüglich $\|.\|_2$. Man rechnet leicht nach, dass dabei für $m \in \mathbb{N}$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(t) \cos(mt) \, d\lambda(t), \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(t) \sin(mt) \, d\lambda(t) .$$

Aus (17.12) erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 . \tag{17.14}$$

Beachte, dass für reellwertige Funktionen f offenbar $\bar{c}_n = c_{-n}$ gilt, und damit die a_m und die b_m sowie c_0 alle reell sind. Weiters gilt für *gerade Funktionen*, also $f(t) = f(-t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, immer $b_m = 0$ und somit $c_m = c_{-m}$, und für *ungerade Funktionen*, also $f(t) = -f(-t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, immer $a_m = 0$ sowie $c_0 = 0$ und infolge $c_m = -c_{-m}$ für $m \in \mathbb{N}$.

17.5.3 Beispiel. Betrachte die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} +\frac{\pi}{4}, & \text{falls } x \in (0, \pi] , \\ 0, & \text{falls } x \in \{0, -\pi, +\pi\} , \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{falls } x \in [-\pi, 0) . \end{cases}$$

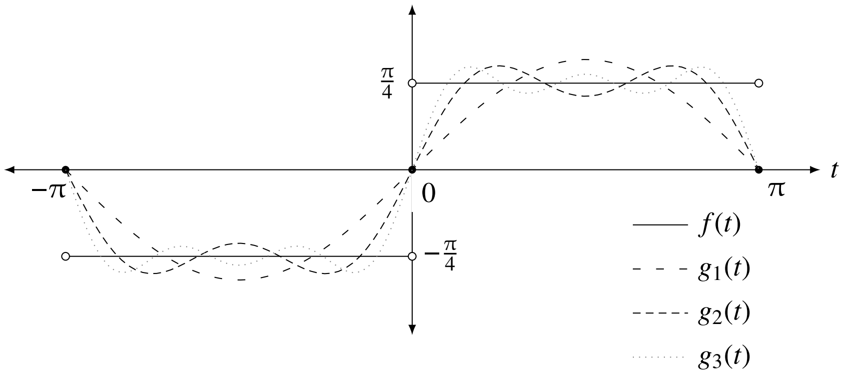
Da die Funktion ungerade ist, gilt $c_0 = 0$ sowie $a_m = 0$ bzw. $c_m = -c_{-m} = \frac{b_m}{2i}$. Die Reihe in (17.13) wird also eine reine Sinusreihe. Man berechnet elementar, dass $b_m = 0$ für gerade $m \in \mathbb{N}$ und $b_m = \frac{1}{m}$ für ungerade $m \in \mathbb{N}$. Also hat (17.13) für diese Funktion die Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} .$$

Diese Reihe konvergiert bezüglich $\|.\|_2$ gegen f. Wir können aber bis jetzt nichts über die Konvergenz dieser Reihe, also der Folge der Partialsummen

$$g_N(t) := \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1}, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

im punktweisen Sinne geschweige denn im gleichmäßigen Sinne aussagen.



Wir wenden uns der Frage nach punktweiser Konvergenz der Fourierreihe zu. Sei zunächst $f(x)$ ein trigonometrisches Polynom vom Grad $\leq N$; siehe Bemerkung 6.10.3. Da die k-te Partialsumme

$$s_k(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{k} (c_m \exp(m\mathrm{i}x) + c_{-m}\exp(-m\mathrm{i}x)) = c_0 + \sum_{m=1}^{k} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

der Reihe in (17.13) gerade die Projektion $P(f)$ aus Proposition 17.4.5 von f auf die lineare Hülle von $\exp(m\mathrm{i}.)$, $m \in \{-k, \dots, +k\}$ ist, folgt $s_k(x) = f(x)$ für $k \geq N$. Also konvergiert $(s_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ für alle x.

