

# Kapitel 15

## Transformationsformel, Integralsätze

### 15.1 Transformationsformel

Eine ausgesprochen nützliche Sache zur Berechnung von mehrdimensionalen Integralen ist die sogenannte Transformationsformel. Sie kann als Verallgemeinerung der Substitutionsregel für Riemann-Integrale gesehen werden. Der Spezialfall von affinen Abbildungen wurde schon in Lemma 14.11.6 abgehandelt.

In der Tat wollen wir zeigen, dass wenn  $T : D \rightarrow G$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist, also wenn  $D, G$  offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$  sind und  $T$  eine bijektive Abbildung derart ist, dass  $T$  und  $T^{-1}$  stetig differenzierbar sind,

$$\int_G f \, d\lambda_d = \int_D f \circ T \cdot |\det dT| \, d\lambda_d$$

für alle integrierbaren Funktionen  $f : G \rightarrow [-\infty, +\infty]$  ( $\mathbb{C}$ ) gilt. Dass  $T$  hier messbar ist, folgt unmittelbar aus seiner Stetigkeit; vgl. Fakta 14.10.2.

Im Beweis für den allgemeinen Fall werden wir Diffeomorphismen durch affine Abbildungen approximieren, um dann Lemma 14.11.6 anzuwenden. Zunächst wollen wir einiges an Vorarbeit dafür leisten.

**15.1.1 Lemma.** Sei  $Z$  ein Banachraum,  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow Z$  stetig differenzierbar. Dann ist die Funktion  $F : D \times D \rightarrow Z$ ,

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\|x-y\|} \cdot (f(x) - f(y) - df(y)(x-y)), & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

stetig<sup>1</sup>. Zu jeder kompakten Teilmenge  $K \subseteq D$  gibt es zudem eine monoton wachsende Funktion  $\rho : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  mit  $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \rho(\gamma) = 0$  und

$$\|f(x) - f(y) - df(y)(x-y)\| \leq \|x-y\| \cdot \rho(\|x-y\|) \quad \text{für alle } x, y \in K.$$

Schließlich gilt

$$f(B) \subseteq f(y) + df(y)(B-y) + K_{d(B), \rho(d(B))}(0)$$

<sup>1</sup>Hier und im Beweis steht  $\|\cdot\|$  einerseits für die Norm auf  $Z$  und andererseits für eine der Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  auf  $\mathbb{R}^d$  bzw. die dazugehörige Abbildungsnorm; siehe Definition 9.2.4.

für alle  $B \subseteq K$  und  $y \in B$ , wobei  $d(B) = \sup_{x,y \in B} \|x - y\|$  für den Durchmesser von  $B$  bezüglich  $\|\cdot\|$  aus Definition 12.14.1 steht.

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $F$  bei einem beliebigen  $(u, v) \in D \times D$  stetig ist. Im Falle  $u \neq v$  gilt  $x \neq y$  für alle  $(x, y) \in U_\eta((u, v))$  für ein hinreichend kleines  $\eta > 0$ . Auf  $U_\eta((u, v))$  ist  $F(x, y)$  als Kombination stetiger Funktionen selber stetig; siehe Korollar 9.1.3, Korollar 9.2.9, Beispiel 9.2.10. Im Falle  $u = v$  betrachten wir  $\delta > 0$  mit  $K_\delta(u) \subseteq D$ . Wegen der Stetigkeit von  $df$  erfüllt  $C(\delta) := \max_{x,y \in K_\delta(u)} \|df(x) - df(y)\|$  die Grenzwertbeziehung  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} C(\delta) = 0$ . Für  $x, y \in K_\delta(u)$  mit  $x \neq y$  gilt

$$\|F(u, u) - F(x, y)\| = \frac{1}{\|x - y\|} \cdot \|f(x) - df(y)x - (f(y) - df(y)y)\|. \quad (15.1)$$

Wir halten  $y \in K_\delta(u)$  fest und setzen  $h(t) = f(t) - df(y)t$ . Der Ausdruck in (15.1) stimmt dann überein mit  $\frac{1}{\|x - y\|} \|h(x) - h(y)\|$ . Wegen  $dh(t) = df(t) - df(y)$  folgt aus dem Resultat am Ende von Abschnitt 10.1 in [K] für  $x, t \in K_\delta(u)$

$$\|h(x) - h(t)\| \leq \sup_{s \in K_\delta(u)} \|dh(s)\| \cdot \|x - t\| \leq C(\delta) \|x - t\|,$$

wodurch  $\|F(u, u) - F(x, y)\| \leq C(\delta)$  für  $(x, y) \in K_\delta((u, u))$ .

Für ein kompaktes  $K \subseteq D$  bezeichne  $\rho(\gamma)$  die Oszillation von  $F|_{K \times K}$ , also

$$\rho(\gamma) := \sup \{\|F(x, y) - F(\xi, \eta)\| : (x, y), (\xi, \eta) \in K \times K, \|(x, y) - (\xi, \eta)\| \leq \gamma\}.$$

Da  $F|_{K \times K}$  gemäß Satz 6.3.3 gleichmäßig stetig ist, erhalten wir  $\lim_{\gamma \rightarrow 0+} \rho(\gamma) = 0$ ; siehe Bemerkung 8.3.2. Zudem gilt für  $x, y \in K$  wegen  $\|(x, y) - (y, y)\| = \|x - y\|$

$$\|f(x) - f(y) - df(y)(x - y)\| = \|x - y\| \cdot \|F(x, y) - F(y, y)\| \leq \|x - y\| \cdot \rho(\|x - y\|).$$

Ist  $y \in B \subseteq K$  fest, so folgt für jedes  $x \in B$

$$\|f(x) - f(y) - df(y)(x - y)\| = \|x - y\| \cdot \rho(\|x - y\|) \leq d(B) \cdot \rho(d(B)),$$

womit  $f(x) - f(y) - df(y)(x - y)$  in  $K_{d(B), \rho(d(B))}(0)$  liegt und infolge

$$f(x) \in f(y) + df(y)(x - y) + K_{d(B), \rho(d(B))}(0) \subseteq f(y) + df(y)(B - y) + K_{d(B), \rho(d(B))}(0).$$

□

**15.1.2 Satz (Transformationsformel).** Sei  $T : D \rightarrow G$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Mengen  $D, G \subseteq \mathbb{R}^d$ . Ist  $B \subseteq D$ ,  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ , so gilt

$$\lambda_d(T(B)) = \int_B |\det dT(x)| d\lambda_d(x). \quad (15.2)$$

Eine Funktion  $f : G \rightarrow [-\infty, +\infty]$  (C) ist genau dann integrierbar, wenn  $f \circ T \cdot |\det dT| : D \rightarrow [-\infty, +\infty]$  (C) es ist. In diesem Fall gilt

$$\int_G f d\lambda_d = \int_D f \circ T \cdot |\det dT| d\lambda_d. \quad (15.3)$$

*Beweis.* Im nun folgenden Beweis steht  $\|\cdot\|$  für  $\|\cdot\|_\infty$  bzw. die dazugehörige Abbildungsnorm; siehe Definition 9.2.4.

- (i) Zunächst folgt aus der Stetigkeit von  $T^{-1}$  und  $T$  mit Fakta 14.10.2 und Fakta 14.4.9, 1, dass  $T(B) \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G$  äquivalent ist zu  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D$  für jedes  $B \subseteq D$ , und dass  $f : G \rightarrow [-\infty, +\infty]$  genau dann messbar ist, wenn  $f \circ T$  messbar ist. Wegen  $|\det dT| > 0$  ist das äquivalent zur Messbarkeit von  $f \circ T \cdot |\det dT|$ ; vgl. Fakta 14.4.9, 9.
- (ii) Es genügt, (15.3) für alle messbaren Funktionen  $f \geq 0$  nachzuweisen, wobei die linke und die rechte Seite in (15.3) als Elemente von  $[0, +\infty]$  betrachtet werden. In der Tat folgt daraus einerseits (15.2), wenn man  $f = \mathbb{1}_{T(B)}$  setzt, und andererseits auch (15.3) für alle messbaren Funktionen  $f$ , wobei die linke Seite genau dann integrierbar ist, wenn es die rechte Seite ist; siehe Definition 14.6.1 und Definition 14.15.1 und danach.
- (iii) Wir zeigen zunächst

$$\lambda_d(T(B)) \leq \int_B |\det dT(x)| d\lambda_d(x), \quad (15.4)$$

wenn  $B = R$  ein halboffenes Rechteck  $R = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subseteq D$  ist. Dafür reicht es, diese Behauptung unter der Zusatzannahme  $\text{cl}(R) \subseteq D$  zu zeigen. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} R = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_1 + \frac{1}{2^n}, b_1] \times \cdots \times (a_d + \frac{1}{2^n}, b_d] \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_1 + \frac{1}{2^n}, b_1] \times \cdots \times [a_d + \frac{1}{2^n}, b_d], \end{aligned} \quad (15.5)$$

womit die Richtigkeit von (15.4) für  $B = R$  wegen des Satzes von der der monotonen Konvergenz, Fakta 14.5.3, 3, aus der von (15.4) für  $B = (a_1 + \frac{1}{2^n}, b_1] \times \cdots \times (a_d + \frac{1}{2^n}, b_d]$  folgt.

Die Kompaktheit von  $\text{cl}(R) \subseteq D$  impliziert

$$M := \sup_{x \in \text{cl}(R)} \|dT(x)^{-1}\| < +\infty.$$

Für beliebiges  $\delta > 0$  schreiben wir  $R$  als disjunkte Vereinigung  $R = \sum_{j=1}^n R_j$  von kleineren Rechtecken  $R_j = (a_1^j, b_1^j] \times \cdots \times (a_d^j, b_d^j]$ , deren maximale Seitenlänge  $\max_i (b_i^j - a_i^j)$  – diese stimmt mit dem Durchmesser  $d(R_j)$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  überein – kleiner als  $\delta$  ist. Zusätzlich gelte<sup>2</sup>

$$\min_i (b_i^j - a_i^j) \geq \frac{d(R_j)}{2}. \quad (15.6)$$

Wir wählen  $y_j \in \text{cl}(R_j)$  mit  $|\det dT(y_j)| = \min_{t \in \text{cl}(R_j)} |\det dT(t)|$ . Aus Lemma 15.1.1 für  $K = B = \text{cl}(R)$  und  $f = T$  zusammen mit  $d(R_j) = d(\text{cl}(R_j))$  folgt

$$T(R_j) \subseteq T(\text{cl}(R_j)) \subseteq T(y_j) - dT(y_j)(y_j) + dT(y_j)(\text{cl}(R_j)) + K_{d(R_j); \rho(d(R_j))}(0).$$

Wegen  $\|dT(y_j)^{-1}\| \leq M$  gilt mit  $\theta := M \cdot d(R_j) \cdot \rho(d(R_j))$

$$\begin{aligned} dT(y_j)(\text{cl}(R_j)) + K_{d(R_j); \rho(d(R_j))}(0) &= dT(y_j) \left( \text{cl}(R_j) + dT(y_j)^{-1} (K_{d(R_j); \rho(d(R_j))}(0)) \right) \\ &\subseteq dT(y_j) (\text{cl}(R_j) + K_\theta(0)), \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Dies lässt sich bewerkstelligen, indem man immer die  $[a_i^j, b_i^j]$  von maximaler Länge in zwei gleich lange Intervalle unterteilt, bis besagte Bedingung erfüllt ist.

weshalb  $T(R_j) \subseteq T(y_j) - dT(y_j)(y_j) + dT(y_j)(c\ell(R_j) + K_\theta(0))$ . Mit Lemma 14.11.6 erhalten wir

$$\lambda_d(T(R_j)) \leq |\det dT(y_j)| \lambda_d(c\ell(R_j) + K_\theta(0)).$$

Da  $K_\theta(0)$  eine abgeschlossene Kugel bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ist, folgt  $c\ell(R_j) + K_\theta(0) =$

$$[a_1^j, b_1^j] \times \cdots \times [a_d^j, b_d^j] + [-\theta, \theta]^d = [a_1^j - \theta, b_1^j + \theta] \times \cdots \times [a_d^j - \theta, b_d^j + \theta].$$

Also folgt, wobei die letzte Ungleichung wegen (15.6) und der Monotonie von  $\rho$  gilt,

$$\begin{aligned} \lambda_d(T(R_j)) &\leq |\det dT(y_j)| \lambda_d(c\ell(R_j) + K_\theta(0)) = |\det dT(y_j)| \prod_{i=1}^d (b_i^j - a_i^j + 2\theta) \\ &= |\det dT(y_j)| \prod_{i=1}^d (b_i^j - a_i^j) \prod_{i=1}^d \left(1 + 2M \cdot \rho(d(R_j)) \frac{d(R_j)}{b_i^j - a_i^j}\right) \\ &\leq |\det dT(y_j)| \lambda_d(R_j) (1 + 4M \cdot \rho(\delta))^d. \end{aligned}$$

Summieren wir über  $j$  auf, so erhalten wir wegen der Wahl der  $y_j$

$$\begin{aligned} \lambda_d(T(R)) &\leq (1 + 4M \cdot \rho(\delta))^d \sum_{j=1}^n |\det dT(y_j)| \lambda_d(R_j) \\ &\leq (1 + 4M \cdot \rho(\delta))^d \sum_{j=1}^n \int_{R_j} |\det dT(x)| d\lambda_d(x) \\ &= (1 + 4M \cdot \rho(\delta))^d \int_R |\det dT(x)| d\lambda_d(x). \end{aligned}$$

Lassen wir  $\delta > 0$  gegen Null streben, so tut das gemäß Lemma 15.1.1 auch  $\rho(\delta)$ , und wir erhalten (15.4) für  $B = R$ .

- (iv) Aus Fakta 14.11.3, 2, ist bekannt, dass sich jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  als abzählbare Vereinigung von dyadischen Rechtecken schreiben lässt. Das gilt natürlich auch für offene Teilmengen der Bauart  $O \cap D$  mit offenen  $O \subseteq \mathbb{R}^d$ . Insbesondere wird  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D = \mathcal{A}((\mathcal{T}^d)_D)$  von dem Ring  $\mathcal{R}_d^D := \{A \in \mathcal{R}_d : A \subseteq D\}$  erzeugt; siehe Fakta 14.11.3, 3. Weil die  $A \in \mathcal{R}_d^D$  als disjunkte Vereinigung von in  $D$  enthaltenen Rechtecken geschrieben werden kann, gilt (15.4) für alle  $B \in \mathcal{R}_d^D$ .

Die beiden Mengenfunktionen links und rechts vom Gleichheitszeichen in (15.4) sind  $\sigma$ -endliche Maße auf  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D = \mathcal{A}((\mathcal{T}^d)_D)$ ; vgl. Fakta 14.10.2, 4, Lemma 14.7.1 und Satz 14.7.5. Wegen des Korollar 14.9.6 setzt sich die Ungleichung (15.4) von  $\mathcal{R}_d^D$  auf alle Borelmengen  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_D$  fort.

- (v) Ist  $\lambda_d \circ T$  das durch<sup>3</sup>  $\lambda_d \circ T(B) := \lambda_d \circ (T^{-1})^{-1}(B) = \lambda((T^{-1})^{-1}(B)) = \lambda(T(B))$  definierte Maß, so besagt (15.4), dass  $\lambda_d \circ T \leq |\det dT(\cdot)| \cdot \lambda_d$ , wobei<sup>4</sup>  $(|\det dT(\cdot)| \cdot \lambda_d)(B) = \int_B |\det dT(x)| \lambda_d(x)$ . Zusammen mit Satz 14.7.5 und Lemma 14.7.1 folgt daraus für messbare Funktionen  $g \geq 0$  auf  $D$

$$\int_G g \circ T^{-1} d\lambda_d = \int_D g d(\lambda_d \circ T) \leq \int_D g d(|\det dT(\cdot)| \cdot \lambda_d) = \int_D g \cdot |\det dT| d\lambda_d.$$

<sup>3</sup>Siehe Satz 14.7.5.

<sup>4</sup>Siehe Lemma 14.7.1.

Setzen wir  $g = f \circ T$ , so folgt für alle messbaren Funktionen  $f \geq 0$  auf  $G$

$$\int_G f \, d\lambda_d \leq \int_D f \circ T \cdot |\det dT| \, d\lambda_d. \quad (15.7)$$

(vi) Wenden wir (15.7) auf den Diffeomorphismus  $T^{-1} : G \rightarrow D$  an, so erhalten wir für messbare  $g \geq 0$  auf  $D$

$$\int_D g \, d\lambda_d \leq \int_G g \circ T^{-1} \cdot |\det d(T^{-1})| \, d\lambda_d.$$

Setzen wir hier  $g(x) = f \circ T(x) \cdot |\det dT(x)|$ , so folgt wegen  $(dT(T^{-1}y))^{-1} = dT^{-1}(y)$

$$\begin{aligned} \int_D f \circ T \cdot |\det dT| \, d\lambda_d &\leq \\ \int_G f \circ T(T^{-1}(y)) \cdot |\det dT(T^{-1}y)| \cdot |\det dT^{-1}(y)| \, d\lambda_d &= \int_G f \, d\lambda_d, \end{aligned}$$

und mit (15.7) sogar (15.3) für messbare  $f \geq 0$ .  $\square$

**15.1.3 Beispiel.** Man betrachte die *Polarkoordinaten* Darstellung von  $\mathbb{R}^2$ , also die Abbildung  $\phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\phi(r, \varphi)^T = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$ . Für auf  $\mathbb{R}^2$  integrierbare Funktionen gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda_2 = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot r \, d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (15.8)$$

Um das einzusehen, betrachte die Einschränkung

$$\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times \{0\}).$$

Diese Funktion ist augenscheinlich bijektiv, wobei

$$\det(d\phi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Also ist  $\phi$  ein Diffeomorphismus, und nach Satz 15.1.2 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times \{0\})} f \, d\lambda_2 = \int_{(0, +\infty) \times (0, 2\pi)} f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot r \, d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (15.9)$$

Da  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \times \{0\}$  und

$$(\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup ([0, +\infty) \times \{0\}) \cup ([0, +\infty) \times \{2\pi\}),$$

also die Differenz der Integrationsbereiche in (15.8) und der in (15.9),  $\lambda_2$ -Nullmengen sind, erhalten wir auch die Gültigkeit von (15.8).

**15.1.4 Beispiel.** Wir wenden (15.8) an, um  $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, d\lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} e^{-r^2} r \, d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\varphi = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

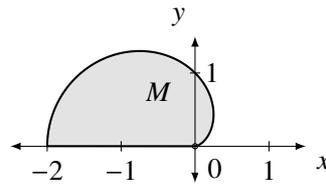
Also gilt  $I = \sqrt{\pi}$ , was wir auch schon in Beispiel 8.7.13 gesehen haben.

**15.1.5 Beispiel.** Wir wollen das Integral

$$I = \int_M y \, d\lambda_2 \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_M \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) \cdot y \, d\lambda_2 \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)$$

berechnen, wobei  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  jene Teilmenge ist, die durch die  $x$ -Achse und durch die in Polarkoordinaten gegebene Kurve  $r = 1 - \cos \varphi$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ , begrenzt ist, also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in [0, \pi], 0 \leq r \leq 1 - \cos \varphi \right\}$$

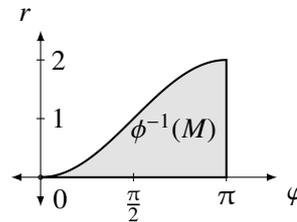


Aus (15.8) erhalten wir

$$I = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi]} \mathbb{1}_M \left( \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \right) r^2 \sin \varphi \, d\lambda_2 \left( \begin{matrix} r \\ \varphi \end{matrix} \right).$$

Ist  $\phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\phi(r, \varphi)^T = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T$  wie in Beispiel 15.1.3, so gilt  $\mathbb{1}_M(r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T = \mathbb{1}_M(\phi(r, \varphi)^T) = \mathbb{1}_{\phi^{-1}(M)}(r, \varphi)^T$ , wobei

$$\phi^{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in [0, +\infty) \times [0, \pi] : 0 \leq r \leq 1 - \cos \varphi \right\}$$



Also folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} I &= \int_{\phi^{-1}(M)} r^2 \sin \varphi \, d\lambda_2 \left( \begin{matrix} r \\ \varphi \end{matrix} \right) = \int_0^\pi \int_0^{1-\cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{12} (1 - \cos \varphi)^4 \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**15.1.6 Beispiel.** Sei  $R := [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^{n-2}$ , und sei  $T_n : R \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$T_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \sin \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \vdots \\ \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ \sin \theta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist  $T_n$  stetig. Für  $(x_1, \dots, x_n)^T = T_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T$  gilt

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= r^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2}, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= r^2 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2} \\ &\vdots \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 &= r^2 \cos^2 \theta_{n-2} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Im Falle  $(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$  gilt dabei  $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ , womit insbesondere  $x_1 \neq 0$  oder  $x_2 \neq 0$ . Außerdem haben wir

$$\sin \theta_k = \frac{x_{k+2}}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{k+2}^2}} \quad \text{für } k = 1, \dots, n-2, \quad (15.10)$$

sowie

$$\sin \alpha = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \quad (15.11)$$

Wegen  $\theta_k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  und  $\alpha \in (0, 2\pi)$  folgt, dass  $(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T$  eindeutig durch sein Bild  $(x_1, \dots, x_n)^T$  unter  $T_n$  bestimmt ist, also ist  $T_n$  injektiv.

Nimmt man umgekehrt  $(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  her, so folgt  $x_1 \neq 0$  oder  $x_2 \neq 0$  und daher  $r := \|(x_1, \dots, x_n)^T\|_2 > 0$ . Außerdem gilt  $x_{k+2}^2 < x_1^2 + \cdots + x_{k+2}^2$  für  $k = 1, \dots, n-2$ , weshalb wir  $\theta_k \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  so finden, dass (15.10) erfüllt ist. Schließlich sei  $\alpha \in [0, 2\pi)$  derart, dass (15.11) gilt. Wegen  $x_2 \neq 0$  oder  $x_1 < 0$  können wir  $\alpha = 0$  ausschließen.

Aus (15.10) folgt für  $k = n-2$ , dass  $r^2 \cos^2 \theta_{n-2} = r^2 - r^2 \sin^2 \theta_{n-2} = r^2 - x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2$ . Für  $k = n-3$  folgt

$$r^2 \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2} = (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2) \left( 1 - \frac{x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \right) = x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2,$$

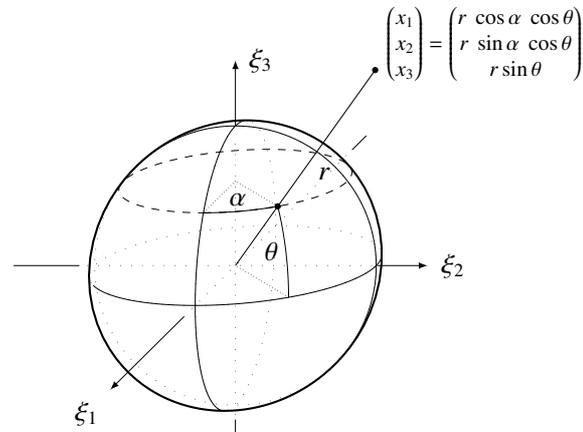
usw. bis  $k = 1$ , wofür wir  $x_1^2 + x_2^2 = r^2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^2 \theta_{n-3} \cos^2 \theta_{n-2}$  erhalten. Kombinieren wir das mit (15.11) und (15.10), so sehen wir, dass  $T_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T = (x_1, \dots, x_n)^T$ .

Somit ist  $T_n : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  bijektiv. Man nennt  $(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})^T$  auch die  $n$ -dimensionalen *Kugelkoordinaten* von  $(x_1, \dots, x_n)^T$ .

Wir wollen induktiv zeigen, dass für alle  $n \geq 2$

$$\det dT_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{n-2} \theta_{n-2}. \quad (15.12)$$

Für  $n = 2$  wissen wir aus Beispiel 15.1.3, dass  $\det dT_2(r, \alpha) = r$ . Sei also  $n \geq 3$  und angenommen,

Abbildung 15.1: Veranschaulichung der Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ 

dass (15.12) für  $n - 1$  statt  $n$  richtig ist. Zunächst gilt

$$T_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = \cos \theta_{n-2} \cdot (\iota_{n-1} \circ T_{n-1} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \sin \theta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist  $\iota_{n-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Einbettung  $(x_1, \dots, x_{n-1})^T \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)^T$ . Insbesondere stimmt die linke obere  $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von  $dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  überein mit  $\cos \theta_{n-2} \cdot dT_{n-1}(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-3})$ .

Andererseits rechnet man leicht nach, dass<sup>5</sup>

$$\frac{\partial T_n}{\partial \theta_{n-2}} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} + r \frac{\sin \theta_{n-2}}{\cos \theta_{n-2}} \cdot \frac{\partial T_n}{\partial r} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r \cos \theta_{n-2} + r \frac{\sin^2 \theta_{n-2}}{\cos \theta_{n-2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{r}{\cos \theta_{n-2}} \end{pmatrix}. \quad (15.13)$$

Da die Determinante gleich bleibt, wenn man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen addiert, ist  $\det dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \det C$ , wobei  $C$  mit  $dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  die ersten  $n - 1$  Spalten gemeinsam und in der letzten Spalte den Vektor (15.13) stehen hat. Entwickeln wir  $\det C$  nach der letzten Spalte, so erhalten wir

$$\det dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \frac{r}{\cos \theta_{n-2}} \cdot \cos^{n-1} \theta_{n-2} \cdot dT_{n-1}(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}).$$

<sup>5</sup>Beachte  $\cos \theta_{n-2} > 0$ .

Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} \det dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) &= r \cdot \cos^{n-2} \theta_{n-2} \cdot r^{n-2} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{n-3} \theta_{n-3} \\ &= r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{n-2} \theta_{n-2}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $dT_n(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$  immer regulär. Aus Bemerkung 13.3.5 wissen wir, dass dann  $T_n : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  ein Diffeomorphismus ist. Da  $R \setminus (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2}$  in einer endlichen Vereinigung von echten affinen Unterräumen von  $\mathbb{R}^n$  enthalten ist, hat diese Menge  $\lambda_n$ -Maß Null; siehe Bemerkung 14.14.9. Aus dem selben Grund gilt  $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}) = 0$ . Somit folgt aus Satz 15.1.2, dass für ein messbares  $f$  definiert auf  $\mathbb{R}^n$  mit Werten in  $\mathbb{C}$  bzw.  $[-\infty, +\infty]$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \int_R (f \circ T_n) \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} \cdot r^{n-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{n-2} \theta_{n-2} \, d\lambda_n \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} \quad (15.14)$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut, und in dem Fall die Integrale übereinstimmen.

