Kapitel 14

Mengen und Abbildungen

14.1 Rechnen auf $[0,+\infty]$ und $[-\infty,+\infty]$

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir die auf $\mathbb{R}$ bekannten Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auch für Elemente aus $[0,+\infty]$ und teilweise auch für Elemente aus $[-\infty,+\infty]$ definieren. Zunächst setzen wir die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ als Abbildungen von $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ nach $[0,+\infty)$ zu Abbildungen von $[0,+\infty]\times[0,+\infty]$ nach $[0,+\infty]$ fort, indem wir

$$a+(+\infty)=(+\infty)+a=+\infty \text{ für alle } a\in[0,+\infty],$$

$$0\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot 0=0,\quad b\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot b=+\infty \text{ für alle } b\in(0,+\infty]\,,$$

definieren. Man prüft sofort nach, dass die derartig erweiterten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $[0,+\infty]$ kommutativ, assoziativ und distributiv sind. Wir setzen $\leq$ von $[0,+\infty)$ auf $[0,+\infty]$ durch $a\leq+\infty$ für alle $a\in[0,+\infty]$ fort, und erhalten eine Totalordnung auf $[0,+\infty]$.
Ausgehend von der Definition des Supremums einer Teilmenge von $[0,+\infty]$ als kleinste obere Schranke zeigt man mit Hilfe von Fakta 5.3.8, Bemerkung 5.3.9 und Fakta 5.4.3, dass für $a\in[0,+\infty]$, für konvergente Netze $(a_i)_{i\in I},(b_i)_{i\in I}$ aus $[0,+\infty]$ und Teilmengen $\{a_m : m\in M\},\{b_m : m\in M\}\subseteq[0,+\infty]$

$$\sup_{m\in M} a\cdot b_m = a\cdot\sup_{m\in M} b_m,\quad \lim_{i\in I} a\cdot b_i = a\cdot\lim_{i\in I} b_i,\quad \lim_{i\in I}(a_i+b_i)=(\lim_{i\in I} a_i)+(\lim_{i\in I} b_i),\ ,$$

$$\sum_{m\in M} a\cdot b_m = a\cdot\sum_{m\in M} b_m,\quad \sum_{m\in M}(a_m+b_m)=(\sum_{m\in M} a_m)+(\sum_{m\in M} b_m)\,.$$

Man beachte, dass im Allgemeinen $\lim_{i\in I}(a_i\cdot b_i)$ nicht mit $(\lim_{i\in I} a_i)\cdot(\lim_{i\in I} b_i)$ übereinstimmt.
Auf $[-\infty,+\infty]$ rechnen wir so, dass $+$ und $\cdot$ auf $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ mit den bekannten Operationen übereinstimmen, und dass

$$\alpha+(\pm\infty)=(\pm\infty)+\alpha=(\pm\infty) \text{ für } \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)\,,$$

$$\alpha \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot \alpha = \pm\infty \text{ für } \alpha \in (0, +\infty],$$
$$\alpha \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot \alpha = \mp\infty \text{ für } \alpha \in [-\infty, 0),$$
$$0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0,$$

Ausdrücke wie $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ wollen wir nicht definieren. Die Multiplikation $\cdot$ ist damit kommutativ und assoziativ auf $[-\infty, +\infty]$. Die Addition $+$ ist kommutativ und assoziativ falls in $a + (b + c) = (a + b) + c$ nicht eine der Variablen a, b, c gleich $+\infty$ und eine andere $-\infty$ ist. Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ gilt, wenn $b + c$ und $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ nicht von der Form $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ sind.
Die durch $-\infty \leq a$ und $b \leq +\infty$ für alle $a, b \in [-\infty, +\infty]$ von $\mathbb{R}$ auf $[-\infty, +\infty]$ erweiterte Relation $\leq$ ist genauso wie $\leq$ auf $\mathbb{R}$ eine Totalordnung, wobei jede nichtleere Teilmenge von $[-\infty, +\infty]$ dort ein Supremum und ein Infimum hat. Für $a, b, c \in [-\infty, +\infty]$ folgt aus $a \leq b$, dass $a \cdot c \leq b \cdot c$ wenn $c > 0$ und $a \cdot c \geq b \cdot c$ wenn $c < 0$. Aus $a \leq b$ folgt auch $a + c \leq b + c$, wenn $a + c$ und $b + c$ beide nicht von der Form $(\pm\infty) + (\mp\infty)$ sind.