Die k-te Partialsumme $s_k(x)$ der Reihe in (17.13) für eine beliebige Funktion $f \in L^2[-\pi, \pi]$ lässt sich folgendermaßen umschreiben

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{k} \Big(\int_{[-\pi,\pi]} f(t) \exp(-m\mathrm{i}t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \cdot \exp(m\mathrm{i}x) +$$
$$\int_{[-\pi,\pi]} f(t) \exp(m\mathrm{i}t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \cdot \exp(-m\mathrm{i}x) \Big) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t) \cdot \Big(\sum_{n=-k}^{k} \exp(n\mathrm{i}(x-t)) \Big) \mathrm{d}\lambda(t) \,.$$

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ setzten wir $D_k(t) := \sum_{n=-k}^{k} \exp(n\mathrm{i}t)$ und erhalten

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t)\, D_k(x-t) \,\mathrm{d}\lambda(t) \,. \tag{17.15}$$

Die Funktion $D_k(t)$ heißt *Dirichlet-Kern* und ist 2π periodisch. Man sieht leicht mit Hilfe der Formel $(1-q)(1+q+\cdots+q^m) = (1-q^{m+1})$, dass sich D_k schreiben lässt als

$$D_k(t) = \sum_{n=-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \exp(-k\mathrm{i}t) \frac{1-\exp((2k+1)\mathrm{i}t)}{1-\exp(\mathrm{i}t)} \tag{17.16}$$
$$= \frac{\exp((-k-\frac{1}{2})\mathrm{i}t) - \exp((k+\frac{1}{2})\mathrm{i}t)}{\exp(-\frac{1}{2}\mathrm{i}t) - \exp(\frac{1}{2}\mathrm{i}t)} = \frac{\sin\big((k+\frac{1}{2})t\big)}{\sin\frac{t}{2}} = \big(\cos kt + \cot\frac{t}{2} \cdot \sin kt \big) \,.$$

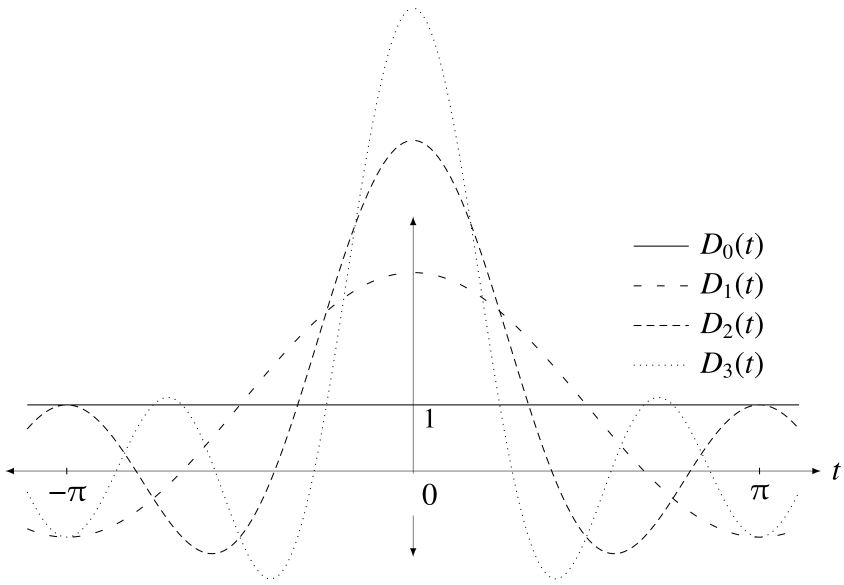


Abbildung 17.1: Dirichlet-Kern

Nehmen wir uns eine Funktion $f \in L^2[-\pi,\pi]$ her, vernachlässigen den Funktionswert bei π und setzen $f|_{[-\pi,\pi)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ zu einer 2π-periodischen[4] Funktion $f_\sim$ fort, so können wir (17.15) in der Form

$$s_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f_\sim(x+t)\, D_k(t)\, \mathrm{d}\lambda(t) \tag{17.17}$$

schreiben. Man beachte, dass dieser Ausdruck für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und wie $f_\sim$ auch 2π-periodisch ist. Wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\, \mathrm{d}t = 2\pi$$

konvergiert die Folge der Partialsummen s_k in einem Punkt x gegen ein $s(x) \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]} (f_\sim(x+t) - s(x))\, D_k(t)\, \mathrm{d}\lambda(t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{17.18}$$

Folgender Satz liefert uns ein hinreichendes und einfach nachzuprüfendes Kriterium für die Konvergenz der Folge $(s_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$.

