Kapitel 16

Funktionenräume

16.1 Die Höldersche und andere Ungleichungen

Für das kommende Resultat benötigen wir die Ungleichung

$$\xi\eta \leq \frac{1}{p}\xi^p + \frac{1}{q}\eta^q \,, \tag{16.1}$$

wobei $\xi, \eta \in [0, +\infty]$ und $p, q \in (1, +\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Diese Ungleichung lässt sich zum Beispiel nachweisen, indem man zuerst für $\eta = \xi^{p-1}$ die Gleichheit nachprüft und anschließend für $\eta \geq \xi^{p-1}$ ($\eta \leq \xi^{p-1}$) die beiden Seiten von (16.1) als Funktionen von η (ξ) betrachtet und zeigt, dass die Ableitung nach η (ξ) die entsprechende Ungleichung erfüllt.

16.1.1 Proposition (*Höldersche Ungleichung*)**.** *Ist* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $p, q \in (1, +\infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, so gilt für messbare Funktionen* $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$[1]

$$\int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \Big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int_\Omega |g|^q \, d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} \,, \tag{16.2}$$

und

$$\int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \inf\{\eta \in [0, +\infty] : \eta \geq |f| \;\; \mu\text{-fast überall}\,\} \cdot \int_\Omega |g| \, d\mu \,, \tag{16.3}$$

wobei die Werte links und rechts der Ungleichzeichen als Elemente von $[0, +\infty]$ *zu verstehen sind.*

Beweis. Gilt $|f| \leq \eta \in [0, +\infty]$ μ-fast überall, so erhalten wir aus Fakta 14.5.3, 6,

$$\int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \int_\Omega |\eta \cdot g| \, d\mu = \eta \cdot \int_\Omega |g| \, d\mu \,,$$

und infolge (16.3). Aus $\big(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \big)^{\frac{1}{p}} = 0$ oder $\big(\int_\Omega |g|^q \, d\mu \big)^{\frac{1}{q}} = 0$ folgt wegen Proposition 14.7.2, dass $|f \cdot g| = 0$ μ-fast überall. Also stimmt (16.2) unter diesen Umständen. Falls die rechte Seite von (16.2) den Wert $+\infty$ hat, so stimmt (16.2) klarerweise auch.

---

[1] Wir setzen hier und im Folgenden $(+\infty)^r = +\infty$ für $r \in (0, +\infty)$.

Wir können also im Folgenden $\alpha := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \beta := \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \in (0,+\infty)$ annehmen. Für $\xi = \frac{|f|}{\alpha}, \eta = \frac{|g|}{\beta}$ folgt aus (16.1) und der Monotonie des Integrals

$$\frac{1}{\alpha\beta} \cdot \int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \frac{1}{p\alpha^p} \underbrace{\int_\Omega |f|^p \, d\mu}_{=\alpha^p} + \frac{1}{q\beta^q} \underbrace{\int_\Omega |g|^q \, d\mu}_{=\beta^q},$$

und somit (16.2). ❑

16.1.2 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1,+\infty)$. Für ein messbares $f : \Omega \to [-\infty,+\infty]$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\in [0,+\infty]).$$

Weiters definieren wir das *wesentliche Supremum* von f durch[2]

$$\|f\|_\infty := \inf\{\eta \in [0,+\infty] : \eta \geq |f| \ \ \mu\text{-fast überall}\} \quad (\in [0,+\infty]).$$

16.1.3 Bemerkung. Für ein messbares $f : \Omega \to [-\infty,+\infty]$ ist $\|f\|_\infty$ sogar das Minimum von $\{\eta \in [0,+\infty] : \eta \geq |f| \ \mu\text{-fast überall}\}$, da $\mu(\{x : \|f\|_\infty + \epsilon < |f(x)|\}) = 0$ für $\epsilon > 0$ und infolge

$$\mu(\{x : \|f\|_\infty < |f(x)|\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{x : \|f\|_\infty + \frac{1}{n} < |f(x)|\}) = 0.$$

Insbesondere kann man f im Falle $\|f\|_\infty < +\infty$ auf einer Nullmenge so abändern, dass die resultierende Funktion $\tilde{f} : \Omega \to [-\infty,+\infty]$ die Ungleichung $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_\infty$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt. Weil offenbar $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ für alle messbaren $f, g : \Omega \to [-\infty,+\infty]$, welche sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, gilt dabei

$$\sup_{x\in\Omega} \left|\tilde{f}(x)\right| = \|f\|_\infty.$$

16.1.4 Korollar (*Minkowskische Ungleichung*)**.** *Für $p \in [1,+\infty]$, messbare Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty,+\infty]$ und $\alpha \in [-\infty,+\infty]$ gilt*

$$\|\alpha \cdot f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p \tag{16.4}$$

$$\big\| |f| + |g| \big\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{16.5}$$

Beweis. Für $p \in [1,+\infty)$ folgt (16.4) aus Fakta 14.5.3, 2.
Im Fall $p = +\infty$ gilt $\|0 \cdot f\|_\infty = \|0\|_\infty = 0 = 0 \cdot \|f\|_\infty$. Für $\alpha \in (-\infty,+\infty) \setminus \{0\}$ gilt $\eta \geq |\alpha \cdot f|$ μ-fast überall genau dann, wenn $\frac{\eta}{|\alpha|} \geq |\alpha \cdot f|$ μ-fast überall, was $\|\alpha \cdot f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$ nach sich zieht.
Für $\alpha = \pm\infty$ nimmt $|\alpha \cdot f|$ nur Werte $+\infty$ und 0 an. Dabei gilt $|f| = 0$ μ-fast überall genau dann, wenn $|\alpha \cdot f| = 0$ μ-fast überall. In dem Fall gilt $\|\alpha \cdot f\|_\infty = 0 = (+\infty) \cdot 0 = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$. Anderenfalls gilt $\|\alpha \cdot f\|_\infty = +\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$.
Für $p = 1$ stimmt (16.5) wegen der Linearität von Integralen. Um (16.5) für Exponenten $p \in (1,+\infty)$ zu verifizieren, können wir $\|f\|_p, \|g\|_p \in [0,+\infty)$ und $\big\| |f| + |g| \big\|_p \in (0,+\infty]$ annehmen, da die Ungleichung anderenfalls trivial ist. Wegen

$$(|f| + |g|)^p \leq (2\max(|f|, |g|))^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

[2] Vergleiche Bemerkung 14.6.4.

gilt dann sogar $\big\| |f| + |g| \big\|_p \in (0, +\infty)$. Für $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \in (1, +\infty)$ folgt aus (16.2)

$$\int_\Omega (|f| + |g|)^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \cdot (|f| + |g|)^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g| \cdot (|f| + |g|)^{p-1} \, \mathrm{d}\mu$$
$$\leq \left(\Big(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \right) \cdot \Big(\int_\Omega (|f| + |g|)^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Wegen $(p-1)q = p$ ergibt die Division durch den zweiten Faktor rechts die Ungleichung (16.5). Für $p = +\infty$ können wir wieder $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty < +\infty$ annehmen, da sonst (16.5) offenbar richtig ist. Gemäß Bemerkung 16.1.3 gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ und $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ μ-fast überall, womit auch

$$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq |f(x)| + |g(x)| \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega .$$

Also folgt $\big\| |f| + |g| \big\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. ❑

Die unten folgende Ungleichung von Jensen findet in der Analysis an verschiedenen Stellen Anwendungen. In ihr treten konvexe Funktionen auf, also Funktionen $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass

$$\varphi((1-\lambda)\xi + \lambda\eta) \leq (1-\lambda)\varphi(\xi) + \lambda\varphi(\eta) ,$$

für alle $\xi, \eta \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$. Man sieht elementar, dass diese Bedingung zu

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(\xi_1)}{t - \xi_1} \leq \frac{\varphi(\xi_2) - \varphi(t)}{\xi_2 - t} \tag{16.6}$$

für alle $\xi_1, \xi_2, t \in I$ mit $\xi_1 < t < \xi_2$ äquivalent ist; vgl. Übungsaufgabe 6.41. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar die Stetigkeit von φ am Inneren von I; vgl. Übungsaufgabe 6.42. Zusammen mit Fakta 14.10.2 leitet man damit die Messbarkeit von φ her, wenn wir I mit der σ-Algebra $\mathcal{E}_I$ versehen, wobei $\mathcal{E}$ wie in Beispiel 14.4.5 ist.

16.1.5 Lemma. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum mit*[3] $\mu(\Omega) = 1$. *Weiters seien* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *integrierbar mit Werten in I, und sei* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *konvex. Dann gilt die* Jensensche Ungleichung

$$\varphi\Big(\int_\Omega f \, d\mu \Big) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) \, d\mu , \tag{16.7}$$

wobei die rechte Seite als Element von $(-\infty, +\infty]$ *im Sinne von Bemerkung 14.6.6 zu verstehen ist.*

Beweis. Ist $a \in [-\infty, +\infty)$ die linke Intervallgrenze von I, so folgt $t := \int_\Omega f \, d\mu \geq a$ aus $f \geq a$. Gehört a nicht zu I, so gilt sogar $t > a$, da $t - a = 0$ wegen Proposition 14.7.2, angewendet aus $0 \leq f - a$, implizieren würde, dass $f(x) - a = 0$ für fast alle $x \in \Omega$, was aber $f(\Omega) \subseteq I$ widerspricht. Entsprechend verfährt man mit der rechten Intervallgrenze, um zusammen auf $t \in I$ zu schließen. Für

$$\beta := \sup_{\xi_1 \in I \cap (-\infty, t)} \frac{\varphi(t) - \varphi(\xi_1)}{t - \xi_1} .$$

gilt wegen (16.6) die Ungleichung $\beta \leq \frac{\varphi(\xi_2) - \varphi(t)}{\xi_2 - t}$, $\xi_2 \in I \cap (t, +\infty)$. Offenbar gilt auch $\beta \geq \frac{\varphi(t) - \varphi(\xi_1)}{t - \xi_1}$, $\xi_1 \in I \cap (-\infty, t)$. Umformen ergibt

$$0 \leq \varphi(\xi) - \varphi(t) + (t - \xi)\beta ,$$

[3]Einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) = 1$ bezeichnet man als *Wahrscheinlichkeitsraum* und das dazugehörige Maß μ als *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

für $\xi \in I \setminus \{t\}$. Offenbar gilt diese Ungleichung auch für $t = \xi$. Insbesondere erhalten wir

$$0 \leq \varphi(f(x)) - \varphi(t) + (t - f(x))\beta \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega .$$

Da $\varphi \circ f$ sicher $\mathcal{A}$-$\mathcal{E}$-messbar ist, können wir die Funktion von x auf der rechten Seite integrieren und erhalten

$$0 \leq \int_\Omega \Big(\varphi(f(x)) - \varphi(t) + (t - f(x))\beta\Big)\, d\mu(x) \;\; (\in [0, +\infty]\,) . \tag{16.8}$$

Ist dieses Integral endlich, so folgt aus der Integrierbarkeit von $\varphi(t)-(t-f(x))\beta$ auch jene von $\varphi\circ f = (\varphi\circ f-\varphi(t)+(t-f)\beta)+\varphi(t)-(t-f)\beta$. Wegen der Linearität von Integralen folgt (16.7) aus (16.8). Ist das Integral in (16.8) aber $+\infty$, so nimmt das Integral über $\varphi\circ f = (\varphi\circ f-\varphi(t)+(t-f)\beta)+\varphi(t)-(t-f)\beta$ im Sinne von Bemerkung 14.6.6 ebenfalls diesen Wert an, da das Integral über $\varphi(t) - (t - f)\beta$ in $\mathbb{R}$ liegt. Also gilt (16.7) auch in diesem Fall. ❑

16.2 L^p-Räume $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen

Die folgende Definition erweitert die Begriffsbildungen aus Definition 14.6.1.

16.2.1 Definition. Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und für $p \in [1, +\infty]$ bezeichnet $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty])$ die Menge aller $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$, welche messbar sind und $\|f\|_p < +\infty$ erfüllen. Zudem setzen wir

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty]) \cap \mathbb{R}^\Omega .$$

16.2.2 Bemerkung. Wegen Bemerkung 16.1.3 im Fall $p = +\infty$ und wegen Fakta 14.5.3, 7, im Fall $p \in [1, +\infty)$ nimmt ein $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty])$ mit $p \in [1, +\infty]$ immer μ-fast überall Werte in $\mathbb{R}$ an. Mit der Notation aus Bemerkung 14.6.4 gibt es also ein $\tilde{f} \in [f]_{\sim_\mu}$ mit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$.