14.2 Fortsetzung von Funktionenräumen

14.2.1 Definition. Sei Ω eine nichtleere Menge. Einen linearen Unterraum[1] $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^\Omega$ nennen wir einen *unter* $|.|$ *abgeschlossenen Raum von Funktionen*, falls mit $f \in \mathcal{F}$ immer auch $|f| \in \mathcal{F}$. In dem Fall setzen wir

$$\mathcal{F}_+ = \mathcal{F} \cap [0, +\infty)^\Omega = \{f \in \mathcal{F} : f \geq 0\}.$$

Ist[2] M eine unendliche Menge, so definieren wir für einen unter $|.|$ abgeschlossenen Raum von Funktionen $\mathcal{F}$ die Teilmenge $\mathcal{F}_\uparrow^M$ von $[0, +\infty]^\Omega$ durch

$$\mathcal{F}_\uparrow^M := \{g \mid g : \Omega \to [0, +\infty] \text{ mit } g = \sup_{m \in M} f_m \text{ für gewisse } \{f_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_+\},$$

wobei $\sup_{m \in M} f_m$ punktweise zu verstehen ist, also $(\sup_{m \in M} f_m)(x) = \sup_{m \in M} f_m(x)$ für $x \in \Omega$.

14.2.2 Fakta.

1. Ein Menge $\mathcal{F}$ von Funktionen wie in Definition 14.2.1 erfüllt für $f, g \in \mathcal{F}$ auch $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in \mathcal{F}$ und $\min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in \mathcal{F}$.
2. Da man für $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_+$ mit einer Mächtigkeit kleiner oder gleich der von M die Menge $\mathcal{M}$ als $\{f_m : m \in M\}$ schreiben kann, folgt $\sup \mathcal{M} := \sup_{f \in \mathcal{M}} f \in \mathcal{F}_\uparrow^M$, weshalb insbesondere $\mathcal{F}_+ \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$.

   Andererseits lässt sich per definitionem jedes $f \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ als $\sup \mathcal{M}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{M} = \{f_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_+$ darstellen, wobei die Mächtigkeit von $\mathcal{M}$ kleiner oder gleich der von M ist.

[1] Die Elemente von $\mathcal{F}$ sind also Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

[2] Die Eigenschaft der Menge M, die hier von Relevanz ist, ist ihre Mächtigkeit. Also sollte anstatt von M eine Kardinalzahl stehen. Wir wollen aber hier auf die Erkenntnisse der Mengenlehre bezüglich Kardinalzahlen nicht zurückgreifen. Wir werden uns vorrangig mit den Fällen $M = \mathbb{N}$ und $M = \mathcal{F}_+$ beschäftigen.

3. Für $\{f_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_+$ ist $\sup_{m\in M} f_m$ der punktweise Grenzwert des monoton wachsenden Netzes[3] $(\max_{m\in A} f_m)_{A\in\mathcal{E}(M)}$. Also kann jede Funktion aus $\mathcal{F}_\uparrow^M$ als punktweiser Grenzwert eines monoton wachsenden Netzes $(f_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{F}$ mit einem im Vergleich zu M weniger oder gleich mächtigen I dargestellt werden.

4. Im Falle $M = \mathbb{N}$ kann jede Funktion $\sup_{m\in\mathbb{N}} f_m \in \mathcal{F}_\uparrow^{\mathbb{N}}$ als punktweiser Grenzwert der monoton wachsenden Folge $(\max\{f_1,\dots,f_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ geschrieben werden, wobei $\max\{f_1,\dots,f_n\} \in \mathcal{F}_+$, $n \in \mathbb{N}$.

14.2.3 Lemma. *Die Menge $\mathcal{F}_\uparrow^M$ von Funktionen hat folgende Eigenschaften.*

(i) $\mathcal{F}_\uparrow^M + \mathcal{F}_\uparrow^M \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$, $\min(\mathcal{F}_\uparrow^M, \mathcal{F}_\uparrow^M) \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$, $\max(\mathcal{F}_\uparrow^M, \mathcal{F}_\uparrow^M) \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$.

(ii) Für $f \in \mathcal{F}$ und $h \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ mit $f \leq h$ folgt $h - f \in \mathcal{F}_\uparrow^M$.

(iii) Aus $\{h_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$ folgt $\sup_{m\in M} h_m \in \mathcal{F}_\uparrow^M$.

(iv) $[0,+\infty] \cdot \mathcal{F}_\uparrow^M \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$.

(v) Gilt $f, \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ mit einem $A \subseteq \Omega$, so folgt $f \cdot \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_\uparrow^M$.

Beweis.

(i) Für $f = \sup\{f_m : m \in M\}, g = \sup\{g_m : m \in M\} \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ mit $\{f_m : m \in M\}, \{g_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_+$ gilt $f + g = \sup\{f_m + g_n : (m,n) \in M \times M\}$; siehe Übungsaufgabe 6. Da $M \times M$ gleichmächtig wie M und $\mathcal{F}_+$ unter $+$ abgeschlossen ist, folgt $f + g \in \mathcal{F}_\uparrow^M$.