**15.1.7 Beispiel.** Wir wollen das Volumen  $I$  folgenden Achtels  $M$  der Kugel mit Radius  $a > 0$  ausrechnen:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

Mit (15.14) folgt wegen  $\mathbb{1}_M \circ T_3 = \mathbb{1}_{T_3^{-1}(M)}$

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{1}_M \, d\lambda_3 = \int_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \mathbb{1}_{T_3^{-1}(M)} \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix} r^2 \cos \theta \, d\lambda_3 \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$T_3^{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix} \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : r \in [0, a], \alpha, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\},$$

erhalten wir

$$I = \int_{[0, a] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} r^2 \cos \theta \, d\lambda_3 \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2} \left( \int_0^a r^2 \, dr \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{a^3}{3} \right) 1 = \frac{\pi a^3}{6}.$$

**15.1.8 Beispiel.** Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b < +\infty$ , wollen wir das Integral

$$I = \int_{\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2 - y^2)^2} e^{4x^2 y^2} (x^2 + y^2) \, d\lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

berechnen. Dazu könnten wir auf Polarkoordinaten transformieren und dann elementar rechnen. Um die Transformationsformel auch für Diffeomorphismen  $T$  zu üben, die nicht der Transformation auf Polarkoordinaten entspricht, wählen wir einen anderen Zugang. Wir schreiben  $I$  als<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} I &= \int_{\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \int_{\{y > 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \int_{\{y < 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}} e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit affinen Abbildung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$  folgt aus der Transformationsformel, Lemma 14.11.6, dass die beiden Integral übereinstimmen, also

$$\frac{I}{2} = \int_M e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2} (x^2 + y^2) d\lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei  $M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y > 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$ . Setzen wir

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

so gilt  $h \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{(x^2-y^2)^2} e^{4x^2y^2}$ . Außerdem rechnet man leicht nach, dass

$$dF \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

und daher  $\det dF \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2)$ . Damit hat man

$$\frac{I}{2} = \frac{1}{4} \int_M (h \circ F) \cdot |\det dF(\cdot)| d\lambda_2.$$

$F$  ist auf  $\mathbb{R}^2$  nicht injektiv, schränkt man es aber auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  ein, so ist  $F$  doch injektiv und

$$F(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\}).$$

Um das einzusehen, sei zunächst bemerkt, dass wenn  $F((x, y)^T) = (u, 0)^T$  für ein  $u \in \mathbb{R}$ , sicherlich  $x = 0$  oder  $y = 0$ . Für  $(x, y)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  folgt somit  $x = 0$ , woraus  $u = -y^2 < 0$  folgt. Also kann  $F((x, y)^T)$  nicht in  $[0, +\infty) \times \{0\}$  liegen. Die Funktion  $G : \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u}} \\ \sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u} \end{pmatrix}$$

ist wegen  $\sqrt{u^2+v^2}-u > 0$  wohldefiniert, und erfüllt  $G(\mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\})) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Zudem gilt  $F \circ G((u, v)^T) = (u, v)^T$  und  $G \circ F((x, y)^T) = (x, y)^T$ . Also ist  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\})$  bijektiv mit der Inversen<sup>7</sup>  $G$ . Nach Bemerkung 13.3.5 ist diese Abbildung sogar ein Diffeomorphismus.

<sup>6</sup>Der Integrationsbereich wurde nur um eine  $\lambda_2$ -Nullmenge verkleinert

<sup>7</sup>Eine andere Art und Weise das einzusehen, ist  $\mathbb{R}^2$  als  $\mathbb{C}$  zu betrachten. Dann entspricht der Funktion  $F$  genau die Funktion  $z \mapsto z^2$ .

Wegen  $M \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  gilt auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  sicher  $\mathbb{1}_M = \mathbb{1}_{F(M)} \circ F$ , und daher

$$\frac{I}{2} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} ((\mathbb{1}_{F(M)} \cdot h) \circ F) \cdot |\det dF(\cdot)| d\lambda_2, \quad (15.15)$$

wobei wegen  $\|F((x, y)^T)\|_2 = \|(x, y)^T\|_2^2$

$$F(M) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\}) : a^4 \leq u^2 + v^2 \leq b^4 \right\}.$$

Nach der Transformationsformel (15.3) folgt

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\})} \mathbb{1}_{F(M)} \cdot h d\lambda_2 = \frac{1}{4} \int_{F(M)} e^{u^2+v^2} d\lambda_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \int_{[a^2, b^2] \times [0, 2\pi]} e^{r^2} r d\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{\pi}{4} (e^{b^4} - e^{a^4}), \end{aligned}$$

und somit  $I = \frac{\pi}{2} (e^{b^4} - e^{a^4})$ .

## 15.2 Stetig differenzierbare topologische Gruppe im $\mathbb{R}^{d*}$

**15.2.1 Lemma.** Sei  $(G, \mathcal{T})$  eine topologische Gruppe und derart, dass  $G$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  für ein gewisses  $d \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{T}$  die Spurtopologie der euklidischen Topologie ist; siehe Definition 14.16.1. Weiters sei die Gruppenmultiplikation als Abbildung von  $G \times G$  nach  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar.

Für  $t \in G$  sind dann die Abbildungen  $l_t : G \rightarrow G$  und  $r_t : G \rightarrow G$  definiert durch  $l_t(x) := t \cdot x$  und  $r_t(x) := x \cdot t$  Diffeomorphismen, wobei  $(t, x) \mapsto dl_t(x)$  und  $(t, x) \mapsto dr_t(x)$  als Abbildungen von  $G \times G$  nach  $L_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  stetig sind. Setzen wir

$$\chi_l(t) := \frac{1}{|\det dl_t(e)|} \quad \text{und} \quad \chi_r(t) := \frac{1}{|\det dr_t(e)|},$$

so ist  $\chi_l \cdot d\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G}$  ein Linkes und  $\chi_r \cdot d\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G}$  ein Rechtes Haarsches Maß auf  $(G, \mathcal{T})$ ; siehe Lemma 14.7.1 und Definition 14.16.10. Die Modularfunktion von  $G$  ist gegeben durch

$$\Delta_G(t) = \frac{|\det dr_t(e)|}{|\det dl_t(e)|} \quad \text{für alle } t \in G.$$

*Beweis.* Die Funktion  $l_t : G \rightarrow G$  ( $\subseteq \mathbb{R}^d$ ) ist als Zusammensetzung von  $G \ni x \mapsto (t, x) \in G \times G$  ( $\subseteq \mathbb{R}^{2d}$ ) und der Gruppenmultiplikation  $\cdot$  stetig differenzierbar, wobei wegen der Kettenregel, Proposition 10.1.18,  $dl_t(x) = d(\cdot)(t, x) \binom{0}{1}$  stetig in  $(t, x)$  ist. Zudem ist  $l_t$  bijektiv mit  $(l_t)^{-1} = l_{t^{-1}}$ . Gemäß Definition 13.3.4 ist  $l_t : G \rightarrow G$  dann ein  $C^1$ -Diffeomorphismus.

Aus  $l_{st} = l_s \circ l_t$  folgt auch mit der Kettenregel  $d(l_{st})(e) = dl_s(t) dl_t(e)$ . Also gilt für  $f \in C_{00}(G, \mathbb{R})$  und  $s \in G$  nach der Transformationsformel angewandt auf den Diffeomorphismus  $l_s : G \rightarrow G$

$$\begin{aligned} \int_G f(st) \cdot \frac{1}{|\det dl_t(e)|} d\lambda_d(t) &= \int_G f(st) \cdot \frac{1}{|\det dl_{st}(e)|} \cdot |\det dl_s(t)| d\lambda_d(t) \\ &= \int_G f(t) \cdot \frac{1}{|\det dl_t(e)|} d\lambda_d(t). \end{aligned}$$

Somit ist  $\chi_l \cdot d\lambda_d$  linksinvariant. Die Aussagen für  $r_t$  zeigt man auf ähnliche Weise.

Nach Fakta 14.16.11, 4, ist  $\nabla_G(\cdot^{-1}) \cdot \chi_l \cdot d\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G}$  ein Rechtes Haarsches Maß und stimmt infolge mit  $c \cdot \chi_r \cdot d\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G}$  für ein  $c \geq 0$  überein. Also gilt  $\nabla_G(\cdot^{-1}) \cdot \chi_l = c \cdot \chi_r \lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G}$ -fast überall; siehe Proposition 14.7.2. Nach Fakta 14.11.3, 5, gilt diese Gleichheit auf einer dichten Menge. Wegen der Stetigkeit beider Funktionen erhalten wir  $\nabla_G(\cdot^{-1}) \cdot \chi_l = c \cdot \chi_r$  auf ganz  $G$ . Werten wir beide Seiten bei  $e$  aus, so folgt  $c = 1$  aus  $\chi_l(e) = \chi_r(e) = \nabla_G(e) = 1$ ; siehe Fakta 14.16.11, 6. Wir erhalten also für  $t \in G$

$$\Delta_G(t) = \frac{1}{\Delta_G(t^{-1})} = \frac{\chi_l(t)}{\chi_r(t)} = \frac{|\det dr_t(e)|}{|\det dl_t(e)|}.$$

□

**15.2.2 Beispiel.** Alle im Folgenden behandelten Gruppen sind lokalkompakt, da sie allesamt als topologischer Raum offene Teilmengen eines gewissen  $\mathbb{R}^d$  sind.

- (i) Ist  $G = \mathbb{R}^d$  versehen mit der Addition, so sind die Voraussetzungen von Lemma 15.2.1 erfüllt, wobei für  $s, t \in \mathbb{R}^d$  die Ableitung  $dl_t(s)$  immer mit Einheitsmatrix übereinstimmt. Somit ist das  $d$ -dimensionale Lebesguesche Maß  $\lambda_d$  ein linkes und wegen der Kommutativität auch ein rechtes Haarsches Maß von  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}^d)$  ist. Diese Tatsache haben wir schon in Beispiel 14.16.12 festgestellt.
- (ii) Betrachten wir die Gruppe  $\mathbb{R}^+$  mit der Multiplikation. Klarerweise ist  $(s, t) \mapsto s \cdot t$  stetig differenzierbar, wobei  $dl_t(s) = dr_t(s) = (t)$  für  $s, t \in \mathbb{R}^+$ . Nach Lemma 15.2.1 ist dann  $\chi \cdot \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{\mathbb{R}^+}}$  mit  $\chi(t) := \frac{1}{t}$  ein linkes und rechtes Haarsches Maß.
- (iii) Für  $w \in \mathbb{C}$  hat die lineare Abbildung  $z \mapsto zw$  betrachtet als Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  Determinante  $|w|^2$ . Also erhalten wir aus Lemma 15.2.1 für die Gruppe  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit der Multiplikation, dass  $\chi \cdot \lambda_2|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}}$  mit  $\chi(w) := \frac{1}{|w|^2}$  ein linkes und rechtes Haarsches Maß ist.
- (iv) Wie schon in Beispiel 14.16.2 bemerkt, bildet die Gruppe  $GL(d, \mathbb{R})$  aller regulären reellwertigen  $d \times d$ -Matrizen mit der Matrizenmultiplikation eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{d \times d} \simeq \mathbb{R}^{d^2}$ .

Für  $S \in GL(d, \mathbb{R})$  ist die Abbildung  $l_S : \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $l_S(X) = SX$  linear. Identifiziert man  $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^d$  mit dem Vektor  $(\xi_k)_{k=1}^{d^2} \in \mathbb{R}^{d^2}$ , wobei  $x_{i,j} = \xi_{i+(j-1)d}$ , so hat  $l_S$  die Blockmatrixdarstellung

$$\text{diag}(S, \dots, S) \quad (\in \mathbb{R}^{d^2 \times d^2}),$$

und daher  $\det l_S = (\det S)^d$ . Gemäß Lemma 15.2.1 ist  $\chi_l \cdot \lambda_{d^2}|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^{d^2})_{GL(d, \mathbb{R})}}$  mit  $\chi_l(S) = \frac{1}{|\det S|^d}$  ein linkes Haarsches Maß auf  $GL(d, \mathbb{R})$ . Man berechnet auf ähnliche Weise  $\det r_S = (\det S)^d$ , wodurch  $\chi_l \cdot \lambda_{d^2}|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^{d^2})_{GL(d, \mathbb{R})}}$  auch ein rechtes Haarsches Maß und infolge  $GL(d, \mathbb{R})$  unimodular ist; siehe Fakta 14.16.11.

- (v) Die *affine Gruppe*  $G$  ist die Menge aller affinen Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  der Form  $x \mapsto ax + b$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Die Gruppenmultiplikation ist dabei die Hintereinanderausführung dieser Abbildungen. Als Menge identifizieren wir  $G$  mit der offenen Teilmenge  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  von  $\mathbb{R}^2$ , wobei wegen  $a_1(a_2x + b_2) + b_1 = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$  die Gruppenmultiplikation gegeben ist durch

$$(a_1, b_1)^T \cdot (a_2, b_2)^T = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1)^T.$$

Man sieht unmittelbar, dass  $(1, 0)^T$  das neutrale Element von  $G$  abgibt, und dass  $G$  nicht abelsch ist. Versieht man  $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  mit der Spurtopologie induziert von der euklidischen

Topologie, so bildet  $G$  eine lokalkompakte Gruppe, wobei die Gruppenmultiplikation offenbar stetig differenzierbar ist.

Für die Abbildung  $l_{(a,b)^T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $l_{(a,b)^T}((x,y)^T) = (ax, ay + b)^T$  auf  $\mathbb{R}^2$  gilt  $\det(dl_{(a,b)^T}(x,y)^T) = a^2$ . Infolge ist  $\chi_l \cdot \lambda_2|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_G}$  mit  $\chi_l((a,b)^T) = \frac{1}{a^2}$  nach Lemma 15.2.1 ein Linkes Haarsches Maß. Wegen  $\det(dr_{(a,b)^T}(x,y)^T) = a$  ist  $\chi_r \cdot \lambda_2|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_G}$  mit  $\chi_r((a,b)^T) = \frac{1}{|a|}$  ein Rechtes Haarsches Maß. Zudem gilt  $\Delta_G((a,b)^T) = \frac{|\det dr_{(a,b)^T}(e)|}{|\det dl_{(a,b)^T}(e)|} = \frac{1}{|a|}$ , womit  $G$  ein einfaches Beispiel einer nicht unimodularen Gruppe ist.

## 15.3 $C^1$ -Bilder von Nullmengen\*

Es sei daran erinnert, dass für metrische Räume  $\langle X, d \rangle$ ,  $\langle Y, d \rangle$  und  $D \subseteq X$  eine Abbildung  $f : D \rightarrow Y$  Lipschitz stetig mit Konstante  $C \geq 0$  heißt, falls

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in D$$

gilt. Für  $z \in B \subseteq D$  gilt dann

$$f(B) \subseteq K_{C \cdot d(B)}(f(z)), \quad (15.16)$$

wobei  $d(B) = \sup_{x,y \in B} d(x, y)$  den Durchmesser von  $B$  aus Definition 12.14.1 bezeichnet.

**15.3.1 Lemma.** Für  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ , eine Lipschitz stetige Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  und eine Lebesgue-Nullmenge  $A \subseteq D$  ist auch  $f(A)$  eine Lebesgue-Nullmenge. Also gilt  $f(A) \in \mathcal{L}^d$  mit  $\bar{\lambda}_d(f(A)) = 0$  für alle  $A \in \mathcal{L}^d$  mit  $\bar{\lambda}_d(A) = 0$ ; vgl. Bemerkung 14.11.4.

*Beweis.* Gemäß (14.42) gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  abzählbar viele  $d$ -dimensionale halboffene Rechtecke  $R_j$  mit  $A \subseteq \bigcup_j R_j$  und  $\sum_j \lambda_d(R_j) \leq \epsilon$ . Durch Unterteilen der Seiten können wir bewerkstelligen, dass die maximale Seitenlänge  $d(R_j)$  von  $R_j$  kleiner oder gleich zwei mal die minimale Seitenlänge von  $R_j$  ist; siehe (15.6). Also gilt

$$\frac{d(R_j)^d}{2^d} \leq \lambda_d(R_j) \leq d(R_j)^d.$$

Bezeichnet  $C$  die Lipschitz Konstante von  $f$ , so schließen wir aus (15.16) angewandt auf die von  $\|\cdot\|_\infty$  induzierte Metrik, dass  $f(R_j) \subseteq y_j + [-C \cdot d(R_j), C \cdot d(R_j)]^d$  für ein  $y_j \in R_j$ . Mit der Notation aus (14.28) für  $\omega = \lambda_d$  folgt

$$\begin{aligned} (\phi_{\lambda_d})_{\uparrow \downarrow}^{\mathbb{N}}(\mathbb{1}_{f(A)}) &\leq (\phi_{\lambda_d})_{\uparrow \downarrow}^{\mathbb{N}}(\mathbb{1}_{\bigcup_j y_j + [-C \cdot d(R_j), C \cdot d(R_j)]^d}) \leq \sum_j \lambda_d(y_j + [-C \cdot d(R_j), C \cdot d(R_j)]^d) \\ &= \sum_j 2^d C^d d(R_j)^d \leq 4^d C^d \sum_j \lambda_d(R_j) \leq 4^d C^d \epsilon. \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt  $(\phi_{\lambda_d})_{\uparrow \downarrow}^{\mathbb{N}}(\mathbb{1}_{f(A)}) = 0$  und somit  $f(A) \in \mathcal{L}^d$ , wobei  $\bar{\lambda}_d(f(A)) = 0$ ; vgl. Bemerkung 14.11.4.  $\square$

**15.3.2 Korollar.** Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar, dann bildet  $f$  jede Lebesgue-Nullmenge auf eine Lebesgue-Nullmenge ab.

*Beweis.* Wir können  $D$  als abzählbare Vereinigung von kompakten und konvexen Mengen  $K_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , schreiben; siehe etwa (14.40) in Fakta 14.11.3, 2. Aus dem Resultat am Ende von Abschnitt 10.1 in [K] zusammen mit der durch die Kompaktheit von  $K_n$  bedingte Tatsache, dass  $\sup_{y \in K_n} \|df(y)\| < +\infty$ , erhalten wir die Lipschitz Stetigkeit von  $f|_{K_n}$ . Gemäß Lemma 15.3.1 gilt  $f(A \cap K_n) \in \mathcal{L}^d$  mit  $\bar{\lambda}_d(f(A \cap K_n)) = 0$ , und infolge  $f(A) = \bigcup_n f(A \cap K_n)$  mit

$$\bar{\lambda}_d(f(A)) = \bar{\lambda}_d\left(\bigcup_n f(A \cap K_n)\right) \leq \sum_n \bar{\lambda}_d(f(A \cap K_n)) = 0.$$

□

## 15.4 Satz von Sard\*

Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar, so lässt sich wegen des Umkehrsatzes die Transformationsformel zumindest lokal bei jedem  $x \in D$  mit  $\text{rang } df(x) = d$  anwenden. Folgender Satz sagt etwas über die Menge der Punkte  $x \in D$ , die das nicht erfüllen, aus.

**15.4.1 Satz (von Sard).** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  stetig differenzierbar. Weiters seien  $M \subseteq D$  die Menge der kritischen Punkte, also

$$M := \{x \in D : \text{rang } df(x) < d\}.$$

Dann ist die Menge  $f(M)$  der kritischen Werte eine Lebesgue-Nullmenge.

*Beweis.* Gemäß (14.40) in Fakta 14.11.3, 2, lässt sich  $D$  als Vereinigung von abzählbar vielen Mengen der Form  $z + [-\eta, +\eta]^d (\subseteq D)$  schreiben. Analog zur Argumentation am Ende des Beweises von Korollar 15.3.2 reicht es,  $(\phi_{\lambda_d})_{\uparrow \downarrow}^{\mathbb{N}}(\mathbb{1}_{f(K \cap M)}) = 0$  für ein beliebiges  $K = z + [-\eta, +\eta]^d \subseteq D$  mit  $\eta > 0$  zu zeigen.

Dazu setzen wir  $M := \sup_{u \in K} \|df(u)\| < +\infty$ , wobei hier die Abbildungsnorm gemeint ist, die wir erhalten, wenn wir  $\mathbb{R}^d$  mit  $\|\cdot\|_\infty$  versehen. Nun zerlegen wir  $K$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  in  $n^d$ -viele kleinere Quader

$$K = \bigcup_{k_1, \dots, k_d \in \{1, \dots, n\}} z + \underbrace{\prod_{j=1}^d \left[ -\eta + 2\eta \frac{k_j - 1}{n}, -\eta + 2\eta \frac{k_j}{n} \right]}_{=: K_{k_1, \dots, k_d}}.$$

Für  $K_{k_1, \dots, k_d} \cap M \neq \emptyset$  und  $y \in K_{k_1, \dots, k_d} \cap M$  folgt aus Lemma 15.1.1 wegen  $d(K_{k_1, \dots, k_d}) = \frac{2\eta}{n}$

$$f(K_{k_1, \dots, k_d}) \subseteq f(y) + df(y)(K_{k_1, \dots, k_d} - y) + K_{\frac{2\eta}{n}, \rho(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0),$$

wobei  $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \rho(\gamma) = 0$ . Wegen  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq d \cdot \|\cdot\|_\infty$  gilt dabei

$$K_{\frac{2\eta}{n}, \rho(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0) \subseteq K_{d \cdot \frac{2\eta}{n}, \rho(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_2}(0) \subseteq K_{d \cdot \frac{2\eta}{n}, \rho(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0).$$

Kugeln um 0 bzgl.  $\|\cdot\|_2$  sind invariant unter orthogonalen linearen Abbildungen, also unter  $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $UU^T = U^T U = I$ . Es folgt

$$Uf(K_{k_1, \dots, k_d}) \subseteq Uf(y) + Udf(y)(K_{k_1, \dots, k_d} - y) + K_{d \cdot \frac{2\eta}{n}, \rho(\frac{2\eta}{n})}^{\|\cdot\|_\infty}(0)$$

für jedes orthogonale  $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Da  $df(y)$  nicht vollen Rang hat, gibt es ein orthogonales  $U$  mit  $\text{ran } Udf(y) \subseteq \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^d$ . Zusammen mit<sup>8</sup>  $\|Udf(y)\| \leq \|U\| \|df(y)\| \leq d \cdot M$  erhalten wir für  $v := z - y + (-\eta + \eta \frac{2k_j-1}{n})^d$

$$\begin{aligned} Udf(y)(K_{k_1, \dots, k_d} - y) &= Udf(y)v + Udf(y)\left(\left[-\frac{\eta}{n}, \frac{\eta}{n}\right]^d\right) \\ &\subseteq Udf(y)v + \left(\left[-dM\frac{2\eta}{n}, dM\frac{2\eta}{n}\right]^{d-1} \times \{0\}\right), \end{aligned}$$

und damit

$$Uf(K_{k_1, \dots, k_d}) \subseteq Uf(y) + Udf(y)v + d\frac{2\eta}{n} \cdot \left(\left[-M - \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right), M + \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right)\right]^{d-1} \times \left[-\rho\left(\frac{2\eta}{n}\right), \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right)\right]\right).$$

Da  $\lambda_d$  invariant unter  $U$  ist, folgt

$$(\phi_{\lambda_d})_{\uparrow \downarrow}^{\mathbb{N}}(\mathbb{1}_{f(K_{k_1, \dots, k_d})}) \leq d^d 4^d \eta^d \frac{1}{n^d} (M + \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right))^{d-1} \cdot \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right).$$

Summieren wir über alle  $k_1, \dots, k_d \in \{1, \dots, n\}$  mit  $K_{k_1, \dots, k_d} \cap M \neq \emptyset$ , also über höchstens  $n^d$  Summanden, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\phi_{\lambda_d})_{\uparrow \downarrow}^{\mathbb{N}}(\mathbb{1}_{f(K \cap M)}) &\leq n^d \cdot d^d 4^d \eta^d \frac{1}{n^d} (M + \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right))^{d-1} \cdot \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right) \\ &= d^d 4^d \eta^d (M + \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right))^{d-1} \cdot \rho\left(\frac{2\eta}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

## 15.5 Fixpunktsatz von Brouwer\*

Mit Hilfe der Transformationsformel können wir einen analytischen Beweis des fundamentalen Fixpunktsatzes von Brouwer angeben. Andere Beweise verwenden Methoden aus der diskreten Mathematik oder aus der algebraischen Topologie. Im Folgenden sei  $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\|_2 = 1\}$  die *Einheitssphäre* im  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Außerdem wollen wir alle auftretenden offenen bzw. abgeschlossenen Kugeln als Kugeln bezüglich der  $\|\cdot\|_2$ -Norm am  $\mathbb{R}^{d+1}$  verstehen.

**15.5.1 Proposition.** *Es gibt keine stetig differenzierbare Funktion  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  mit offenem  $O \supseteq K_1(0) (\subseteq \mathbb{R}^{d+1})$  derart, dass  $g(O) \subseteq S^d$  und  $g|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$ .*

*Beweis.* Wir wollen die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion  $g : O \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  mit  $g|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$  und  $g(O) \subseteq S^d$ , wobei  $O \supseteq K_1(0)$  offen ist und es infolge ein  $\eta > 1$  derart gibt, dass sogar  $O \supseteq K_\eta(0) \supseteq K_1(0)$ , auf einen Widerspruch führen.

↪ Für  $t \geq 0$  betrachte die Funktion

$$h_t(x) := x + tg(x), \quad x \in O,$$

welche  $O$  nach  $\mathbb{R}^{d+1}$  hinein abbildet. Zudem ist  $h_t$  stetig differenzierbar, wobei

$$dh_t(x) = I + t dg(x).$$

<sup>8</sup>Für die zu  $\|\cdot\|_\infty$  gehörige Abbildungsnorm gilt  $\|U\| \leq d$ .

Da für  $t \|dg(x)\| < 1$  die entsprechende *Neumannsche Reihe* aus Beispiel 9.3.6 konvergiert, ist  $dh_t(x)$  für solche  $t$  invertierbar. Wegen der Stetigkeit von  $z \mapsto \|dg(z)\|$  auf der kompakten Menge  $K_\eta(0)$ , gilt  $C := \sup_{\|z\|_2 \leq \eta} \|dg(z)\| < +\infty$ . Für  $0 \leq t < \frac{1}{C}$  und  $\|x\|_2 \leq \eta$  ist  $dh_t(x)$  dann invertierbar.

Da für ein festes  $x \in K_\eta(0)$  die Funktion  $t \mapsto \det dh_t(x)$  stetig ist und auf  $[0, \frac{1}{C})$  nicht verschwindet, muss sie darauf immer dasselbe Vorzeichen haben. Wegen  $\det dh_0(x) = 1$  folgt also  $\det dh_t(x) > 0$  für alle  $t \in [0, \frac{1}{C})$ .

↪ Für  $0 \leq t < \frac{1}{C}$  ist  $h_t|_{K_\eta(0)}$  injektiv. In der Tat, folgt aus  $h_t(x) = h_t(y)$  mit  $x, y \in K_\eta(0)$ , dass

$$x - y + t(g(x) - g(y)) = h_t(x) - h_t(y) = 0,$$

und somit  $x - y = -t(g(x) - g(y))$ . Andererseits folgt aus dem Resultat am Ende von Abschnitt 10.1 in [K]

$$\|g(x) - g(y)\|_2 \leq \sup_{\|z\|_2 \leq \eta} \|dg(z)\| \|x - y\|_2.$$

Infolge erhalten wir

$$\|x - y\|_2 = t \|g(x) - g(y)\|_2 \leq t \sup_{\|z\|_2 \leq \eta} \|dg(z)\| \|x - y\|_2,$$

was wegen  $tC < 1$  die Beziehung  $x = y$  nach sich zieht.

↪ Wir behaupten nun, dass  $h_t(U_1(0)) = U_{1+t}(0)$  für jedes  $0 \leq t < \frac{1}{C}$ . In der Tat folgt aus  $\|x\|_2 < 1$

$$\|h_t(x)\|_2 \leq \|x\|_2 + t \|g(x)\|_2 < 1 + t,$$

also gilt  $\emptyset \neq A := h_t(U_1(0)) \subseteq U_{1+t}(0)$ . Da  $dh_t(x)$  für  $\|x\|_2 \leq 1 (< \eta)$  invertierbar ist, erkennen wir mit Korollar 13.3.3, dass  $A$  offen ist. Für  $B := U_{1+t}(0) \setminus A$  gilt  $A \cup B = U_{1+t}(0)$  und

$$A \cap \text{cl}(B) \subseteq A \cap (\mathbb{R}^{d+1} \setminus A) = \emptyset,$$

da  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus A$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^{d+1}$  ist. Andererseits gilt  $A \subseteq h_t(K_1(0))$ , wobei die rechte Menge als stetiges Bild einer kompakten Menge selber kompakt und daher in  $\mathbb{R}^{d+1}$  abgeschlossen ist. Also folgt

$$\text{cl}(A) \cap B \subseteq h_t(K_1(0)) \cap B.$$

Ein  $y$  aus der linken Seite muss daher  $y = h_t(x) \in B$  für ein  $x \in K_1(0)$  erfüllen. Aus  $\|x\|_2 = 1$  würde  $y = h_t(x) = x + t \text{id}|_{S^d}(x) = (1+t)x \notin U_{1+t}(0)$  folgen, was wegen  $B \subseteq U_{1+t}(0)$  unmöglich ist. Also muss  $\|x\|_2 < 1$  und infolge  $y = h_t(x) \in h_t(U_1(0)) \cap B \subseteq A \cap \text{cl}(B) = \emptyset$  gelten, was ebenfalls unmöglich ist. Wir schließen somit auf  $\text{cl}(A) \cap B = \emptyset$ . Da  $U_{1+t}(0)$  aber zusammenhängend ist, erhalten wir  $U_{1+t}(0) = A$ .