Wegen $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ für $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ erkennen wir mit Hilfe von Korollar 16.1.4, dass $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\Omega$ ist, und dass $\|.\|_p$ eine Seminorm[4] darauf abgibt. Aus Bemerkung 16.1.3 im Falle $p = +\infty$ beziehungsweise aus Proposition 14.7.2 im Falle $p \in [1, +\infty)$ erhalten wir für $p \in [1, +\infty]$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$

$$f \sim_\mu g \Leftrightarrow f - g \sim_\mu 0 \Leftrightarrow |f - g| \sim_\mu 0 \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0 , \tag{16.9}$$

wobei $\sim_\mu$ wie in Bemerkung 14.6.4 definiert ist. In dem Fall gilt zudem $\|f\|_p = \|f - g + g\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g\|_p = \|g\|_p$ und aus Symmetriegründen sogar $\|f\|_p = \|g\|_p$.
Weil für messbare $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f \sim_\mu \tilde{f}$, $g \sim_\mu \tilde{g}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha f \sim_\mu \alpha\tilde{f} \quad \text{und} \quad f + g \sim_\mu \tilde{f} + \tilde{g} \tag{16.10}$$

gilt, erhalten wir folgendes Resultat.

16.2.3 Proposition. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty]$. Bezüglich der punktweise definierten skalaren Multiplikation und Addition bildet $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ einen Vektorraum und $\|.\|_p$ ist eine Seminorm darauf. Der Raum der Restklassen*

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})/_{\sim_\mu}$$

bildet einen Vektorraum und $\|[f]_{\sim_\mu}\|_p := \|f\|_p$ ist eine wohldefinierte Norm darauf.

[4] Für einen Vektorraum X heißt eine Abbildung $\|.\| : X \to [0, +\infty)$ *Seminorm*, falls $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ und $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung) für alle $x, y \in X$ und alle Skalare α aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

16.2.4 Satz. *Für* $p \in [1, +\infty]$ *bildet* $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}), \|.\|_p)$ *einen Banachraum*[5].

Beweis. Zunächst sei $([f_n]_{\sim_\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_p$ aus $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ für $p < +\infty$. Wir wählen $n_1 < n_2 < \dots$ derart, dass $\|f_{n_k} - f_j\|_p < 2^{-k}$ für $j \geq n_k$ und $k \in \mathbb{N}$. Aus

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \Big\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} < 1$$

erhalten wir wegen Fakta 14.5.3, 3, dass mit $g_k := f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$ der punktweisen Grenzwert $\sum_{k=1}^\infty |g_k| = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m |g_k|$ $(\in [0, +\infty]^\Omega)$ die Ungleichung $\big\| \sum_{k=1}^\infty |g_k| \big\|_p \leq 1$ und somit $\sum_{k=1}^\infty |g_k| \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty])$ erfüllt. Nach Bemerkung 16.2.2 gilt $\sum_{k=1}^\infty |g_k(x)| < +\infty$ für $x \in \Omega \setminus N$ mit einer gewissen μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$. Infolge existiert $\sum_{k=1}^\infty g_k(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m (f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) = \lim_{m\to\infty} (f_{n_1}(x) - f_{n_{m+1}}(x))$ und damit auch $f(x) := \lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$. Setzen wir noch $f(x) = 0$ für $x \in N$, so erhalten wir eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$; vgl. Fakta 14.4.9.
Zu $\epsilon > 0$ sei $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|f_l - f_n\|_p < \epsilon$ für $n, l \geq n(\epsilon)$. Aus Fakta 14.5.3, 4, folgt für $n \geq n(\epsilon)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f - f_n|^p \, d\mu &= \int_\Omega \mathbb{1}_{N^c} \cdot |f - f_n|^p \, d\mu = \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} |\mathbb{1}_{N^c} \cdot f_{n_k} - \mathbb{1}_{N^c} \cdot f_n|^p \, d\mu \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\mathbb{1}_{N^c} \cdot f_{n_k} - \mathbb{1}_{N^c} \cdot f_n|^p \, d\mu = \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_n\|_p^p \leq \epsilon^p , \end{aligned}$$

wodurch $f = (f - f_n) + f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ mit $\|f - f_n\|_p \leq \epsilon$. Also konvergiert $([f_n]_{\sim_\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $[f]_{\sim_\mu} \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_p$.
Für $p = +\infty$ sei wieder $([f_n]_{\sim_\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_\infty$ aus $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Gemäß Bemerkung 16.1.3 ist

$$N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\} \cup \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

eine Nullmenge. Für $x \in N^c$ gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, weshalb $(\mathbb{1}_{N^c} \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm auf Ω ist und infolge gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert; vgl. Beispiel 9.1.9. Gemäß Fakta 14.4.9 ist f messbar. Wegen $\|f - f_n\|_\infty = \|f - \mathbb{1}_{N^c} \cdot f_n\|_\infty \leq \sup_{x\in\Omega} |f(x) - \mathbb{1}_{N^c} \cdot f_n(x)| \to 0$ für $n \to \infty$ konvergiert $([f_n]_{\sim_\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $[f]_{\sim_\mu} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_\infty$. ❑

16.2.5 Bemerkung. Im Beweis von Satz 16.2.4 haben wir gesehen, dass jede Cauchy-Folge $([f_n]_{\sim_\mu})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}), \|.\|_p)$ einen Grenzwert $[f]_{\sim_\mu}$ bezüglich $\|.\|_p$ hat. Die Funktion f haben wir μ-fast überall als punktweisen Grenzwert einer gewissen Teilfolge $(f_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ erhalten. Insbesondere folgt aus $f_n \geq 0$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, dass auch $f \geq 0$ μ-fast überall. Somit ist

$$\{[f]_{\sim_\mu} \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0 \ \ \mu - \text{fast überall}\}$$

versehen mit der von $\|.\|_p$ induzierten Metrik ein vollständig metrischer Raum und infolge eine abgeschlossene Teilmenge von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$; vgl. Lemma 9.1.6.

[5] Banachräume wurden in Definition 9.1.4 eingeführt.

16.3 L^p-Räume $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wieder ein Maßraum. In diesem Abschnitt wollen wir auch für komplexwertige messbare Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$, welche sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, $f \sim_\mu g$ schreiben; vgl. Bemerkung 14.6.4. Offenbar ist dann $\sim_\mu$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller messbaren Funktionen nach $\mathbb{C}$, wobei

$$(\operatorname{Re} f \sim_\mu \operatorname{Re} g \text{ und } \operatorname{Im} f \sim_\mu \operatorname{Im} g) \Leftrightarrow f \sim_\mu g \Leftrightarrow |f - g| \sim_\mu 0 . \tag{16.11}$$

16.3.1 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty]$. Für ein messbares $f : \Omega \to \mathbb{C}$ setzen wir[6]

$$\|f\|_p := \big\| |f| \big\|_p \in [0, +\infty] .$$

Weiters sei $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ die Menge aller messbaren $f : \Omega \to \mathbb{C}$, die $\|f\|_p < +\infty$ erfüllen.

Wie für $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ folgt aus $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ für $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ zusammen mit Korollar 16.1.4, dass $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^\Omega$ ist, und dass $\|.\|_p$ eine Seminorm darauf abgibt. Wegen (16.11) und (16.9) gilt dabei $\|f - g\|_p = 0$ genau dann, wenn $f \sim_\mu g$. In dem Fall folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung $\|f\|_p = \|g\|_p$. Zusammen mit der Gültigkeit von (16.10) für messbare $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f \sim_\mu \tilde{f}$, $g \sim_\mu \tilde{g}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ erhalten wir, abgesehen von der letzten Aussage, folgendes Resultat.

16.3.2 Proposition. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty]$. Bezüglich der punktweise definierten skalaren Multiplikation und Addition bildet $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ einen Vektorraum und $\|.\|_p$ ist eine Seminorm darauf. Der Raum der Restklassen*

$$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})/_{\sim_\mu}$$

bildet einen Vektorraum und $\|[f]_{\sim_\mu}\|_p := \|f\|_p$ ist eine wohldefinierte Norm darauf. $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}), \|.\|_p)$ ist sogar ein Banachraum.

Beweis. Für messbares $f : \Omega \to \mathbb{C}$ folgt aus $|\operatorname{Re} f(x)|, |\operatorname{Im} f(x)| \leq |f(x)|$ und (16.5) angewandt auf $|\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ ($\geq |f|$) die Ungleichung

$$\|f\|_p \leq \|\operatorname{Re} f\|_p + \|\operatorname{Im} f\|_p \leq 2 \max (\|\operatorname{Re} f\|_p, \|\operatorname{Im} f\|_p) \leq 2\|f\|_p . \tag{16.12}$$

Somit ist $\psi : f \mapsto (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$ eine wohldefinierte, bijektive und $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ mit Umkehrabbildung $(g, h) \mapsto g + ih$. Wegen (16.11) ist auch $\psi/_{\sim_\mu} : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \to L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \times L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ mit $\psi/_{\sim_\mu}([f]_{\sim_\mu}) = ([\operatorname{Re} f]_{\sim_\mu}, [\operatorname{Im} f]_{\sim_\mu})$ eine wohldefinierte, $\mathbb{R}$-lineare Bijektion, wobei wegen (16.12) die Abbildungen $\psi/_{\sim_\mu}$ und $\psi/_{\sim_\mu}^{-1}$ beschränkt sind, wenn man $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \times L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ mit der Norm $\|([g]_{\sim_\mu}, [h]_{\sim_\mu})\| := \max(\|g\|_p, \|h\|_p)$ versieht. Nun ist $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \times L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ versehen mit dieser Norm ein Banachraum; vgl. Beispiel 9.1.9, (vi). Wie sich unmittelbar daraus folgern lässt, ist dann auch $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}), \|.\|_p)$ ein Banachraum. ❑

16.3.3 Beispiel. Sei $\Omega \neq \emptyset$ versehen mit der σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Teilmengen von Ω und mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$, $\mu(A) := \sum_{k \in A} 1$; siehe Beispiel 14.5.4. Traditionell schreibt man

[6] Siehe Definition 16.2.1.

unter diesen Umständen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ meist als Tupel $(z_k)_{k\in\Omega} \in \mathbb{R}^\Omega$ bzw. $(z_k)_{k\in\Omega} \in \mathbb{C}^\Omega$ an, wobei für $p \in [1, +\infty)$

$$\left\|(z_k)_{k\in\Omega}\right\|_p = \Big(\sum_{k\in\Omega} |z_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Da $\emptyset$ die einzige Nullmenge bezüglich μ ist, gilt $\|(z_k)_{k\in\Omega}\|_\infty = \sup_{k\in\Omega} |z_k|$. Insbesondere stimmt $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{C})$ mit $\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$ überein; siehe Beispiel 9.1.9. Die Tatsache, dass $\emptyset$ die einzige Nullmenge ist, bedingt auch, dass $[(z_k)_{k\in\Omega}]_{\sim_\mu}$ immer einpunktig ist, weshalb für $p \in [1, +\infty]$ der Vektorraum $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{R})$ mit $L^p(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{R})$ und der Vektorraum $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{C})$ mit $L^p(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{C})$ identifiziert werden kann. Traditionell setzt man für $p \in [1, +\infty]$

$$\ell^p(\Omega, \mathbb{R}) := L^p(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \ell^p(\Omega, \mathbb{C}) := L^p(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu, \mathbb{C}) .$$

16.3.4 Bemerkung. Wegen (16.12) liegt f genau dann in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, wenn $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ beide in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ liegen. Dabei kann man

$$\mathrm{Re}\, f = \max(\mathrm{Re}\, f, 0) - (-\min(\mathrm{Re}\, f, 0)) \ \text{ und } \ \mathrm{Im}\, f = \max(\mathrm{Im}\, f, 0) - (-\min(\mathrm{Im}\, f, 0))$$

schreiben, wobei $\max(\mathrm{Re}\, f, 0), -\min(\mathrm{Re}\, f, 0), \max(\mathrm{Im}\, f, 0), -\min(\mathrm{Im}\, f, 0)$ allesamt nichtnegativ und offenbar aus $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ sind; siehe Definition 14.6.1.
Außerdem umfasst der Banachraum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ den Banachraum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Insbesondere ist $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ein abgeschlossenen Unterraum von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, wenn wir beide Räume über den Skalarkörper $\mathbb{R}$ betrachten; siehe Lemma 9.1.6.