17.5.4 Satz. *Sei $f \in L^2[-\pi,\pi]$ und $f_\sim$ die 2π-periodische Fortsetzung von $f|_{[-\pi,\pi)}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Existieren für festes $x \in \mathbb{R}$ die einseitigen Limites*

$$f_\sim(x+) := \lim_{t\to x+} f_\sim(t) \quad \textit{und} \quad f_\sim(x-) := \lim_{t\to x-} f_\sim(t)$$

sowie die verallgemeinerten einseitigen Ableitungen

$$f_\sim{}'(x+) := \lim_{h\to 0+} \frac{f_\sim(x+h) - f_\sim(x+)}{h} \quad \textit{und} \quad f_\sim{}'(x-) := \lim_{h\to 0-} \frac{f_\sim(x+h) - f_\sim(x-)}{h}\,,$$

[4]Eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt 2π-periodisch, wenn $h(x) = h(x+2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

dann folgt

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = \frac{f_\sim(x+) + f_\sim(x-)}{2}\,. \tag{17.19}$$

Beweis. Wegen (17.18) lässt sich die gewünschte Beziehung (17.19) umformulieren zu[5]

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[-\pi,\pi]} \left(f_\sim(x+t) - \frac{f_\sim(x+) + f_\sim(x-)}{2}\right) D_k(t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[0,\pi]} \left(f_\sim(x+t) + f_\sim(x-t) - f_\sim(x+) - f_\sim(x-)\right) D_k(t)\,\mathrm{d}\lambda(t) = 0\,.$$

Mit Hilfe von (17.16) sehen wir, dass dieses Integral übereinstimmt mit

$$\int\limits_{(0,\pi)} \left(f_\sim(x+t) + f_\sim(x-t) - f_\sim(x+) - f_\sim(x-)\right)\cdot \cos kt\,\mathrm{d}\lambda(t)$$
$$+ \int\limits_{(0,\pi)} \left(\frac{f_\sim(x+t) + f_\sim(x-t) - f_\sim(x+) - f_\sim(x-)}{\sin\frac{t}{2}} \cos\frac{t}{2}\right)\cdot \sin kt\,\mathrm{d}\lambda(t)\,. \tag{17.20}$$

Die Funktion in der Klammer im ersten Integral ist offenbar in $L^2[-\pi,\pi]$. Das erste Integral ist also bis auf eine von k unabhängige multiplikative Konstante die Summe $c_{-k} + c_k = a_k$ der Fourierkoeffizienten der Funktion

$$\left(f_\sim(x+t) + f_\sim(x-t) - f_\sim(x+) - f_\sim(x-)\right)\cdot \mathbb{1}_{(0,\pi)}\,,$$

konvergiert daher für $k\to\infty$ gegen Null; siehe (17.12).
Die Funktion g in der Klammer des zweiten Integrals erfüllt

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f_\sim(x+t) - f_\sim(x+) + f_\sim(x-t) - f_\sim(x-)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\cos\frac{t}{2} =$$

$$\lim_{t\to 0+}\left(\frac{f_\sim(x+t) - f_\sim(x+)}{t} + \frac{f_\sim(x-t) - f_\sim(x-)}{t}\right)\cdot\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\cos\frac{t}{2} = 2(f'_\sim(x+) - f'_\sim(x-))\,.$$

Insbesondere ist $g\cdot\mathbb{1}_{(0,\pi)}$ auf einem hinreichend kleinen Intervall $(0,\delta]$ beschränkt. Auf (δ,π) überträgt sich die Tatsache, dass $t\mapsto f_\sim(x+t)+f_\sim(x-t)$ quadratisch integrierbar ist, auf $g\cdot\mathbb{1}_{(0,\pi)}$. Insgesamt liegt $g\cdot\mathbb{1}_{(0,\pi)}$ in $L^2[-\pi,\pi]$. Also gleicht das zweite Integral in (17.20) wieder bis auf eine multiplikative Konstante der Differenz $c_k - c_{-k} = -\mathrm{i}\,b_k$ der Fourierkoeffizienten der Funktion $g\cdot\mathbb{1}_{(0,\pi)}$ und konvergiert daher gegen Null. ❑

17.5.5 Bemerkung. Ist f gemäß Definition 11.1.9 stückweise stetig differenzierbar auf $[-\pi,\pi]$, so sind die Voraussetzungen von Satz 17.5.4 für alle $x\in\mathbb{R}$ erfüllt. Also konvergiert die Fourierreihe bei Stetigkeitspunkten x von $f_\sim$ gegen $f_\sim(x)$ und sonst gegen $\frac{f_\sim(x+)+f_\sim(x-)}{2}$.

[5] Man beachte, dass $D_k(t)$ eine gerade Funktion ist.