↪ Nach dem bisher gezeigten ist für jedes  $t \in [0, \frac{1}{C})$  die Abbildung  $h_t : U_1(0) \rightarrow U_{1+t}(0)$  eine stetig differenzierbare Bijektion mit regulärem  $dh_t(x)$ ,  $x \in U_1(0)$ , also ein Diffeomorphismus. Aus der Transformationsformel und  $\det dh_t(x) > 0$  erhalten wir

$$\lambda_{d+1}(U_{1+t}(0)) = \int_{U_1(0)} \det dh_t(x) d\lambda_{d+1}(x).$$

Mit Hilfe der Formel zur Determinantenberechnung erkennt man unmittelbar, dass

$$\det dh_t(x) = \det(I + t dg(x)) = \det dg(x) t^{d+1} + \beta_d(x) t^d + \cdots + \beta_1(x) t + 1,$$

für gewisse stetige reellwertige  $\beta_j : U_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Also folgt

$$(1+t)^{d+1} \lambda_{d+1}(U_1(0)) = \lambda_{d+1}(U_{1+t}(0)) = t^{d+1} \int_{U_1(0)} \det dg(x) d\lambda_{d+1}(x) + t^d \int_{U_1(0)} \beta_d(x) d\lambda_{d+1}(x) + \cdots + t \int_{U_1(0)} \beta_1(x) d\lambda_{d+1}(x) + \lambda_{d+1}(U_1(0)).$$

Diese Gleichheit muss zumindest für alle  $t \in [0, \frac{1}{c}]$  gelten. Da ein Polynom  $p(t)$  eindeutig durch die Polynomfunktion  $p|_{[0, \frac{1}{c}]}$  bestimmt ist, müssen insbesondere die Koeffizienten von  $t^{d+1}$  übereinstimmen, wodurch

$$0 \neq \lambda_{d+1}(U_1(0)) = \int_{U_1(0)} \det dg(x) d\lambda_{d+1}(x). \quad (15.17)$$

↷ Andererseits folgt für die auf  $\mathbb{R}^{d+1}$  stetig differenzierbare Funktion  $h(x) = \|x\|_2^2$  aus  $g(O) \subseteq S^d$  mit Hilfe der Kettenregel

$$0 = d(h \circ g)(x) = dh(g(x)) dg(x) = 2g(x)^T dg(x).$$

Insbesondere kann  $dg(x)$  für kein  $x \in U_1(0)$  regulär sein. Also gilt  $\det dg(x) = 0$  im Widerspruch zu (15.17). □

**15.5.2 Korollar.** *Es gibt keine stetige Funktion  $h : K_1(0) \rightarrow S^d$  mit  $h|_{S^d} = \text{id}_{S^d}$ .*

*Beweis.* Angenommen es gäbe eine solche Funktion, so könnten wir  $h$  auf ganz  $\mathbb{R}^{d+1}$  fortsetzen, indem wir  $h(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$  für  $\|x\|_2 > 1$  setzen. Wegen

$$\mathbb{R}^{d+1} = K_1(0) \cup (\mathbb{R}^{d+1} \setminus U_1(0))$$

und da  $h$  auf diesen beiden abgeschlossenen Teilmengen stetig ist, folgt die Stetigkeit von  $h$  auf  $\mathbb{R}^{d+1}$  aus Lemma 12.7.4. Da die reellen Polynome in den Variablen  $(x_1, \dots, x_{d+1})^T = x$  eingeschränkt auf  $K_2(0)$  eine nirgends verschwindende und punktgetrennende Algebra in  $C_b(K_2(0), \mathbb{R})$  bilden, folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrass, Satz 12.18.7, dass es zu jedem  $\epsilon > 0$  derartige Polynome  $p_1, \dots, p_{d+1}$  mit

$$\|h_j - p_j\|_{K_2(0), \infty} < \epsilon \quad \text{für } j = 1, \dots, d+1,$$

gibt. Wählen wir  $\epsilon > 0$  hinreichend klein, so folgt  $\sup_{\|x\|_2 \leq 2} \|h(x) - p(x)\|_2 < \frac{1}{2}$ , wobei

$$p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_{d+1}(x) \end{pmatrix}.$$

Nun sei  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft differenzierbar derart, dass  $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$ , dass  $\varphi((-\infty, \frac{9}{4}]) = \{0\}$  und dass  $\varphi([4, +\infty)) = \{1\}$ ; siehe Beispiel 15.8.4. Die Funktion

$$r(x) = \varphi(\|x\|_2^2) \cdot h(x) + (1 - \varphi(\|x\|_2^2)) \cdot p(x)$$

definiert auf  $\mathbb{R}^{d+1}$  mit Werten in  $\mathbb{R}^{d+1}$  ist überall stetig differenzierbar, da für  $x \in U_{\frac{3}{2}}(0) \supseteq K_1(0)$  der Ausdruck  $r(x)$  mit  $p(x)$  übereinstimmt, und da auf  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus K_1(0)$  alle auftretenden Funktionen stetig differenzierbar sind.

Auf  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus U_2(0)$  gilt zudem  $r(x) = h(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$ , und für  $x \in K_2(0)$  folgt

$$\begin{aligned} \|r(x)\|_2 &= \left\| h(x) - (1 - \varphi(\|x\|_2^2)) (h(x) - p(x)) \right\|_2 \\ &\geq \|h(x)\|_2 - (1 - \varphi(\|x\|_2^2)) \|h(x) - p(x)\|_2 \geq 1 - \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Somit gilt  $r(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Infolge ist auch  $(x \in \mathbb{R}^{d+1})$

$$g(x) := \frac{r(2x)}{\|r(2x)\|_2}$$

eine überall stetig differenzierbare Funktion mit Werten in  $S^d$  derart, dass für  $x \in S^d$  wegen  $r(2x) = h(2x) = x$

$$g(x) = \frac{r(2x)}{\|r(2x)\|_2} = x.$$

Gemäß Proposition 15.5.1 kann es aber kein solches  $g$  geben.  $\square$

**15.5.3 Bemerkung.** Ist  $E \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  kompakt, so gibt es wegen der Stetigkeit von  $y \mapsto \|x - y\|_2$  zu jedem  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  ein  $x_E \in E$  mit  $\|x - x_E\|_2 = d(x, E)$ ; vgl. (12.21).

Ist  $E$  auch konvex, so ist  $x_E$  eindeutig durch  $x$  bestimmt, da für ein weiteres  $z \in E$  mit  $\|x - z\|_2 = d(x, E)$  sicherlich  $\frac{1}{2}(x_E + z) \in E$  und somit  $\|x_E + z - 2x\|_2 \geq 2d(x, E)$ . Aus der Parallelogrammregel<sup>9</sup> folgt

$$\|x_E + z - 2x\|_2^2 + \|x_E - z\|_2^2 = 2\|z - x\|_2^2 + 2\|x_E - x\|_2^2 = 4d(x, E)^2,$$

also  $\|x_E - z\|_2 = 0$ . Die Eindeutigkeit von  $x_E$  bedingt auch

$$x_E = x \quad \text{für alle } x \in E.$$

Schließlich ist  $r : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow E$  definiert durch  $r(x) := x_E$  stetig, denn konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$ , und ist  $y \in E$  ein Häufungspunkt der Folge  $(r(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , also  $r(x_{n(j)}) \rightarrow y, j \rightarrow \infty$  für eine Teilfolge  $(r(x_{n(j)}))_{j \in \mathbb{N}}$ , so folgt aus

$$\|x - y\|_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{n(j)} - r(x_{n(j)})\|_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_{n(j)}, E) = d(x, E)$$

zusammen mit der Eindeutigkeit von  $x_E$  bezüglich der Eigenschaft  $\|x - r(x)\|_2 = d(x, E)$ , dass  $r(x) = y$ . Wegen Lemma 5.2.11 erhalten wir  $r(x_n) \rightarrow r(x)$ .

**15.5.4 Satz (Fixpunktsatz von Brouwer).** Sei  $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  kompakt und konvex mit  $d \geq 0$ . Jede stetige Funktion  $f : E \rightarrow E$  hat dann einen Fixpunkt, also gibt es ein  $x \in E$  mit  $f(x) = x$ .

<sup>9</sup>Für  $a, b \in \mathbb{R}^m$  gilt  $\|a + b\|_2^2 + \|a - b\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|b\|_2^2$ , wie man leicht mit Hilfe des Euklidischen Skalarproduktes zeigen kann.

*Beweis.* Da  $E$  insbesondere beschränkt ist, gilt  $E \subseteq U_\eta(0)$  für ein  $\eta > 0$ . Betrachten wir  $\frac{1}{\eta}E$  und  $x \mapsto \frac{1}{\eta}f(\eta x)$  anstelle von  $E$  und  $f$ , so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $E \subseteq U_1(0)$  annehmen. Indem wir nötigenfalls  $E$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{d+1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{d+2}$  betrachten, können wir auch  $d > 0$  voraussetzen.

Wir nehmen nun an, dass es ein stetiges  $f : E \rightarrow E$  ohne Fixpunkt gibt. Ist  $r : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow E$  definiert wie in Bemerkung 15.5.3, so ist die Funktion  $f \circ r$  als Abbildung von  $K_1(0)$  nach  $E (\subseteq K_1(0))$  stetig und hat keinen Fixpunkt, da ein solcher in  $E$  liegen müsste und damit ein Fixpunkt von  $f$  wäre. Also gilt  $f(r(x)) - x \neq 0$  für alle  $x \in K_1(0)$ . Infolge gibt es für alle  $x \in K_1(0)$  ein eindeutiges  $\theta(x) \in (0, +\infty)$  mit

$$f(r(x)) + \theta(x)(x - f(r(x))) \in S^d.$$

$\theta(x)$  ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$\|f(r(x))\|_2^2 - 2\theta(f(r(x)), f(r(x)) - x) + \theta^2\|x - f(r(x))\|_2^2 = \|f(r(x)) + \theta(x - f(r(x)))\|_2^2 = 1;$$

also

$$\theta(x) = \frac{(f(r(x)), f(r(x)) - x)}{\|x - f(r(x))\|_2^2} + \sqrt{\frac{(f(r(x)), f(r(x)) - x)^2}{\|x - f(r(x))\|_2^4} + \frac{1 - \|f(r(x))\|_2^2}{\|x - f(r(x))\|_2^2}}.$$

Somit ist die Funktion  $h(x) := f(r(x)) + \theta(x)(x - f(r(x)))$  stetig. Außerdem bildet  $h$  die Menge  $K_1(0)$  nach  $S^d$  hinein ab. Dabei gilt  $\theta(x) = 1$  und damit  $h(x) = x$  für  $\|x\|_2 = 1$ . Gemäß Korollar 15.5.2 gibt es aber kein solches  $h$ .  $\square$

## 15.6 Invarianzsätze von Brouwer\*

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass offene Teilmengen  $O \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  nur dann homöomorph sein können, wenn  $m = n$ ; siehe [K].

Im Folgenden seien alle auftretenden Kugeln bezüglich  $\|\cdot\|_2$  zu verstehen. Wir starten mit einer stetigen und injektiven Abbildung  $f : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $K_1(0)$  die abgeschlossene Kugel mit Radius 1 um den Ursprung in  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Da diese Menge kompakt ist, folgt aus Korollar 12.12.10, dass  $f : K_1(0) \rightarrow f(K_1(0))$  ein Homöomorphismus ist, wenn wir Definitions- und Zielmenge mit der Spurtopologie versehen.

**15.6.1 Lemma.** Sei  $f : K_1(0) \rightarrow f(K_1(0))$  stetig und injektiv. Weiters sei  $H : f(K_1(0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion mit

$$\|f^{-1}(y) - H(y)\|_2 \leq 1 \text{ für alle } y \in f(K_1(0)).$$

Dann hat  $H$  mindestens eine Nullstelle, also existiert ein  $y \in f(K_1(0))$  mit  $H(y) = 0$ .

*Beweis.* Betrachte die stetige Funktion  $\psi : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\psi(x) := x - H(f(x)) = f^{-1}(f(x)) - H(f(x)).$$

Nach Voraussetzung ist  $\psi(x)$  eine stetige Abbildung von  $K_1(0)$  nach  $K_1(0)$ . Wegen Satz Satz 15.5.4 hat  $\psi(x)$  einen Fixpunkt  $z$ , womit

$$z = \psi(z) = z - H(f(z)).$$

Also gilt  $H(y) = 0$  für  $y = f(z)$ .  $\square$

**15.6.2 Lemma.** Sei  $Y = Y_1 \cup Y_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt,  $Y_1$  kompakt und  $Y_2$  eine Lebesgue-Nullmenge. Weiters sei  $G : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion mit  $G(y) \neq 0$  für  $y \in Y_1$ . Dann existiert zu jedem  $\delta > 0$  eine stetige Funktion  $Q : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\|G(y) - Q(y)\|_\infty < \delta$$

und  $Q(y) \neq 0$  für alle  $y \in Y$  gilt.

*Beweis.* Wähle  $\eta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < 2\eta < \delta$  und  $G(Y_1) \cap U_{2\eta}(0) = \emptyset$ . Das ist möglich, da  $0 \notin G(Y_1)$ ,  $Y_1$  kompakt und  $G$  stetig ist. Wegen der Kompaktheit von  $Y$  finden wir gemäß Satz 12.18.7 Polynome in  $n$ -Veränderlichen  $P_1, \dots, P_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|G(y) - P(y)\|_\infty < \frac{\eta}{n} \quad \text{für alle } y \in Y,$$

wobei  $P = (P_1, \dots, P_n)^T$ . Nach Korollar 15.3.2 ist  $P(Y_2)$  eine Nullmenge, weshalb  $P(Y_2) \not\subseteq U_\eta(0)$ . Also existiert ein  $d \in U_\eta(0) \setminus P(Y_2)$ . Für das verschobene Polynom  $Q(y) := P(y) - d$  gilt  $Q(y) = 0$  genau dann, wenn  $d = P(y)$ , womit  $0 \notin Q(Y_2)$ . Für  $y \in Y_1$  gilt

$$\begin{aligned} \|G(y) - Q(y)\|_2 &= \|G(y) - P(y) + d\|_2 \leq \|G(y) - P(y)\|_2 + \|d\|_2 \\ &\leq n\|G(y) - P(y)\|_\infty + \|d\|_2 < \eta + \eta = 2\eta < \delta. \end{aligned}$$

Wegen  $G(Y_1) \cap U_{2\eta}(0) = \emptyset$  schließen wir auch auf  $0 \notin Q(Y_1)$ . □

**15.6.3 Proposition.** Ist  $f : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und injektiv, dann liegt  $f(0)$  im Inneren von  $f(K_1(0))$ .

*Beweis.* Sei  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine nach dem Fortsetzungssatz von Tietze, Satz 12.11.3, komponentenweise angewendet, existierende stetige Fortsetzung von  $f^{-1} : f(K_1(0)) \rightarrow K_1(0) (\subseteq \mathbb{R}^n)$ . Wegen der Stetigkeit von  $G$  und wegen  $G(f(0)) = 0$  gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit

$$\|G(y)\|_2 \leq \frac{1}{10} \quad \text{wenn } \|y - f(0)\|_2 \leq 2\epsilon.$$

Nehmen wir an, dass  $f(0)$  nicht in  $f(K_1(0))^\circ$  liegt, so existiert ein  $c \in \mathbb{R}^n \setminus f(K_1(0))$  mit  $\|f(0) - c\|_2 < \epsilon$ . Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$\|G(y)\|_2 \leq \frac{1}{10} \quad \text{wenn } \|y - c\|_2 \leq \epsilon. \quad (15.18)$$

Die Mengen

$$Y_1 := \{y \in f(K_1(0)) : \|y - c\|_2 \geq \epsilon\} \quad \text{und} \quad Y_2 := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - c\|_2 = \epsilon\}.$$

und daher auch  $Y := Y_1 \cup Y_2$  sind kompakt. Mit Kugelkoordinaten lässt sich leicht herleiten, dass  $\lambda_\eta(Y_2) = 0$ ; vgl. (15.14). Wegen  $f(0) \notin Y$  enthält  $Y_1$  keine Nullstellen von  $G$ , wodurch wir Lemma 15.6.2 anwenden können. Wir finden also eine stetige Funktion  $Q : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $0 \notin Q(Y)$  und

$$\|G(y) - Q(y)\|_2 < \frac{7}{10} \quad \text{für alle } y \in Y. \quad (15.19)$$

Wegen  $c \notin f(K_1(0))$  ist

$$\phi(y) := \max\left(\frac{\epsilon}{\|y - c\|_2}, 1\right)(y - c) + c. \quad (15.20)$$

für alle  $y \in f(K_1(0))$  wohldefiniert. Der Punkt  $\phi(y)$  liegt für jedes  $y \in f(K_1(0))$  in  $Y$ , da für  $\|y - c\|_2 > \epsilon$

$$\phi(y) = y \in f(K_1(0)) \quad \text{und} \quad \|\phi(y) - c\|_2 = \|y - c\|_2 \geq \epsilon, \quad \text{also} \quad y \in Y_1,$$

und für  $\|y - c\|_2 \leq \epsilon$

$$\|\phi(y) - c\|_2 = \epsilon, \quad \text{also} \quad y \in Y_2.$$

Somit ist  $\phi$  eine offenbar stetige Funktion von  $f(K_1(0))$  nach  $Y$ .

Die durch  $H(y) := Q(\phi(y))$  definierte Funktion  $H : f(K_1(0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist als Zusammensetzung zweier stetiger Funktionen selber stetig und besitzt keine Nullstellen in  $f(K_1(0))$ . Um den Abstand zu  $G$  abzuschätzen, unterscheiden wir für  $y \in f(K_1(0))$  zwei Fälle.

Falls  $\|y - c\|_2 > \epsilon$ , dann gilt  $\phi(y) = y$  und mit (15.19)

$$\|G(y) - H(y)\|_2 < \frac{7}{10}.$$

Falls  $\|y - c\|_2 \leq \epsilon$ , dann gilt  $\|\phi(y) - c\|_2 = \epsilon$  und wegen (15.18) infolge  $\|G(y)\|_2, \|G(\phi(y))\|_2 \leq \frac{1}{10}$ . Mit (15.19) und der Dreiecksungleichung erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \|G(y) - H(y)\|_2 &= \|G(y) - G(\phi(y)) + G(\phi(y)) - Q(\phi(y))\|_2 \\ &\leq \|G(y)\|_2 + \|G(\phi(y))\|_2 + \|G(\phi(y)) - Q(\phi(y))\|_2 \leq \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

In jedem Fall gilt  $\|G(y) - H(y)\|_2 \leq 1$  für  $y \in f(K_1(0))$ , womit die Voraussetzung von Lemma 15.6.1 erfüllt sind. Also müsste  $H$  im Gegensatz zu seiner Konstruktion mindestens eine Nullstelle besitzen.  $\square$

**15.6.4 Satz** (von der Invarianz offener Mengen). Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und injektiv. Dann ist  $f(U)$  offen und  $f$  ein Homöomorphismen.

*Beweis.* Sei  $u \in U$  beliebig. Da  $U$  offen ist, finden wir eine Kugel  $K_r(u)$ , die für hinreichend kleines  $r \in (0, 1]$  ganz in  $U$  enthalten ist. Die Funktion  $g : K_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g(x) := f(rx + u)$  ist somit wohldefiniert, stetig und injektiv ist. Nach Satz Proposition 15.6.3 liegt  $g(0) = f(u)$  im Inneren von  $g(K_1(0)) = f(K_r(u))$ . Also existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $U_\epsilon(f(u)) \subset f(U)$ . Da  $u \in U$  beliebig war, ist  $f(U)$  offen.

Wendet man diese Erkenntnis auf jede offene Teilmenge von  $U$  an, so sieht man, dass  $f$  eine offene Abbildung und infolge ein Homöomorphismus ist.  $\square$

**15.6.5 Satz** (von der Invarianz der Dimension). Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  nicht leer und offen. Sind  $U$  und  $V$  homöomorph, dann folgt  $n = m$ .

*Beweis.* Angenommen,  $m < n$  und es existierte ein Homöomorphismus  $f : U \rightarrow V$ , dann definieren wir  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  als  $g := \iota \circ f$ , wobei  $\iota : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Einbettung  $\iota((x_1, \dots, x_m)^T) := (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T$  ist. Die Menge  $g(U)$  ist in  $\mathbb{R}^m \times \{0\} (\subseteq \mathbb{R}^n)$  enthalten und hat somit leeres Inneres im Widerspruch zu Satz 15.6.4. Die Annahme  $m > n$  führt man entsprechend auf einen Widerspruch.  $\square$

## 15.7 Integration über Mannigfaltigkeiten

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, Funktionen, die auf einer  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  mit  $d < p$  definiert sind, sinnvoll zu integrieren. Dazu wollen wir  $M$  mit einem Maß versehen, das anschaulich dem  $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maß entspricht, und *Oberflächenmaß* heißen soll.

**15.7.1 Beispiel.** Als erstes sei  $M$  ein  $d$ -dimensionaler Unterraum des Vektorraumes  $\mathbb{R}^p$ . Ist  $x_1, \dots, x_d$  eine Basis von  $M$ , die mit  $x_{d+1}, \dots, x_p$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^p$  fortgesetzt wird, so ist die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \sum_{j=1}^p \xi_j x_j \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$$

gemäß Beispiel 13.5.3 eine Karte von  $M$ . Sei  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ ,  $\phi(s) = \varphi^{-1}\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$  die zu  $\varphi$  gehörige Einbettung  $\phi_\varphi$  wie in (13.19).

Um einer Teilmenge  $A$  von  $M$  in sinnvoller Art und Weise ein Maß zuzuordnen<sup>10</sup>, betrachten wir  $M$  als isometrische Kopie von  $\mathbb{R}^d$ . Dazu nehmen wir an, dass  $x_1, \dots, x_d$  eine Orthonormalbasis von  $M$  ist. Nun ist  $\phi(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d))$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$  und  $\mu(A) := \lambda_d(\phi^{-1}(A))$  ein Maß darauf.

Der Maßraum  $(M, \phi(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)), \mu)$  ist unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis, denn ist  $y_1, \dots, y_d$  eine weitere Orthonormalbasis von  $M$  und  $\chi$  die entsprechende lineare Karte von  $M$  wie in Beispiel 15.7.1 mit dazugehöriger Einbettung  $\psi := \phi_\chi$ , so gibt es eine orthogonale Matrix  $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$  mit  $\psi = \phi T$ . Gemäß Lemma 14.11.6 gilt  $T(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)) = \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$  und  $\lambda_d(T^{-1}(B)) = \lambda_d(B)$ , womit

$$\psi(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)) = \phi \circ T(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)) = \phi(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)) \quad (15.21)$$

und für  $A \in \phi(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d))$

$$\mu(A) = \lambda_d(\phi^{-1}(A)) = \lambda_d(T^{-1}(\phi^{-1}(A))) = \lambda_d(\psi^{-1}(A)).$$

Was ist, wenn  $y_1, \dots, y_d$  keine Orthonormalbasis, sondern nur eine Basis von  $M$  ist? Zunächst gilt wie zuvor  $\psi = \phi T$ , wobei  $T$  im Allgemeinen keine orthogonale, sondern nur eine invertierbare  $d \times d$ -Matrix ist. Wegen  $T(\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)) = \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$  gilt auch hier (15.21). Aus Lemma 14.11.6 folgt

$$\mu(A) = \lambda_d(\phi^{-1}(A)) = |\det T| \cdot \lambda_d(T^{-1}(\phi^{-1}(A))) = |\det T| \cdot \lambda_d(\psi^{-1}(A)).$$

Da die Spalten  $x_1, \dots, x_d$  von  $\phi$  orthonormiert sind, gilt  $\phi^T \phi = I_{d \times d}$  und infolge

$$|\det T|^2 = \det T^T T = \det T^T (\phi^T \phi) T = \det \psi^T \psi.$$

Also erhalten wir

$$\mu(A) = \sqrt{\det \psi^T \psi} \cdot \lambda_d(\psi^{-1}(A)) \quad (15.22)$$

für beliebige bijektive, lineare Abbildungen  $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ .

<sup>10</sup>Wegen Bemerkung 14.14.9 ist  $M$  eine  $\lambda_p$ -Nullmenge.

In analoger Weise wollen wir allgemeine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit einem Oberflächenmaß versehen. Technisch ist das aber aufwendiger, da man im Allgemeinen nicht nur eine Einbettung auf  $M$  hat.

Zunächst versehen wir  $M$  mit der Spur- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ , welche gemäß Fakta 14.10.2, 4, mit der von der Spurtopologie  $(\mathcal{T}^p)_M$  der Euklidischen Topologie erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_M)$  übereinstimmt. Zudem ist jede Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  wie in Satz 13.5.9 wegen ihrer Stetigkeit  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_C$ - $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ -messbar; vgl. Fakta 14.10.2.

Im Folgenden werden wir des Öfteren die Tatsache benötigen, dass man für eine Familie von Einbettungen  $\phi_i : C_i \rightarrow M$ ,  $i \in I$ , mit  $\bigcup_{i \in I} \phi_i(C_i) = M$  immer eine abzählbare  $J \subseteq I$  derart findet, dass schon  $\bigcup_{i \in J} \phi_i(C_i) = M$ . Diese Tatsache ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden topologischen Resultats<sup>11</sup>.

**15.7.2 Satz (Satz von Lindelöf).** *Sei  $U_i$ ,  $i \in I$ , eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$ , also  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ . Hat  $(X, \mathcal{T})$  eine abzählbare Basis, so gibt es eine abzählbare Teilmenge  $J \subseteq I$  derart, dass  $U_i$ ,  $i \in J$ , ebenfalls  $X$  überdeckt.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{B}$  eine abzählbare Basis von  $(X, \mathcal{T})$ . Da jede offene Menge als Vereinigung von Basismengen geschrieben werden kann, gibt es zu jedem  $i$  und jedem  $x \in U_i$  ein  $B_{i,x} \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_{i,x} \subseteq U_i$ . Sei  $\mathcal{L}$  die Menge aller derart getroffenen Mengen aus  $\mathcal{B}$ .

Da mit  $\mathcal{B}$  auch  $\mathcal{L}$  höchstens abzählbar ist, gibt es  $(i(n), x(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathcal{L} = \{B_{i(n),x(n)} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zu jedem  $x \in X$  gibt es laut Voraussetzung ein  $i$  mit  $x \in U_i$ . Wegen  $B_{i,x} \in \mathcal{L}$  gibt es ein  $n$  mit  $x \in B_{i,x} = B_{i(n),x(n)} \subseteq U_i$ , wobei im Allgemeinen  $i \neq i(n)$ ,  $x \neq x(n)$ . Da aber auch  $B_{i(n),x(n)} \subseteq U_{i(n)}$ , folgt  $x \in U_{i(n)}$ , und wir sehen, dass die  $U_{i(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ganz  $X$  überdecken.  $\square$

**15.7.3 Korollar.** *Für eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  gilt  $M \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)$  und infolge  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M = \{B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p) : B \subseteq M\}$ . Außerdem gehört ein  $A \subseteq M$  zu  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  genau dann, wenn  $\phi^{-1}(A) \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$  für alle Einbettungen  $\phi : C \rightarrow M$ .*

*Im Falle  $d < p$  gilt zudem  $\lambda_p(M) = 0$  und infolge  $\lambda_p(A) = 0$  für jedes  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ .*

*Beweis.* Der Fall  $d = p$  folgt sofort aus Fakta 13.5.14. Sei also  $d < p$ . Für jedes  $x \in M$  sei  $\varphi_x : U_x \rightarrow D_x$  eine Karte mit  $x \in U_x$ . Als Homöomorphismen sind alle diese Karten in beide Richtungen messbar, wenn  $U_x$  mit  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_{U_x}$  und  $D_x$  mit  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_{D_x}$  versehen wird. Da  $U_x \cap M$ ,  $x \in M$ , eine offene Überdeckung von  $M$  ist, wird  $M$  schon von  $U_x \cap M$ ,  $x \in I$ , mit einer abzählbaren Menge  $I \subseteq M$  überdeckt; siehe Satz 15.7.2. Also gilt

$$M = \bigcup_{x \in I} M \cap U_x = \bigcup_{x \in I} \varphi_x^{-1}(\underbrace{D_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})}_{=: C_x \times \{0\}})$$

mit  $C_x \times \{0\} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_{D_x}$ , und daher  $M \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)$ . Gemäß Bemerkung 14.14.6 und Bemerkung 14.14.9 gilt

$$C_x \times \{0\} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{T}^{p-d}) = \mathcal{A}(\mathcal{T}^p), \quad \lambda_p(C_x \times \{0\}) \leq \lambda_p(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = 0.$$

Mit Satz 15.1.2 folgt  $\lambda_p(\varphi_x^{-1}(C_x \times \{0\})) = 0$  und weiter  $\lambda_p(M) = 0$ .