Die Elemente von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ sind gemäß Proposition 16.2.3 bzw. Proposition 16.3.2 Restklassen $[f]_{\sim_\mu}$ von reell- bzw. komplexwertigen Funktion, wobei $f \sim_\mu g$ genau dann gilt, wenn sich f und g nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Nun ist es bisweilen unhandlich, immer von Restklassen im Zusammenhang mit L^p-Räumen zu sprechen. Traditionell werden daher die Funktionen $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ als Elemente von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bezeichnet, wobei zwei Funktionen f und g identifiziert werden, wenn sich f und g nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Wenn die Banachraumstruktur von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ thematisch im Vordergrund steht, wollen das ab jetzt meist auch so handhaben. Das sollte zu keiner Verwirrung führen.

16.4 Konvergenz im Maß

16.4.1 Definition. Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ von messbaren Funktionen auf Ω mit Werten in[7] $\mathbb{C}$ *konvergent im Maß* gegen ein $f : \Omega \to \mathbb{C}$, falls für alle $\delta > 0$

$$\lim_{i\in I} \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > \delta\}) = 0 .$$

16.4.2 Bemerkung. Folgenden einfachen Sachverhalt werden wir des öfteren verwenden. Sind $f, g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar und ist $\beta, \gamma > 0$, so folgt aus $|f| \leq |g| + |h|$ auf ganz Ω, dass $\{x \in \Omega :$

[7] Da $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachtet werden kann, macht diese Definition auch für reellwertige Funktionen Sinn.

$|g(x)| \leq \beta\} \cap \{x \in \Omega : |h(x)| \leq \gamma\} \subseteq \{x \in \Omega : |f(x)| \leq \beta + \gamma\}$. Übergang zu den Komplementen ergibt $\{x \in \Omega : |f(x)| > \beta + \gamma\} \subseteq \{x \in \Omega : |g(x)| > \beta\} \cup \{x \in \Omega : |h(x)| > \gamma\}$ und infolge

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \beta + \gamma\}) \leq \mu(\{x \in \Omega : |g(x)| > \beta\}) + \mu(\{x \in \Omega : |h(x)| > \gamma\}) .$$

16.4.3 Fakta. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\delta > 0$, $(f_i)_{i\in I}$, $(g_i)_{i\in I}$ Netze reell- bzw. komplexwertiger, messbarer Funktionen und f, g zwei messbare Funktion auf Ω mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

1. Konvergiert $(f_i)_{i\in I}$ im Maß sowohl gegen f als auch gegen g, so erhalten wir aus $|f - g| \leq |f - f_i| + |g - f_i|$ mit Bemerkung 16.4.2, dass $\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > 2\delta\})$ beliebig klein wird, also Null ist. Lassen wir δ zum Beispiel $\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ durchlaufen, so folgt nach Fakta 14.3.9, 4, $f \sim_\mu g$. Insbesondere, sind Grenzwerte von Netzen im Maß bis auf Nullmengen eindeutig.

2. Für einen reellen oder komplexen Skalar α folgt aus der Konvergenz im Maß von $(f_i)_{i\in I}$ gegen f auch die Konvergenz im Maß von $(\alpha \cdot f_i)_{i\in I}$ gegen $\alpha \cdot f$, da für $\alpha \neq 0$
$$\mu(\{x \in \Omega : |\alpha \cdot f(x) - \alpha \cdot f_i(x)| > \delta\}) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > \frac{\delta}{|\alpha|}\}) \xrightarrow{i\in I} 0 .$$

3. Konvergiert $(f_i)_{i\in I}$ gegen f im Maß und liegt g in $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, so konvergiert auch $(g \cdot f_i)_{i\in I}$ gegen $g \cdot f$ im Maß, da wegen $|g(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f_i(x)| \leq (\|g\|_\infty + 1)|f(x) - f_i(x)|$ μ-fast überall
$$\mu(\{x \in \Omega : |g(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f_i(x)| > \delta\}) \leq \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > \frac{\delta}{\|g\|_\infty + 1}\}) \xrightarrow{i\in I} 0 .$$

4. Aus $|f + g - (f_i + g_i)| \leq |f - f_i| + |g - g_i|$ erhalten wir mit Bemerkung 16.4.2, dass aus der Konvergenz im Maß von $(f_i)_{i\in I}$ gegen f und von $(g_i)_{i\in I}$ gegen g die Konvergenz im Maß von $(f_i + g_i)_{i\in I}$ gegen $f + g$ folgt.

5. Falls $\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\}) < +\infty$ für ein $\delta > 0$, so erhalten wir mit Hilfe von Fakta 14.3.9, 5, dass $\lim_{\beta\to+\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \beta\}) = 0$.

6. Für ein gegen ein α konvergentes Netz $(\alpha_i)_{i\in I}$ reeller bzw. komplexer Skalare folgt aus der Konvergenz im Maß von $(f_i)_{i\in I}$ gegen f auch die Konvergenz im Maß von $(\alpha_i \cdot f_i)_{i\in I}$ gegen $\alpha \cdot f$, falls $\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\}) < +\infty$ für ein $\delta > 0$. Um das einzusehen, schließen wir zunächst von $|\alpha f - \alpha_i f_i| \leq |\alpha - \alpha_i| \cdot |f| + |\alpha| \cdot |f - f_i|$ mit Hilfe von Bemerkung 16.4.2 auf
$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \Omega :&|\alpha \cdot f(x) - \alpha_i \cdot f_i(x)| > 2\delta\}) \\ &\leq \mu(\{x \in \Omega : |\alpha - \alpha_i| \cdot |f(x)| > \delta\}) + \mu(\{x \in \Omega : |\alpha| \cdot |f(x) - f_i(x)| > \delta\}) .\end{aligned}$$
Wegen 2 konvergiert der letzte Summand für $i \in I$ gegen Null und wegen 5 gilt dasselbe für $\mu(\{x \in \Omega : |\alpha - \alpha_i| \cdot |f(x)| > \delta\})$.

7. Für $p \in [1, +\infty)$ gilt
$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > \delta\}) &= \int \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)-f_i(x)|^p>\delta^p\}} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{1}{\delta^p} \int |f - f_i|^p \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)-f_i(x)|^p>\delta^p\}} \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\delta^p} \|f - f_i\|_p^p\end{aligned}$$
und $\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > \delta\}) = 0$, wenn $\|f - f_i\|_\infty \leq \delta$. Somit folgt für alle $p \in [1, +\infty]$ aus $\lim_{i\in I} \|f - f_i\|_p = 0$ die Konvergenz im Maß von $(f_i)_{i\in I}$ gegen f.

Um der ganzen Sache mehr Struktur zu geben, definieren wir einen geeigneten Raum von Funktionen.

16.4.4 Definition. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ den Raum aller messbaren reell- bzw. komplexwertigen Funktionen f auf Ω mit der Eigenschaft, dass $\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\}) < +\infty$ für ein $\delta > 0$, welches im Allgemeinen von f abhängt. Mit der Notation aus Bemerkung 14.6.4 setzen wir zudem

$$L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) := \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})/_{\sim_\mu}, \quad L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) := \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})/_{\sim_\mu}.$$

16.4.5 Bemerkung. Für f, g aus $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$ sind auch $\alpha \cdot f$ und $f + g$ messbar; vgl. Fakta 14.4.9 und Fakta 14.15.2. Wegen $|f + g| \leq |f| + |g|$ erhalten wir mit Bemerkung 16.4.2, dass auch $f + g$ in $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ liegt. Wegen $\mu(\{x \in \Omega : |\alpha \cdot f(x)| > |\alpha| \cdot \delta\}) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\}) < +\infty$ für $\alpha \neq 0$ und $\{x \in \Omega : |0 \cdot f(x)| > \delta\} = \emptyset$ gilt das auch für $\alpha \cdot f$. Also sind $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, wobei $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ein Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist, wenn wir zweiteren auch als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten. Wegen (16.10) bilden auch $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ Vektorräume, wobei wieder $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist.
Außerdem konvergiert für Netze $(f_i)_{i\in I}$, $(\tilde{f}_i)_{i\in I}$ und $f, \tilde{f}$ aus $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ mit $f_i \sim_\mu \tilde{f}_i$, $i \in I$, und $f \sim_\mu \tilde{f}$ das Netz $(f_i)_{i\in I}$ im Maß genau dann gegen f, wenn $(\tilde{f}_i)_{i\in I}$ im Maß gegen $\tilde{f}$ konvergiert. Somit ist der Begriff der Konvergenz im Maß für Netze aus $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ wohldefiniert.

Genauso wie bei den L^p-Räumen wollen wir ab jetzt die Elemente von $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ als Funktionen betrachten, wobei zwei Funktionen identifiziert werden, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Wegen Fakta 16.4.3, 1, sind in $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ Grenzwerte im Maß eindeutig.

16.4.6 Definition. Für f, g aus $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ setzen wir

$$d(f, g) := \inf\{\delta + \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > \delta\}) : \delta \in (0, +\infty)\}. \tag{16.13}$$

Man beachte zunächst, dass $d(f, g)$ als Element von $[0, +\infty]$ wohldefiniert ist, da $\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > \delta\}) = \mu(\{x \in \Omega : |\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)| > \delta\})$ für $f \sim_\mu \tilde{f}$, $g \sim_\mu \tilde{g}$. Gemäß Definition 16.4.4 und Fakta 16.4.3, 5, enthält die Menge auf der rechten Seite von (16.13) Zahlen $< +\infty$, womit $d(f, g) \in [0, +\infty)$. Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es zudem ein $\delta > 0$ mit

$$\delta + \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > \delta\}) < d(f, g) + \frac{1}{n},$$

weshalb auch $\delta \leq d(f, g) + \frac{1}{n}$ und infolge

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > d(f, g) + \frac{1}{n}\}) \leq \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > \delta\}) < d(f, g) + \frac{1}{n}.$$

Da $\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > d(f, g) + \frac{1}{n}\}$ monoton wachsend in $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt mit $\epsilon = \frac{1}{n}$ aus Fakta 14.3.9, 4,

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > d(f, g)\}) &= \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > d(f, g) + \frac{1}{n}\}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(f, g) + \frac{1}{n} = d(f, g),\end{aligned} \tag{16.14}$$

16.4.7 Proposition. *Die Abbildung d bildet eine Metrik auf $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Falls ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ aus diesem Raum im Maß gegen ein messbares $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert, so liegt auch f in diesem Raum und $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert bezüglich d gegen f. Umgekehrt impliziert die Konvergenz eines Netzes gegen eine Funktion bezüglich d aus diesem Raum auch die Konvergenz im Maß.*
Zudem sind Addition und skalare Multiplikation als Abbildungen von den jeweiligen Produkträumen[8] nach $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ stetig bezüglich d.

Beweis. Gilt $f = g$ in $L(\dots)$, also $f \sim_\mu g$, so folgt für jedes $\delta > 0$, dass $\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > \delta\}) = 0$. Wir erhalten $d(f, g) = 0$. Umgekehrt folgt aus $d(f, g) = 0$ wegen (16.14) die Gleichheit $\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > 0\}) = 0$, also $f \sim_\mu g$. Offenbar gilt $d(f, g) = d(g, f)$. Um die Dreiecksungleichung nachzuweisen, seien $f, g, h \in L(\dots)$ und $\eta > d(f, g)$, $\rho > d(g, h)$. Es gibt dann $\delta, \beta > 0$ mit

$$\delta + \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - g(x)| > \delta\}) < \eta \quad \text{und} \quad \beta + \mu(\{x \in \Omega : |g(x) - h(x)| > \beta\}) < \rho\,.$$

Wegen $|f - h| \le |f - g| + |g - h|$ schließen wir mit Bemerkung 16.4.2 auf

$$d(f, h) \le \delta + \beta + \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - h(x)| > \delta + \beta\}) < \eta + \rho\,.$$

Da $\eta > d(f, g)$ und $\rho > d(g, h)$ beliebig waren, folgt $d(f, h) \le d(f, g) + d(g, h)$.
Konvergiert ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ bezüglich d gegen ein f, so existiert zu $\epsilon > 0$ ein $i_0 \in I$ mit $d(f, f_i) < \epsilon$ für $i \ge i_0$. Wegen (16.14) folgt für diese $i \ge i_0$ auch

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > \epsilon\}) \le \mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > d(f, f_i)\}) \le d(f, f_i)\,,$$

womit $(f_i)_{i\in I}$ gegen f auch im Maß konvergiert.
Konvergiert umgekehrt $(f_i)_{i\in I}$ aus $L(\dots)$ im Maß gegen f, so gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $i_0 \in I$ mit $\mu(\{x \in \Omega : |f(x) - f_i(x)| > \epsilon\}) \le \epsilon$ für alle $i \ge i_0$. Wegen $|f(x)| \le |f - f_{i_0}| + |f_{i_0}|$ folgt aus Bemerkung 16.4.2, dass $f \in L(\dots)$. Zudem gilt $d(f, f_i) \le 2\epsilon$ für alle $i \ge i_0$. Wir erhalten $\lim_{i\in I} d(f, f_i) = 0$. Die Stetigkeit der Addition und der skalaren Multiplikation folgen somit aus Fakta 16.4.3, 2 und 4. ❑

16.4.8 Bemerkung. Für L^p-Funktionen f gilt

$$\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_p\}) = \int \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>\|f\|_p\}}\, d\mu \le \frac{1}{\|f\|_p^p} \int |f|^p \cdot \mathbb{1}_{\{x\in\Omega:|f(x)|>\|f\|_p\}}\, d\mu \le 1\,,$$

womit $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \subseteq L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \subseteq L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ für alle $p \in [1, +\infty]$. Wegen Fakta 16.4.3, 7, ist die Einbettung dabei stetig.