17.5.6 Beispiel. Wir betrachten $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$. Die 2π-periodische Fortsetzung dieser Funktion, die sogenannte Sägezahnfunktion, ist stückweise stetig differenzierbar. Also konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f. Da f gerade ist, gilt $b_m = 0$ und damit $c_m = c_{-m}$; vgl. Bemerkung 17.5.2. Für $m > 0$ gilt zudem

$$\begin{aligned} c_m = c_{-m} = \frac{a_m}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos mt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos mt \, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{m\pi} \int_0^{\pi} \sin mt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{m^2\pi} (\cos m\pi - \cos 0) = \frac{1}{m^2\pi} ((-1)^m - 1) , \end{aligned}$$

sowie $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Also erhalten wir für jedes $x \in [-\pi, \pi]$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) \exp(nix) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} \cos((2m-1)x) .$$

Insbesondere gilt für $x = 0$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} .$$

17.5.7 Bemerkung. Für $f \in L^2([-\tau, \tau], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\tau,\tau]}, \frac{1}{2\tau}\lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\tau,\tau]}}, \mathbb{C})$ mit einem $\tau > 0$ liegt $[-\pi, \pi] \ni t \mapsto f(\frac{\tau}{\pi} \cdot t) \in \mathbb{C}$ in $L^2[-\pi, \pi]$. In der Fourierreihe dieser Funktion in der Form (17.11) bzw. in der Form (17.13) können wir wieder $t = \frac{\pi}{\tau} x$ rücksubstituieren und erhalten eine Fourierreihe der Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp\Big(ni\frac{\pi}{\tau} x\Big) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(a_m \cos\Big(m\frac{\pi x}{\tau}\Big) + b_m \sin\Big(m\frac{\pi x}{\tau}\Big)\Big)$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2\tau} \int_{[-\tau,\tau]} f(x) \exp(-ni\frac{\pi}{\tau} x) \, \mathrm{d}\lambda(x) ,$$

$$a_m = \frac{1}{\tau} \int_{[-\tau,\tau]} f(x) \cos\Big(m\frac{\pi}{\tau} x\Big) \, \mathrm{d}\lambda(x), \quad b_m = \frac{1}{\tau} \int_{[-\tau,\tau]} f(x) \sin\Big(m\frac{\pi}{\tau} x\Big) \, \mathrm{d}\lambda(x) .$$

Hat man zum Beispiel eine Funktion $g(x)$ am Intervall $[0, 1]$ gegeben und möchte man diese in eine reine Sinusreihe entwickeln, so geht man folgendermaßen vor. Zunächst definiert man eine Funktion f auf $[-1, 1]$, indem man g ungerade fortsetzt, also

$$f(x) := \begin{cases} -g(-x) , & \text{falls } x \in [-1, 0) , \\ 0 , & \text{falls } x = 0 , \\ g(x) , & \text{falls } x \in (0, 1] . \end{cases}$$

Diese Funktion entwickelt man auf $[-1, 1]$ in eine Fourierreihe. Das ist eine reine Sinusreihe, da wir f ja als ungerade definiert haben. Eingeschränkt auf $[0, 1]$ erhalten wir die gewünschte Entwicklung von g.

17.5.8 Satz (*Lokalisationsprinzip**)**.** *Für jedes $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $g \in L^2[-\pi,\pi]$ und für die 2π-periodische Fortsetzung $g_\sim$ von $g|_{[-\pi,\pi)}$ auf $\mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} g_\sim(x+t)\, D_k(t)\, \mathrm{d}\lambda(t) = 0\,. \tag{17.21}$$

Somit hängt das Verhalten der Partialsummen $s_k(x)$ einer Funktion $f \in L^2[-\pi,\pi]$ nur von den Werten von $f_\sim$ lokal bei x ab. Genauer gesagt konvergiert $s_k(x)$ gegen einen Wert $s(x)$ genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{[-\delta,\delta]} (f_\sim(x+t) - s(x))\, D_k(t)\, \mathrm{d}\lambda(t) = 0\,. \tag{17.22}$$

Beweis. Die Funktionen

$$\alpha(t) := \begin{cases} g_\sim(t+x)\,, & \text{falls } t \in [-\pi,-\delta) \cup (+\delta,+\pi]\,, \\ 0\,, & \text{falls } t \in [-\delta,+\delta]\,, \end{cases}$$

$$\beta(t) := \begin{cases} g_\sim(t+x)\cot\frac{t}{2}\,, & \text{falls } t \in [-\pi,-\delta) \cup (+\delta,+\pi]\,, \\ 0\,, & \text{falls } t \in [-\delta,+\delta]\,, \end{cases}$$

liegen in $L^2[-\pi,\pi]$, da $\cot\frac{t}{2}$ auf $[-\pi,-\delta] \cup [+\delta,+\pi]$ stetig und infolge beschränkt ist. Mit (17.16) erhalten wir

$$\int\limits_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} g_\sim(t+x)\, D_k(t)\, \mathrm{d}\lambda(t) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} \alpha(t)\cos kt\, \mathrm{d}t + \int\limits_{[-\pi,\pi]} \beta(t)\sin kt\, \mathrm{d}\lambda(t)\,.$$