<sup>11</sup>Die Spurtopologie auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$  hat eine abzählbare Basis. Man nehme etwa alle Kugeln mit rationalem Radius und rationalen Koordinaten und dann deren Schnitte mit  $M$ .

Ist schließlich  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_M$ , so folgt wegen der Stetigkeit von  $\phi : C \rightarrow M$ , dass  $\phi^{-1}(A) \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_C \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$  für jede Einbettung  $\phi$ ; vgl. (13.19). Umgekehrt folgt für  $A \subseteq M$  aus dieser Eigenschaft, angewandt auf die Einbettungen  $\phi_{\varphi_x}$ , dass  $\varphi_x(A \cap U_x) = \varphi_x|_{M \cap U_x}(A \cap U_x) = \phi_{\varphi_x}^{-1}(A) \times \{0\} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)$ . Da  $\varphi_x$  in beide Richtungen messbar ist, erhalten wir

$$A = \bigcup_{x \in I} U_\varphi \cap A = \bigcup_{x \in I} \varphi_x^{-1}(\varphi_x(A \cap U_x)) \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M. \quad \square$$

Sei  $\phi_j : C_j \rightarrow M$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , eine fest gewählte Folge von Einbettungen wie in Satz 13.5.9 derart, dass  $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(C_j)$ <sup>12</sup>. Die Existenz einer solchen Überdeckung folgt aus Satz 15.7.2, da die  $\phi(C)$  eine offene Überdeckung von  $M$  bilden, wenn  $\phi$  alle Einbettungen durchläuft; vgl. Satz 13.5.9. Weiters wählen wir eine messbare, paarweise disjunkte Zerlegung von  $M$ :

$$M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j \quad \text{mit} \quad M_j \subseteq \phi_j(C_j), \quad M_j \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M, \quad M_i \cap M_j = \emptyset \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N}.$$

Ein Beispiel für eine derartige disjunkte Zerlegung ist

$$M_j := \phi_j(C_j) \setminus (\phi_1(C_1) \cup \dots \cup \phi_{j-1}(C_{j-1})), \quad j \in \mathbb{N}.$$

**15.7.4 Definition.** Für  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  definieren wir<sup>13</sup>

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(A \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} \, d\lambda_d(s) \quad (\in [0, +\infty]), \quad (15.23)$$

und nennen  $\mu$  das *Oberflächenmaß* auf  $M$ .

Man beachte, dass im Falle  $A \subseteq M_j$  für ein  $j \in \mathbb{N}$  alle bis auf den  $j$ -ten Summanden der Reihe in (15.23) verschwinden.

**15.7.5 Satz.** Die Mengenfunktion  $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M \rightarrow [0, +\infty]$  ist ein Maß, welches unabhängig von der Wahl der Folge  $\phi_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , von Einbettungen, und unabhängig von der disjunkten Zerlegung  $M_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , ist.

*Beweis.* Für jedes feste  $j \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  können wir

$$\mu_j(A) := \mu(A \cap M_j) = \int_{\phi_j^{-1}(A \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} \, d\lambda_d(s)$$

als  $\nu_j|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_{C_j}}(\phi_j^{-1}(A))$  schreiben, wobei

$$\nu_j(B) := \int_B \mathbb{1}_{\phi_j^{-1}(M_j)}(s) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} \, d\lambda_d(s), \quad B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d),$$

<sup>12</sup>Sollten schon endlich viele  $\phi_1(C_1), \dots, \phi_k(C_k)$  ausreichen, um  $M$  zu überdecken, so kann man im Folgenden mit der Folge  $\phi_1, \dots, \phi_k, \phi_k, \phi_k, \dots$  von Einbettungen arbeiten.

<sup>13</sup>Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass für eine Matrix  $C \in \mathbb{R}^{p \times d}$  mit vollem Rang, also injektivem  $C \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^p)$ , die Matrix  $C^T C \in \mathbb{R}^{p \times d}$  selbstadjungiert, regulär und positiv definit ist. Somit hat  $C^T C$  nur positive Eigenwerte und infolge  $\det C^T C > 0$ .

bekannterweise ein Maß ist; siehe Lemma 14.7.1. Nach Satz 14.7.5 ist auch das transformierte Maß  $\mu_j$  ein solches. Die Mengenfunktion  $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$  von  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  nach  $[0, +\infty]$  erfüllt  $\mu(\emptyset) = 0$  und ist  $\sigma$ -additiv, wie leicht aus (14.4) folgt. Sie ist also ein Maß.

Sei  $\psi_n : E_n \rightarrow M$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine weitere Folge von Einbettungen, deren Bilder ganz  $M$  überdecken, und sei  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine disjunkte Zerlegung von  $M$  mit  $L_n \subseteq \psi_n(E_n)$  und  $L_n \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ . Weiters sei  $\vartheta$  wie in Definition 15.7.4 aber ausgehend von  $\psi_n : E_n \rightarrow M$  und  $L_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definiert. Für  $j, n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  setzen wir

$$F_{j,n} := \phi_j(C_j) \cap \psi_n(E_n) \quad \text{und} \quad A_{j,n} := A \cap M_j \cap L_n.$$

Wegen  $A_{j,n} \subseteq F_{j,n}$  gilt im Falle  $F_{j,n} = \emptyset$  sicherlich  $\vartheta(A_{j,n}) = 0 = \mu(A_{j,n})$ .

Im Falle  $F_{j,n} \neq \emptyset$  ist  $\phi_j^{-1}(A_{j,n})$  eine Borelteilmenge des offenen  $\phi_j^{-1}(F_{j,n}) \subseteq C_j \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $\psi_n^{-1}(A_{j,n})$  eine Borelteilmenge des offenen  $\psi_n^{-1}(F_{j,n}) \subseteq E_n \subseteq \mathbb{R}^d$ . Wegen Korollar 13.5.11 gilt

$$\psi_n \circ \omega(s) = \phi_j(s), \quad s \in \phi_j^{-1}(F_{j,n}),$$

für einen Diffeomorphismus  $\omega : \phi_j^{-1}(F_{j,n}) \rightarrow \psi_n^{-1}(F_{j,n})$ , der offenbar  $\phi_j^{-1}(A_{j,n})$  auf  $\psi_n^{-1}(A_{j,n})$  abbildet. Nun sei bemerkt, dass für  $C \in \mathbb{R}^{p \times d}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$

$$|\det T| \sqrt{\det C^T C} = \sqrt{\det T^T (\det C^T C) \det T} = \sqrt{\det (CT)^T CT}.$$

Setzen wir  $C = d\psi_n(\omega(s))$  und  $T = d\omega(s)$ , so folgt aus der Kettenregel, Proposition 10.1.18,  $CT = d\phi_j(s)$ . Aus Satz 15.1.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \vartheta(A_{j,n}) &= \int_{\psi_n^{-1}(A_{j,n})} \sqrt{\det d\psi_n(t)^T d\psi_n(t)} d\lambda_d(t) \\ &= \int_{\phi_j^{-1}(A_{j,n})} \sqrt{\det d\psi_n(\omega(s))^T d\psi_n(\omega(s))} \cdot |\det d\omega(s)| d\lambda_d(s) \\ &= \int_{\phi_j^{-1}(A_{j,n})} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s) = \mu(A_{j,n}). \end{aligned}$$

Mit der  $\sigma$ -Additivität folgt schließlich  $\vartheta(A) = \sum_{n,j=1}^{\infty} \vartheta(A_{j,n}) = \sum_{n,j=1}^{\infty} \mu(A_{j,n}) = \mu(A)$ .  $\square$

### 15.7.6 Fakta.

1. Die Folge  $\phi_j : C_j \rightarrow M$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , von Einbettungen kann gemäß Satz 13.5.9 und Definition 13.5.1 so gewählt werden, dass  $\phi_j = \phi_{\varphi_j}$  mit Karten  $\varphi_j$  von  $M$ ; siehe (13.19). Die Forderung  $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(C_j)$  bedeutet dann nichts anderes als  $M \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{\varphi_j}$ .
2. Gilt für ein  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  die Gleichung  $\lambda_d(\phi^{-1}(B)) = 0$  für alle Einbettungen  $\phi : C \rightarrow M$  bzw.  $\lambda_d(\phi_{\varphi}^{-1}(B)) = 0$  für alle Karten  $\varphi$  von  $M$ , so folgt  $\mu(B) = 0$ .

Um das einzusehen, sei  $\phi_j : C_j \rightarrow M$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , eine Folge von Einbettungen mit  $M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \phi_j(C_j)$  bzw. sei  $\phi_j : C_j \rightarrow M$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , eine Folge von Einbettungen wie im vorherigen Punkt. Gemäß der Voraussetzung ist

$$\int_{\phi_j^{-1}(B \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s)$$

das Integral einer Funktion über eine Nullmenge. Also ist sein Wert Null. Die Summe über alle  $j \in \mathbb{N}$  ergibt Null und stimmt per definitionem mit  $\mu(B)$  überein.

3. Für alle abzählbaren  $B \subseteq M$  gilt  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  mit  $\mu(B) = 0$ . In der Tat ist für jede Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  die Menge  $\phi^{-1}(B)$  offenbar abzählbar und somit  $\lambda_d(\phi^{-1}(B)) = 0$ . Aus dem vorherigen Punkt folgt dann  $\mu(B) = 0$ .
4. Ist  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  in  $\phi(C)$  für eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  enthalten, so gibt es sicherlich eine Folge von Einbettungen, deren Bilder ganz  $M$  überdecken, wobei  $\phi$  das erste Folgenglied ist. Wählt man noch  $M_1 = \phi(C)$ , so folgt aus Satz 15.7.5

$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} d\lambda_d(s). \quad (15.24)$$

5. Sollten schon endlich viele  $\phi_1(C_1), \dots, \phi_k(C_k)$  ausreichen, um ein gegebenes  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  zu überdecken, so kann man  $\phi_1, \dots, \phi_k$  zu einer Folge von Einbettungen fortsetzen, deren Bilder ganz  $M$  überdecken. Sind zudem  $M_1, \dots, M_k \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  disjunkt mit  $M_j \subseteq \phi_j(C_j)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , und derart, dass  $M_1 \cup \dots \cup M_k = \phi_1(C_1) \cup \dots \cup \phi_k(C_k)$ , dann kann man auch diese  $M_j$  zu einer, im Sinne von Definition 15.7.4 zulässigen, disjunkten Zerlegung fortsetzen. Wir erhalten

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^k \int_{\phi_j^{-1}(A \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s).$$

6. Im Falle  $d = p$  ist  $M$  nach Fakta 13.5.14, 1, eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^p$ , und  $\iota_M : M \rightarrow M$  ist eine Karte. Ausgehend von dieser Karte folgt aus Definition 15.7.4 sofort, dass  $\mu = \lambda_d$ .
7. Für  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  gilt nach dem ersten Beweisschritt von Satz 15.7.5, dass  $\mu(A) = \sum_j \mu_j(A)$ , wobei  $\mu_j(A) = \mu(A \cap M_j) = \nu_j|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_{C_j}}(\phi_j^{-1}(A)) = (\nu_j|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_{C_j}} \circ \phi_j^{-1})(A)$  und

$$\nu_j(B) := \int_B \mathbb{1}_{\phi_j^{-1}(M_j)}(s) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d).$$

Gemäß (14.17), Satz 14.7.5 und Lemma 14.7.1 folgt

$$\int_M f \cdot \mathbb{1}_{M_j} d\mu = \int_{C_j} f \circ \phi_j d\nu_j = \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} (f \circ \phi_j(s)) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s)$$

für jedes messbare  $f : M \rightarrow [0, +\infty]$ . Summiert man über  $j \in \mathbb{N}$  auf, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Fakta 14.5.3, 3,

$$\int_M f d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} (f \circ \phi_j(s)) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s), \quad (15.25)$$

wobei die linke Seite genau dann endlich ist, wenn es die rechte Seite ist. Wir schließen daraus, dass ein messbares,  $[-\infty, +\infty]$ - oder komplexwertiges  $f$  auf  $M$  genau dann integrierbar ist, wenn

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{\phi_j^{-1}(M_j)} |f \circ \phi_j(s)| \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} d\lambda_d(s) < +\infty.$$

In diesem Fall gilt (15.25).

8. Jedes bezüglich  $(\mathcal{T}^p)_M$  offene  $O \subseteq M$  ist für sich selbst genommen eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; vgl. Fakta 13.5.14. Dabei gilt  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_O = \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p) : A \subseteq O\} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ ; vgl. Korollar 15.7.3. Bezeichnet  $\nu$  das Oberflächenmaß auf  $O$  und  $\mu$  jenes auf  $M$ , so zeigt man mit Hilfe von Fakta 13.5.14 und (15.24) leicht, dass für  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_O$  immer  $\nu(A) = \mu(A)$ , also dass  $\nu$  eine Einschränkung von  $\mu$  ist.
9. Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$  und  $r > 0, x \in \mathbb{R}^p$ . Mit  $M$  ist auch  $N := rM + x$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ ; vgl. Fakta 13.5.14, 8. Bezeichnet  $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  die Abbildung  $T(y) = ry + x$ , so ist  $\varphi$  genau dann eine Karte von  $M$ , wenn  $\chi := \varphi \circ T^{-1} : T(U_\varphi) \rightarrow D_\varphi$  Karte von  $N$  ist. Aus der Beziehung  $\sqrt{\det d\phi_\chi(s)^T d\phi_\chi(s)} = r^d \cdot \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T d\phi_\varphi(s)}$  kann man herleiten, dass  $\mu_N(rB+x) = r^d \mu_M(B)$  für alle  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  und

$$\int_N f \, d\mu_N = r^d \int_M f(ry + x) \, d\mu_M(y)$$

für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [0, +\infty]$ , und für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [-\infty, +\infty]$  (C) in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte Seite tut; siehe Übungsaufgabe 15.27.

**15.7.7 Bemerkung (\*).** Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ , und sei  $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  orthogonal, also  $TT^* = T^*T = I$ . Mit  $M$  ist auch  $N := T(M)$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ ; vgl. Fakta 13.5.14, 8. Dabei ist  $\varphi$  genau dann eine Karte von  $M$ , wenn  $\chi := \varphi \circ T^{-1} : T(U_\varphi) \rightarrow D_\varphi$  Karte von  $N$  ist. Aus der Beziehung  $\sqrt{\det d\phi_\chi(s)^T d\phi_\chi(s)} = \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T T^T T d\phi_\varphi(s)} = \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T d\phi_\varphi(s)}$  kann man herleiten, dass  $\mu_N(T(B)) = \mu_M(B)$  für alle  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  und

$$\int_N f \, d\mu_N = \int_M f \circ T \, d\mu_M$$

für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [0, +\infty]$ , und für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [-\infty, +\infty]$  (C) in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte Seite tut.

**15.7.8 Proposition.** Für eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^p$  mit  $0 < d \leq p$  und sein Oberflächenmaß  $\mu$  gilt:

- (i) Ist  $\emptyset \neq O \subseteq M$  offen bezüglich der Spurtopologie auf  $M$ , so gilt  $\mu(O) > 0$ , wobei  $O \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ .
- (ii)  $M$  lässt sich schreiben als abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von  $M$ , also ist  $M$  versehen mit der Spurtopologie  $\sigma$ -kompakt.
- (iii) Ist  $K \subseteq M$  kompakt, so folgt  $K \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  mit  $\mu(K) < +\infty$ , also ist  $\mu$  ein Borelmaß; siehe Definition 14.10.5.
- (iv)  $\mu$  ist ein  $\sigma$ -endliches Maß.

*Beweis.*

- (i) Ist  $\emptyset \neq O \subseteq M$  offen bezüglich der Spurtopologie auf  $M$ , so gilt  $O \in \mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_M) = \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ . Offenbar gibt es eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  mit  $\phi(C) \cap O \neq \emptyset$  und infolge  $\phi^{-1}(O) \neq \emptyset$ . Da

jede nichtleere offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  ein nichtleeres  $d$ -dimensionales Rechteck enthält, gilt  $\lambda_d(\phi^{-1}(O)) > 0$ . Wegen Proposition 14.7.2 folgt

$$\mu(O) \geq \mu(\phi(C) \cap O) = \int_{\phi^{-1}(O)} \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} d\lambda_d(s) > 0.$$

- (ii) Zu jedem  $x \in M$  gibt es eine Einbettung  $\phi_x : C_x \rightarrow M$  mit  $x \in \phi_x(C_x)$ . Wähle eine offene Umgebung  $B_x \subseteq C_x$  von  $\phi_x^{-1}(x)$ , deren Abschluss kompakt und in  $C_x$  enthalten ist<sup>14</sup>.  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in M$ , bildet eine offene Überdeckung von  $M$  bezüglich der Spurtopologie, und hat wegen Satz 15.7.2 eine abzählbare Teilüberdeckung  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in I$ . Wegen der Stetigkeit der  $\phi_x$  ist

$$\bigcup_{x \in I} \phi_x(\text{cl}(B_x)) = M$$

eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen von  $M$ .

- (iii) Ein kompaktes  $K \subseteq M$  ist auch in  $\mathbb{R}^p$  kompakt, womit  $K \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ . Die bezüglich der Spurtopologie offene Überdeckung  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in M$ , aus dem letzten Punkt ist auch eine offene Überdeckung von  $K$ , und hat daher eine endlich Teilüberdeckung  $\phi_x(B_x)$ ,  $x \in J$ .

Da  $\sqrt{\det d\phi_x^T(s) d\phi_x(s)}$  ob der Stetigkeit auf den kompakten Menge  $\text{cl}(B_x) \supseteq B_x$  beschränkt ist, und da  $\lambda_d(B_x) \leq \lambda_d(\text{cl}(B_x)) < +\infty$ , folgt aus (15.24)

$$\mu(K) \leq \sum_{x \in J} \mu(\phi_x(B_x)) = \sum_{x \in J} \int_{B_x} \sqrt{\det d\phi_x(s)^T d\phi_x(s)} d\lambda_d(s) < +\infty.$$

- (iv) Wegen der  $\sigma$ -Kompaktheit von  $M$  ist  $M$  abzählbare Vereinigung von  $\mu$ -endlichen Mengen. □

**15.7.9 Beispiel.** Man betrachte die Kugeloberfläche  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ . Um das Oberflächenmaß von  $S^2$  zu berechnen, sei an die in Beispiel 13.5.6 beschriebenen Karten  $\varphi_{+,z}$ ,  $\varphi_{-,z}$ ,  $\varphi_{+,y}$ ,  $\varphi_{-,y}$ ,  $\varphi_{+,x}$ ,  $\varphi_{-,x}$  erinnert. Zunächst berechnen wir die Oberfläche von der offenen oberen Halbkugeloberfläche  $H_+$ , also von  $S^2 \cap U_{\varphi_{+,z}}$ . Die zur Karte  $\varphi_{+,z}$  gehörige Einbettung  $\phi_{\varphi_{+,z}} : C_{\varphi_{+,z}} \rightarrow S^2$  erfüllt  $C_{\varphi_{+,z}} = U_1^{\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2}(0)$  und  $\phi_{\varphi_{+,z}}(s) = (\xi, \eta, \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2})^T$  für  $s = (\xi, \eta)^T$ ; vgl. Beispiel 13.5.12. Somit gilt

$$\det d\phi_{\varphi_{+,z}}(s)^T d\phi_{\varphi_{+,z}}(s) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2 - \eta^2} & \frac{\xi\eta}{1 - \xi^2 - \eta^2} \\ \frac{\xi\eta}{1 - \xi^2 - \eta^2} & 1 + \frac{\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2} = \frac{1}{1 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Also erhält man aus Definition 15.7.4

$$\mu(H_+) = \int_{U_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} d\lambda_2(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr d\alpha = 2\pi,$$

wobei die vorletzte Gleichheit durch Transformation auf Polarkoordinaten mit Hilfe von Satz 15.1.2 folgt; vgl. Beispiel 15.1.3. Entsprechend erhält man  $\mu(H_-) = 2\pi$ , wobei  $H_-$  die untere offene Halbkugeloberfläche ist. Somit gilt

$$\mu(S^2) = \mu(H_+) + \mu(H_-) + \mu(\{x \in S^2 : x_3 = 0\}).$$

Wie wir aus dem folgenden Lemma erkennen, gilt  $\mu(\{x \in S^2 : x_3 = 0\}) = 0$ , also  $\mu(S^2) = 4\pi$ .

<sup>14</sup>Man nehme etwa  $U_\epsilon(\phi_x^{-1}(x))$ , wobei  $\epsilon > 0$  so klein gewählt ist, dass  $K_\epsilon(\phi_x^{-1}(x)) \subseteq C_x$ .

**15.7.10 Lemma.** Sei  $\mu$  das Oberflächenmaß einer  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^p$ . Alle  $N \subseteq M$ , die selber  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten ( $0 < m < d$ ) sind, liegen in  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  und haben in  $M$  Oberflächenmaß Null. Somit gilt auch  $\mu(B) = 0$  für alle  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_N$ .

*Beweis.* Für eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $N \subseteq M$  mit  $0 < m < d$  und eine Karte  $\varphi$  ist im Falle  $N \cap U_\varphi \neq \emptyset$  auch  $N \cap U_\varphi$  und infolge  $\varphi(N \cap U_\varphi)$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; siehe Fakta 13.5.14, 5 und 8. Wegen  $\varphi(N \cap U_\varphi) \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}$  ist auch  $\pi(\varphi(N \cap U_\varphi)) = \phi_\varphi^{-1}(N)$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^d$ , wobei  $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  die Projektion auf die ersten  $d$  Einträge ist; siehe Fakta 13.5.14, 2. Nach Korollar 15.7.3 liegt  $\phi_\varphi^{-1}(N)$  in  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)$  und hat Lebesgue-Maß Null. Aus Fakta 15.7.6, 2 folgt  $\mu(N) = 0$ .

Für alle  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_N \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)$  gilt schließlich  $0 \leq \mu(B) \leq \mu(N) = 0$ .  $\square$

### 15.7.11 Beispiel.

(i) Wir betrachten die Einheitskugel

$$S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\| = 1\}.$$

Offensichtlich ist  $S^{p-1}$  die Nullstellenmenge der Funktion  $x \mapsto \|x\|^2 - 1$  auf der offenen Teilmenge  $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  von  $\mathbb{R}^p$ . Nach Satz 13.5.4 ist  $S^{p-1}$  eine  $(p-1)$ -Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ . Einbettungen in  $S^{p-1}$  lassen sich ausgehend von der Kugelkoordinatenfunktion

$$T_p : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$T_p \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \sin \alpha \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cdots \cos \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \vdots \\ \sin \theta_{p-3} \cos \theta_{p-2} \\ \sin \theta_{p-2} \end{pmatrix}, \quad (15.26)$$

wobei

$$\det dT_p \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = r^{p-1} \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \cdots \cos^{p-2} \theta_{p-2}, \quad (15.27)$$

angeben; siehe Beispiel 15.1.6. Die Einschränkung von  $T_p$  auf  $D_\varphi := (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}$  ist injektiv und infolge ein Diffeomorphismus; vgl. Korollar 13.3.3. Dabei gilt  $T_p(r, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_{p-2})^T \in S^{p-1}$  genau dann, wenn  $r = 1$ .

Infolge ist  $T : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2} \times (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^p$ , definiert durch

$$T \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \\ r \end{pmatrix} := T_p \begin{pmatrix} r+1 \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix},$$

ebenfalls ein Diffeomorphismus und  $\varphi := T^{-1}$  eine Karte von  $S^{p-1}$ , wobei  $D_\varphi := (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2} \times (-1, +\infty)$  und  $U_\varphi := T(D_\varphi)$ . Gemäß (13.19) ist die dazugehörige Einbettung gegeben durch

$$\phi_\varphi : \underbrace{(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}}_{=C_\varphi} \rightarrow S^{p-1}, \quad \phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} = T_p \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix},$$

wobei

$$dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}^T dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \cdot d\phi(s)^T d\phi(s) \end{pmatrix} \quad (15.28)$$

wie man elementar aus (15.26) herleitet.

- (ii) Ihr Bild  $\phi_\varphi(C_\varphi)$  ist dabei zwar nicht ganz  $S^{p-1}$ . Aber das, was auf die Einheitskugel fehlt, ist verhältnismäßig klein:

$$\phi_\varphi(C_\varphi) = S^{p-1} \setminus \{x \in \mathbb{R}^p : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}.$$

Klein deshalb, weil, wenn  $\mu$  das Oberflächenmaß von  $S^{p-1}$  bezeichnet, die Menge  $S^{p-1} \setminus \phi_\varphi(C_\varphi) = \{x \in S^{p-1} : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$  in der  $(p-2)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\{x \in S^{p-1} : x_2 = 0\}$ <sup>15</sup> enthalten und infolge eine Nullmenge bezüglich  $\mu$  ist; siehe Lemma 15.7.10.

Aus (15.28) und (15.27) folgt zudem

$$\begin{aligned} \sqrt{\det d\phi_\varphi(s)^T d\phi_\varphi(s)} &= \frac{1}{r^{p-1}} \sqrt{\det dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}^T dT_p \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}} \\ &= \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2}. \end{aligned}$$

Für ein messbares  $f : S^{p-1} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  (C) gilt somit

$$\int_{S^{p-1}} f \, d\mu = \int_{C_\varphi} (f \circ \phi_\varphi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix}) \cdot \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \, d\lambda_{p-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} \quad (15.29)$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut.

- (iii) Ist  $R > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  fest, und betrachtet man die Oberfläche  $x + R \cdot S^{p-1}$  der offenen Kugel  $U_R(x)$  mit Radius  $R$  um  $x$ , so ist wegen Fakta 15.7.6, 9, auch  $x + R \cdot S^{p-1}$  eine  $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wobei

$$\int_{x+R \cdot S^{p-1}} f \, d\mu_{x+R \cdot S^{p-1}} = R^{p-1} \int_{S^{p-1}} f(x + Ry) \, d\mu_{S^{p-1}}(y), \quad (15.30)$$

für jedes messbare, auf  $x+R \cdot S^{p-1}$  definierte  $f$ . Dabei bezeichnet  $\mu_{x+R \cdot S^{p-1}}$  das Oberflächenmaß auf  $x + R \cdot S^{p-1}$  und  $\mu_{S^{p-1}}$  das Oberflächenmaß auf  $S^{p-1}$ .

<sup>15</sup>Lässt man die zweite Koordinate weg, so ist das gerade  $S^{p-2}$ .