16.5 Fast gleichmäßige Konvergenz

16.5.1 Definition. Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt eine Folge[9] $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen auf Ω mit Werten in[10] $\mathbb{C}$ *fast gleichmäßig konvergent* gegen ein $f : \Omega \to \mathbb{C}$, falls es für alle $\delta > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ derart gibt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n|_{\Omega\setminus A} = f|_{\Omega\setminus A} \quad \text{gleichmäßig auf } \Omega \setminus A\,.$$

[8] Die Produkträume sind versehen mit der Metrik aus (8.18).
[9] Für Netze von Funktionen macht diese Definition auch Sinn. Die nachfolgenden Resultate beziehen sich aber nur auf Folgen, weshalb wir uns auf diese beschränken.
[10] Da $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachtet werden kann, ist diese Definition auch für reellwertige Funktionen gültig.

16.5.2 Fakta.

1. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen f und wählen wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_k) < \frac{1}{k}$ derart, dass $f_n|_{\Omega\setminus A_k} \to f|_{\Omega\setminus A_k}$ gleichmäßig, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f auf $\Omega \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega \setminus A_k$, wobei $\mu(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k) = 0$. Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gegen f.

2. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen f und fast gleichmäßig gegen g, so folgt aus dem vorherigen Punkt $f(x) = g(x)$ für $x \in \Omega \setminus N$ mit einer μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$.

3. Sind die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, und f messbar, so gilt für festes $\delta > 0$ und jedes $k \in \mathbb{N}$, dass $\{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \subseteq A_k$, wenn $n \in \mathbb{N}$ nur hinreichend groß ist, womit $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0$. Also folgt aus der fast gleichmäßigen Konvergenz einer Folge messbarer Funktionen gegen eine messbare Funktion auch die Konvergenz im Maß.

4. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen auf Ω. Gibt es für alle $\delta > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ derart, dass $\sup_{x\in\Omega\setminus A} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0$, wenn $m, n \to \infty$, so bildet $(f_n|_{\Omega\setminus A})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm auf $\Omega \setminus A$ und konvergiert infolge gleichmäßig darauf gegen eine Funktion.

   Bezeichnet $A_k \in \mathcal{A}$ die entsprechende Menge für $\delta = \frac{1}{k}$, so konvergiert daher $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega \setminus A_k = \Omega \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, wobei $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ eine Nullmenge ist. Bezeichnen wir den Grenzwert mit $f(x)$ für solche x und setzen $f(x) = 0$ für $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$, so erhalten wir eine messbare Funktion f, gegen die $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf allen Mengen $\Omega \setminus A_k$ gleichmäßig konvergiert.

   Also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen eine messbare Funktion f.

16.5.3 Proposition. *Die Räume $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ versehen mit der Metrik d aus Definition 16.4.6 sind vollständig.*

Beweis. Zu einer Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L(\dots)$ konstruieren wir zunächst rekursiv eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1}$ und $d(f_n, f_m) < 2^{-k}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_k$. Setzen wir für $l \in \mathbb{N}$

$$B_l := \bigcup_{k=l}^{\infty} \{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\} \ \ (\in \mathcal{A}),$$

so gilt

$$\mu(B_l) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \mu(\{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| > 2^{-k}\}) \leq \sum_{k=l}^{\infty} d(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) < \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-l+1}, \qquad (16.15)$$

und für $y \in \Omega \setminus B_l = \bigcap_{k=l}^{\infty} \{x : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k}\}$ sowie $l < r < s$

$$|f_{n_s}(y) - f_{n_r}(y)| \leq \sum_{k=r}^{s-1} |f_{n_{k+1}}(y) - f_{n_k}(y)| \leq \sum_{k=r}^{s-1} 2^{-k} < 2^{-r+1}.$$

Wir sind also in der Situation von Fakta 16.5.2, 4, womit $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig und infolge auch im Maß gegen eine messbare Funktion f konvergiert. Mit Proposition 16.4.7 schließen wir auf $f \in L(\dots)$ und $\lim_{k\to\infty} d(f_{n_k}, f) = 0$. Schließlich folgt aus Lemma 3.5.7 auch $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$. ❑

16.5.4 Korollar. *Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ im Maß gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so konvergiert eine gewisse Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig und folglich auch μ-fast überall gegen f.*

Beweis. Laut Voraussetzung konvergiert $f_n - f$ im Maß gegen Null, womit $(f_n - f)_{n\geq N}$ für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ in $L(\dots)$ liegt und dort bezüglich d gegen die Nullfunktion konvergiert; siehe Proposition 16.4.7. Wenden wir das Argument aus dem Beweis von Proposition 16.5.3 auf $(f_n - f)_{n\geq N}$ an, so konvergiert eine Teilfolge $(f_{n_k} - f)_{k\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen ein $g \in L(\dots)$. Da die fast gleichmäßige Konvergenz die Konvergenz im Maß nach sich zieht, gilt $g = 0$ μ-fast überall, weshalb $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen f konvergiert. ❑

16.5.5 Korollar. *Die Teilmenge $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{A}\}$ ist abgeschlossen in $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und bildet, versehen mit d, infolge einen vollständigen metrischen Raum. Dabei gilt*[11]

$$d(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = \min\left(1, \mu(A \vartriangle B)\right). \tag{16.16}$$

Beweis. Wegen $\{x \in \Omega : |\mathbb{1}_A(x)| > 1\} = \emptyset$ gilt $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$; vgl. Definition 16.4.4. Nach Korollar 16.5.4 folgt aus $\lim_{n\to\infty} d(\mathbb{1}_{A_n}, f) = 0$ für ein $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ die fast gleichmäßige Konvergenz einer Teilfolge $(\mathbb{1}_{A_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen f. Gemäß Fakta 16.5.2 erhalten wir $f(x) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{1}_{A_{n_k}}(x) \in \{0, 1\}$ für $x \in \Omega \setminus N$ mit einer Nullmenge $N \in \mathcal{A}$. Die Menge $A = \{x \in \Omega \setminus A : f(x) = 1\}$ liegt in $\mathcal{A}$, wobei $f = \mathbb{1}_A$ als Element von $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Somit ist $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{A}\}$ abgeschlossen in $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Schließlich gilt wegen $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = \mathbb{1}_{A\vartriangle B}$

$$\delta + \mu(\{x \in \Omega : |\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_B(x)| > \delta\}) = \begin{cases} \delta & \text{für } \delta \geq 1\,, \\ \delta + \mu(A \vartriangle B) & \text{für } 0 < \delta < 1\,, \end{cases}$$

woraus (16.16) folgt. ❑

Ist f eine Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer reell- oder komplexwertiger Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, so stimmt die Menge aller $x \in \Omega$ derart, dass $f_n(x) \to f(x)$, überein mit

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\leq n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}\}\,.$$

Somit bedeutet die punktweise Konvergenz fast überall, dass das Komplement

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\leq n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\}\,,$$

dieser Menge eine Nullmenge abgibt, was zu

$$\mu\Big(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\leq n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\}\Big) = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\,, \tag{16.17}$$

äquivalent ist. Im Falle $\mu(\Omega) < +\infty$ sehen wir mit Fakta 14.3.9, 5, dass diese Bedingung wiederum äquivalent ist zu

$$\lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{N\leq n\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\}\Big) = 0 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\,, \tag{16.18}$$

[11] $A \vartriangle B$ ist die *symmetrische Mengendifferenz* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

16.5.6 Satz (*Satz von Jegorow*)**.** *Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < +\infty$, so folgt für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer reell- oder komplexwertiger Funktionen auf Ω aus der punktweisen Konvergenz fast überall gegen eine messbare Funktion f auch die fast gleichmäßige Konvergenz und infolge die Konvergenz im Maß.*

Beweis. Zu festem $\delta > 0$ gibt es wegen (16.18) zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $N_m \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\bigcup_{N_m \leq n \in \mathbb{N}}\{x : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\}) < \delta \cdot 2^{-m}$. Wir setzen $A := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{N_m \leq n\in\mathbb{N}}\{x : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\}$ und erkennen $\mu(A) < \delta$. Für $y \in \Omega \setminus A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{N_m \leq n\in\mathbb{N}}\{x : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}\}$ sowie beliebigem $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \frac{1}{m} \quad \text{für alle} \quad n \geq N_m\,,$$

womit $(f_n|_{\Omega\setminus A})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_{\Omega\setminus A}$ konvergiert. Die Konvergenz nach Maß folgt schließlich wegen Fakta 16.5.2. ❑

16.6 Dichtheit in L^p

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass unter gewissen Umständen einige bekannte Funktionenräume dicht in L^p-Räumen liegen.

16.6.1 Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wieder ein Maßraum. Gemäß Definition 14.2.4 heißt eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion bezüglich $\mathcal{A}$, falls $f(\Omega)$ endlich ist und $f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ gilt. Wir haben in Lemma 14.2.6 gesehen, dass der Raum $\mathcal{F}(\mathcal{A}) =: \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{R}$ aller dieser Treppenfunktionen einen Unterraum von $\mathbb{R}^\Omega$ bildet.
Mit derselben Argumentation wie im Beweis Lemma 14.2.6 zeigt man, dass auch die Menge $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{C}$ aller komplexwertige Treppenfunktionen, also Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit endlichem $f(\Omega)$ derart, dass $f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{A}$ für alle $\alpha \in f(\Omega) \setminus \{0\}$, einen Unterraum von $\mathbb{C}^\Omega$ bildet.
Wir wollen mit $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{C}$ den Vektorraum $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{C} \cap \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und mit $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{R}$ den Vektorraum $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{R} \cap \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ aller *integrierbaren Treppenfunktionen* bezeichnen. Eine komplexwertige (reellwertige) Treppenfunktion kann in der Form

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$$

mit $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und paarweise disjunkten $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) dargestellt werden. Wegen $\int_\Omega |f|\, d\mu = \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \cdot \mu(A_i)$ ist f genau dann integrierbar, wenn $\mu(A_i) < +\infty$ für alle $i = 1, \dots, m$. Infolge ist die Integrierbarkeit einer Treppenfunktion f äquivalent zur Integrierbarkeit der Treppenfunktion $|f|^p$ für $p \in [1, +\infty)$, also $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{C} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{C} \cap \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{R} \cap \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Im Falle $\mu(\Omega) < +\infty$ gilt offenbar $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{C} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{C}$ sowie $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mathbb{R}$.

16.6.2 Lemma. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty]$. Die Menge $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{C}$ bzw. $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{R}$ aller komplexwertigen bzw. reellwertigen integrierbaren Treppenfunktionen bildet einen Untervektorraum von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bzw. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$.*
Für $p < +\infty$ ist $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{C}$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_\mathbb{R}$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_p$. Dabei ist die Menge $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_+$ aller nichtnegativen und integrierbaren Treppenfunktionen dicht in

$$\{f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0\; \mu - \textit{fast überall}\}\,. \tag{16.19}$$

Setzt man zusätzlich $\mu(\Omega) < +\infty$ voraus, so gelten obige Aussage auch für $p = \infty$.