Die rechte Seite ist die Summe von Fourierkoeffizienten von $L^2[-\pi,\pi]$-Funktionen, was gemäß (17.12) die Konvergenz dieses Ausdrucks gegen Null impliziert. Schließlich folgt (17.22) mit $g(t) := f(t) - s(x)$ aus (17.18) und (17.21). ❑

17.5.9 Bemerkung. Das Lokalisationsprinzip zeigt einen grundlegenden Unterschied zwischen trigonometrischen Reihen und Potenzreihen auf. Stimmen nämlich zwei Funktionen in einer Umgebung des Entwicklungspunktes überein, so haben sie die selbe Taylorreihe. Dagegen folgt für die entsprechenden Fourierreihen nur, dass sie sich lokal bei diesem Punkt gleich verhalten.

17.6 Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen*

Falls die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(nit)$ einer Funktion $f \in L^2[-\pi,\pi]$ auf $[-\pi,\pi]$ und wegen der 2π-Periodizität damit auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, so ist die Grenzfunktion als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen sicherlich stetig. Damit die Fourierreihe f als gleichmäßigen Grenzwert hat, ist es also notwendig, dass auch f stetig ist.

Für ein hinreichendes Kriterium betrachten wir ein stetiges und stückweise stetig differenzierbares $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Insbesondere gibt es eine Zerlegung $-\pi = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \pi$ von $[-\pi,\pi]$ derart, dass $f|_{[t_{j-1},t_j]}$ stetig differenzierbar ist; siehe Definition 11.1.9 und danach.

Infolge ist f beschränkt und liegt daher in $L^2[-\pi,\pi]$. Wir definieren $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ durch $g(x) = f'(x)$, wenn f bei x differenzierbar ist, und durch $g(x) = 0$ sonst. Also gilt $g(x) = f'(x)$ für

alle $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{t_0, \dots, t_n\}$, und $g|_{(t_{j-1},t_j)}$ hat die stetige Fortsetzung $(f|_{[t_{j-1},t_j]})'$ auf $[t_{j-1}, t_j]$, womit auch g beschränkt ist und daher in $L^2[-\pi, \pi]$ liegt.
Bezeichnen $\gamma_n,\ n \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von g, so folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} g(t) \exp(-nit)\, d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{[t_{j-1},t_j]} (f|_{[t_{j-1},t_j]})'(t) \exp(-nit)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} (f(t_j) \exp(-nit_j) - f(t_{j-1}) \exp(-nit_{j-1})) \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{[t_{j-1},t_j]} f|_{[t_{j-1},t_j]}(t)\, (-in)\, \exp(-nit)\, d\lambda(t) \\
&= f(\pi) \exp(-ni\pi) - f(-\pi) \exp(ni\pi) + inc_n = inc_n\,.
\end{aligned}$$

Aus diesen Überlegungen ergibt sich folgender Satz.

17.6.1 Satz. *Ist $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $f(-\pi) = f(\pi)$, so konvergiert ihre Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(nit)$ absolut als Funktionenreihe und somit auch gleichmäßig gegen die 2π-periodische Fortsetzung $f_\sim$ von $f|_{[-\pi,\pi)}$.*

Beweis. Wir verwenden obige Notation. Nach Satz 17.4.8 ist die Folge der Fourierkoeffizienten $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von g quadratisch summierbar, also $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_n|^2$. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Lemma 3.1.4, folgt

$$\sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N} |c_n| = \sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N} \frac{|nc_n|}{|n|} = \sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N} \frac{|\gamma_n|}{|n|} \leq \Big(\sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n^2} \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N} |\gamma_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

womit für $N \to \infty$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \|c_n \cdot \exp(ni.)\|_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n| \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\gamma_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\,.$$

Nach Korollar 6.8.4 konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(ni.)$ absolut als Funktionenreihe und damit auch gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ und zwar wegen Satz 17.5.4 gegen $f_\sim$. ❑

17.7 Übungsaufgaben

17.1 Für $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger zeige man, dass sich $\hat{f}$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ definierten und holomorphen Funktion fortsetzen lässt!