- (iv) Ist schließlich  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, +\infty]$  integrierbar, so folgt aus der Transformationsformel mehrdimensionaler Integrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^p} f \, d\lambda_p &= \int_{(0,+\infty) \times (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}} f \circ T_p \cdot |\det dT_p| \, d\lambda_p = \\ &= \int_{(0,+\infty)} r^{p-1} \cdot \int_{C_\varphi} f(r \cdot \phi_\varphi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix}) \cdot \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \, d\lambda_{p-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} \, d\lambda(r) = \\ &= \int_{(0,+\infty)} r^{p-1} \cdot \int_{S^{p-1}} f(ry) \, d\mu(y) \, d\lambda(r) = \int_{(0,+\infty)} \int_{rS^{p-1}} f(y) \, d\mu_{rS^{p-1}}(y) \, d\lambda(r). \end{aligned}$$

Dabei können die Integrale auch den Wert  $+\infty$  annehmen. Infolge gilt

$$\int_{\mathbb{R}^p} f \, d\lambda_p = \int_{(0,+\infty)} \int_{rS^{p-1}} f(y) \, d\mu_{rS^{p-1}}(y) \, d\lambda(r) \quad (15.31)$$

für jedes messbare  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow [-\infty, +\infty]$  ( $\mathbb{C}$ ) in dem Sinn, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut.

- (v) Wenden wir (15.31) speziell auf  $f = \mathbb{1}_{K_R(0)}$  an, so folgt

$$\lambda_p(K_R^{\|\cdot\|_2}(0)) = \mu(S^{p-1}) \int_{(0,R]} r^{p-1} \, d\lambda(r) = \frac{R^p}{p} \cdot \mu(S^{p-1}). \quad (15.32)$$

### 15.7.12 Beispiel.

- (i) Man betrachte den Spezialfall einer 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^p$ , also  $d = 1$ . Angenommen  $\phi : (a, b) \rightarrow M$  mit  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ist eine Einbettung, so folgt für  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  mit  $A \subseteq \phi((a, b))$

$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det \phi'(s)^T \phi'(s)} \, d\lambda(s) = \int_{\phi^{-1}(A)} \|\phi'(s)\|_2 \, d\lambda(s).$$

Insbesondere gilt

$$\mu(\phi((a, b))) = \int_{(a,b)} \|\phi'(s)\|_2 \, ds.$$

Angenommen  $\phi$  ist sogar auf  $[a, b]$  stetig differenzierbar, so stimmt nach Satz 11.1.8 dieser Wert mit der Weglänge von  $\phi$  überein.

- (ii) Man betrachte den Spezialfall einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^p$ , also  $d = 2$ . Für eine Einbettung  $\phi : C \rightarrow M$  mit  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  rechnet man elementar nach, dass

$$\sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} = \sqrt{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \right\|_2^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right)^2}, \quad (15.33)$$

wobei  $(\cdot, \cdot)$  das übliche Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^p$  bezeichnet; siehe Übungsaufgabe 15.23. Daher gilt für ein  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  mit  $B \subseteq \phi(C)$ ,

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \right\|_2^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right)^2} \, d\lambda_2(s).$$

- (iii) Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, also  $p = 3, d = 2$ , so kann man (15.33) schreiben als

$$\sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)} = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2,$$

wobei  $x \times y$  das *Kreuzprodukt* zweier Dreivektoren

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

bezeichnet; siehe Übungsaufgabe 15.23. Also gilt für ein  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  mit  $B \subseteq \phi(C)$ ,

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2 d\lambda_2(s).$$

In dem ganz einfachen Fall, dass  $\phi((\xi_1, \xi_2)^T) = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2$ , wobei  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängig sind, folgt

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2 = \|v_1 \times v_2\|_2.$$

Nach elementargeometrischen Überlegungen ist das gerade die Fläche des von  $v_1$  und  $v_2$  aufgespannten Parallelogramms  $\phi([0, 1] \times [0, 1])$ , was gemäß obiger Formel auch durch

$$\mu(\phi([0, 1] \times [0, 1])) = \int_{[0, 1] \times [0, 1]} \|v_1 \times v_2\|_2 d\lambda_2 = \|v_1 \times v_2\|_2$$

bestätigt wird. Also passen unser Oberflächenbegriff und der aus der elementaren Geometrie zusammen.

- (iv) Kommen wir noch einmal zu dem Fall zurück, dass  $M$  ein  $d$ -dimensionaler linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^p$  ist. Aus Beispiel 13.5.3 wissen wir, dass für eine Basis  $x_1, \dots, x_d$  von  $M$  die lineare Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$  mit  $\phi((\xi_1, \dots, \xi_d)^T) = \sum_{j=1}^d \xi_j x_j$  eine Einbettung auf  $M$  ist. Wegen  $d\phi(s) = \phi$  gilt für  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$

$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{\det \phi^T \phi} d\lambda_d(s) = \sqrt{\det \phi^T \phi} \cdot \lambda_d(\phi^{-1}(A)).$$

Damit stimmt in diesem Spezialfall die Definition von Oberflächenmaß aus Definition 15.7.4 mit der aus der Motivation in Beispiel 15.7.1 am Beginn des aktuellen Kapitels überein; siehe (15.22).

**15.7.13 Beispiel.** Man betrachte den zweidimensionalen Torus  $M$ . Wir verwenden die Notation aus Beispiel 13.5.13. Um das Oberflächenmaß  $\mu(M)$  von  $M$  zu berechnen sei zunächst bemerkt, dass wegen Lemma 15.7.10 sicherlich  $\mu(K_1) = 0 = \mu(K_2)$ . Außerdem gilt

$$d\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}^T d\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \cos \theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt aus (15.24)

$$\mu(M) = \mu(M \setminus (K_1 \cup K_2)) = \int_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)} (2 + \cos \theta) d\lambda_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos \theta) d\theta = 8\pi^2.$$

## 15.8 Faltung

Eine sehr fruchtbare Begriffsbildung in der Analysis ist die der *Faltung* zweier bezüglich  $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$  messbarer Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ . Diese ist definiert durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \, d\lambda_d(y)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , für die  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  integrierbar ist. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall. Sind  $f$  und  $g$  aus speziellen Funktionenklassen, so existiert die Faltung sehr wohl. Wegen Lemma 14.11.6 angewandt auf  $T(y) = x-y$  existiert  $f * g(x)$  genau dann, wenn  $g * f(x)$  existiert, wobei in dem Fall dann

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \, d\lambda_d(y) = g * f(x).$$

Wir wollen hier nur den Spezialfall eines integrierbaren  $g$  und eines beschränkten und messbaren  $f$  behandeln. Später werden wir zur Faltung von allgemeineren Funktionen zurückkommen.

Ist nämlich  $g$  integrierbar und  $f$  messbar und beschränkt, so folgt wegen  $|f(x-y)g(y)| \leq \|f\|_\infty |g(y)|$  die Integrierbarkeit von  $f(x-y)g(y)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Also existiert  $f * g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ . Somit ist  $f * g$  eine Funktion von  $\mathbb{R}^d$  nach  $\mathbb{C}$ , die wegen

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| \, d\lambda_d(y) \leq \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \, d\lambda_d(y)}_{=: \|g\|_1} \quad (15.34)$$

beschränkt ist mit  $\|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f * g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$ . Später werden wir sehen, dass  $f * g$  sogar gleichmäßig stetig ist; vgl. Fakta 16.7.3. Wir sammeln weitere Eigenschaften dieser Funktion.

### 15.8.1 Fakta.

1. Ist  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  messbar, beschränkt und partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^d$  derart, dass alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , auch beschränkt sind<sup>16</sup>, so gilt

$$\left| \frac{\partial f(x-y)g(y)}{\partial x_j} \right| \leq |g(y)| \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_\infty.$$

Also folgt aus Lemma 14.15.4 für  $j = 1, \dots, d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g(x). \quad (15.35)$$

2. Wendet man die letzte Tatsache wiederholt an, so erhält man, dass wenn  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar und  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  messbar, beschränkt und zumindest  $m$ -mal partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^d$  derart ist, dass die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} \quad \text{für alle } l_1, \dots, l_k \in \{1, \dots, d\},$$

<sup>16</sup>Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  für ein offenes  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  messbar und partiell differenzierbar, und setzt man  $f$  mit 0 außerhalb von  $D$  fort, so ist  $D \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  der punktweise Grenzwert der Folge  $\frac{f(x+\frac{1}{n}e_j)-f(x)}{\frac{1}{n}}$  und damit auch messbar.

mit  $k \leq m$  auch beschränkt sind,  $f * g$  zumindest  $m$ -mal differenzierbar ist, wobei

$$\frac{\partial^k (f * g)}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} * g(x) \quad (15.36)$$

für  $l_1, \dots, l_k \in \{1, \dots, d\}$  und  $k \leq m$ .

3. Ist  $g$  integrierbar und  $f$  zumindest  $m$ -mal stetig partiell differenzierbar und hat  $f$  gemäß Definition 12.17.6 einen kompakten Träger, so haben mit  $f$  und auch alle partiellen Ableitungen von  $f$  kompakte Träger und sind infolge beschränkt. Also gilt in diesem Fall immer (15.36), wobei  $f * g$  und seine partiellen Ableitungen beschränkt sind; vgl. (15.34).

**15.8.2 Beispiel.** Sei  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \exp(-|x_1| - |x_2|), \quad g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \sin(x_1 + x_2).$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $f$  integrierbar und  $g$  messbar, beschränkt aber nicht integrierbar ist. Nach Fakta 15.8.1 gilt

$$f * g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g * f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^2} \sin(x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \exp(-|y_1| - |y_2|) d\lambda_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Wegen  $\sin(x_1 - y_1 + x_2 - y_2) = \sin(x_1 - y_1) \cos(x_2 - y_2) + \cos(x_1 - y_1) \sin(x_2 - y_2)$  folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} f * g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_1|) \sin(x_1 - y_1) d\lambda(y_1) \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_2|) \cos(x_2 - y_2) d\lambda(y_2) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_1|) \cos(x_1 - y_1) d\lambda(y_1) \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-|y_2|) \sin(x_2 - y_2) d\lambda(y_2) \end{aligned}$$

Wegen  $\cos(x - t) + \cos(x + t) = 2 \cos x \cos t$  und weil  $\exp(-t)(\sin t - \cos t)$  Stammfunktion von  $2 \exp(-t) \cos t$  ist, erhält man

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|) \cos(x - t) d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) (\cos(x - t) + \cos(x + t)) dt = \cos x.$$

Mit  $\sin(x - t) + \sin(x + t) = 2 \sin x \cos t$  folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-|t|) \sin(x - t) d\lambda(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) (\sin(x - t) + \sin(x + t)) dt = \sin x.$$

Also gilt

$$f * g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\sin x_1) \cdot (\cos x_2) + (\cos x_1) \cdot (\sin x_2) = \sin(x_1 + x_2) = g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**15.8.3 Lemma.** Seien  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  messbare Funktionen, und  $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^d$  derart, dass  $f(x) = 0$  für  $x \notin M_1$  und  $g(x) = 0$  für  $x \notin M_2$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^d \setminus (M_1 + M_2)$ , bzw. äquivalent dazu für  $x \in \mathbb{R}^d$  mit  $(x - M_1) \cap M_2 = \emptyset$ , existiert  $f * g(x)$ , wobei  $f * g(x) = 0$ . Falls zusätzlich  $f * g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  existiert, so gilt<sup>17</sup>

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \text{cl}(\text{supp } f + \text{supp } g).$$

<sup>17</sup>Für die Definition des Trägers  $\text{supp } f$  siehe Definition 12.17.6.

*Beweis.* Man beachte zunächst, dass für  $x \in \mathbb{R}^d$  die Tatsache, dass  $(x - M_1) \cap M_2 \neq \emptyset$  äquivalent zu  $x \in M_1 + M_2$  ist. In der Tat bedeutet  $(x - M_1) \cap M_2 \neq \emptyset$  genau, dass es ein  $m_2 \in M_2$  und ein  $m_1 \in M_1$  mit  $m_2 = x - m_1$  gibt, was wiederum zu  $x = m_1 + m_2$  für gewisse  $m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ , daher zu  $x \in M_1 + M_2$  äquivalent ist.

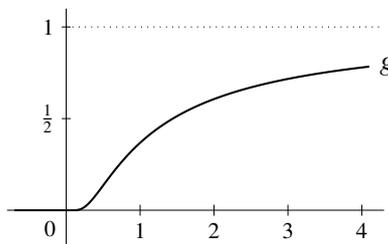
Für  $x \notin M_1 + M_2$  und allen  $y \in \mathbb{R}^d$  gilt daher

$$f(x - y)g(y) = \mathbb{1}_{M_1}(x - y)\mathbb{1}_{M_2}(y) \cdot f(x - y)g(y) = \mathbb{1}_{(x - M_1) \cap M_2}(y) \cdot f(x - y)g(y) = 0.$$

Insbesondere existiert die Faltung von  $f$  und  $g$  an der Stelle  $x$ , wobei  $f * g(x) = 0$ . □

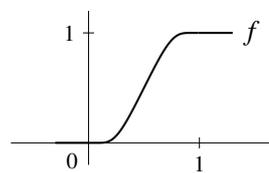
### 15.8.4 Beispiel.

Man betrachte  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  mit  $g(\xi) = 0$  für  $\xi \leq 0$  und  $g(\xi) = e^{-\frac{1}{\xi}}$  für  $\xi > 0$ . Bekannterweise ist  $g$  eine  $C^\infty$  Funktion;

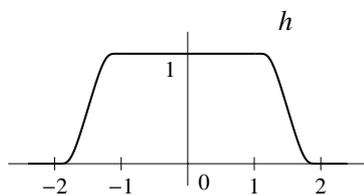


genauso wie die Funktion

$$f(\xi) = \frac{g(\xi)}{g(\xi) + g(1 - \xi)}$$



die nur Werte in  $[0, 1]$  annimmt, wobei  $f(\xi) = 1, \xi \geq 1$  und  $f(\xi) = 0, \xi \leq 0$ . Die Funktion



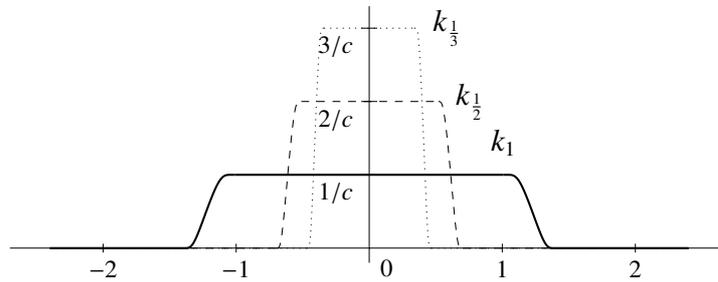
$$h(\xi) = f(\xi + 2)f(2 - \xi) \quad (15.37)$$

ist schließlich  $C^\infty$ , erfüllt  $0 \leq h(\xi) \leq 1, \xi \in \mathbb{R}$ , sowie  $h([-1, 1]) = \{1\}$  und  $h(\mathbb{R} \setminus (-2, 2)) = \{0\}$ .

**15.8.5 Definition.** Mit  $c := \int_{K_2(0)} h(\|y\|_2^2) d\lambda_d(y)$  und für  $\delta > 0$  sei die Funktion  $k_\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$k_\delta(x) := \frac{1}{c \delta^d} h\left(\frac{\|x\|_2^2}{\delta^2}\right).$$

Diese Funktionen ist ein sogenannter *Mollifier*.

Abbildung 15.2: Veranschaulichung von  $k_\delta$  im Falle  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$ .

Als Zusammensetzung von  $C^\infty$ -Funktionen ist  $k_\delta$  selber  $C^\infty$ , wobei für  $j = 1, \dots, d$

$$\frac{\partial k_\delta}{\partial x_j}(x) = \frac{2x_j}{c\delta^{d+2}} h'\left(\frac{\|x\|_2^2}{\delta^2}\right).$$

Offenbar nimmt  $k_\delta$  auf  $K_\delta(0)$  den Wert  $\frac{1}{c\delta^d}$  an, und hat einen Träger, der in  $K_{2\delta}(0)$  enthalten ist. Aus Lemma 14.11.6 folgt

$$\|k_\delta\|_1 = \frac{1}{c\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_{2\delta}(0)}(y) h\left(\frac{1}{\delta} \|y\|_2^2\right) d\lambda_d(y) = \frac{1}{c\delta^d} \delta^d \int_{K_2(0)} h(\|y\|_2^2) d\lambda_d(y) = 1,$$

sowie

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial k_\delta}{\partial x_j} \right\|_1 &= \frac{2}{c\delta^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_{2\delta}(0)}(y) \left| \frac{y_j}{\delta} h'\left(\frac{1}{\delta} \|y\|_2^2\right) \right| d\lambda_d(y) \\ &= \frac{2}{c\delta^{d+1}} \delta^d \int_{K_2(0)} |y_j| |h'(\|y\|_2^2)| d\lambda_d(y) = \frac{C}{\delta} \end{aligned}$$

für eine geeignete, von  $\delta > 0$  unabhängige Konstante  $C \geq 0$ .

Im Folgenden wollen wir uns für eine Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$  die wegen der Integrierbarkeit von  $k_\delta$  und der Beschränktheit von  $\mathbb{1}_B$  sicher auf ganz  $\mathbb{R}^d$  existierende Funktion  $k_\delta * \mathbb{1}_B$  näher anschauen.

### 15.8.6 Fakta.

1. Aus der Definition der Faltung und aus (15.34) erkennen wir

$$0 \leq k_\delta * \mathbb{1}_B(x) \leq 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (15.38)$$

2. Gemäß (15.36) gilt  $k_\delta * \mathbb{1}_B \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , wobei gemäß (15.35) und (15.34)

$$\left| \frac{\partial (k_\delta * \mathbb{1}_B)}{\partial x_j}(x) \right| = \left| \frac{\partial k_\delta}{\partial x_j} * \mathbb{1}_B(x) \right| \leq \left\| \frac{\partial k_\delta}{\partial x_j} \right\|_1 = \frac{C}{\delta}. \quad (15.39)$$

3. Für ein  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $y \notin x - K_{2\delta}(0) = x + K_{2\delta}(0) = K_{2\delta}(x)$  gilt wegen  $k_\delta(x - y) = 0$

$$k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = \int_B k_\delta(x - y) d\lambda_d(y) = \int_{B \cap K_{2\delta}(x)} k_\delta(x - y) d\lambda_d(y). \quad (15.40)$$

4. Im Falle  $K_{2\delta}(x) \subseteq B$  folgt mit Lemma 14.11.6

$$k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = \int_{K_{2\delta}(x)} k_\delta(x-y) d\lambda_d(y) = \int_{K_{2\delta}(0)} k_\delta(y) d\lambda_d(y) = \|k_\delta\|_1 = 1. \quad (15.41)$$

Liegt allgemeiner  $x$  im Inneren  $B^\circ$  von  $B$ , also gemäß Definition 12.2.11 in der größten in  $B$  enthaltenen offenen Menge, so gilt  $U_{2\rho}(x) \subseteq B$  für ein  $\rho > 0$ . Es folgt für alle  $0 < \delta < \rho$  sicherlich  $K_{2\delta}(x) \subseteq B$ , und daher  $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 1$ . Insbesondere gilt

$$\lim_{\delta \searrow 0} k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 1.$$

5. Gilt  $B \cap K_{2\delta}(x) = \emptyset$  bzw. äquivalent dazu  $x \notin B - K_{2\delta}(0) = B + K_{2\delta}(0)$ , so folgt aus Lemma 15.8.3 oder direkt aus (15.40), dass  $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0$ . Insbesondere gilt

$$\text{supp } k_\delta * \mathbb{1}_B \subseteq \text{cl}(B + K_{2\delta}(0)). \quad (15.42)$$

Ist  $B$  zusätzlich beschränkt, so ist die rechte und daher auch die linke Seite beschränkt und infolge kompakt. Insbesondere folgt die Integrierbarkeit von  $k_\delta * \mathbb{1}_B$  für beschränkte  $B$ .

Liegt  $x$  allgemeiner im Inneren  $(B^c)^\circ (= \text{cl}(B)^c)$  von  $B^c$ , also in der größten in  $B^c$  enthaltenen offenen Menge, so gilt  $U_{2\rho}(x) \subseteq B^c$  für ein  $\rho > 0$ . Für alle  $0 < \delta < \rho$  folgt  $K_{2\delta}(x) \subseteq B^c$  bzw.  $B \cap K_{2\delta}(x) = \emptyset$ , und daher  $k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0$ . Insbesondere gilt

$$\lim_{\delta \searrow 0} k_\delta * \mathbb{1}_B(x) = 0.$$

Die abgeschlossene und offene Kugel  $K_\delta(L)$  und  $U_\delta(L)$  um eine Menge  $L$  wurden in (12.23) definiert und in Fakta 12.14.2 diskutiert.

**15.8.7 Lemma.** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und  $L \subseteq K$  nichtleer. Für  $\delta > 0$  gilt

$$\text{supp } (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus U_\delta(L) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \text{cl}(L) \quad (15.43)$$

und

$$|1 - (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})| = k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)} \leq \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}, \quad (15.44)$$

Für alle  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{cl}(L)$  gilt punktweise

$$\lim_{\delta \searrow 0} |1 - (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})(x)| = \lim_{\delta \searrow 0} \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) = 0. \quad (15.45)$$

*Beweis.* Für  $x \in K_\delta(L)$  gilt  $K_{2\delta}(x) \subseteq K_{3\delta}(L)$  und daher  $k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}(x) = 1$ ; siehe (15.41). Somit verschwindet  $(1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})$  auf  $U_\delta(L) \subseteq K_\delta(L)$ , also  $\text{supp } (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus U_\delta(L)$ . Wegen  $\text{cl}(L) \subseteq K_{\frac{\delta}{2}}(L) \subseteq U_\delta(L)$  haben wir damit (15.43) gezeigt.

Aus  $0 \leq k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)} \leq 1$  – siehe (15.38) – folgt sofort  $|1 - (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})| = k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}$ . Vor (15.42) haben wir gesehen, dass  $k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}(x) = 0$ , wenn  $x \notin K_{3\delta}(L) + K_{2\delta}(0)$ . Wegen  $K_{3\delta}(L) + K_{2\delta}(0) \subseteq K_{5\delta}(L)$  folgt (15.44).

Für  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \text{cl}(L)$  gilt  $d(x, L) > 0$ . Wählt man  $\delta > 0$  so klein, dass  $d(x, L) > 5\delta$ , also dass  $x \notin K_{5\delta}(L)$ , so folgt aus (15.44), dass  $\mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) = 0$  und  $(1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})(x) = 1$ . Somit gilt (15.45).  $\square$

Folgendes Resultat wirkt zunächst etwas glanzlos, stellt sich aber oft als sehr nützlich heraus.

**15.8.8 Lemma.** Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und  $V_j, j \in J$ , eine offene Überdeckung von  $K$ . Dann gibt es endlich viele Funktionen<sup>18</sup>  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  mit Werten in  $[0, 1]$  derart, dass für  $k = 1, \dots, n$  immer  $\text{supp } \gamma_k \subseteq V_{j(k)}$  für ein  $j(k) \in J$  und dass

$$\mathbb{1}_K(x) \leq \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) \leq 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (15.46)$$

Die Funktionen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  nennt man eine glatte Zerlegung der Eins.

*Beweis.* Zu jedem  $x \in K$  gibt es ein  $j(x) \in J$  mit  $x \in V_{j(x)}$ . Nun sei  $\delta_x > 0$  so klein, dass die abgeschlossene Kugel  $K_{3\delta_x}(x)$  mit Radius  $3\delta_x$  bezüglich der  $\|\cdot\|_2$ -Norm um  $x$  ganz in  $V_{j(x)}$  enthalten ist. Wegen der Kompaktheit von  $K$  gilt  $K \subseteq U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\delta_{x_n}}(x_n)$  für gewisse  $x_1, \dots, x_n \in K$ . Wir setzen  $A_1 := U_{2\delta_{x_1}}(x_1)$  und für  $k = 2, \dots, n$ ,

$$A_k := U_{2\delta_{x_k}}(x_k) \setminus \left( U_{2\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{2\delta_{x_{k-1}}}(x_{k-1}) \right).$$

Ist  $\delta := \frac{1}{2} \cdot \min\{\delta_{x_k} : k = 1, \dots, n\}$ , so erhalten wir

$$A_k + K_{2\delta}(0) \subseteq U_{2\delta_{x_k}}(x_k) + K_{2\delta}(0) \subseteq K_{3\delta_{x_k}}(x_k),$$

und damit

$$\text{cl}(A_k + K_{2\delta}(0)) \subseteq K_{3\delta_{x_k}}(x_k) \subseteq V_{j(x_k)} =: V_{j(k)}.$$

Definieren wir mit  $k_\delta$  aus Definition 15.8.5 die  $C^\infty$ -Funktionen  $\gamma_k := k_\delta * \mathbb{1}_{A_k}$ , so folgt  $\text{supp } \gamma_k \subseteq K_{3\delta_{x_k}}(x_k) \subseteq V_{j(k)}$  aus (15.42). Wegen (15.38) gilt

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k(x) = \sum_{k=1}^n k_\delta * \mathbb{1}_{A_k}(x) = k_\delta * \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right)(x) = k_\delta * \mathbb{1}_A(x) \in [0, 1],$$

wobei  $A := A_1 \cup \dots \cup A_n = U_{2\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{2\delta_{x_n}}(x_n)$ . Außerdem folgt aus

$$K + K_{2\delta}(0) \subseteq (U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\delta_{x_n}}(x_n)) + K_{2\delta}(0) \subseteq U_{2\delta_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{2\delta_{x_n}}(x_n) = A$$

zusammen mit (15.41), dass  $k_\delta * \mathbb{1}_A(x) = 1$ , wenn nur  $x \in K$ . □

**15.8.9 Bemerkung.** Nimmt man für ein kompaktes  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  und eine offene Obermenge  $G$  von  $K$  einfach  $G$  als offene Überdeckung her, wendet Lemma 15.8.8 an, und setzt

$$\psi = \sum_{k=1}^n \gamma_k,$$

so erhält man eine  $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ -Funktion, mit  $\text{supp } \psi \subseteq G$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$  und  $\psi|_K = 1$ .

<sup>18</sup> $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \cap C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ; vgl. Beispiel 12.18.12.

## 15.9 Integralsätze

**15.9.1 Lemma.** Sei  $A$  eine reelle und reguläre  $p \times p$ -Matrix geschrieben in der Form  $A = (B | b)$ , wobei  $b \in \mathbb{R}^p$  und  $B \in \mathbb{R}^{p \times (p-1)}$ . Dann ist der Vektor  $(e_p^T A^{-1})^T$  nicht der Nullvektor und steht normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$ . Infolge ist

$$v := \frac{1}{\|(e_p^T A^{-1})^T\|_2} (e_p^T A^{-1})^T \quad (\in \mathbb{R}^p),$$

normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$  und hat bezüglich  $\|\cdot\|_2$  die Länge eins. Zudem gilt  $v^T b > 0$  sowie

$$|\det A| = \sqrt{\det(B^T B)} \cdot (v^T b).$$

*Beweis.* Für  $j = 1, \dots, p-1$  gilt

$$(B \underbrace{e_j}_{\in \mathbb{R}^{p-1}}, (e_p^T A^{-1})^T) = e_p^T A^{-1} A \underbrace{e_j}_{\in \mathbb{R}^p} = 0.$$

Also steht  $(e_p^T A^{-1})^T$  normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$ . Wegen

$$(b, (e_p^T A^{-1})^T) = e_p^T A^{-1} A e_p = 1$$

ist  $(e_p^T A^{-1})^T$  nicht der Nullvektor, wobei  $\frac{1}{\|(e_p^T A^{-1})^T\|_2} = v^T b > 0$ .