Beweis. Gemäß Bemerkung 16.6.1 und dem davor Gesagten ist $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{C}}$ ($\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{R}}$) ein Untervektorraum von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ (von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$).
Ähnlich wie in (14.10) konstruieren wir zu gegebenem $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellwertigen und messbaren Treppenfunktionen durch

$$g_n := -n \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(-\infty,-n]} + \sum_{j=-n2^n+1}^{-1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]} + \sum_{j=1}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})} + n \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[n,+\infty)} ,$$

Diese erfüllt $|g_n| \leq |f|$, $n \in \mathbb{N}$, wobei $(\max(g_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise und monoton wachsend gegen $\max(f, 0)$ und $(-\min(g_n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise und monoton wachsend gegen $-\min(f, 0)$ konvergiert.
Ist $p < +\infty$, so folgt $g_n \in \mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{R}}$ aus

$$\int_\Omega |g_n|^p \, d\mu \leq \int_\Omega |f|^p \, d\mu < +\infty ,$$

und mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz erhalten wir $\|g_n - f\|_p \to 0$.
Im Falle $p = +\infty$ und $\mu(\Omega) < +\infty$ gilt $g_n \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{R}}$. Wählen wir $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|f\|_\infty < n$, dann sind $\{x : f(x) \leq -n\}$ und $\{x : f(x) \geq n\}$ Nullmengen, womit $\|f - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. Also sind in jedem Fall die $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ Grenzwerte von Folgen aus $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{R}}$, weshalb $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{R}}$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ist.
Für $f \geq 0$ gilt offenbar $g_n \geq 0$. Somit ist jedes nichtnegative $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ Grenzwert einer Folge aus $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_+$, also $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_+$ dicht in (16.19).
Für $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ folgt $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Wegen des schon Gezeigten gibt es zwei Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellwertigen, integrierbaren Treppenfunktionen mit $\|g_n - \operatorname{Re} f\|_p \to 0$ und $\|h_n - \operatorname{Im} f\|_p \to 0$, woraus $g_n + ih_n \in \mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{C}}$ und $\|(g_n + ih_n) - f\|_p \to 0$ folgt. Also ist auch $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{C}}$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. ❑

16.6.3 Korollar. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Besteht $C \subseteq \mathcal{A}$ aus Mengen von endlichem Maß derart, dass es für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < +\infty$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $C \in C$ mit*[12] *$\mu(A \triangle C) \leq \epsilon$ gibt, so ist die Menge aller Treppenfunktionen der Form*

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{C_j} , \tag{16.20}$$

mit $C_j \in C$ und $\alpha_j \in \mathbb{C}$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$) dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bzw. $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ für $p \in [1, +\infty)$. Dabei ist die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (16.20) *dicht in $\{h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0 \ \mu -$ fast überall$\}$.*

Beweis. Sei $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{C}}$ mit paarweise disjunkten Mengen A_j. Da f integrierbar ist, gilt $\mu(A_j) < +\infty$. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ nach Voraussetzung Mengen $C_j \in C$ mit $\mu(A_j \triangle C_j) \leq \epsilon$. Aus der Dreiecksungleichung und wegen $\mathbb{1}_{A_j}(x) - \mathbb{1}_{C_j}(x) \in \{-1, 0, 1\}$ folgt

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{C_j}|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \left(\int_{A_j \cup C_j} |\mathbb{1}_{A_j} - \mathbb{1}_{C_j}| \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \cdot \mu(A_j \triangle C_j)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^n |\alpha_j| .\end{aligned}$$

---
[12] $A \triangle C$ ist die *symmetrische Mengendifferenz* $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, lässt sich f durch Funktionen erwähnten Typs beliebig gut approximieren, und da $\mathcal{F}(\mathcal{A})^1_{\mathbb{C}}$ seinerseits dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist, ist auch die Menge aller Funktionen dieses Typs dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Den Fall von reellwertigen Funktionen beweist man genauso.
Darüber hinaus lässt sich jede Funktion $h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}), h \geq 0$, gemäß Lemma 16.6.2 beliebig gut durch nichtnegative Treppenfunktionen f approximieren. Die oben konstruierte Approximation von f ist dann auch nichtnegativ, womit die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (16.20) in $\{h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\ \mu - \text{fast überall}\}$ dicht enthalten ist. ❑

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, wobei $\mathcal{A}$ von einem Ring $\mathcal{R}$ erzeugt wird und für Ω die Bedingung (14.30) zutrifft. Zu $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < +\infty$ und $\epsilon > 0$ gibt es wegen Korollar 14.9.6 Mengen $R_j \in \mathcal{R},\ j \in \mathbb{N}$, mit $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n) - \mu(A) \leq \epsilon$ und infolge ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} R_n) \leq \epsilon$.
Aus $A \setminus \bigcup_{n=1}^{m} R_n \subseteq \bigcup_{n=m+1}^{\infty} R_n$ und $\bigcup_{n=1}^{m} R_n \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \setminus A$ schließen wir für $R = \bigcup_{n=1}^{m} R_n$ auf

$$\mu((A \setminus R) \cup (R \setminus A)) \leq 2\epsilon\,.$$

Also erfüllt $\mathcal{R}$ die Voraussetzungen von Korollar 16.6.3.

16.6.4 Proposition. *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß*[13] *wie in Definition 14.10.5 und $p \in [1, +\infty)$. Dann ist die Menge aller Treppenfunktionen der Form*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{R_j}\,, \tag{16.21}$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $R_1 \dots, R_n \subseteq D$ paarweise disjunkte d-dimensionale dyadische Rechtecke wie in Fakta 14.11.3 sind, dicht in $L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{C})$. Die entsprechende Aussage gilt auch im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (16.21) *dicht in $\{h \in L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\ \mu - \text{fast überall}\}$ ist.*

Beweis. Gemäß Fakta 14.11.3, 2, lässt sich jede offene Teilmenge von D als abzählbare Vereinigung von dyadischen Rechtecken schreiben. Also wird $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_D = \mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_D)$ von der Menge aller in D enthaltenen dyadischen Rechtecke und infolge auch von dem Ring $\mathcal{R}_d^D := \{A \in \mathcal{R}_d : A \subseteq D\}$ erzeugt, wobei $\mathcal{R}_d$ wie in Fakta 14.11.3, 3, ist. Weil jedes dyadische Rechteck wegen (15.5) als abzählbare Vereinigung von dyadischen Rechtecken, deren Abschluss auch in D enthalten ist, geschrieben werden kann, gilt (14.30) für $\Omega = D, \mathcal{R} = \mathcal{R}_d^D$ und $\omega = \mu$.
Wegen der Überlegung vor der aktuellen Aussage folgt aus Korollar 16.6.3, dass die Menge aller Treppenfunktionen der Form $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ mit $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}_d^D$ und komplexen, reellen bzw. nichtnegativen α_k dicht in $L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{C})$, $L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\{h \in L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\ \mu - \text{fast überall}\}$ ist.
Die behauptete Aussage folgt nun daraus, dass wir wegen Lemma 14.2.6 die Mengen A_k als paarweise disjunkt annehmen können und dass die A_k selber Vereinigung von paarweise disjunkten d-dimensionalen dyadischen Rechtecken sind. ❑

16.6.5 Korollar. *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß*[13]*und $p \in [1, +\infty)$. Dann liegt der Vektorraum $C_{00}^{\infty}(D, \mathbb{C})$ aller komplexwertigen, unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem, in D enthaltenem Träger dicht in $L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{C})$. Die entsprechende Aussage gilt auch im reellwertigen Fall. Zudem ist die Menge aller nichtnegativen Funktionen aus dem Raum $C_{00}^{\infty}(D, \mathbb{R})$ dicht in $\{h \in L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\ \mu - \text{fast überall}\}$.*

[13] Für das Lebesguesche Maß $\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D}$ ist diese Voraussetzung erfüllt.

Beweis. Nach Proposition 16.6.4 ist die Menge aller Treppenfunktionen der Bauart (16.21) dicht in $L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{C})$, $L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\{h \in L^p(D, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0 \, \mu-\text{fast überall}\}$ je nachdem, ob die Skalare α_j in $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ bzw. $[0, +\infty)$ laufen. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathbb{1}_R$ mit einem in D enthaltenen dyadischen Rechteck $R = (a, b] = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ beliebig gut durch eine nichtnegative Funktion $f \in C_{00}^\infty(D, \mathbb{R})$ bzgl. $\|.\|_p$ approximiert werden kann.
Offenbar gilt $R = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, wobei $A_k := [a_1 + \frac{1}{k}, b_1] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{k}, b_d]$. Wegen des Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|\mathbb{1}_R - \mathbb{1}_{A_k}\|_p < \epsilon$. Gemäß Fakta 12.14.2 gilt $d(A_k, \mathbb{R}^d \setminus D) > 0$, womit

$$B_j := (a_1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{j}, b_1 + \frac{1}{j}) \times \cdots \times (a_d + \frac{1}{k} - \frac{1}{j}, b_d + \frac{1}{j}) \subseteq D$$

für hinreichend große $j \in \mathbb{N}$. Aus $A_k = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_j$ folgt $\|\mathbb{1}_{A_k} - \mathbb{1}_{B_j}\|_p < \epsilon$ wieder wegen Satz 14.6.5. Wie wir in Bemerkung 15.8.9 gesehen haben, gibt es ein $f \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{1}_{A_k} \leq f \leq \mathbb{1}_{B_j}$ und $\operatorname{supp} f \subseteq B_j$, wodurch die Einschränkung von f auf G in $C_{00}^\infty(G, \mathbb{R})$ enthalten ist. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_R - f\|_p \leq \|\mathbb{1}_R - \mathbb{1}_{A_k}\|_p + \|\mathbb{1}_{A_k} - f\|_p &\leq \epsilon + \Big(\int_D (f - \mathbb{1}_{A_k})^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \epsilon + \Big(\int_D (\mathbb{1}_{B_j} - \mathbb{1}_{A_k})^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \leq 2\epsilon \,. \end{aligned}$$

❑

16.6.6 Korollar. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ und $p \in [1, +\infty)$. Für $t \in \mathbb{R}^d$ ist die Abbildung $f \mapsto f_t$ von $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ in sich, wobei $f_t(x) = f(x + t)$, linear, bijektiv und isometrische, also $\|f_t\|_p = \|f\|_p$.*
Weiters gilt für ein festes $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$, dass die Funktion $t \mapsto f_t$ von $\mathbb{R}^d$ nach $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ gleichmäßig stetig ist; siehe Definition 6.3.2.

Beweis. Klarerweise ist $f \mapsto f_t$ linear und bijektiv, ihre Inverse ist $f \mapsto f_{-t}$. Wegen der Translationsinvarianz von λ_d gilt $\|f_t\|_p = \|f\|_p$. Für ein d-dimensionales halboffenes Recht-

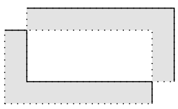

Abbildung 16.1: Veranschaulichung von $(R - s) \triangle (R - t)$.

eck $R = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$, $f = \mathbb{1}_R$ und $s, t \in \mathbb{R}^d$ gilt $f_t = \mathbb{1}_{R-t}$, $f_s = \mathbb{1}_{R-s}$. Wegen $(R - s) \triangle (R - t) = ((R - s) \setminus ((R - s) \cap (R - t))) \dot\cup ((R - t) \setminus ((R - s) \cap (R - t)))$ haben wir

$$\begin{aligned} \|f_s - f_t\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{R-s} - \mathbb{1}_{R-t}| \, d\lambda_d &= \lambda_d((R - s) \triangle (R - t)) \\ &= \lambda_d((R - s) \setminus ((R - s) \cap (R - t))) + \lambda_d((R - t) \setminus ((R - s) \cap (R - t))) \\ &= \lambda_d(R - s) + \lambda_d(R - t) - 2\lambda_d((R - s) \cap (R - t)) \,. \end{aligned}$$

Aus der Translationsinvarianz und aus

$$
\begin{aligned}
(R-s+t)\cap R &= \left(\bigtimes_{j=1}^{d}(a_j-s_j+t_j,b_j-s_j+t_j]\right)\cap\left(\bigtimes_{j=1}^{d}(a_j,b_j]\right)\\
&= \bigtimes_{j=1}^{d}\big(\max(a_j,a_j-s_j+t_j),\min(b_j,b_j-s_j+t_j)\big]
\end{aligned}
$$

erhalten wir für $|t_j-s_j|<(b_j-a_j),\ j=1,\dots,d,$

$$
\begin{aligned}
\|f_s-f_t\|_p^p &= 2\lambda_d(R)-2\lambda_d((R-s+t)\cap R)\\
&= 2\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)-2\prod_{j=1}^{d}(\min(b_j,b_j-s_j+t_j)-\max(a_j,a_j-s_j+t_j))\\
&= 2\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)-2\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j-|t_j-s_j|)\,.
\end{aligned}
$$