17.2 Sei $f(t) = e^{-|t|}$. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}(\zeta)$. Weiters bestimme man $[\widehat{|t|e^{-|t|}}](\zeta)$ sowie $[\widehat{te^{-|t|}}](\zeta)$.

Hinweis: Fakta 17.1.4 könnte hilfreich sein.

17.3 Man berechne für $a > 0$ die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$ und von $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Geben Sie auch an, ob dabei $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ und/oder $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

17.4 Man berechne die Fouriertransformierte von $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)$ und bestimme damit die Fouriertransformierte von $\operatorname{sgn}(x) \cdot \mathrm{e}^{-|x|}$.

17.5 Man bestimme die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sowie von $\frac{4}{3+2x+x^2}$.

Hinweis: Fakta 17.1.4 könnte hilfreich sein für die zweite Funktion.

17.6 Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ stetig und derart, dass $f|_{\mathbb{R}\setminus M}$ stetig differenzierbar ist, wobei $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich ist. Sei $g := f'$ auf $\mathbb{R} \setminus M$ und sei g irgendwie auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Wir nehmen an, dass $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass dann $\lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0$ und $\hat{g}(\zeta) = \mathrm{i}\zeta\hat{f}(\zeta)$.

Mit Hilfe dieser Tatsache bestimme man schließlich, welche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus $L^1(\mathbb{R})$ als Fouriertransformierte die Funktion $\frac{4y}{3+2y+y^2}$ hat.

17.7 Bestimmen Sie $U(f)$ für $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ und $f(x) = \frac{\cos x-1}{x}$, wobei $U(f)$ gemäß Satz 17.2.6 definiert ist. Beachten Sie dabei, dass diese Funktion nicht integrierbar sind, aber dass sie in $L_2(\mathbb{R})$ liegen.

Hinweis: Fakta 17.1.4, Beispiel 17.1.7 und Übungsaufgabe 15.35.

17.8 Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformation $\hat{}$ aus Bemerkung 17.2.7 gilt, dass sie eine beschränkte lineare Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ nach $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ abgibt; vgl. Satz 17.1.2.

17.9 Zeigen Sie für die Fouriertransformation $\hat{}$ aus Bemerkung 17.2.7, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ und $\hat{f}(z) = \prod_{j=1}^d \hat{f}_j(z_j)$, wenn $f(x) = \prod_{j=1}^d f_j(x_j)$ mit $f_1, \dots, f_d \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \lambda, \mathbb{C})$.

Weiters bestimme man $\hat{f}(z)$ für $f(x) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \max(n_j - n_j^2|x_j|)$ mit $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$ und schließlich auch $\hat{\hat{f}}(w)$, falls $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$.

17.10 Formulieren und beweisen Sie die zu Satz 17.1.12 und Korollar 17.1.13 analogen Resultate für die Fouriertransformation $\hat{}: L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C}) \to C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ aus Bemerkung 17.2.7.

17.11 Man berechne $\sigma(f)$ und $\mathcal{L}_c(f)(z)$ für $f(t) = t^n$ und für $f(t) = t^n \mathrm{e}^{wt}$ mit $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

17.12 Seien $a > 0, b \in \mathbb{R}$ und $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ messbar.

Zeigen Sie, dass $\sigma(g) = \sigma(f)$ und $\mathcal{L}_c(g)(z) = \mathrm{e}^{-az}\mathcal{L}_c(f)(z)$, wenn $g(x) = 0$ für $0 \le x < a$ und $g(x) = f(x-a)$ für $a \le x$.

Zeigen Sie weiters, dass $\sigma(g) = \sigma(f) + \operatorname{Re} b$ und $\mathcal{L}_c(g)(z) = \mathcal{L}_c(f)(z-b)$, wenn $g(x) = f(x)\exp(xb)$.

17.13 Man berechne $\sigma(f)$ und $\mathcal{L}_c(f)(z)$ für $f(t) = \sin wt$ sowie für $f(t) = \cos wt$, wobei $w \in \mathbb{C}$.