Sei  $c = (c_1, \dots, c_p)^T \in \mathbb{R}^p$  definiert durch

$$c_j = (-1)^{p+j} \det B_j, \quad j = 1, \dots, p.$$

Dabei bezeichnet  $B_j$  jene  $(p-1) \times (p-1)$ -Matrix, welche aus  $B$  durch Streichen der  $j$ -ten Zeile hervorgeht. Nach der Cramerschen Regel sind die  $\frac{1}{\det A} c_j$  genau die Einträge der letzten Zeile von  $A^{-1}$ . Es folgt

$$c = (\det A) \cdot (e_p^T A^{-1})^T = (\det A) \cdot \|(e_p^T A^{-1})^T\| \cdot v.$$

Also steht auch  $c$  normal auf  $B(\mathbb{R}^{p-1})$ , womit

$$(B | c)^T (B | c) = \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & c^T c \end{pmatrix}.$$

Bilden wir hier links und rechts die Determinante, so folgt  $(\det(B | c))^2 = (c^T c) \det B^T B$ . Andererseits kann man  $\det(B | c)$  dadurch berechnen, dass man nach der letzten Spalte entwickelt. Gemäß der Definition von  $c$  ergibt das  $\det(B | c) = c^T c$  und infolge

$$(c^T c) \det B^T B = (\det(B | c))^2 = (c^T c)^2.$$

Also erhalten wir

$$\det B^T B = c^T c = (\det A)^2 \cdot \|(e_p^T A^{-1})^T\|_2^2 \cdot v^T v = (\det A)^2 \cdot \frac{1}{|v^T b|^2}$$

und daraus die Behauptung. □

Für  $L \subseteq \mathbb{R}^p$  wird die Bedingung<sup>19</sup>

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{\lambda_p(K_\delta(L))}{\delta} = 0 \quad (15.47)$$

im kommenden Satz eine Rolle spielen. Sie bedeutet, dass die Menge  $L$  in einem gewissen Sinne klein ist. Insbesondere erfüllen endliche Mengen  $L$  diese Bedingung.

**15.9.2 Satz.** Für eine beschränkte und offene Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ , sei  $f : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion derart, dass  $f|_G$  stetig differenzierbar ist. Weiters sei der Träger  $\text{supp } f$  von  $f$  in  $G \cup \partial^\circ G \cup L$  enthalten, wobei  $L \subseteq \partial G \setminus \partial^\circ G$  der Bedingung (15.47) genügt.

Ist  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  für  $j = 1, \dots, p$  über  $G$  nach  $\lambda_p$  integrierbar, und ist  $f|_{\partial^\circ G}$  über  $\partial^\circ G$  nach dem Oberflächenmaß  $\mu$  integrierbar, so gilt für ein beliebiges  $w \in \mathbb{R}^p$

$$\int_G df(x)w \, d\lambda_p(x) = \int_{\partial^\circ G} f(y) \cdot (v(y)^T w) \, d\mu(y), \quad (15.48)$$

wobei  $v(y)$  die äußere Normale im Punkt  $y \in \partial^\circ G$  ist; vgl. Korollar 13.7.9.

Die Integrierbarkeit von  $f|_{\partial^\circ G}$  über  $\partial^\circ G$  nach  $\mu$  ist automatisch erfüllt, wenn  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^\circ G$ , oder wenn  $\mu(\partial^\circ G) < +\infty$ .

*Beweis.*

↪ Die Funktion  $f : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  ist wegen ihrer Stetigkeit und wegen der Kompaktheit von  $\mathcal{C}(G)$  beschränkt. Also folgt aus  $\mu(\partial^\circ G) < +\infty$  die Integrierbarkeit von  $f|_{\partial^\circ G}$  nach  $\mu$ .

Aus  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^\circ G$  folgt  $\text{supp } f \cap \partial G = \text{supp } f \cap \partial^\circ G$ . Diese Menge ist somit kompakt, woraus sich  $\mu(\text{supp } f \cap \partial^\circ G) < +\infty$  ergibt; vgl. Proposition 15.7.8. Da  $f|_{\partial^\circ G}$  außerhalb von  $\text{supp } f \cap \partial^\circ G$  verschwindet, erhalten wir die Integrierbarkeit von  $f|_{\partial^\circ G}$  nach  $\mu$ .

↪ Wir zeigen hier, dass es zu jedem  $x \in G$  eine offene Umgebung  $U_x$  derart gibt, dass (15.48) stimmt, und zwar für alle  $f$  mit Träger in  $U_x$ . Für  $x \in G$  sei  $U_x$  eine  $\epsilon$ -Kugel bzgl. der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm, deren Abschluss ganz in  $G$  enthalten ist, also

$$\begin{aligned} U_x &= (x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon) \times \cdots \times (x_p - \epsilon, x_p + \epsilon) \\ &\subseteq \mathcal{C}(U_x) = [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon] \times \cdots \times [x_p - \epsilon, x_p + \epsilon] \subseteq G. \end{aligned}$$

Mit dem Integranden verschwindet auch das Oberflächenintegral auf der rechten Seite von (15.48). Für  $\text{supp}(f) \subseteq U_x$  und  $w = e_1$  folgt aus dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_G df(a)w \, d\lambda_p(a) &= \int_{U_x} df(a)e_1 \, d\lambda_p(a) \\ &= \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \cdots \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} df(x + t_1 e_1 + \cdots + t_p e_p)e_1 \, dt_1 \dots dt_p. \end{aligned} \quad (15.49)$$

<sup>19</sup>Die Menge  $K_\delta(L)$  wurde in (12.23) definiert. Für die zugrunde liegende Metrik  $d$  können wir  $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$ ,  $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$  oder  $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$  nehmen. In der Tat folgt aus der Äquivalenz der Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  auf  $\mathbb{R}^p$ , dass  $K_\delta^{\|\cdot\|_i}(L) \subseteq c_{i,j} \cdot K_\delta^{\|\cdot\|_j}(L)$  mit gewissen  $c_{i,j} > 0$  für alle  $i, j \in \{1, 2, \infty\}$ . Ist (15.47) für eine Norm  $\|\cdot\|_i$  mit  $i \in \{1, 2, \infty\}$  erfüllt, so gilt (15.47) für alle Normen  $\|\cdot\|_i$ ,  $i \in \{1, 2, \infty\}$ .

Das innerste Integral ist wegen  $df(a)e_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$  gleich

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t_1 e_1 + \dots + t_p e_p) dt_1 = \\ f(x + \epsilon e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_p e_p) - f(x - \epsilon e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_p e_p) = 0 - 0,$$

da  $f$  außerhalb von  $U_x$  verschwindet. Also ergibt auch das Integral in (15.49) Null. Vertauscht man die Integrationsreihenfolge in (15.49) entsprechend, so sieht man, dass auch  $\int_G df(a)w d\lambda_p(a) = 0$ , wenn  $w \in \{e_2, \dots, e_p\}$ . Wegen der Linearität verschwindet dieses Integral für beliebige  $w \in \mathbb{R}^p$ .

↪ In diesem Schritt zeigen wir, dass es zu jedem  $x \in \partial^o G$  eine offene Umgebung  $U_x$  derart gibt, dass (15.48) für alle  $f$  mit Träger in  $U_x$  stimmt. Dazu wählen wir eine Karte  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  mit  $x \in U_\varphi$ , welche aus einer Einbettung  $\phi$  und aus einem  $w \notin T_x = d\phi(\phi^{-1}(x))\mathbb{R}$  wie in Proposition 13.5.10 hervorgeht.

Weiters schränken wir  $D_\varphi$  so ein, dass die Mengen  $D_\varphi^\pm$  aus (13.28) zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}^p$  sind. Gemäß Bemerkung 13.7.7 tritt damit Fall (ii) oder Fall (iii) von Lemma 13.7.4 ein. Indem wir nötigenfalls von  $\varphi$  zu  $S \circ \varphi$  übergehen, können wir Fall (iii) annehmen. Wegen Korollar 13.7.9 gilt dann

$$v(y) = v_\varphi(y) = \frac{1}{\|d\varphi(y)^T e_p\|_2} d\varphi(y)^T e_p \quad \text{für } y \in U_\varphi \cap \partial^s G. \quad (15.50)$$

Wir wählen  $\rho > 0$  so klein, dass  $K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)) \subseteq D_\varphi$ . Für  $f$  wie in der Aussage des Satzes mit  $\text{supp } f \subseteq \varphi^{-1}(U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) \subseteq U_\varphi$ , folgt wegen

$$G \cap U_\varphi \cap \varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) = U_\varphi^- \cap \varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0]),$$

wobei  $\binom{s}{0} := \varphi(x) \in \mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}$ , aus der Transformationsformel, Satz 15.1.2,

$$\int_G df(a)w d\lambda_p(a) = \int_{\varphi^{-1}(K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0])} df(a)w d\lambda_p(a) \\ = \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0]} df(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})w \cdot \left| \det d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi} \right| d\lambda_p\binom{t}{\xi}.$$

Man beachte dabei, dass voraussetzungsgemäß das erste Integral in dieser Gleichungskette existiert und somit auch das letzte. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz stimmt  $\int_G df(a)w d\lambda_p(a)$  überein mit

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, -\epsilon]} df(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})w \cdot \left| \det d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi} \right| d\lambda_p\binom{t}{\xi}. \quad (15.51)$$

Wenden wir Lemma 15.9.1 auf  $A = (B|b) = d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}$  an, so folgt wegen  $B = d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}(e_1 | \dots | e_{p-1}) = d\phi(t)$  und  $b = d\varphi^{-1}\binom{t}{\xi}e_p = w$  (siehe Proposition 13.5.10) sowie  $(e_p^T A^{-1})^T = d\varphi(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})^T e_p$ , dass

$$v_{t,\xi} := \frac{1}{\|d\varphi(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})^T e_p\|_2} d\varphi(\varphi^{-1}\binom{t}{\xi})^T e_p$$

normiert ist, normal auf  $d\phi(t) \mathbb{R}^{p-1}$  steht und  $v_{t,\xi}^T w > 0$  erfüllt. Da  $v_{t,0} = v(\varphi^{-1}(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}))$  auch diese Eigenschaften hat, folgt wegen  $(\dim d\phi(t) \mathbb{R}^{p-1})^\perp = 1$ , dass  $v_{t,\xi} = v(\phi(t))$ ; vgl. (15.50). Außerdem gilt

$$|\det d\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)| = |\det A| = \sqrt{\det(B^T B)} \cdot (v_{t,\xi}^T b) = \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} \cdot (v(\phi(t))^T w).$$

Die Kettenregel, Proposition 10.1.18, ergibt zudem

$$\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial \xi}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) = df(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)) d\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) e_p = df(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)) w.$$

Mit dem Satz von Fubini, Satz 14.14.4, erhalten wir daher

$$\begin{aligned} & \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, -\epsilon]} df(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right)) w \cdot \left| \det d\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \right| d\lambda_p\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \\ &= \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s)} \int_{-\rho}^{-\epsilon} \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial \xi}\left(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix}\right) \cdot v(\phi(t))^T w \cdot \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} d\xi d\lambda_{p-1}(t) \\ &= \int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s)} \left( f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ -\epsilon \end{smallmatrix}\right) - f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ -\rho \end{smallmatrix}\right) \right) \cdot (v(\phi(t))^T w) \cdot \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} d\lambda_{p-1}(t). \end{aligned}$$

Nun gilt  $f \circ \varphi^{-1}(\begin{smallmatrix} t \\ -\rho \end{smallmatrix}) = 0$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  auch  $f \circ \varphi^{-1}(\begin{smallmatrix} t \\ -\epsilon \end{smallmatrix}) \rightarrow f \circ \varphi^{-1}(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix})$  für  $\epsilon \searrow 0$ . Da  $\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix} \mapsto d\phi(t)$  und  $\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix} \mapsto f \circ \varphi^{-1}(\begin{smallmatrix} t \\ \xi \end{smallmatrix})$  auf der kompakten Menge  $K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s) \times [-\rho, 0]$  stetig und infolge beschränkt sind, können wir den Satz von der beschränkten Konvergenz für  $\epsilon \searrow 0$  anwenden. Also stimmt (15.51) überein mit

$$\int_{K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(s)} f \circ \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (v(\phi(t))^T w) \cdot \sqrt{\det d\phi(t)^T d\phi(t)} d\lambda_{p-1}(t) = \int_{\partial^\circ G} f(y) \cdot (v(y))^T w d\mu(y).$$

Wir haben also zu festem  $x \in \partial^\circ G$  und  $w \notin T_x$  eine offene Umgebung  $U(w)$ , nämlich das von  $w$  ausgehend konstruierte  $\varphi^{-1}(U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)))$ , derart gefunden, dass die Aussage für alle  $f$  mit Träger in dieser Umgebung gilt.

Man wähle schließlich eine Basis von  $w_1, \dots, w_p$  von  $\mathbb{R}^p$  mit  $w_j \notin T_x$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Sei  $U_x$  der Schnitt der  $U(w_j)$ . Für  $f$  mit  $\text{supp } f \subseteq U_x$  und  $w \in \mathbb{R}^p$  folgt dann (15.48) wegen der Linearität der Integrale in  $w$ .

↷ Sei  $f : \text{cl}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  mit den im Satz gemachten Voraussetzungen, wobei  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^\circ G$ . Zu jedem  $x \in \text{supp } f$  gibt es nach den ersten beiden Beweisteilen offene  $U_x \ni x$ , so dass der Satz für Funktionen mit Träger in  $U_x$  richtig ist. Nach Lemma 15.8.8 gibt es zu dieser offenen Überdeckung  $C^\infty$ -Funktionen  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  derart, dass  $\text{supp } \gamma_k \subseteq U_{x(k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$  und (15.46) gilt.

Insbesondere haben wir  $\text{supp } f \cdot \gamma_k \subseteq U_{x(k)}$ . Somit stimmt (15.48) für diese Funktionen. Andererseits gilt  $f = f \cdot \sum_{k=1}^n \gamma_k$  und daher

$$\begin{aligned} \int_G df(a) w d\lambda_p(a) &= \sum_{k=1}^n \int_G d(f \cdot \gamma_k)(a) w d\lambda_p(a) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\partial^\circ G} (f \cdot \gamma_k)(y) \cdot (v(y))^T w d\mu(y) = \int_{\partial^\circ G} f(y) \cdot (v(y))^T w d\mu(y). \end{aligned}$$

↪ Wir behandeln nun den allgemeinsten Fall. Sei also sei  $f : \mathcal{cl}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  mit den im Satz gemachten Voraussetzungen, wobei  $\text{supp } f \subseteq G \cup \partial^o G \cup L$ . Für  $\delta \in (0, 1)$  betrachte die Funktion

$$f_\delta := (1 - k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) f,$$

welche klarerweise  $C^1$  auf  $G$  und stetig auf  $\mathcal{cl}(G)$  ist. Aus (15.43) in Lemma 15.8.7 wissen wir, dass  $\text{supp } f_\delta \subseteq \text{supp } f \setminus \mathcal{cl}(L) \subseteq G \cup \partial^o G$ . Somit können wir das bereits Bewiesene anwenden und erhalten

$$\int_G df_\delta(x)w \, d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} f_\delta(y) \cdot (v(y))^T w \, d\mu(y). \quad (15.52)$$

Wegen  $\mathcal{cl}(G) \setminus \mathcal{cl}(L) \supseteq \partial G \setminus (\partial G \setminus \partial^o G) = \partial^o G$  gilt gemäß (15.45) in Lemma 15.8.7  $\lim_{\delta \rightarrow 0+} f_\delta(y) \rightarrow f(y)$  für  $y \in \partial^o G$ . Daraus und aus der vorausgesetzten Integrierbarkeit von  $\partial^o G \ni y \mapsto f(y)$  nach  $\mu$  schließen wir mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz, dass die rechte Seite für  $\delta \searrow 0$  gegen  $\int_{\partial^o G} f(y) \cdot (v(y))^T w \, d\mu(y)$  konvergiert.

Der Ausdruck  $df(x)w$  minus der Integrand der linken Seite lässt sich für  $x \in G$  betragsmäßig abschätzen, siehe (15.38), (15.39):

$$\begin{aligned} |df(x)w - df_\delta(x)w| &= |d((k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)}) \cdot f)w| \\ &= \left| \sum_{j=1}^p \left( \frac{\partial(k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})}{\partial x_j}(x) \cdot f(x) + (k_\delta * \mathbb{1}_{K_{3\delta}(L)})(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) w_j \right| \\ &\leq \frac{C\|f\|_\infty \|w\|_1}{\delta} + |df(x)w|. \end{aligned}$$

Aus (15.44) in Lemma 15.8.7 folgt

$$\begin{aligned} \int_G |df(x)w - df_\delta(x)w| \, d\lambda_p(x) &= \int_G \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) \cdot |df(x)w - df_\delta(x)w| \, d\lambda_p(x) \\ &\leq 5C\|f\|_\infty \|w\|_1 \frac{\lambda_p(K_{5\delta}(L))}{5\delta} + \int_G \mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) \cdot |df(x)w| \, d\lambda_p(x). \end{aligned} \quad (15.53)$$

Für  $\delta \rightarrow 0$  strebt der erste Summand wegen (15.47) gegen Null. Nach (15.45) in Lemma 15.8.7 gilt  $\mathbb{1}_{K_{5\delta}(L)}(x) \rightarrow 0$  für  $x \in G \subseteq \mathcal{cl}(G) \setminus \mathcal{cl}(L)$ . Wegen der Integrierbarkeit von  $|df(x)w|$  können wir den Satz von der beschränkten Konvergenz anwenden, um auch die Konvergenz des zweiten Summanden von (15.53) gegen Null zu erhalten. Somit konvergiert die linke Seite von (15.52) gegen  $\int_G df(x)w \, d\lambda_p(x)$ .  $\square$

**15.9.3 Bemerkung.** Oft wird Satz 15.9.2 angewandt, wenn  $L := \partial G \setminus \partial^o G$  Bedingung (15.47) erfüllt. Wegen  $G \cup \partial^o G \cup L = G \cup \partial G = \mathcal{cl}(G)$  fällt dann die Bedingung an den Träger weg.

Wie schon bemerkt, bedeutet Bedingung (15.47), dass  $L$  in einem gewissen Sinn klein ist. Das spiegelt sich auch in der nächsten Aussage wieder.

**15.9.4 Lemma.** Sei  $p > 1$  und  $F \subseteq \mathbb{R}^p$  enthalten in der endlichen Vereinigung von kompakten Mengen  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , wobei  $F_j$  endlich oder  $F_j$  Teilmenge einer  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit<sup>20</sup> mit  $0 < d \leq p - 2$  ist. Dann gilt

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{\lambda_p(K_\delta(F))}{\delta} = 0. \quad (15.54)$$

<sup>20</sup> $d$  kann vom Index  $j$  abhängen.

*Beweis.* Zunächst genügt es, wegen<sup>21</sup>

$$K_\delta(F) \subseteq K_\delta\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right) \subseteq K_\delta(F_1) \cup \dots \cup K_\delta(F_n)$$

zu zeigen, dass (15.54) für die einzelnen Mengen  $F_j$  gilt. Dabei können wir obendrein voraussetzen, dass die endlichen  $F_j$  sogar einpunktig sind. Also können wir  $n = 1$  und  $F_1 = F$  annehmen. Ist  $F$  einpunktig, so folgt wegen  $p > 1$  für eine geeignete Konstante  $c$  aus (14.58)

$$\frac{\lambda_p(K_\delta(F))}{\delta} \leq c \frac{\delta^p}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

Gelte  $F \subseteq M$  mit einer  $d$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ , wobei  $0 < d \leq p - 2$ . Zu jedem  $x \in F$  gibt es eine Karte  $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$  mit  $x \in U_\varphi$ .

Wählen wir  $\rho_x > 0$  so klein, dass  $K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)) \subseteq D_\varphi$ , dann ist  $A_x := \varphi^{-1}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) \subseteq U_\varphi$  eine kompakte Umgebung von  $x$ . Daher und wegen der Abgeschlossenheit von  $U_\varphi^c$  gilt  $d(A_x, U_\varphi^c) = \inf\{\|u - v\|_\infty : u \in A_x, v \in U_\varphi^c\} > 0$ ; siehe Fakta 12.14.2. Also gilt für  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}d(A_x, U_\varphi^c) =: \beta$  sicher  $K_\delta(M \cap A_x) \subseteq U_\varphi$ . Die Menge

$$M \cap A_x = M \cap U_\varphi \cap A_x = \varphi^{-1}(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) \cap \varphi^{-1}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi_\varphi^{-1}(x)) \times \{0\})$$

ist kompakt. Zu  $y \in K_\delta(M \cap A_x)$  gibt es folglich ein  $z \in M \cap A_x$  mit  $\|y - z\|_\infty = d(y, M \cap A_x) \leq \delta$ ; siehe Fakta 12.14.2. Da jeder Punkt der Form  $ty + (1 - t)z$  mit  $t \in [0, 1]$  einen Abstand zu  $z$  und daher zu  $M \cap A_x$  kleiner oder gleich  $\delta$  hat, liegt diese Verbindungsstrecke ganz in  $K_\delta(M \cap A_x) \subseteq K_\beta(M \cap A_x) \subseteq U_\varphi$ . Mit<sup>22</sup>

$$c := \sup\{\max(\|d\varphi(u)\|, |\det d\varphi^{-1}(\varphi(u))|) : u \in K_\beta(M \cap A_x)\} < +\infty$$

folgt daher aus dem vorletzten Resultat von Abschnitt 10.1 in [K] angewandt auf  $\varphi$

$$d(\varphi(y), K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi_\varphi^{-1}(x)) \times \{0\}) \leq \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_\infty \leq c \|y - z\|_\infty \leq c\delta,$$

und somit

$$\varphi(K_\delta(M \cap A_x)) \subseteq K_{c\delta}(K_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi_\varphi^{-1}(x)) \times \{0\}) \subseteq K_{c\delta + \rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi_\varphi^{-1}(x)) \times K_{c\delta}^{\|\cdot\|_\infty}(0).$$

Aus Satz 15.1.2 folgt wegen  $p - d \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \lambda_p(K_\delta(M \cap A_x)) &= \frac{1}{\delta} \int_{\varphi(K_\delta(M \cap A_x))} |\det d\varphi^{-1}(b)| d\lambda_p(b) \\ &\leq \frac{c}{\delta} \cdot \lambda_d(K_{c\delta + \rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\phi_\varphi^{-1}(x))) \cdot \lambda_{p-d}(K_{c\delta}^{\|\cdot\|_\infty}(0)) \\ &= \frac{c \cdot (2c\delta)^{p-d} \cdot (2c\delta + 2\rho_x)^d}{\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

<sup>21</sup>Aus  $x \in K_\delta(\bigcup_{j=1}^n F_j)$  folgt, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $j(n) \in \{1, \dots, n\}$  und ein  $y_n \in F_{j(n)}$  gibt mit  $d(x, y_n) < \delta + \frac{1}{n}$ . Also gibt es zumindest ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  derart, dass für eine Teilfolge  $(y_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  immer  $j(n(k)) = j$ , und somit  $x \in K_\delta(F_j)$ .

<sup>22</sup>Man beachte, dass  $K_\beta(M \cap A_x)$  kompakt ist.

Da  $U_x := \varphi^{-1}(U_{\rho_x}^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)))$  offen in  $\mathbb{R}^p$  ist, lässt sich  $F$  wegen seiner Kompaktheit durch endlich viele Mengen  $U_{x_1}, \dots, U_{x_l}$  dieser Form, überdecken. Wegen

$$K_\delta(F) \subseteq K_\delta\left(\bigcup_{i=1}^l M \cap U_{x_i}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^l K_\delta(M \cap A_{x_i})$$

folgt auch  $\delta^{-1} \cdot \lambda_p(K_\delta(F)) \rightarrow 0$ . □

**15.9.5 Beispiel.** Wir betrachten den Würfel wie in Beispiel 13.7.12. Auf die Kanten  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, 12$ , können wir Lemma 15.9.4 anwenden und erhalten daher für  $\partial G \setminus \partial^o G = \bigcup_{j=1, \dots, 12} E_j$

$$\frac{\lambda_p(K_\delta(\partial G \setminus \partial^o G))}{\delta} \xrightarrow{\delta \searrow 0} 0.$$

Also können wir auf den Würfel Satz 15.9.2 anwenden.

Wir wollen nun einige klassische Integralsätze formulieren, die mehr oder weniger unmittelbar aus Satz 15.9.2 folgen. Dazu benötigen wir neue Begriffsbildungen.

**15.9.6 Definition.** Sei  $h : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  mit offenem  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann nennt man die Abbildung<sup>23</sup>

$$\operatorname{div} h : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} h(x) := \operatorname{tr} dh(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial h_j}{\partial x_j}(x),$$

*Divergenz von  $h$ .*

Ist  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit offenem  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  ebenfalls stetig differenzierbar, so heißt die Abbildung

$$\operatorname{grad} g = \nabla g : G \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \operatorname{grad} g(x) = \nabla g(x) := dg(x)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix},$$

*Gradient von  $g$  beziehungsweise Nabla  $g$ .*

Ist schließlich  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit offenem  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  zweimal stetig differenzierbar, so wird

$$\Delta g : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta g(x) := \operatorname{div}(\nabla g(x)) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

mit *Laplace  $g$*  bezeichnet.

**15.9.7 Korollar (Gaußscher Integralsatz).** Für eine beschränkte und offene Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $p > 1$ , sei  $h : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine stetige Funktion derart, dass  $h|_G$  stetig differenzierbar ist. Weiters sei der Träger  $\operatorname{supp} h$  von  $h$  in  $G \cup \partial^o G \cup L$  enthalten, wobei  $L \subseteq \partial G \setminus \partial^o G$  Bedingung (15.47) erfüllt.

Ist  $x \mapsto \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)$  für  $i, j \in \{1, \dots, p\}$  über  $G$  nach  $\lambda_p$  integrierbar, und ist  $h_i|_{\partial^o G}$  für  $i = 1, \dots, p$  über  $\partial^o G$  nach dem Oberflächenmaß  $\mu$  integrierbar, so gilt

$$\int_G \operatorname{div} h(x) \, d\lambda_p(x) = \int_{\partial^o G} v(y)^T h(y) \, d\mu(y).$$

Die Integrierbarkeit der  $h_i|_{\partial^o G}$  über  $\partial^o G$  nach  $\mu$  ist automatisch erfüllt, wenn  $\operatorname{supp} h \subseteq G \cup \partial^o G$ , oder wenn  $\mu(\partial^o G) < +\infty$ .

<sup>23</sup>Die Spur  $\operatorname{tr} C$  einer quadratischen Matrix  $C$  ist die Summe aller Einträge auf ihrer Hauptdiagonalen.

*Beweis.* Wir wenden Satz 15.9.2 auf  $f = h_j$ ,  $w = e_j$  für  $j = 1, \dots, p$  an, addieren die entsprechenden linken und rechten Seiten von (15.48), und erhalten

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} h(x) \, d\lambda_p(x) &= \sum_{j=1}^p \int_G dh_j(x) e_j \, d\lambda_p(x) \\ &= \sum_{j=1}^p \int_{\partial^\circ G} h_j(y) \cdot (v(y)^T e_j) \, d\mu(y) = \int_{\partial^\circ G} v(y)^T h(y) \, d\mu(y). \quad \square \end{aligned}$$

**15.9.8 Beispiel.** Sei  $G = U_1^{\|\cdot\|_2}(0) \subseteq \mathbb{R}^p$  die offene Einheitskugel. Ähnlich wie in Beispiel 13.7.11 zeigt man auch für allgemeine  $p$ , dass  $\partial^\circ G = \partial G = S^{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 = 1\}$  und dass  $v(y) = y$ . Die Funktion  $f(x) = x$  erfüllt die Voraussetzungen aus Korollar 15.9.7, wobei  $\operatorname{div} f(x) \equiv p$ . Wir erhalten die schon aus (15.32) bekannte Tatsache

$$\begin{aligned} p\lambda_p(U_1^{\|\cdot\|_2}(0)) &= \int_G \operatorname{div} f(x) \, d\lambda_p(x) = \int_{\partial^\circ G} v(y)^T f(y) \, d\mu(y) \\ &= \int_{\partial^\circ G} y^T y \, d\mu(y) = \mu(S^{p-1}). \end{aligned}$$

**15.9.9 Korollar (Greenscher Integralsatz).** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  offen und beschränkt, und seien  $h, g : O \rightarrow \mathbb{R}$  beide  $C^2$  auf einer offenen,  $\mathcal{C}\ell(G)$  enthaltenden Menge  $O$ . Weiters seien die Träger von  $h$  und  $g$  in  $G \cup \partial^\circ G \cup L$  enthalten, wobei  $L \subseteq \partial G \setminus \partial^\circ G$  Bedingung (15.47) erfüllt.