Somit ist $\|f_s-f_t\|_p^p$ beliebig klein für hinreichend kleines $\|t-s\|_\infty$. Für eine Linearkombination $h=\sum_{j=1}^n\alpha_j\cdot\mathbb{1}_{R_j}$ von derartigen charakteristischen Funktionen ist $t\mapsto h_t=\sum_{j=1}^n\alpha_j\cdot(\mathbb{1}_{R_j})_t$ eine Linearkombination von $L^p(\mathbb{R}^d,\mathcal{A}(\mathcal{T}^d),\lambda_d,\mathbb{C})$-wertigen Funktionen und damit selber stetig; vgl. Korollar 9.1.3.
Für beliebige $f\in L^p(\mathbb{R}^d,\mathcal{A}(\mathcal{T}^d),\lambda_d,\mathbb{C})$ gibt es gemäß Proposition 16.6.4 eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen der Form (16.21), die bezüglich $\|.\|_p$ gegen f konvergiert. Wegen $\|f_t-(g_n)_t\|_p=\|f-g_n\|_p$ konvergiert die Folge von stetigen Funktionen $\mathbb{R}^d\ni t\mapsto(g_n)_t\in L^p(\mathbb{R}^d,\mathcal{A}(\mathcal{T}^d),\lambda_d,\mathbb{C})$ gleichmäßig gegen $t\mapsto f_t$. Als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen ist letztere auch stetig; vgl. Korollar 6.6.14.
Die gleichmäßige Stetigkeit von $t\mapsto f_t$ folgt schließlich wegen $\|f_s-f_t\|_p=\|f-f_{t-s}\|_p$ aus der Stetigkeit von $t\mapsto f_t$ bei $0\in\mathbb{R}^d$. ❑

16.6.7 Proposition (*). *Sei $p\in[1,+\infty)$, $(\Omega,\mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $\mu:\mathcal{A}(\mathcal{T})\to[0,\infty]$ ein Borelmaß derart, dass alle $A\in\mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $\mu(A)<+\infty$ von innen regulär*[14] *sind; vgl. Definition 14.12.1. Dann ist die Menge aller Treppenfunktionen der Form*

$$
\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbb{1}_{K_j}\,, \tag{16.22}
$$

mit kompakten Mengen K_j und komplexen α_j dicht in $L^p(\Omega,\mathcal{A}(\mathcal{T}),\mu,\mathbb{C})$.
Die entsprechende Aussage gilt auch im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (16.22) *dicht in $\{h\in L^p(\Omega,\mathcal{A}(\mathcal{T}),\mu,\mathbb{R}):h\geq 0\ \mu-$fast überall$\}$ ist.*

Beweis. Sei C die Menge aller kompakten Teilmengen von Ω. Wegen der vorausgesetzten Regularität von innen gibt es zu $A\in\mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $\mu(A)<+\infty$ und $\epsilon>0$ ein $K\in C$ derart, dass $K\subseteq A$ und $\mu(A\vartriangle K)=\mu(A\setminus K)<\epsilon$. Also sind die Voraussetzungen von Korollar 16.6.3 erfüllt. ❑

[14] Das ist für Riesz-reguläre Maße erfüllt; siehe Bemerkung 14.12.8.

16.6.8 Korollar (*). *Sei $p \in [1, +\infty)$ und $(\Omega, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Ist $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, \infty]$ ein Borelmaß derart, dass alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $\mu(A) < +\infty$ von innen regulär sind, so ist $C_{00}(\Omega, \mathbb{C})$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}(\mathcal{T}), \mu, \mathbb{C})$; siehe Definition 12.17.6. Eine entsprechende Aussage gilt im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Funktionen aus $C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ dicht in $\{h \in L^p(\Omega, \mathcal{A}(\mathcal{T}), \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0 \; \mu - \text{fast überall}\}$ ist.*

Beweis. Nach Proposition 16.6.7 ist die Menge aller Treppenfunktionen (16.22) mit kompakten Mengen K_j dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}(\mathcal{T}), \mu, \mathbb{C})$. Somit genügt es zu zeigen, dass für ein kompaktes $K \subseteq \Omega$ die Funktion $\mathbb{1}_K$ beliebig gut durch eine $C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ Funktion bzgl. $\|.\|_p$ approximiert werden kann. Dazu wählen wir nach Lemma 12.17.8 eine stetige Funktion $g : \Omega \to [0, 1]$ mit kompaktem Träger und $g(K) \subseteq \{1\}$. Infolge ist das Maß $g \cdot \mu$ gemäß Korollar 14.12.9 endlich und regulär. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ ein offenes $O \supseteq K$ mit $(g \cdot \mu)(O \setminus K) < \epsilon^p$. Wieder gemäß Lemma 12.17.8 gibt es ein stetiges $f : \Omega \to [0, 1]$ mit $f(K) \subseteq \{1\}$ und $\text{supp}(f) \subseteq O$. Wir erhalten mit $g^{\frac{1}{p}} \cdot f$ eine Funktion aus $C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$, wobei wegen Lemma 14.7.1

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_K - g^{\frac{1}{p}} \cdot f\|_p^p &= \int |\mathbb{1}_K - g^{\frac{1}{p}} \cdot f|^p \, d\mu = \int |\mathbb{1}_K - f|^p \cdot g \, d\mu = \int |\mathbb{1}_K - f|^p \, d(g \cdot \mu) \\ &= \int_{O \setminus K} |\mathbb{1}_K - f|^p \, d(g \cdot \mu) \leq (g \cdot \mu)(O \setminus K) < \epsilon^p . \end{aligned}$$

❑

16.7 Faltung am L^1

Wir wollen in diesem Abschnitt mit der Faltung eine multiplikative Struktur auf dem Banachraum $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ einführen, wobei wir für diesen Raum auch $L^1(\mathbb{R}^d)$ schreiben werden.
Dazu seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ zunächst messbar. Die Funktionen $(x, y) \mapsto x - y$ und $(x, y) \mapsto y$ sind stetig als Funktionen von $\mathbb{R}^{2d}$ nach $\mathbb{R}^d$. Also sind sie auch $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{2d}) - \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ messbar, womit die Zusammensetzungen $(x, y) \mapsto f(x - y)$ und $(x, y) \mapsto g(y)$ beide $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{2d}) - \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$ messbar. Daraus folgt schließlich die Messbarkeit von

$$(x, y) \mapsto f(x - y)g(y) . \tag{16.23}$$

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt nach dem Satz von Fubini, Satz 14.14.4, der Tatsache, dass λ_d translationsinvariant ist, und wegen der aus Bemerkung 14.14.6 bekannten Tatsache $\lambda_d \otimes \lambda_d = \lambda_{2d}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x - y)g(y)| \, d\lambda_{2d}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| \, d\lambda_d(x) \, |g(y)| \, d\lambda_d(y) \\ &= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \, d\lambda_d(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 . \end{aligned} \tag{16.24}$$

Somit ist die Funktion in (16.23) auf $\mathbb{R}^{2d}$ integrierbar. Nach dem Satz von Fubini ist die Menge N aller $x \in \mathbb{R}^d$, für die $y \mapsto f(x - y)g(y)$ nicht integrierbar ist, eine λ_d-Nullmenge.

16.7.1 Definition. Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sei $f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f * g(x) = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) \, d\lambda_d(y) , & \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus N , \\ 0 , & \text{für } x \in N . \end{cases}$$

Man bezeichnet $f * g$ als *Faltung* von f und g.

Ebenfalls gemäß des Satzes von Fubini ist $f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ integrierbar, wobei wegen (16.24)

$$\|f * g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, d\lambda_d(y) d\lambda_d(x) = \|f\|_1 \|g\|_1 \, .$$

Ändert man f oder g auf einer Nullmenge, so bleibt $f * g$ unverändert. Also hängt die Faltung nur von den Restklassen in $L^1(\mathbb{R}^d)$ ab und stellt somit eine Abbildung

$$* : L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$$

dar. Diese ist bilinear, da für $a, b \in \mathbb{C}, \ f_1, f_2, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
(af_1 + bf_2) * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (af_1(x-y) + bf_2(x-y))g(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) \\
&= a \int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-y)g(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) + b \int_{\mathbb{R}^d} f_2(x-y)g(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) \\
&= a(f_1 * g)(x) + b(f_2 * g)(x) \, ,
\end{aligned}$$

und zwar für alle $x \in \mathbb{R}^d$ bis auf eine Nullmenge, nämlich der Vereinigung der Ausnahmemengen für die Bildung von $(af_1 + bf_2) * g, f_1 * g$ und $f_2 * g$.
Da es für die Elemente aus $L^1(\mathbb{R}^d)$ auf Nullmengen nicht ankommt, gilt die Gleichheit $(af_1 + bf_2) * g = a(f_1 * g) + b(f_2 * g)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$. Die Linearität im zweiten Argument sieht man genauso.
Die Faltung ist auch assoziativ, also $(f * g) * h = f * (g * h)$. Wegen der Bilinearität und Bemerkung 16.3.4 genügt es, das nur für $f, g, h \geq 0$ nachzuweisen. Das hat den Vorteil, dass man den Satz von Fubini anwenden kann, ob das Integral jetzt endlich ist oder nicht. Aus der Translationsinvarianz von λ_d folgt für $x \in \mathbb{R}^d$ bis auf Ausnahmemengen für $(f * g) * h$ und $f * (g * h)$

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x-y) \, h(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y-z)g(z)h(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(z) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)g(z-y)h(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(z) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z) \int_{\mathbb{R}^d} g(z-y)h(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(z) = f * (g * h)(x) \, .
\end{aligned}$$

16.7.2 Definition. Ist $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und $\cdot : X \times X \to X$ eine bilineare und assoziative Abbildung, die $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ erfüllt, so heißt $(X, \cdot, \|.\|)$ *Banachalgebra*. Ist $\cdot$ sogar kommutativ, so spricht man von einer *kommutativen Banachalgebra*.

Oben haben wir gesehen, dass $(L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C}), *, \|.\|_1)$ eine Banachalgebra ist. Sie ist sogar kommutativ, wie man leicht aus (15.3) herleitet:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y) \, \mathrm{d}\lambda_d(y) = g * f(x) \, .$$

16.7.3 Fakta. Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ messbar. Wir haben im Abschnitt 15.8 schon gesehen, dass sich L^1- und L^∞-Funktionen falten lassen. Allgemeiner gilt:

1. Gilt $p \in [1, +\infty), q \in (1, +\infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C}), g \in L^q(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$, so folgt für $x \in \mathbb{R}^d$ aus $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p \, \mathrm{d}\lambda_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \, \mathrm{d}\lambda_d(y)$ und aus der Hölderschen Ungleichung, Proposition 16.1.1,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}\lambda_d(y) \leq \|f\|_p \, \|g\|_q < +\infty \, .$$

Somit ist $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, d\lambda_d(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert, wobei

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\, d\lambda_d(y) \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q , \tag{16.25}$$

also $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ mit $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. Entsprechend existiert $g * f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|g * f\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, wobei $f * g = g * f$; vgl. (15.3).

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^q(\mathbb{R}^d)$ stimmt diese Definition der Faltung mit der von weiter oben überein, wobei $f * g$ überall und nicht nur außerhalb einer Nullmenge als Faltungsintegral geschrieben werden kann. Zudem gilt hier $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. Sind wieder $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C}), g \in L^q(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ mit $p \in [1, +\infty), q \in (1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so folgt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ aus (15.3)

$$\begin{aligned} |f * g(x_1) - f * g(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)| \cdot |g(y)|\, d\lambda_d(y) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y + (x_1 - x_2)) - f(y)|^p\, d\lambda_d(y) \right)^{\frac{1}{p}} \|g\|_q \\ &= \|f_{x_1 - x_2} - f\|_p \, \|g\|_q . \end{aligned}$$

Wegen Korollar 16.6.6 wird dieser Ausdruck kleiner $\epsilon > 0$, wenn nur $\|x_1 - x_2\|$ hinreichend klein ist. Also ist $f * g$ gleichmäßig stetig.

Für das Folgende wollen wir vorausschicken, dass jedes $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$ mit kompaktem Träger[15] zu allen Räumen $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C})$, $p \in [1, +\infty]$ gehört, da $|f|^p$ beschränkt und ungleich Null nur auf einer Menge mit endlichem λ_d-Maß ist.