17.14 Zeigen Sie, dass für messbare $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ die Ungleichung $\sigma(f * g) \le \max(\sigma(f), \sigma(g))$ gilt. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > \max(\sigma(f), \sigma(g))$ zeige man auch

$$\mathcal{L}_c(f * g)(z) = \mathcal{L}_c(f)\mathcal{L}_c(g)(z) .$$

17.15 Sei $f \in C^k[0,+\infty)$. Zeigen Sie, dass für $\operatorname{Re} z > \max_{j=0,\dots,k} \sigma(f^{(j)})$

$$\mathcal{L}_c(f^{(k)})(z) = z^k \mathcal{L}_c(f)(z) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0) z^{k-1-j}\,.$$

Bemerkung: Dieser Sachverhalt kann dazu verwendet werden, um Differentialgleichungen zu lösen. Erfüllt nämlich $f \in C^k[0,+\infty)$ eine Differentialgleichung der Form

$$af'' + bf' + cf = g,\ f(0) = d_1, f'(0) = d_2,$$

für Konstante $a, b, c, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ und einer Laplacetransformierbaren Funktion g, so folgt für hinreichend großes $\operatorname{Re} z$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_c(g)(z) &= a\mathcal{L}_c(f'')(z) + b\mathcal{L}_c(f')(z) + c\mathcal{L}_c(f)(z)\\ &= a(z^2\mathcal{L}_c(f)(z) - zf(0) - f'(0)) + b(z\mathcal{L}_c(f)(z) - f(0)) + c\mathcal{L}_c(f)(z)\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathcal{L}_c(f)(z) = \frac{\mathcal{L}_c(g)(z) + ad_1z + ad_2 + bd_1}{az^2 + bz + c}\,.$$

Um f zu erhalten, muss man noch die Inverse Laplacetransformierte der rechten Seite suchen, also eine Funktion, deren Laplacetransformierte genau die rechte Seite ist. Sollte die rechte Seite eine rationale Funktion sein, so wendet man dafür zunächst komplexe Partialbruchzerlegung an. In der Praxis verwendet man meist Transformationstabellen. Auch Gleichungen höherer Ordnung lassen sich so behandeln.

17.16 Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformierten folgende Differentialgleichung:

$$f''(t) + 4f'(t) = \cos 2t,\ \ f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1\,.$$

17.17 Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformierten folgende Differentialgleichung:

$$f''(t) + 4f(t) = h(t),\ \ f(0) = 1, f'(0) = 0\,,$$

wobei $h(t) = 4t\mathbb{1}_{[0,\pi)}(t) + 4\pi\mathbb{1}_{[\pi,+\infty)}(t)$.

Hinweis: Schreiben sie $h(t)$ als $4t - 4(t-\pi)\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)$.

17.18 Sei μ ein endliches Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$. Man zeige, dass die Fouriertransformierte

$$\hat{\mu}(\zeta) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\mathrm{i}x\zeta)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

des Maßes μ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ abgibt. Weiters zeige man, dass für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ und $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar{\xi}_j\, \hat{\mu}(t_j - t_i) \geq 0\,.$$

Anmerkung: Letztere Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass für $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ die $n \times n$-Matrix $(\hat{\mu}(t_j - t_i))_{i,j=1}^n$ positiv semidefinit ist.

Funktionen mit dieser Eigenschaft heißen positiv definit. Es gilt der Satz von Bochner, der besagt, dass jede stetige positiv definite Funktion die Fouriertransformierte eines eindeutig bestimmten Maßes ist.

17.19 Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass ψ auf $[0, \frac{1}{2})$ den Wert 1 und auf $(\frac{1}{2}, 1]$ den Wert -1 annimmt; bei $\frac{1}{2}$ und außerhalb von $[0,1]$ sei sie Null. Nun setze für $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $0 \leq k < 2^j$

$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k), \quad x \in [0,1]\,.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\{\psi_{j,k}|_{[0,1]} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leq k < 2^j\}$ der Haarschen Funktionen ein Orthogonalsystem auf $L^2([0,1], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,1]}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,1]}}, \mathbb{C})$ bildet!

Hinweis: Skizzieren Sie die Funktionen.

17.20 Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, komplexwertige und messbare Funktion. Wir nehmen auch an, dass f 2π-periodisch ist, also $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man beweise, dass für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_{[-\pi,\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,2\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[\alpha,\alpha+2\pi]} f \,\mathrm{d}\lambda$$

in dem Sinne, dass wenn eines dieser Integrale existiert, dann auch die beiden anderen existieren und alle diese Integrale übereinstimmen.

Weiters zeige man, dass für ungerade ($g(-x) = -g(x)$) integrierbare Funktionen $g : [-b,b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = 0$, und dass für gerade ($g(-x) = g(x)$) integrierbare Funktionen $g : [-b,b] \to \mathbb{C}$ immer $\int_{[-b,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = 2 \int_{[0,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$.