Sind  $g|_{\partial^\circ G}$  und  $h|_{\partial^\circ G}$  über  $\partial^\circ G$  nach dem Oberflächenmaß  $\mu$  integrierbar, so gilt (Erste Greensche Identität)

$$\int_G g(x) \cdot \Delta h(x) \, d\lambda_p(x) = \int_{\partial^\circ G} g(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \, d\mu(y) - \int_G \operatorname{grad}(g)(x)^T \operatorname{grad}(h)(x) \, d\lambda_p(x),$$

und (Zweite Greensche Identität)

$$\int_G (h(x) \cdot \Delta g(x) - g(x) \cdot \Delta h(x)) \, d\lambda_p(x) = \int_{\partial^\circ G} (h(y) \frac{\partial g}{\partial v(y)}(y) - g(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)) \, d\mu(y).$$

Dabei ist  $\frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)$  die Richtungsableitung von  $h$  in Richtung der äußeren Normalen  $v(y)$ , also  $dh(y)v(y)$ .

Die Integrierbarkeit von  $g|_{\partial^\circ G}$  und  $h|_{\partial^\circ G}$  nach  $\mu$  ist automatisch erfüllt, wenn  $\operatorname{supp} g, \operatorname{supp} h \subseteq G \cup \partial^\circ G$ , oder wenn  $\mu(\partial^\circ G) < +\infty$ .

*Beweis.* Für  $f(x) = g(x) \operatorname{grad} h(x) \in \mathbb{R}^p$  berechnet man

$$\operatorname{div} f(x) = g(x) \cdot \Delta h(x) + \operatorname{grad} g(x)^T \operatorname{grad} h(x).$$

Außerdem ist  $v(y)^T f(y) = g(y) dh(y)v(y) = g(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y)$ .

Da alle partiellen Ableitungen von  $f$  stetig auf  $O$  und daher auf  $\mathcal{C}\ell(G) \subseteq O$  beschränkt sind, sind alle Funktionen  $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  für  $i, j = 1, \dots, p$  über  $G$  nach  $\lambda_p$  integrierbar.

Aus dem selben Grund ist  $\|\operatorname{grad} h(x)\|$  beschränkt auf  $\mathcal{C}\ell(G)$ . Wegen der Integrierbarkeit von  $g|_{\partial^\circ G}$  folgt daher die von  $f_j|_{\partial^\circ G}$  für  $j = 1, \dots, p$  nach  $\mu$ .

Wir können also Korollar 15.9.7 auf  $f$  anwenden, und erhalten die erste Greensche Identität. Die zweite folgt, wenn man die erste Greensche Identität zweimal hernimmt, einmal wie oben und einmal mit vertauschten Rollen von  $g$  und  $h$ , und diese von einander subtrahiert.  $\square$

**15.9.10 Beispiel.** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_3^2 \\ x_1^2 x_2 - x_3^3 \\ 2x_1 x_2 + x_2^2 x_3 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei  $M$  die „offene“ obere Halbkugeloberfläche mit Radius  $a > 0$ , also

$$M = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\|_2 = a, y_3 > 0\}.$$

Als offene Teilmenge der Kugeloberfläche ist  $M$  eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Die Abbildung  $y \mapsto v(y) := \frac{1}{a}y$  ist eine stetige Normalenfunktion; vgl. Beispiel 13.7.11.

Wir wollen das Flussintegral  $\int_M v(y)^T f(y) d\mu(y)$  berechnen, und zwar nicht direkt, sondern mit Hilfe von Korollar 15.9.7. Dazu betrachten wir die offene obere Halbkugel mit Radius  $a$ , also die offene Menge

$$G = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\|_2 < a, y_3 > 0\}.$$

Setzen wir

$$L = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0, \|y\|_2 = a\} \quad \text{und} \quad N = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = 0, \|y\|_2 < a\},$$

so überprüft man leicht, dass

$$\partial G = L \cup N, \quad \partial^s G = \partial^o G = M \cup N, \quad \partial G \setminus \partial^o G = L.$$

Wegen  $\mu(\partial^o G) < +\infty$  und da  $L$  als 1-dimensionale Mannigfaltigkeit wegen Lemma 15.9.4 Bedingung (15.47) erfüllt, können wir Korollar 15.9.7 anwenden und erhalten

$$\int_G \operatorname{div} f d\lambda_3 = \int_M v(y)^T f(y) d\mu(y) + \int_N v(y)^T f(y) d\mu(y).$$

Wegen  $\operatorname{div} f(x) = x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = \|x\|_2^2$  folgt mit Transformation auf Kugelkoordinaten, vgl. Beispiel 15.1.6,

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div} f d\lambda_3 &= \int_{[0,a] \times [0,2\pi] \times (0,\frac{\pi}{2}]} r^2 \cdot r^2 \cos \theta d\lambda_3(r, \alpha, \theta)^T \\ &= \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^4 \cos \theta d\alpha d\theta dr = 2\pi \frac{1}{5} a^5. \end{aligned}$$

Für  $y \in N$  sieht man unmittelbar, dass  $v(y) = (0, 0, -1)^T$ . Außerdem ist  $(\xi, \eta)^T \mapsto (\xi, \eta, 0)^T$  eine Einbettung von  $U_a^{\|\cdot\|_2}(0) \subseteq \mathbb{R}^2$  auf  $N$ . Also gilt

$$\int_N v(y)^T f(y) d\mu(y) = \int_{U_a(0)} -2\xi\eta d\lambda_2 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -2 \int_{-a}^a \eta \int_{-\sqrt{a^2-\eta^2}}^{\sqrt{a^2-\eta^2}} \xi d\xi d\eta = 0.$$

Somit haben wir gezeigt, dass

$$\int_M v(y)^T f(y) d\mu(y) = \frac{2\pi}{5} a^5.$$

**15.9.11 Beispiel.** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^p$  definiert durch  $f(x) = \frac{1}{\|x\|^p} x$  ist als Zusammensetzung von  $C^1$ -Funktionen offensichtlich selber stetig differenzierbar, wobei

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( x_j \left( \sum_{k=1}^p x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} \right) = \left( \sum_{k=1}^p x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} - x_j \cdot 2x_j \frac{p}{2} \left( \sum_{k=1}^p x_k^2 \right)^{-\frac{p+2}{2}} = \frac{1}{\|x\|^{p+2}} (\|x\|^2 - px_j^2),$$

für  $j = 1, \dots, p$  und daher  $\operatorname{div} f(x) = \frac{1}{\|x\|^{p+2}} \sum_{j=1}^p (\|x\|^2 - px_j^2) = 0$ .

Wir nehmen irgendein offenes und beschränktes  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  derart, dass  $\mu(\partial^\circ G) < +\infty$  und dass  $\partial G \setminus \partial^\circ G$  klein im Sinne von (15.47) ist.

Falls  $0 \notin \operatorname{cl}(G)$ , so können wir unmittelbar Korollar 15.9.7 anwenden, da  $f$  auf einer offenen Obermenge von  $\operatorname{cl}(G)$  stetig differenzierbar ist. Bezeichnet  $\nu(y)$  für  $y \in \partial^\circ G$  die äußere Normale auf den Tangentialraum  $T_y$  von  $\partial^\circ G$ , so erhalten wir

$$\int_{\partial^\circ G} \nu(y)^T f(y) d\mu(y) = \int_G \operatorname{div} f d\lambda_p = 0.$$

Ist andererseits  $0 \in G$ , so wähle man  $\rho > 0$  so klein, dass  $K_\rho^{\|\cdot\|_2}(0) \subseteq G$ , und betrachte die offene Menge  $G' = G \setminus K_\rho^{\|\cdot\|_2}(0)$ . Man überprüft elementar, dass  $\partial G' = \partial G \cup (\rho S^{p-1})$  und  $\partial^\circ G' = \partial^\circ G \cup (\rho S^{p-1})$ , wobei  $\nu(y) = -\frac{1}{\rho} y$  für  $y \in \rho S^{p-1}$ .

Jetzt ist  $f$  auf einer offenen Obermenge von  $\operatorname{cl}(G')$  stetig differenzierbar. Also können wir Korollar 15.9.7 anwenden, und erhalten

$$\int_{\partial^\circ G} \nu(y)^T f(y) d\mu(y) + \int_{\rho S^{p-1}} \nu(y)^T f(y) d\mu(y) = \int_{\partial^\circ G'} \nu(y)^T f(y) d\mu(y) = 0.$$

Für  $y \in \rho S^{p-1}$  gilt dabei  $\nu(y)^T f(y) = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{\|y\|^p} (y, y) = -\frac{1}{\rho^{p-1}}$ , und daher

$$\int_{\rho S^{p-1}} \nu(y)^T f(y) d\mu(y) = -\frac{1}{\rho^{p-1}} \mu(\rho S^{p-1}) = -\frac{1}{\rho^{p-1}} \rho^{p-1} \mu(S^{p-1}) = -\mu(S^{p-1}),$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus Fakta 15.7.6 folgt. Also gilt im Fall  $0 \in G$

$$\int_{\partial^\circ G} \nu(y)^T f(y) d\mu(y) = \mu(S^{p-1}).$$

## 15.10 Poissonsches Integral\*

**15.10.1 Definition.** Ist  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit offenem  $G \subseteq \mathbb{R}^p$  zweimal stetig differenzierbar, so heißt  $g$  *harmonisch*, wenn  $\Delta g \equiv 0$ , wobei

$$\Delta g(x) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

Für reellwertige  $g$  gilt  $\Delta g(x) = \operatorname{div}(\nabla g(x))$ ; vgl. Definition 15.9.6.

### 15.10.2 Beispiel.

(i) Die Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(t) = \ln \|t\| = \frac{1}{2} \ln(t_1^2 + t_2^2), \quad (15.55)$$

ist aus  $C^\infty$  und erfüllt  $\nabla g(t) = \frac{1}{\|t\|^2} \cdot t$ . Wegen  $\Delta g(t) = \operatorname{div}(\nabla g(t))$  folgt aus Beispiel 15.9.11, dass  $g$  harmonisch ist.

(ii) Für  $p > 2$  wird die Funktion  $g : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g(t) = \frac{1}{2-p} \cdot \|t\|^{2-p} = \frac{1}{2-p} \cdot \left( \sum_{k=1}^p t_k^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} \quad (15.56)$$

genauso wie die Funktion aus dem letzten Beispiel eine wichtige Rolle spielen. Sie ist ebenfalls aus  $C^\infty$ , erfüllt  $\nabla g(t) = \frac{1}{\|t\|^p} \cdot t$  und ist wieder wegen Beispiel 15.9.11 harmonisch.

(iii) Ist  $g$  wie in (15.55) bzw. (15.56) und ist  $y \in \mathbb{R}^p$ , so folgt sofort, dass auch die Funktion  $g_{-y} : \mathbb{R}^p \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto g(t-y)$  aus  $C^\infty$  und harmonisch ist.

(iv) Sei  $\hat{g}_0$  die konstante Funktion  $\hat{g}_0 = \frac{1}{2-p} \cdot \mathbb{1}_{(2,+\infty)}(p)$  und für  $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  sei

$$\hat{g}_{-x} : t \mapsto g(\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x), \quad t \in \mathbb{R}^p \setminus \left\{ \frac{1}{\|x\|^2}x \right\}.$$

Wegen  $\Delta \hat{g}_{-x}(t) = \|x\|^2 (\Delta g)(\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x) = 0$  ist  $\hat{g}_{-x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^p$  harmonisch. Zusammen mit dem vorherigen Punkt folgt die Harmonizität von<sup>24</sup>

$$w_x(t) = g_{-x}(t) - \hat{g}_{-x}(t), \quad t \in \mathbb{R}^p \setminus \left\{ x, \frac{1}{\|x\|^2}x \right\} \quad (15.57)$$

für jedes  $x \in \mathbb{R}^p$ . Man rechnet leicht nach, dass

$$\nabla w_x(t) = \frac{1}{\|t-x\|^p} \cdot (t-x) - \frac{\|x\|}{\left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^p} \cdot \left( \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right).$$

Explizit gilt für  $x \neq 0$  und  $t \in \mathbb{R}^p \setminus \left\{ x, \frac{x}{\|x\|^2} \right\}$

$$w_x(t) = \begin{cases} \ln \|t-x\| - \ln \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|, & \text{falls } p = 2, \\ \frac{1}{2-p} \cdot \left( \|t-x\|^{2-p} - \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^{2-p} \right), & \text{falls } p > 2. \end{cases} \quad (15.58)$$

Für  $x = 0$  und  $t \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  gilt

$$w_0(t) = \begin{cases} \ln \|t\|, & \text{falls } p = 2, \\ \frac{1}{2-p} \cdot (\|t\|^{2-p} - 1), & \text{falls } p > 2. \end{cases} \quad (15.59)$$

<sup>24</sup>Hier gelte  $\frac{1}{\|x\|^2}x := \infty \notin \mathbb{R}^p$  für  $x = 0$ .

**15.10.3 Bemerkung.** Sind  $x, y \in \mathbb{R}^p$  mit  $x \neq 0$ , so folgt für  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2 = (\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$  wegen der Bilinearität des Skalarproduktes

$$\begin{aligned} \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^2 &= \|x\|^2\|y\|^2 - 2(x, y) + 1 \\ &= \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1) \\ &= \|x - y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1). \end{aligned} \quad (15.60)$$

Insbesondere gilt  $\|x - y\| = \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$ , wenn  $\|y\| = 1$ , und  $\|x - y\| < \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$ , wenn  $x, y \in U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ .

Aus dieser Bemerkung folgt, dass für festes  $x \in U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  die Funktion  $w_x$  gemäß (15.58) und (15.59) für  $\|t\| = 1$  verschwindet und für  $t \in U_1^{\|\cdot\|_2}(0) \setminus \{x\}$  negativ ist. Man beachte auch, dass  $K_1^{\|\cdot\|_2}(0) \setminus \{x\}$  für  $\|x\|_2 < 1$  im Harmonizitätsbereich von  $w_x$  enthalten ist.

**15.10.4 Lemma.** Für festes  $y \in S^{p-1}$  ist die Funktion  $x \mapsto \varphi(x, y) := \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^p \setminus \{y\}$  nach  $\mathbb{R}$  harmonisch.

Für ein endliches Maß  $\mu : \mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_{S^{p-1}}) \rightarrow [0, +\infty)$  auf  $(S^{p-1}, \mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_{S^{p-1}}))$  und eine bezüglich  $\mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_{S^{p-1}})$  messbare und beschränkte Funktion  $f : S^{p-1} \rightarrow \mathbb{C}$  ist auch

$$\int_{S^{p-1}} \varphi(x, y) \cdot f(y) d\mu(y) \quad (15.61)$$

als Funktion von  $x \in U_1(0) = \{z \in \mathbb{R}^p : \|z\| < 1\}$  harmonisch.

*Beweis.* Weil die Funktion  $g_{-y}$  aus Beispiel 15.10.2 auf  $\mathbb{R}^p \setminus \{y\}$  dreimal stetig differenzierbar ist, gilt  $\Delta \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta g_{-y}) = 0$ , wodurch

$$-\sum_{j=1}^p y_j \cdot \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}(x) = -(y, \nabla g_{-y}(x)) = \frac{-(x, y) + \|y\|^2}{\|x - y\|^p} \quad (15.62)$$

als Funktion von  $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{y\}$  harmonisch ist. Dasselbe gilt für

$$-\sum_{j=1}^p x_j \cdot \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}(x) = -(x, \nabla g_{-y}(x)) = \frac{-\|x\|^2 + (x, y)}{\|x - y\|^p}, \quad (15.63)$$

da wegen<sup>25</sup>  $\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(x_j \cdot \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}(x)) = x_j \cdot \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_k^2} g_{-y}(x) + \delta_{kj} \cdot 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} g_{-y}(x)$

$$\Delta \sum_{j=1}^p x_j \cdot \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}(x) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(x_j \cdot \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}(x)) = \sum_{j=1}^p x_j \cdot \Delta \frac{\partial g_{-y}}{\partial x_j}(x) + 2 \cdot \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g_{-y}(x) = 0.$$

Also ist auch die Summe  $\frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$  von (15.62) und (15.63) als Funktion von  $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{y\}$  harmonisch. Wegen  $y \in S^{p-1}$  stimmt diese mit  $\varphi(x, y)$  überein.

Weiters ist die Funktion  $\varphi : \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^{2p} : x \neq y\} \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^\infty$ , weshalb insbesondere  $\varphi(x, y) \cdot f(y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x, y) \cdot f(y)$  und  $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi(x, y) \cdot f(y)$  als Funktionen in  $(x, y)^T \in K_\eta(0) \times S^{p-1}$  für jedes

<sup>25</sup>Hier steht  $\delta_{kj}$  für das Kronecker Delta, also  $\delta_{kj} = 0$  für  $k \neq j$  und  $\delta_{kk} = 1$ .

$\eta \in [0, 1)$  stetig und infolge beschränkt sind. Für ein endliches Maß  $\mu : \mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_{S^{p-1}}) \rightarrow [0, +\infty)$  auf  $(S^{p-1}, \mathcal{A}((\mathcal{T}^p)_{S^{p-1}}))$  können wir somit Lemma 14.15.4 auf  $x_j \mapsto \varphi(x, y) \cdot f(y)$  und dann auf  $x_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x, y) \cdot f(y)$  anwenden, wobei  $x_j$  der  $j$ -te Eintrag von  $x \in U_\eta(0)$  ist. Somit kann  $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  mit dem Integral vertauscht werden. Aufsummieren über alle  $j = 1, \dots, p$  ergibt

$$\sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \int_{S^{p-1}} \varphi(x, y) \cdot f(y) \, d\mu(y) = \int_{S^{p-1}} \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi(x, y) \cdot f(y) \, d\mu(y) = 0.$$

Die Funktionen  $U_\eta(0) \ni x \mapsto \int_{S^{p-1}} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi(x, y) \, d\mu(y)$  sind dabei wegen Lemma 14.15.3 stetig. Also ist (15.61) harmonisch. □

**15.10.5 Bemerkung.** Die Funktion  $t \mapsto \ln \|t - x\|$  im Fall  $p = 2$  bzw.  $t \mapsto \|t - x\|^{2-p}$  im Fall  $p > 2$  ist für beliebiges  $x \in \mathbb{R}^p$  über jede kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^p$  nach  $\lambda_p$  integrierbar. Dazu sei  $R > 0$  so groß, dass  $K_R^{\|\cdot\|_2}(x)$  das gegebene Kompaktum umfasst. Nun gilt im Fall  $p = 2$  mit Transformation auf Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{K_R(x)} |\ln \|t - x\|| \, d\lambda_2(t) &= \int_{K_R(0)} |\ln \|t\|| \, d\lambda_2(t) \\ &= \int_{(0,R]} 2\pi |\ln r| r \, d\lambda(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{R^2}{4}(2 \ln R - 1), & \text{falls } R \geq 1, \\ \frac{R^2}{4}(1 - 2 \ln R), & \text{falls } R < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall  $p > 2$  gilt mit Transformation auf Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{K_R(x)} \|t - x\|^{2-p} \, d\lambda_p(t) &= \int_{K_R(0)} \|t\|^{2-p} \, d\lambda_p(t) \\ &= \int_{(0,R]} \int_{(0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{p-2}} r^{2-p} \cdot r^{p-1} \cdot \cos \theta_1 \cos^2 \theta_2 \dots \cos^{p-2} \theta_{p-2} \, d\lambda_{p-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{p-2} \end{pmatrix} d\lambda(r), \end{aligned}$$

was nach (15.29) mit  $\frac{R^2}{2} \cdot \mu(S^{p-1})$  übereinstimmt. Somit ist  $w_0$  auf  $U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  für alle  $p \geq 2$  nach  $\lambda_p$  integrierbar. Da für festes  $x \in U_1^{\|\cdot\|_2}(0) \setminus \{0\}$  die Funktion  $t \mapsto \ln \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$  bzw.  $t \mapsto \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^{2-p}$  auf  $U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  beschränkt ist, folgt auch, dass  $w_x$  auf  $U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  nach  $\lambda_p$  integrierbar ist.

**15.10.6 Lemma.** Sei  $O \subseteq \mathbb{R}^p$  offen mit  $O \supseteq K_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  und  $h : O \rightarrow \mathbb{R}$  liege in  $C^2(O)$ . Dann gilt für alle  $x \in U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$

$$h(x) = \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int_{S^{p-1}} \varphi(x, y) \cdot h(y) \, d\mu(y) + \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int_{U_1^{\|\cdot\|_2}(0)} w_x(t) \cdot \Delta h(t) \, d\lambda_p(t),$$

wobei  $\varphi(x, y) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^p}$  der Poissonkern ist und  $w_x(t)$  wie in (15.57) gegeben ist.

*Beweis.* Sei  $x \in U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  und  $0 < \rho$  so klein, dass  $K_\rho^{\|\cdot\|_2}(x) \subseteq U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ . Die offene Menge  $G = U_1^{\|\cdot\|_2}(0) \setminus K_\rho^{\|\cdot\|_2}(x)$  erfüllt offenbar  $\partial G = \partial^\circ G = S^{p-1} \cup (x + \rho S^{p-1})$ , wobei für die äußere Normale

$$v(y) = y, \quad y \in S^{p-1} \quad \text{und} \quad v(y) = -\frac{1}{\rho}(y - x), \quad y \in x + \rho S^{p-1}.$$

Wenden wir Korollar 15.9.9 an, so folgt wegen  $\Delta w_x = 0$  auf  $G$

$$\begin{aligned} & - \int_G w_x(t) \cdot \Delta h(t) \, d\lambda_p(t) = \int_{\partial G} \left( h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \right) d\mu(y) \\ & = \int_{S^{p-1}} \left( h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \right) d\mu(y) + \int_{x+\rho S^{p-1}} \left( h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \right) d\mu(y). \end{aligned}$$

Da  $w_x$  auf  $S^{p-1}$  verschwindet, und da für  $x \neq 0$  und  $y \in S^{p-1}$  wegen  $\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \| = \|x - y\|$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) &= (\nabla w_x(y))^T v(y) = \left( \frac{1}{\|y-x\|^p} \cdot (y-x) - \frac{\|x\|}{\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \|^p} \cdot (\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x) \right)^T y \\ &= \frac{1}{\|y-x\|^p} \left( (y-x) - (\|x\|^2 y - x) \right)^T y = \frac{1 - \|x\|^2}{\|y-x\|^p} = \varphi(x, y) \end{aligned}$$

und für  $x = 0$  und  $y \in S^{p-1}$

$$\frac{\partial w_0}{\partial v(y)}(y) = (\nabla w_0(y))^T v(y) = \frac{1}{\|y\|^p} \cdot y^T y = 1 = \varphi(0, y)$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} & \int_{S^{p-1}} \varphi(x, y) \cdot h(y) \, d\mu(y) + \int_G w_x(t) \cdot \Delta h(t) \, d\lambda_p(t) \tag{15.64} \\ &= - \int_{x+\rho S^{p-1}} \left( h(y) \frac{\partial w_x}{\partial v(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \right) d\mu(y) \\ &= - \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial v(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=: I_1} + \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial v(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=: I_2} \\ & \quad - \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} \hat{g}_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=: I_3} + \underbrace{\int_{x+\rho S^{p-1}} g_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=: I_4}. \end{aligned}$$

Für  $y \in x + \rho S^{p-1}$  gilt

$$\frac{\partial g_{-x}}{\partial v(y)}(y) = (\nabla g_{-x})^T v(y) = - \left( \frac{1}{\|y-x\|^p} \cdot (y-x) \right)^T \frac{1}{\rho} (y-x) = -\rho^{1-p}.$$

Aus Fakta 15.7.6, 9, folgt

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial v(y)}(y) \, d\mu(y) \\ &= -\rho^{1-p} \int_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \, d\mu(y) = -\rho^{1-p} \rho^{p-1} \int_{S^{p-1}} h(x + \rho y) \, d\mu(y). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $h$  bei  $x$  konvergiert dieser Ausdruck für  $\rho \searrow 0$  nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz gegen  $-\mu(S^{p-1}) h(x)$ .

Da  $y \mapsto h(y), y \mapsto \hat{g}_{-x}(y), y \mapsto \nabla h(y), y \mapsto \nabla \hat{g}_{-x}(y)$  alle auf  $K_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  stetig und daher dort beschränkt sind, und da wegen der Cauchy-Schwarzen Ungleichung

$$\left| \frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial v(y)}(y) \right| \leq \|\nabla \hat{g}_{-x}(y)\|, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial v(y)}(y) \right| \leq \|\nabla h(y)\|,$$

folgt für ein  $C > 0$  mit  $C \geq \|\nabla h(y)\| \cdot |\hat{g}_{-x}(y)| + \|\nabla \hat{g}_{-x}(y)\| \cdot |h(y)|$  für alle  $y \in K_1^{\|\cdot\|_2}(0)$

$$|I_2 - I_3| \leq \int_{x+\rho S^{p-1}} C \, d\mu = C\rho^{p-1}\mu(S^{p-1}) \rightarrow 0, \quad \rho \searrow 0.$$

Es bleibt  $I_4$  zu behandeln. Auf  $x + \rho S^{p-1}$  ist  $g(y-x)$  konstant gleich  $\ln \rho$  im Fall  $p = 2$  und konstant gleich  $\frac{1}{2-p}\rho^{2-p}$  im Fall  $p > 2$ . Somit gilt für ein geeignetes  $c > 0$  mit  $c \geq \|\nabla h(y)\|, y \in K_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ ,

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq c \int_{x+\rho S^{p-1}} |g(y-x)| \, d\mu(y) = c\rho^{p-1}\mu(S^{p-1}) \cdot \begin{cases} |\ln \rho|, & \text{falls } p = 2, \\ \frac{1}{p-2} \cdot \rho^{2-p}, & \text{falls } p > 2, \end{cases} \\ &= c\mu(S^{p-1}) \cdot \begin{cases} \rho |\ln \rho|, & \text{falls } p = 2, \quad \rho \searrow 0 \\ \frac{\rho}{p-2}, & \text{falls } p > 2, \end{cases} \end{aligned}$$

Für  $\rho \searrow 0$  folgt die Aussage des aktuellen Lemma nun aus (15.64), da wegen Bemerkung 15.10.5 und des Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\int_G w_x(t) \cdot \Delta h(t) \, d\lambda_p(t) \xrightarrow{\rho \searrow 0} \int_{U_1^{\|\cdot\|_2}(0)} w_x(t) \cdot \Delta h(t) \, d\lambda_p(t).$$

□

Im Folgenden sei  $\sigma$  das Oberflächenmaß  $\mu$  auf  $S^{p-1}$  multipliziert mit dem Faktor  $\frac{1}{\mu(S^{p-1})}$ , womit  $\sigma(S^{p-1}) = 1$ .

**15.10.7 Satz (Poisson-Darstellung).** Sei  $h : K_1^{\|\cdot\|_2}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und derart, dass  $h|_{U_1^{\|\cdot\|_2}(0)}$  harmonisch ist. Dann gilt für alle  $x \in U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$

$$h(x) = \int_{S^{p-1}} \varphi(x, y) \cdot h(y) \, d\sigma(y),$$

wobei  $\varphi(x, y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$  der Poissonkern ist.

*Beweis.* Ist  $h$  harmonisch auf einer  $K_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  umfassenden offenen Menge, so folgt die Darstellung

$$h(x) = \int_{S^{p-1}} \varphi(x, y) \cdot h(y) \, d\sigma(y),$$

unmittelbar aus Lemma 15.10.6, da  $\Delta h = 0$ .