16.7.4 Lemma. *Sei* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *mit kompakten Trägern* $\operatorname{supp}(k_n)$ *derart, dass* $\|k_n\|_1 = 1$, $k_n \geq 0$ *und dass der maximale Abstand von* $\operatorname{supp}(k_n)$ *zu* 0 *gegen Null für* $n \to \infty$ *konvergiert, also* $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in \operatorname{supp}(k_n)} \|x\| = 0$. *Dann gilt für alle* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f * k_n\|_1 = 0 .$$

Beweis. Wegen $\int k_n\, d\lambda_d = \|k_n\|_1 = 1$ und des Satzes von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \|f - f * k_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} k_n(y) \left(f(x) - f(x-y) \right) d\lambda_d(y) \right| \lambda_d(x) \\ &\leq \int_{\operatorname{supp}(k_n)} k_n(y) \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(x-y)|\, d\lambda_d(x)\, d\lambda_d(y) \leq \sup_{y\in \operatorname{supp}(k_n)} \|f - f_y\|_1 \|k_n\|_1 . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und Korollar 16.6.6 konvergiert dieser Ausdruck für $n \to \infty$ gegen Null. ❑

16.7.5 Bemerkung. Die Bedingungen von Lemma 16.7.4 werden zum Beispiel von den Funktionen $k_n := k_\delta$ mit $\delta = \frac{1}{n}$ erfüllt, wobei die k_δ wie in Definition 15.8.5 gewählt werden. Wie wir in Fakta 15.8.1 gesehen haben, sind für solche k_n die Funktionen $f * k_n$ unendlich oft differenzierbar.

16.7.6 Bemerkung (*). Wie wir in Bemerkung 17.1.11 sehen werden, hat die Banachalgebra $(L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d), \lambda_d, \mathbb{C}), *, \|.\|_1)$ kein Einselement[16]. Nach Lemma 16.7.4 enthält sie aber eine sogenannte *approximative Einheit*, also gibt es eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, aus $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{n\to\infty} f * e_n = f = \lim_{n\to\infty} e_n * f$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

[15] Der *Träger* $\operatorname{supp} k$ einer komplexwertigen Funktion k ist der Abschluss von $k^{-1}(\{0\}^c)$.

[16] Ein Einselement e einer Banachalgebra $(X, \cdot, \|.\|)$ erfüllt $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in X$.

16.8 Schwache Ableitung

Als Motivation für diesen Abschnitt sei an die Regel der partiellen Integration erinnert. Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und einem $\eta > 0$ gilt

$$\int_{-\eta}^{\eta} f'(t) \cdot \phi(t)\, \mathrm{d}t = \Big(f(\eta) \cdot \phi(\eta) - f(-\eta) \cdot \phi(-\eta)\Big) - \int_{-\eta}^{\eta} f(t) \cdot \phi'(t)\, \mathrm{d}t .$$

Hat ϕ einen kompakten Träger, so verschwinden sowohl die Integranden außerhalb von $[-\eta, \eta]$ als auch die Randterme für hinreichend großes $\eta > 0$, womit

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) \cdot \phi(t)\, \mathrm{d}\lambda(t) = -\int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \phi'(t)\, \mathrm{d}\lambda(t) \tag{16.26}$$

für $g = f'$. Wir werden weiter unten sehen, dass es im Wesentlichen höchstens eine Funktion g geben kann, die dieser Gleichung für alle $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ genügt. Also lässt sich f' dadurch charakterisieren, dass es (16.26) mit $g = f'$ für alle $\phi \in C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ erfüllt. Diese Charakterisierung der Ableitung gibt uns eine Möglichkeit, eine Art Ableitung auch von nicht notwendigerweise überall differenzierbaren Funktionen zu definieren. Wir werden das nicht nur für Funktionen in einer, sondern für Funktionen in mehreren Variablen und auch für höhere Ableitungen durchführen.

16.8.1 Definition. Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann bezeichnet $L^1_{loc}(G, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G, \lambda_d, \mathbb{C})$, oder kurz $L^1_{loc}(G)$, die Menge aller messbaren Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ derart, dass f über jede kompakte Teilmenge von G nach $\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G}$ integrierbar ist. Diese Funktionen in $L^1_{loc}(G)$ heißen *lokal integrierbare Funktionen*.

16.8.2 Bemerkung. Gemäß Bemerkung 15.8.9 kann man für jedes kompakte $K \subseteq G$ eine Funktion $\psi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$ mit Werten in $[0, 1]$ und mit $\psi|_K \equiv 1$ finden. Daraus erkennt man leicht, dass ein messbares $f : G \to \mathbb{C}$ genau dann in $L^1_{loc}(G)$ liegt, wenn für jedes $\phi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$ die Funktion $f \cdot \psi$ nach λ_d integrierbar ist.

16.8.3 Beispiel. Aus der Hölderschen Ungleichung in Proposition 16.1.1 folgt für $f \in L^p(G, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G, \lambda_d, \mathbb{C})$ mit $p \in (1, +\infty)$ und kompaktes $K \subseteq G$

$$\int_K |f|\, \mathrm{d}\lambda_d = \int_G \mathbb{1}_K \cdot |f|\, \mathrm{d}\lambda_d \leq \left(\int_G \mathbb{1}_K\, \mathrm{d}\lambda_d\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_G |f|^p\, \mathrm{d}\lambda_d\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty ,$$

wobei $q \in (1, +\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Also gilt $L^p(G, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G, \lambda_d, \mathbb{C}) \subseteq L^1_{loc}(G)$ für alle $p \in (1, +\infty)$. Offenbar gilt auch $L^1(G, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G, \lambda_d, \mathbb{C}), L^{\infty}(G, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G, \lambda_d, \mathbb{C}) \subseteq L^1_{loc}(G)$.

16.8.4 Definition. Für einen *Multiindex* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ setzen wir $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$; vgl. Bemerkung 10.2.4 und Beispiel 10.2.12. Sind $f, g \in L^1_{loc}(G)$ derart, dass für alle $\phi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$

$$\int_G g \cdot \phi\, \mathrm{d}\lambda_d = (-1)^{|\alpha|} \int_G f \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}\, \mathrm{d}\lambda_d , \tag{16.27}$$

so heißt g die α-te *schwache Ableitung* von f, und wir schreiben für g auch $D^{\alpha} f$. Die Funktionen ϕ aus $C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$ nennt man in diesem Zusammenhang auch *Testfunktionen*.

16.8.5 Bemerkung. Da sich jedes $\phi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$ durch $\phi(x) = 0$ für $x \notin G$ zu einer $C_{00}^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$-Funktion fortsetzen lässt, wobei alle möglichen partiellen Ableitungen von ϕ auf $\mathbb{R}^d \setminus G$ verschwinden, und da man auch f und g durch $f(x) = 0 = g(x),\ x \in \mathbb{R}^d \setminus G$, zu auf ganz $\mathbb{R}^d$ lokal integrierbaren Funktionen fortsetzen kann, lässt sich die Bedingung (16.27) auch durch die äquivalente Forderung

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \cdot \phi \, d\lambda_d = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} \, d\lambda_d \quad \text{für alle} \quad \phi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C}), \tag{16.28}$$

ersetzen.

Die Eindeutigkeit bis auf λ_d-Nullmengen der schwachen Ableitung im Falle ihrer Existenz, folgt sofort aus folgendem Lemma, weil die Differenz zweier schwacher Ableitungen genau die Voraussetzung von diesem Lemma erfüllt. Diese Lemma ist im Wesentlichen eine Konsequenz aus Lemma 16.7.4.

16.8.6 Lemma. *Ist $g \in L^1_{loc}(G)$ derart, dass $\int_G g \cdot \phi \, d\lambda_d = 0$ für alle $\phi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$, so gilt $g = 0$ λ_d-fast überall auf G.*

Beweis. Für jedes feste $\psi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$ ist $g \cdot \psi$ auf G nach λ_d integrierbar. Für alle $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ gilt dann wegen $\psi \cdot \phi \in C_{00}^{\infty}(G, \mathbb{C})$ die Gleichheit $\int_G (g \cdot \psi) \cdot \phi \, d\lambda_d = 0$. Wir denken uns $g \cdot \psi$ außerhalb von G mit Null fortgesetzt. Dann folgt aus Lemma 16.7.4, dass bzgl. $\|.\|_1$

$$\lim_{n\to\infty} k_{\frac{1}{n}} * (g \cdot \psi) = g \cdot \psi \,,$$

wobei die Funktionen k_δ wie in Definition 15.8.5 gewählt sind. Dabei gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$k_{\frac{1}{n}} * (g \cdot \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} k_{\frac{1}{n}}(x - y) \, (g \cdot \psi)(y) \, d\lambda_d(y) = 0 \,,$$

da die Funktion $y \mapsto k_{\frac{1}{n}}(x - y)$ in $C^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ liegt. Somit folgt $g \cdot \psi = 0$ λ_d-fast überall auf $\mathbb{R}^d$. Schließlich setzen wir $K_n := K_n(0) \setminus U_{\frac{1}{n}}(G^c) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, G^c) \geq \frac{1}{n}, \|x\| \leq n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen Bemerkung 15.8.9 gibt es eine nichtnegative C^{∞}-Funktion ψ mit einem kompakten, in G enthaltenen Träger und mit $\psi(x) = 1$ für alle $x \in K_n$. Insbesondere sehen wir, dass g λ_d-fast überall auf K_n verschwindet. Aus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = G$ folgt schließlich die Behauptung. ❑

16.8.7 Bemerkung. Ändert man ein g in (16.27) auf einer λ_d-Nullmenge, so erhält man auch eine schwache Ableitung von f. Wegen Lemma 16.8.6 kann man g aber nicht auf einer größeren Menge abändern.
Unterscheidet sich ein messbares $h : G \to \mathbb{C}$ von $f \in L^1_{loc}(G)$ nur auf einer λ_d-Nullmenge, so ist auch h lokal integrierbar. Außerdem folgt aus der Existenz der α-ten schwachen Ableitung von f die Existenz der α-ten schwachen Ableitung von h, wobei $D^\alpha f = D^\alpha h$ λ_d-fast überall.
Identifizieren wir zwei Funktionen in $L^1_{loc}(G)$, wenn sie sich nur auf einer λ_d-Nullmenge unterscheiden, betrachten wir also $L^1_{loc}(G)$ faktorisiert nach dem Teilraum aller λ_d-fast überall verschwindenden Funktionen, so stellt $f \mapsto D^\alpha f$ eine wohldefinierte, lineare Abbildung von einem Teilraum von $L^1_{loc}(G)$ nach $L^1_{loc}(G)$ dar.

Wegen der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung folgt durch zweimalige Anwendung von (16.27), dass für Multiindizes $\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ und für ein $f \in L^1_{loc}(G)$ derart, dass die α-te schwache Ableitung von f existiert und auch die β-te schwache Ableitung von $D^\alpha f$ existiert,

$$D^{(\alpha+\beta)} f = D^\beta (D^\alpha f) \,. \tag{16.29}$$

16.8.8 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und und $f \in C^k(G, \mathbb{C})$. Für alle Multiindizes $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ mit $|\alpha| \leq k$ existiert dann die α-te schwache Ableitung von f, wobei λ_d-fast überall*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} .$$

Beweis. Wir denken uns $\phi \in C_{00}^\infty(G, \mathbb{C})$ und f außerhalb von G mit Null fortgesetzt. Für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ gilt entweder $x \in \operatorname{supp} \phi$ oder $x \notin \operatorname{supp} \phi$. Im ersten Fall gilt $x \in G$, womit $\mathbb{R}^d \ni t \mapsto \phi(t) \cdot f(t)$ lokal bei x k-mal partiell differenzierbar ist. Im zweiten Fall liegt x in der offenen Menge $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp} \phi$, womit $\mathbb{R}^d \ni t \mapsto \phi(t) \cdot f(t)$ lokal bei x identisch Null und infolge auch k-mal partiell differenzierbar ist. In jedem Fall gilt dabei für $j \in \{1, \ldots, d\}$ gemäß der Produktregel

$$\frac{\partial(\phi \cdot f)}{\partial x_j}(x) = \phi(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) + f(x) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) .$$

Für $t \in \mathbb{R}^d$ erhalten wir aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und aus der Tatsache, dass für $\tau \in \mathbb{R}$ mit hinreichend großem $|\tau|$ die Gleichheit $\phi(t + \tau e_j) f(t + \tau e_j) = 0$ gilt, folgende Verallgemeinerung von (16.26):

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(t + \tau e_j) \cdot \phi(t + \tau e_j) \, d\lambda(\tau) = - \int_{\mathbb{R}} f(t + \tau e_j) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(t + \tau e_j) \, d\lambda(\tau) .$$

Der Satz von Fubini ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \phi \, d\lambda_d = - \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, d\lambda_d ,$$

und wegen Bemerkung 16.8.5 schließlich $D^{e_j} f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, wobei wir hier e_j als jenes Element von $(\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ ansehen, das an der j-ten Stelle Eins und sonst überall Null stehen hat. Für allgemeine Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ folgt die Aussage wegen (16.29) leicht durch Induktion. ❑

Wegen Lemma 16.8.8 gilt $\frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} = D^\alpha \phi$ für $\phi \in C^{|\alpha|}(G, \mathbb{C})$ λ_d-fast überall. Insbesondere verwendet man für Testfunktionen ϕ in Integralen wie in (16.27) statt $\frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$ meist den Ausdruck $D^\alpha \phi$.