17.21 Weisen Sie ausgehend von (17.15) die Gleichung (17.17) nach und zeigen Sie, dass $\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

17.22 Sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Man berechne die Fourierreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f, e_n) e_n$ von f bezüglich der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(x) = \exp(inx)$ in dem Hilbertraum $L^2([-\pi,\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$!

17.23 Zeigen Sie, dass in $L^2([-\pi,\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$$

ein Orthogonalsystem abgibt. Wie muss man diese Funktionen skalieren, um ein Orthonormalsystem $\{f_n : \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ zu erhalten? Zeigen Sie, dass $\{f_n : \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ dann sogar eine Orthonormalbasis ist! Diskutieren Sie auch den Zusammenhang der Fourierreihe bezüglich dieser Orthonormalbasis und der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ aus dem vorherigen Beispiel. Schließlich gebe man die Fourierreihe bezüglich $\{f_n : \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ für die Funktion aus dem vorherigen Beispiel an!

17.24 Sei $f \in L^2([-\pi,\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$ ungerade, also $f(-x) = -f(x)$. Zeigen Sie, dass dann in der Fourierreihe von f bezüglich der Orthonormalbasis $\{f_n : \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ aus dem vorherigen Beispiel nur $\sin mx$ Terme auftreten!

Betrachten Sie konkret $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 1 - x^2$ für $x \in (0,\pi]$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-\pi,\pi]$ fortgesetzt wird, und berechnen Sie die entsprechende Fourierreihe.

17.25 Sei $f(z)$ die Grenzfunktion einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_n z^n$ mit Konvergenzradius R. Für ein $r \in (0,R)$ entwickle man $[-\pi,\pi] \ni t \mapsto f(r\exp(it)) \in \mathbb{C}$ in eine Fourierreihe bezüglich der

Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(t) = \exp(int)$. Man gebe auch an, wohin gegen und warum diese Reihen punktweise konvergieren!

Man bestimme entsprechend die Fourierreihen zu den Funktionen $t \mapsto \operatorname{Re} f(re^{it})$ und $t \mapsto \operatorname{Im} f(re^{it})$, wobei wir hier $c_n \in \mathbb{R}$ annehmen.

17.26 Man berechne die Fourierreihe von $f(x) = \frac{1}{2-\exp(ix)}$, $x \in [-\pi, \pi]$, bezüglich der Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n(x) = \exp(inx)$ von $L^2([-\pi, \pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,\pi]}, \frac{1}{2\pi}\lambda, \mathbb{C})$. Konvergiert diese punktweise oder gar gleichmäßig und wogegen?

Hinweis: Stellen Sie zuerst f als geometrische Reihe dar!

17.27 Die Einschränkung der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ aus Übungsaufgabe 17.22 auf $[-\pi, +\pi)$ setze man 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fort. Geben Sie an, wogegen die Fourierreihe dieser Funktion punktweise, also für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}$, konvergiert! Vergessen Sie nicht die Punkte $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$!

Gehen Sie genauso mit der durch $f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot (1 - x^2)$ definierten Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ vor.

17.28 Man berechne die Fourierreihe von $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos \alpha x$ für ein festes $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Weiters gebe man für alle $x \in \mathbb{R}$ den punktweisen Grenzwert an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ dieser Fourierreihen an.

17.29 Man betrachte die Funktion $x \mapsto 1 - 2x$ für $x \in [0, \pi]$, und entwickle sie in eine Sinusreihe $\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jx$. Man gebe auch an, wohin gegen diese Reihe punktweise für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert!

Hinweis: Setzen Sie $(0, \pi] \ni x \mapsto 1 - 2x$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-\pi, \pi]$ fort!

17.30 Entwickeln Sie $f(x) = x^3$, $x \in [0, \pi]$, in eine Cosinusreihe, und geben Sie an, wo auf $[0, \pi]$ und wogegen diese punktweise konvergiert. Setzen Sie dazu f auf $[-\pi, +\pi]$ zu einer geraden Funktion fort, und entwickeln Sie diese Fortsetzung in eine Fourierreihe der Form $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

17.31 Man entwickle $x \mapsto x \sin \pi x$, $x \in [-1, 1]$ in eine Fourierreihe der Form

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp(in\pi x)$$

bzw.

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x) .$$

Geben Sie an, wohin die Fourierreihe punktweise konvergiert!