Für allgemeines  $h$  wie im Satz gehen wir folgendermaßen vor. Ein stetiges  $h : K_1^{\|\cdot\|_2}(0) \rightarrow \mathbb{R}$  ist wegen der Kompaktheit von  $K_1^{\|\cdot\|_2}(0)$  sogar gleichmäßig stetig. Insbesondere konvergiert  $x \mapsto$

$h(rx)$ ,  $x \in S^{p-1}$ , gleichmäßig für  $r \nearrow 1$  gegen  $h|_{S^{p-1}}$ . Für  $r \in (0, 1)$  ist  $x \mapsto h(rx)$  auf  $U_{\frac{1}{r}}^{\|\cdot\|_2}(0)$  harmonisch. Also wissen wir

$$h(rx) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(ry) \, d\sigma(y).$$

Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz konvergiert die rechte Seite für  $r \nearrow 1$  gegen  $\int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y) \, d\sigma(y)$  und die linke wegen der Stetigkeit von  $h$  gegen  $h(x)$ .  $\square$

**15.10.8 Korollar** (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen). Ist  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch mit  $G \supseteq K_r^{\|\cdot\|_2}(a)$  für ein  $r > 0$ , so gilt

$$\int_{S^{p-1}} h(a + ry) \, d\sigma(y) = h(a).$$

*Beweis.* Wende Satz 15.10.7 mit  $x = 0$  auf die harmonische Funktion  $u \mapsto h(a + ru)$  an.  $\square$

**15.10.9 Korollar.** Ist  $h : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch mit  $G \supseteq K_R^{\|\cdot\|_2}(a)$  für  $R > 0$ , so gilt

$$\frac{1}{\lambda_p(K_R^{\|\cdot\|_2}(a))} \int_{K_R^{\|\cdot\|_2}(a)} h \, d\lambda_p = h(a).$$

*Beweis.* Wir wenden (15.31) auf die Funktion  $x \mapsto u(a + x) \cdot \mathbb{1}_{K_R^{\|\cdot\|_2}(0)}$  an und erhalten wegen der Translationsinvarianz von  $\lambda_p$

$$\begin{aligned} \int_{K_R(a)} h \, d\lambda_p &= \int_{K_R(0)} h(a + x) \, d\lambda_p(x) = \int_{(0, R)} r^{p-1} \cdot \int_{S^{p-1}} h(a + ry) \, d\mu(y) \, d\lambda(r) \\ &= \int_{(0, R)} r^{p-1} \cdot h(a) \cdot \mu(S^{p-1}) \, d\lambda(r) = \frac{R^p}{p} h(a) \mu(S^{p-1}). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt schließlich aus (15.32).  $\square$

## 15.11 Übungsaufgaben

15.1 Man zeige, dass das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation des Flächenstückes  $(a < b, a, b \in \mathbb{R}; f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  messbar

$$F = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

um die  $x$ -Achse im  $\mathbb{R}^3$  entsteht, gleich  $\pi \int_{[a, b]} f^2 \, d\lambda$  ist. Man berechne insbesondere das Volumen des Körpers  $K$ , der entsteht, wenn  $f(x) = 2 - x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

15.2 Man zeige für  $x \in (0, 1)$ , dass  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ ; siehe Beispiel 14.11.10.

Hinweis: Man zeige, dass die linke Seite gleich  $\int_{(0, +\infty)^2} e^{-(t_1+t_2)} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^x \frac{1}{t_1} \, d\lambda_2(t_1, t_2)$  ist. Nun wende man die Transformationsformel auf  $T : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ ,  $T(s_1, s_2)^T = \left(\frac{s_1 s_2}{s_2 + 1}, \frac{s_1}{s_2 + 1}\right)^T$  an und verwende Übungsaufgabe 14.96.

- 15.3 Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  das Dreieck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  und sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Man zeige, dass dann für  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_D f(x+y)x^m y^n d\lambda_2(x,y)^T = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \int_0^1 f(t)t^{m+n+1} dt.$$

- 15.4 Zeigen Sie, dass  $z \mapsto \frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $z \mapsto \log z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  über jede beschränkte Teilmenge  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$  von  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  nach  $\lambda_2$  integrierbar sind. Dabei sei festgelegt, dass  $\log(re^{i\phi}) = \ln r + i\phi$  mit  $r \geq 0$  und  $\phi \in [0, 2\pi)$ .

Weiters berechne man

$$\int_{K_\rho(0) \setminus \{0\}} \frac{1}{x+iy} d\lambda_2(x,y)^T$$

und

$$\int_{U_\rho(0)^+ \setminus \{0\}} \log(x+iy) d\lambda_2(x,y)^T,$$

wobei  $\rho > 0$  und  $U_\rho(0)^+ = \{(x,y)^T : x^2 + y^2 < \rho^2, y > 0\}$ .

- 15.5 Man berechne den Schwerpunkt einer Halbkugel. Für ein messbares  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  ist der Schwerpunkt von  $B$  gegeben durch (siehe Definition 14.15.1)

$$(x_s, y_s, z_s)^T = \frac{1}{\lambda_3(B)} \int_B (x, y, z)^T d\lambda_3(x, y, z)^T.$$

- 15.6 Man berechne das  $\lambda_2$ -Maß derjenigen beschränkten ebenen Fläche, deren Rand durch

$$(x^2 + y^2)^3 = 9(x^4 + y^4)$$

beschrieben wird. Skizze!

Hinweis: Transformation auf Polarkoordinaten.

- 15.7 Man berechne für  $a, b, c > 0$  die Fläche der Ellipse  $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\}$  und das Volumen des Ellipsoid  $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$ .

- 15.8 Berechne für  $a, b, c > 0$  das Volumen des beschränkten Körpers der von der Fläche

$$F := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \right\}$$

begrenzt wird.

Hinweis:  $T : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)^T \mapsto (ax^3, by^3, cz^3)^T \in \mathbb{R}^3$  eingeschränkt auf die richtige Menge ergibt einen Diffeomorphismus. Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Substitution  $(x, y, z)^T = T \circ \phi(r, \varphi, \theta)$ , wobei  $\phi$  der Kugelkoordinatendiffeomorphismus ist.

- 15.9 Für  $t > 0$  setze

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos x^2 dx, \quad G(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin x^2 dx.$$

Man zeige  $F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi}{4} \frac{t}{1+t^2} = 2tF(t)G(t)$ . Begründung!

Hinweis: Zur Berechnung von  $F(t)^2, G(t)^2, F(t)G(t)$  schreiben Sie die beiden Faktoren als Integrale mit verschiedenen Integrationsvariablen!

- 15.10 Für ein offenes  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  und einen Banachraum  $Z$  sei  $f : D \rightarrow Z$  stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass es für jedes kompakte  $K \subseteq D$  eine monoton wachsende Funktion  $\vartheta : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  mit  $\lim_{\gamma \rightarrow 0+} \vartheta(\gamma) = 0$  derart gibt, dass

$$\|f(x) - f(y) - df(z)(x - y)\| \leq \|x - y\| \cdot \vartheta(\max(\|x - y\|, \|y - z\|)) \quad \text{für alle } x, y, z \in K.$$

Hinweis: Lemma 15.1.1.

- 15.11 Für ein offenes  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig differenzierbar, injektiv und derart, dass  $df(x)$  für alle  $x \in D$  injektiv ist. Zeigen Sie, dass es für jedes kompakte  $K \subseteq D$  Zahlen  $C, \delta \in (0, +\infty)$  und eine monoton wachsende Funktion  $\vartheta : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  mit  $\lim_{\gamma \rightarrow 0+} \vartheta(\gamma) = 0$  derart gibt, dass für alle  $x, y, z \in K$  mit  $\|x - y\| < \delta$

$$\|f(x) - f(y) - df(z)(x - y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| \cdot \vartheta(\max(\|x - y\|, \|y - z\|)) \cdot C.$$

Leiten Sie daraus für jedes  $\eta > 0$  auch her, dass

$$\|df(z)(x - y)\| - C \cdot \vartheta(\eta) \cdot \|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq \|df(z)(x - y)\| + C \cdot \vartheta(\eta) \cdot \|f(x) - f(y)\|,$$

und damit dass

$$\|f(x) - f(y)\| \cdot (1 - C \cdot \vartheta(\eta)) \leq \|df(z)(x - y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| \cdot (1 + C \cdot \vartheta(\eta)),$$

wenn  $x, y, z \in K$  mit  $\|x - y\| < \delta$  und  $\|x - y\|, \|y - z\| < \eta$ .

Hinweis: Verwenden Sie die vorherige Übungsaufgabe sowie Übungsaufgabe 13.13.

- 15.12 Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $B : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeigen Sie, dass  $B$  genau dann ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist, wenn  $B$  injektiv ist und  $B'(z) \neq 0$ ,  $z \in D$ , erfüllt. In diesem Fall zeige man, dass  $|\det dB(z)|$  mit  $|B'(z)|^2$  übereinstimmt.

Schließlich zeige man, dass für ein weiteres holomorphes  $f : O \rightarrow \mathbb{C}$  mit offenem  $O \subseteq \mathbb{C}$  derart, dass  $B(D) \subseteq O$ , und  $g := f \circ B$

$$\int_D g'(x + iy) d\lambda_2(x, y)^T = \int_{B(D)} f'(\xi + i\eta) d\lambda_2(\xi, \eta)^T.$$

- 15.13 Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \cap C_{00}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ , also ist  $f$  komplexwertig, stetig differenzierbar und nimmt den Wert Null außerhalb einer kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  an. Wir identifizieren  $x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$  und definieren

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x + iy) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x + iy) \right).$$

Zeigen Sie, dass  $z \mapsto \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)$  über  $\mathbb{C}$  nach  $\lambda_2$  integrierbar ist, und dass

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\lambda_2(z) = -\pi f(0).$$

Hinweis: Ist  $\psi : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\psi(r, \alpha)^T = r(\cos \alpha, \sin \alpha)^T$  und  $g = f \circ \psi$ , so zeige man, dass das zu behandelnde Integral mit

$$\frac{1}{2} \int_{[0, +\infty)} \int_{(-\pi, \pi)} \left( \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) (r, \alpha)^T d\lambda_2(r, \alpha)^T$$

übereinstimmt.

15.14 Man zeige (i) bis (iii).

(i) Für alle  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt

$$\nu(B) = \nu(s \cdot B) \text{ und } \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(t) \, d\nu(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(s \cdot t) \, d\nu(t),$$

wobei das Maß  $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$  definiert ist durch  $\nu(B) := \int_B \frac{1}{|t|} \, d\lambda(t)$ .

(ii) Für alle  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$\sigma(B) = \sigma(w \cdot B) \text{ und } \int_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} f(z) \, d\sigma(z) = \int_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} f(z \cdot w) \, d\sigma(z),$$

wobei das Maß  $\sigma : \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$  definiert ist durch  $\sigma(B) := \int_B \frac{1}{|z|^2} \, d\lambda_2(z)$ .

(iii) Ist  $M$  ein  $d$ -dimensionaler linearer Unterraum von  $\mathbb{R}^p$  versehen mit dem Oberflächenmaß  $\mu$ , so gilt für alle  $y \in M$

$$\mu(B) = \mu(y + B) \text{ und } \int_M f(x) \, d\mu(x) = \int_M f(x + y) \, d\mu(x).$$

Die Funktionen  $f$  sind dabei reell- bzw. komplexwertig und messbar. Die Gleichheiten der Integrale sind so zu verstehen, dass die linke Seite existiert genau dann, wenn es die rechte tut.

Anmerkung:  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(M, +)$  sind Gruppen. Die oben betrachteten Maße sind translationsinvariant in den jeweiligen Gruppen. Man spricht vom sogenannten Haarschen Maß.

15.15 Die *affine Gruppe*  $G$  ist die Menge aller affinen Abbildungen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  der Form  $x \mapsto ax + b$  mit  $a \in \mathbb{R}^\times (= \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Die Gruppenmultiplikation ist dabei die Hintereinanderausführung dieser Abbildungen. Als Menge identifiziere man  $G$  mit der offenen Teilmenge  $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$  der Ebene.

Man zeige, dass bei dieser Identifikation  $(1, 0)$  das Neutrale Element von  $G$  ist, und dass für  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G$  die Gruppenoperation  $\cdot$  folgendermaßen arbeitet

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

Zeigen Sie, dass  $G$  nicht abelsch ist.

15.16 Mit der Gruppe  $G$  wie in der vorherigen Aufgabe zeige man für  $(a, b) \in G$  und für das Maß

$$\nu_l : \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}} \text{ definiert durch } \nu_l(B) = \int_B \frac{1}{c^2} \, d\lambda_2(c, d)^T, \text{ dass } \nu_l((a, b) \cdot B) = \nu_l(B),$$

und für das Maß

$$\nu_r : \mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}} \text{ definiert durch } \nu_r(B) = \int_B \frac{1}{|c|} \, d\lambda_2(c, d)^T, \text{ dass } \nu_r(B \cdot (a, b)) = \nu_r(B).$$

Anmerkung: Das ist ein einfaches Beispiel einer Gruppe, wo Linkes und Rechtes Haarsches Maß verschieden sind.

- 15.17 Sei  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  linear. Für  $X = \mathbb{R}^p$ ,  $d = d_\infty$  und  $\nu$  wie in Übungsaufgabe 14.31 zeige man mit Hilfe von Übungsaufgaben 14.34, 14.35, 14.59 und 14.60, dass  $\nu(\psi(A)) = \sqrt{\det \psi^T \psi} \cdot \lambda_m(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^m)$ .

Hinweis: Unterscheiden Sie den Fall eines nicht injektiven  $\psi$  und eines injektiven  $\psi$ . Im zweiten Fall betrachte man eine lineare und bezüglich dem Skalarprodukt isometrische Abbildung  $V : \psi(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

- 15.18 Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^p$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und bezeichne  $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M \rightarrow [0, +\infty]$  das entsprechende Oberflächenmaß. Weiters bezeichne  $\nu$  das metrisches äußeres Maß für  $X = \mathbb{R}^p$ ,  $d = d_\infty$  wie in Übungsaufgabe 14.31. Zeigen Sie, dass  $\mu = \nu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M}$ .

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es reicht,  $\mu(\phi(B)) = \nu(\phi(B))$  für jede Einbettung  $\phi : D \rightarrow M$  und jedes  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^m)_D$  zu zeigen. Zeigen Sie wie im Beweis von Satz 15.1.2, dass es dafür reicht,  $\mu(\phi(R)) = \nu(\phi(R))$  für alle Rechtecke  $R$  der Bauart (15.5) mit  $\text{cl}(R) \subseteq D$  nachzuweisen. Für  $\eta > 0$  schreiben Sie  $R$  als disjunkte Vereinigung  $R = \sum_{j=1}^n R_j$  von kleineren Rechtecken mit  $d(R_j) < \eta$ . Mit Hilfe der Übungsaufgaben 14.34, 14.35 und 15.11 stelle man  $\nu(\phi(R_j))$  und  $\nu(d(z_j)(R_j))$  in Beziehung und summiere über alle  $j$ , wobei  $z_j \in R_j$ . Wenden Sie die vorherige Übungsaufgabe auf  $\psi = d(z_j)$  und  $A = R_j$  an. Schließlich lasse man  $\eta$  gegen Null streben.

- 15.19 Skizzieren Sie die zweidimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$  ( $a > 0$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ )

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + z^2 = a^2,$$

und berechnen Sie die Oberfläche der durch  $x, y, z \geq 0$  festgelegten Teilmenge von  $M$ .

- 15.20 Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  der Schnitt der beiden Zylinder  $Z_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$  und  $Z_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\}$ . Bestimmen Sie  $\partial G$ ,  $\partial^s G$  und die Oberfläche von  $\partial^s G$ !

- 15.21 Sei  $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$  und sei  $F$  die Teilmenge aller Punkte  $x$  der Kugeloberfläche  $S^2$ , die  $x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tan \psi$  erfüllen (Kugelkalotte). Skizziere  $F$  und berechne die Oberfläche von  $F$ .

Hinweis: Verwende Kugelkoordinaten.

- 15.22 Bezeichnet  $\mu$  das Oberflächenmaß auf  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , so zeige man, dass  $\mu = \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0, 2\pi)}} \circ T^{-1}$ , wobei  $T : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{T}$  durch  $T(t) = \exp(it)$  definiert ist.

- 15.23 Sei  $M$  eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ , sei  $\phi : D \rightarrow M$  eine Einbettung, und  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$  mit  $B \subseteq \phi(D)$ . Zeige

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \right\|_2^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s), \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right)^2} d\lambda_2(s),$$

wobei  $(\cdot, \cdot)$  das übliche Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^p$  bezeichnet.

Im Falle  $p = 3$  zeige man auch, dass

$$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \times \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(s) \right\|_2 d\lambda_2(s),$$

wobei  $x \times y$  das Kreuzprodukt zweier Dreivektoren ist:

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

15.24 Man berechne

$$\int_F x_1 \, d\mu(x_1, x_2, x_3)^T,$$

wobei  $F$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$  im  $\mathbb{R}^3$  ist.  $F$  ist dabei als Teilmenge der Mannigfaltigkeit  $M$  mit Oberflächenmaß  $\mu$  zu betrachten, wobei  $M$  die affine Ebene ist, die durch diese drei Punkte geht.

15.25 Ist  $B$  eine messbare Teilmenge einer Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  und  $\mu$  das Oberflächenmaß auf  $M$ , so berechnet sich der Schwerpunkt  $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$  vom homogen mit Masse belegten  $B$  durch

$$x_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B x \, d\mu(x, y, z)^T, \quad y_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B y \, d\mu(x, y, z)^T, \quad z_S = \frac{1}{\mu(B)} \int_B z \, d\mu(x, y, z)^T.$$

Bestimmen Sie den Schwerpunkt von  $B = M$ , wobei  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  der Graph der Abbildung  $f : (0, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x_1, x_2)^T = x_1^2 + x_2$  ist.

15.26 Bestimmen Sie den Schwerpunkt von  $B \subseteq M$ , wobei  $M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$  und  $B = \phi(R)$ , wobei  $\phi(s, t)^T = (0, 0, 1)^T + s(1, 0, -1)^T + t(0, 1, -1)^T$  und  $R$  die Fläche ist, die von der  $x$ -Achse und einem vollen Bogen der Zykloide  $x(t) = a(t - \sin t)$ ,  $y(t) = a(1 - \cos t)$ , begrenzt wird.

15.27 Sei  $M$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ ,  $r > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$  fest. Zeigen Sie, dass mit  $M$  auch  $N := rM + x$  eine  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$  ist, dass für  $B \subseteq M$  genau dann  $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_M$ , wenn  $rB + x \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_N$ , dass in dem Fall

$$\mu_N(rB + x) = r^d \mu_M(B)$$

und dass

$$\int_N f \, d\mu_N = r^d \int_M f(ry + x) \, d\mu_M(y)$$

für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [0, +\infty]$  und für jede messbare Funktion  $f : N \rightarrow [-\infty, +\infty]$  ( $\mathbb{C}$ ) in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte Seite es tut.

15.28 Beweisen Sie, dass für das Oberflächenmaß  $\mu$  auf  $S^{p-1} := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_2 = 1\}$  und für jede orthogonale Matrix  $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$

$$\mu(T(A)) = \mu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^p)_{S^{p-1}}.$$

15.29 Sei  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$ ,  $\mu$  das Oberflächenmaß darauf,  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  fest, und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Zeigen Sie, dass

$$\int_{S^n} f((x, y)) \, d\mu(y) = \int_{S^n} f(\|x\|_2 \cdot y_{n+1}) \, d\mu(y),$$

wobei  $(x, y)$  das Skalarprodukt von  $x$  und  $y$  ist. Schließlich zeige man mit Hilfe von Beispiel 15.7.11, dass dieses Integral mit

$$d_{n-1} \int_{-1}^1 f(\|x\|_2 \cdot t) (1 - t^2)^{\frac{n}{2}-1} \, dt$$

übereinstimmt, wobei  $d_{n-1}$  das gesamte Oberflächenmaß von  $S^{n-1}$  ist.

15.30 Mit Beispiel 14.14.10 zeige man für  $x, y \in (0, +\infty)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha)^x (\sin \alpha)^y d\alpha = \frac{1}{2} B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right),$$

und weiters

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x \alpha d\alpha = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{x+1}{2})}{2 \Gamma(\frac{x+2}{2})},$$

sowie  $\lambda_d(K_1^d(0)) = \frac{\sqrt{\pi}^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ ; siehe Beispiel 14.14.11.

Hinweis: Es gilt  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

15.31 Man zeige mit Hilfe der allgemeinen Kugelkoordinaten explizit, also nicht mit den Integralsätzen, dass das Oberflächenmaß  $c_d$  der Kugeloberfläche  $S^{d-1}$  der Kugel mit Radius 1 im  $\mathbb{R}^d$  genau  $\frac{2\sqrt{\pi}^d}{\Gamma(\frac{d}{2})} = d \cdot \lambda_d(K_1^d(0))$  ist.

15.32 Sei  $M$  eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^p$ , und  $t(y)$  eine stetige und normierte Tangente von  $M$ , also  $t : M \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig mit  $\|t(y)\|_2 = 1$  und  $t(y) \in T_y$  für alle  $y \in M$ , wobei  $T_y$  der Tangentialraum von  $M$  im Punkt  $y$  ist.

Ist  $\phi : (a, b) \rightarrow M$  eine Einbettung, so zeige man, dass  $\phi'(t) = \pm \|\phi'(t)\| t(\phi(t))$ , wobei das Vorzeichen  $\pm$  für alle  $t \in (a, b)$  dasselbe ist.

Angenommen, dieses Vorzeichen ist  $+$ , und angenommen,  $\phi$  sowie  $\phi'$  lassen sich stetig auf  $[a, b]$  fortsetzen, so zeige man, dass für jedes stetige Vektorfeld  $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times p} \simeq L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  mit  $O \supseteq \phi([a, b])$  das Wegintegral

$$\int_{\phi} F(x) dx$$

gemäß Definition 11.2.2 mit dem Oberflächenintegral

$$\int_{\phi(a,b)} F(y) t(y) d\mu(y)$$

übereinstimmt.

Schließlich zeige man, dass im Falle  $p = 2$  und  $M = \partial^o G$  die Funktion  $t(y) = J\nu(y)$  eine Funktion mit den eingangs erwähnten Eigenschaften ist. Dabei ist  $\nu(y)$  die äußere Normale und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

15.33 Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und beschränkt, und seien  $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , geschlossene, stetige, stückweise stetig differenzierbare Wege derart, dass die Abbildungen  $\gamma_j|_{(a_j, b_j) \setminus M_j}$  ( $M_j$  sind die Unstetigkeitsstellen von  $\gamma_j'$ ) Einbettungen in den orientierbaren Rand  $\partial^o D$  mit paarweise disjunkten  $\gamma_j((a_j, b_j) \setminus M_j)$  sind und dass

$$\partial^o D \setminus \bigcup_{j=1, \dots, m} \gamma_j((a_j, b_j) \setminus M_j) \text{ sowie } \partial D \setminus \partial^o D$$

endliche Mengen sind – man denke an einen Kreis, einen Kreis mit Loch, ein Dreieck oder ein Rechteck.

Zeigen Sie, dass für  $t \in (a_j, b_j) \setminus M_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , die komplexe Zahl  $-iy'_j(t)$  interpretiert als Zweivektor normal auf den Tangentialraum  $T_{\gamma_j(t)}$  für  $\partial^\circ D$  steht.

Zeigen Sie weiters, dass unter der Annahme, dass  $-iy'_j(t)$  interpretiert als Zweivektor immer ins äußere von  $D$  zeigt, also ein positives Vielfache der äußeren Normalen  $v(y)$  mit  $y = \gamma_j(t)$  ist, für ein stetig differenzierbares  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $G \supseteq \mathcal{C}\ell(D)$  das komplexe Wegintegral

$$-i \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

gemäß Definition 11.6.2 interpretiert als Zweivektor mit

$$\int_{\partial^\circ D} \phi_f(y) v(y) d\mu(y)$$

übereinstimmt. Dabei ist  $\mu$  das Oberflächenmaß von  $\partial^\circ D$  und

$$\phi_f(y) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z) & -\operatorname{Im} f(z) \\ \operatorname{Im} f(z) & \operatorname{Re} f(z) \end{pmatrix}.$$

Schließlich zeige mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und mit  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) := \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$ , dass

$$\frac{1}{2i} \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) d\lambda_2(z).$$

Welche Aussage erhält man damit, wenn  $f$  holomorph ist?

- 15.34 Sei  $f(x) = \mathbb{1}_{[-c,c]}(x)$  mit einem festen  $c > 0$  und  $g(x) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x) \cdot e^{-x}$ . Berechnen Sie die Faltung  $f * g$ .
- 15.35 Sei  $h = \mathbb{1}_{[-1,1]}$  und  $g_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Berechnen Sie  $g_n * h$  sowie  $(g_n * h) * h$ . Sind die erhaltenen Funktionen stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar?
- 15.36 Für die offene Einheitskugel  $U_1(0)$  im  $\mathbb{R}^2$  bezüglich  $\|\cdot\|_2$  sowie für die Abbildungen  $f = \mathbb{1}_{U_1(0)}$  und  $g((x,y)^T) = x^2 + y^2$  gebe man an, für welche  $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$  die Faltung  $f * g((x,y)^T)$  definiert ist! Für diese  $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$  berechne man  $f * g((x,y)^T)$ !
- 15.37 Sei  $G$  die Menge aller Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  mit Länge kleiner  $r$  für ein festes  $r > 0$ . Man bestimme die äußere Normale  $v((x,y)^T)$  durch einen Punkt  $(x,y)^T \in \partial^\circ G$  und berechne das Flussintegral

$$\int_{\partial^\circ G} g((x,y)^T) v((x,y)^T) d\mu((x,y)^T)$$

direkt und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes. Dabei ist

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x^2)y & (1-y^2)x \end{pmatrix}.$$

- 15.38 Sei  $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, -1 < x_3 < 1\}$  und  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  das Vektorfeld  $F((x_1, x_2, x_3)^T) = (2x_1, x_2^2, x_3^2)$ . Man gebe  $\partial^\circ G$  an und zeige, dass

$$\int_{\partial^\circ G} F(y)v(y) d\mu(x) = 4\pi.$$

Man berechne dieses Integral direkt und auch mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

- 15.39 Für  $G = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4, 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$  gebe man  $\partial G$ ,  $\partial^s G$  und  $\partial^o G$  an und berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_{\partial^o G} v(a)^T f(a) \, d\mu(a),$$

wobei  $v(a)$  die äußere Normale auf den Tangentialraum in  $a$  von  $\partial^o G$  und  $\mu$  das Oberflächenmaß von  $\partial^o G$  ist. Außerdem ist  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch  $f(x, y, z)^T = (x + y, y + z, x + z^2)^T$ .

- 15.40 Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_3^2 + 3x_2 \\ x_1^2 x_2 - 3x_3^3 \\ 7x_1 x_2 + x_2^2 x_3 + 15 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei  $M$  die Mannigfaltigkeit

$$M = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : \|y\|_2 = a, y_3 < -\frac{a}{2} \right\}.$$

Berechnen Sie das Flussintegral  $\int_M v(y)^T f(y) \, d\mu(y)$ .

- 15.41 Man betrachte folgende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow z > 0, 3x^2 - 4y + 2y^2 + 2z - 3 = 0.$$

Weiters sei  $G$  jene offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ , die von  $M$  und der  $xy$ -Ebene begrenzt wird.

Man bestimme  $\partial G$ ,  $\partial^s G$ ,  $\partial^o G$  und berechne für

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x-2)^3 + \ln(z^2 + 1) \\ 7z \\ y^2 z + 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes das Flussintegral

$$\int_M v(a)^T F(a) \, d\mu(a),$$

wobei  $v(a)$  die äußere Normale auf den Tangentialraum in  $a$  von  $\partial^o G$  und  $\mu$  das Oberflächenmaß von  $\partial^o G$  ist.

- 15.42 Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß für die Funktion

$$f((x, y, z)^T) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \\ 2z \end{pmatrix}$$

das Flussintegral  $\int_{\partial^o G} v((x, y, z)^T)^T f((x, y, z)^T) \, d\mu((x, y, z)^T)$ , wobei  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  offen, beschränkt und derart ist, dass sich  $\partial^o G = \partial^s G$  aus den den Flächen

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4, \quad z > 1,$$

$$S_2 : (z+5)^2 = 9(x^2 + y^2), \quad z \in (-5, 1),$$

zusammensetzt. Skizze!