16.8.9 Beispiel. Wir wollen für eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ zeigen, dass f schwach ableitbar ist, wobei $D^{(1)} f = f'$ λ_d-fast überall; vgl. Definition 11.1.9 und danach. Sind nämlich $a < t_1 < \cdots < t_m < b$ Punkte aus (a, b) derart, dass für $j = 1, \ldots, m-1$ die Einschränkung $f|_{[t_j, t_{j+1}]}$ stetig differenzierbar ist, und wählen wir zu $\phi \in C_{00}^\infty((a, b), \mathbb{C})$ Punkte t_0, t_{m+1} derart, dass $a < t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} < b$ und $t_0 < \operatorname{supp} \phi < t_{m+1}$, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)} f \cdot \phi' \, d\lambda &= \sum_{j=0}^{m} \int_{[t_j, t_{j+1}]} f \cdot \phi' \, d\lambda \\
&= \sum_{j=0}^{m} \big(f(t_{j+1}) \cdot \phi(t_{j+1}) - f(t_j) \cdot \phi(t_j) \big) - \sum_{j=0}^{m} \int_{[t_j, t_{j+1}]} f' \cdot \phi \, d\lambda \\
&= - \int_{(a,b)} f' \cdot \phi \, d\lambda ,
\end{aligned}$$

wobei $f'(t)$ hier für die Ableitung von f bei t im Fall $t \in (a, b) \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$ und für 0 im Fall $t \in \{t_1, \ldots, t_m\}$ steht.

16.9 Übungsaufgaben

16.1 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(\Omega) < +\infty$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ mit $\|f\|_\infty > 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_\Omega |f|^n\, d\mu} = \|f\|_\infty .$$

Hinweis: Heben Sie im Zähler und Nenner eine geeignete Potenz von $\|f\|_\infty$ heraus.

16.2 Man finde für $r, s \in [1, +\infty]$ mit $r \neq s$ einen Maßraum mit $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \neq \mathcal{L}^s(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und einen Maßraum mit $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^s(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$.

16.3 Man weise für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und $r, s \in [1, +\infty]$ mit $r \geq s$ nach, dass $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^s(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und dass die Einbettungsabbildung $L^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \ni [f]_{\sim_\mu} \mapsto [f]_{\sim_\mu} \in L^s(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ beschränkt ist.

Hinweis: Man wende (16.2) bzw. (16.3) an auf geeignete $p, q \in [1, +\infty]$ und geeignete Funktionen f sowie $g = \mathbb{1}_\Omega$.

16.4 Man gebe einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ an, für den $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \supseteq \mathcal{L}^s(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ für $r, s \in [1, +\infty]$ mit $r \geq s$ gilt. Begründung!

16.5 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein messbares $f : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann in $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ liegt, wenn $\mathrm{ess}-f(\Omega)$ kompakt ist; siehe Übungsaufgabe 14.90. Zeigen Sie, auch, dass für $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann $\lambda \notin \mathrm{ess}-f(\Omega)$, wenn $f - \lambda$ in $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ invertierbar ist, es also ein $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ mit $(f - \lambda) \cdot g = \mathbb{1}$ μ-fast überall gibt.

16.6 Man zeige für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < +\infty$, dass $\chi(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) := \mu(A \vartriangle B)$ eine zur Metrik d aus Korollar 16.5.5 äquivalente Metrik auf der Teilmenge $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{A}\}$ von $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ist.

16.7 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen auf Ω mit Werten in $\mathbb{C}$ heißt fast gleichmäßig konvergent gegen ein $f : \Omega \to \mathbb{C}$, falls es für alle $\delta > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ derart gibt, dass

$$\lim_{i\in I} f_i|_{\Omega\setminus A} = f|_{\Omega\setminus A} \quad \text{gleichmäßig auf } \Omega \setminus A .$$

Man zeige, dass dann $(f_i)_{i\in I}$ punktweise auf $\Omega \setminus N$ mit einer μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gegen f konvergiert und dass im Falle der Messbarkeit der f_i, $i \in I$, und von f das Netz $(f_i)_{i\in I}$ auch im Maß gegen f konvergiert.

Schließlich zeige man, dass ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ von messbaren Funktionen derart, dass es für alle $\delta > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ und $\lim_{(i,j)\in I\times I} \sup_{x\in\Omega\setminus A} |f_i(x) - f_j(x)| = 0$ gibt, fast gleichmäßig gegen ein messbares f konvergiert. Hier gilt $(i, j) \preceq (k, l)$ für $(i, j), (k, l) \in I \times I$ genau dann, wenn $i \preceq k$ und $j \preceq l$.

16.8 Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p \in [1, +\infty]$, $f, f_n \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (16.17), dass $f_n \to f$ μ-fast überall, wenn $\sum_{n=1}^\infty \|f - f_n\|_p < +\infty$.

16.9 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass für $p, q \in [1, +\infty)$ die Menge $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \cap L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ und $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \cap L^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ dicht in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bezüglich $\|.\|_p$ ist. Hier werden wie üblich zwei Funktionen identifiziert, wenn sie μ-fast überall übereinstimmen.

16.10 Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu)$ Messräume mit jeweils σ-endlichem Maß. Zeigen Sie, dass dann die lineare Hülle aller Funktionen der Bauart $\Omega\times\Upsilon \ni (x, y) \mapsto f(x)\cdot g(y)$ mit $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und $g \in L^1(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu, \mathbb{C})$ dicht in $L^1(\Omega \times \Upsilon, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu, \mathbb{C})$ ist; vgl. Satz 14.14.4.

Hinweis: Übungsaufgabe 14.67.

16.11 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, +\infty]$ und $d \in \mathbb{N}$. Mit $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ bezeichnen wir alle Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ derart, dass ihr Komponenten $f_1, \dots, f_d$ in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ liegen, wobei zwei Funktionen identifiziert werden, wenn sie μ-fast überall übereinstimmen.

Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ isometrisch isomorph zu $L^p(\Omega \times \{1, \dots, d\}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{P}(\{1, \dots, d\}), \mu \otimes \xi, \mathbb{R})$ ist, wobei $\mathcal{P}(\{1, \dots, d\})$ die Potenzmenge auf $\{1, \dots, d\}$ und ξ das Zählmaß darauf bezeichnet. Zeige Sie anschließend, dass $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ versehen mit

$$\|f\| := \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\|_p^p \, d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}}$$

im Falle $p < +\infty$ und mit $\|f\| := \inf\{\lambda > 0 : \lambda \geq \|f(.)\|_\infty \ \mu - \text{fast überall}\}$ im Falle $p = \infty$ einen Banachraum abgibt. $\|.\|_p$ bzw. $\|.\|_\infty$ bezeichnet hier die p-Norm auf $\mathbb{R}^d$.

16.12 Mit der Notation aus Satz 14.7.5 zeige man, dass $L^p(\Upsilon, C, \mu \circ T^{-1}, \mathbb{C})$ für $p \in [1, +\infty]$ mittels der Abbildung $f \mapsto f \circ T$ isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist. Geben Sie auch ein Beispiel für Ω, Υ und T an, wo dieser Unterraum ungleich $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist!

16.13 Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es eine bijektive Beziehung zwischen allen endlichen Maßen μ auf $(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{T}})$ und allen endlichen Maßen ν auf $((a, a + 2\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(a,a+2\pi]})$ derart gibt, dass $L^p(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{T}}, \mu, \mathbb{C})$ isometrisch isomorph zu $L^p((a, a + 2\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(a,a+2\pi]}, \nu, \mathbb{C})$ für alle $p \in [1, +\infty]$ ist. Beschreiben Sie diesen isometrischen Isomorphismus explizit!

16.14 Unter Verwendung von Korollar 16.6.5 und Beispiel 12.18.10 zeige man, dass für $p \in [1, +\infty)$ die lineare Hülle der Funktionen $t \mapsto \exp(itn), n \in \mathbb{Z}$, dicht in $L^p((-\pi, +\pi), \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi)}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi)}}, \mathbb{C})$ bzgl. $\|.\|_p$ liegt. Zeigen Sie denselben Sachverhalt für die Räume $L^p((-\pi, +\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi]}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{(-\pi,+\pi]}}, \mathbb{C})$ und $L^p([-\pi, +\pi], \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,+\pi]}, \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[-\pi,+\pi]}}, \mathbb{C})$.

16.15 Ist $p \in [1, +\infty)$ und ist $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{T}} \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, so zeige man mit Hilfe von Korollar 16.6.8, dass die lineare Hülle der Funktionen $\mathbb{T} \ni \zeta \mapsto \zeta^n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, dicht in $L^p(\mathbb{T}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{T}}, \mu, \mathbb{C})$ ist.

16.16 Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \lambda, \mathbb{C}) \cup \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \lambda, \mathbb{C})$, $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ und $w \in \mathbb{C}$ die Funktionen $t \mapsto f(t)p(t)\exp(-t^2)$ und $t \mapsto f(t)p(t)\exp(wt - t^2)$ auf $\mathbb{R}$ integrierbar sind! Zeigen Sie weiters, dass die Funktion

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(zt - t^2) \, d\lambda(t)$$

auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Hinweis: Höldersche Ungleichung für $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1), \lambda, \mathbb{C})$.

16.17 Indem Sie $z \mapsto \exp(zt-t^2)$ in eine Taylorreihe um 0 entwickeln, bestimme man die Taylorreihe, also die Taylor-Koeffizienten, von $F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(zt - t^2)\, d\lambda(t)$ um 0.

16.18 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und $p \in [0, +\infty)$. Weiters sei $\phi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass

$$M : f \mapsto \phi \cdot f$$

ein beschränkter, linearer Operator von $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ in sich ist, wobei die Abbildungsnorm $\|M\|$ von M mit $\|\phi\|_\infty$ übereinstimmt.

Hinweis: Um $\|M\| \geq \|\phi\|_\infty$ zu zeigen, betrachte man für ein beliebiges $\epsilon > 0$ die Charakteristische Funktion zur Menge $\{x \in \Omega : |\phi(x)| > \|\phi\|_\infty - \epsilon\}$.

Anmerkung: Die Voraussetzung $\mu(\Omega) < +\infty$ kann man durch die schwächere Voraussetzung der σ-Endlichkeit von μ ersetzen.

16.19 Zeigen Sie, dass $f \mapsto f_t$ für jedes $t \in \mathbb{R}^p$ als Abbildung von $L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ eine isometrische, lineare Bijektion ist.

Zeigen Sie weiters, dass für $f \in C_{00}(\mathbb{R}^p, \mathbb{C})$ die Funktion $\mathbb{R}^p \ni t \mapsto f_t \in L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ gleichmäßig stetig ist.

Schließlich zeige man, dass für allgemeine $f \in L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ die Abbildung $\mathbb{R}^p \ni t \mapsto f_t \in L^\infty(\mathbb{R}^p, \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \lambda_p, \mathbb{C})$ nicht stetig ist.

16.20 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ mit $\lambda(A), \lambda(B) < +\infty$. Man zeige $\|\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B\|_1 = \lambda(A)\lambda(B)$, sowie

$$\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_B(x) = \lambda(B \cap (x - A)) .$$

16.21 Man zeige für $A, B \subseteq \mathbb{R}, A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ mit $\lambda(A), \lambda(B) > 0$, dass $A + B$ eine offene Menge enthält.

Hinweis: Man reduziere auf den Fall $0 < \lambda(A), \lambda(B) < +\infty$. Wie stehen die Aussagen $B \cap (x - A) \neq \emptyset$ und $x \in A + B$ in Beziehung?

16.22 Für ein offenes $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^d$, ein $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ und allen $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ mit $\beta \leq \alpha$ habe $f \in L^1_{loc}(G)$ eine schwache β-te Ableitung. Hier bedeutet $\beta \leq \alpha$, dass $\alpha_j \leq \beta_j$ für alle $j = 1, \ldots, d$. Weiters sei $\psi \in C^\infty(G)$.

Zeigen Sie durch Induktion nach $|\alpha|$, dass dann $\psi \cdot f$ in $L^1_{loc}(G)$ liegt und eine schwache α-te Ableitung hat, wobei λ_d-fast überall

$$D^\alpha(\psi \cdot f) = \sum_{(\mathbb{N}\cup\{0\})^d \ni \beta \leq \alpha} \underbrace{\binom{\alpha}{\beta}}_{:=\prod_{j=1}^d \binom{\alpha_j}{\beta_f}} D^\beta(\psi)\, D^{\alpha-\beta}(f) .$$