Gemäß Fakta 14.2.2, 1, gilt $\min(f,g), \max(f,g) \in \mathcal{F}_+$ für alle $f,g \in \mathcal{F}_+$. Ausgehend von Übungsaufgabe 6 zeigt man daher auf ganz analoge Art und Weise $\min(\mathcal{F}_\uparrow^M, \mathcal{F}_\uparrow^M) \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$ sowie $\max(\mathcal{F}_\uparrow^M, \mathcal{F}_\uparrow^M) \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$.

(ii) Für $\mathcal{F} \ni f \leq \sup\{f_m : m \in M\}$ mit $\{f_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_+$ folgt $\sup\{f_m : m \in M\} - f = \sup\{\max(f_m, f) - f : m \in M\} \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ wegen $\max(f_m, f) - f$ in $\mathcal{F}_+$; siehe Übungsaufgabe 6.

(iii) Für $\{h_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_\uparrow^M$ gilt $h_m = \sup\{f_{(k,m)} : k \in M\}$ mit $\{f_{(k,m)} : k \in M\} \subseteq \mathcal{F}_+$ für alle $m \in M$. Die Funktion[4] $\sup\{h_m : m \in M\} = \sup\{f_{(k,m)} : (k,m) \in M \times M\}$ liegt dann in $\mathcal{F}_\uparrow^M$, da $M \times M$ gleichmächtig wie M ist.

(iv) Für $f = \sup\{f_m : m \in M\} \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ mit $\{f_m : m \in M\} \subseteq \mathcal{F}_+$ und $\alpha \in [0,+\infty)$ gilt $\alpha \cdot f = \sup\{\alpha \cdot f_m : m \in M\} \in \mathcal{F}_\uparrow^M$. Aus dem vorherigen Punkt zusammen mit Fakta 14.2.2, 2, erhalten wir dann auch $(+\infty) \cdot f = \sup\{N \cdot f : N \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}_\uparrow^M$.

(v) Für $f, \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ folgt $f \cdot \mathbb{1}_A = \sup\{\min(N \cdot \mathbb{1}_A, f) : N \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}_\uparrow^M$.

---

[3] $\mathcal{E}(M)$ bezeichnet gerichtete Menge aller endlichen Teilmengen von M gerichtet durch $\subseteq$.

[4] Für diese Gleichheit siehe Übungsaufgabe 5.

$\square$

Wir wollen spezielle unter $|.|$ abgeschlossene Räume von Funktionen diskutieren.

14.2.4 Definition. Für $\Omega \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *Treppenfunktion* bezüglich $\mathcal{R}$, falls $f(\Omega)$ endlich ist und $f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{R}$ für alle $\alpha \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ gilt. Die Menge aller solchen Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Jede Funktion $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ lässt sich offenbar folgendermaßen als[5] Linearkombination von charakteristischen Funktionen zu den paarweise disjunkten Mengen $f^{-1}(\{\alpha\} \in \mathcal{R}$, $\alpha \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ schreiben.

$$f = \sum_{\alpha \in f(\Omega)\setminus\{0\}} \alpha \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(\{\alpha\})} . \tag{14.1}$$

Wir werden sehen, dass für spezielle $\mathcal{R}$ die Menge $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ einen unter $|.|$ abgeschlossenen Raum von Funktionen bildet.

14.2.5 Definition. Ein Mengensystem $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit einer nichtleeren Menge Ω heißt *Ring*, wenn $A, B \in \mathcal{R}$ immer $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$ nach sich zieht.

In einem Ring $\mathcal{R}$ gilt automatisch $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$ sowie $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$ für $A, B \in \mathcal{R}$.

14.2.6 Lemma. *Für $\emptyset \neq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ bildet $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ genau dann einen unter $|.|$ abgeschlossenen Raum von Funktionen, wenn aus $A, B \in \mathcal{R}$ auch $A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$ folgt. In dem Fall gehört ein $f : \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann zu $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, wenn*[6]

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \tag{14.2}$$

mit $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Zudem hat jede Funktion $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ eine Darstellung der Form (14.2) *mit paarweise disjunkten $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Beweis. Ist $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ ein unter $|.|$ abgeschlossener Raum von Funktionen, so folgt für $A, B \in \mathcal{R}$, dass $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ und $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A - \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, was $A \cup B = \mathbb{1}_{A\cup B}^{-1}\{1\} \in \mathcal{R}$ und $A \setminus B = \mathbb{1}_{A\setminus B}^{-1}\{1\} \in \mathcal{R}$ nach sich zieht.
Im Falle eines Ringes $\mathcal{R}$ gehört jede Funktion der Form (14.2) mit paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{R}$ zu $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, da für $\lambda \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ die Vereinigung der A_i mit $\alpha_i = \lambda$ genau die Menge $f^{-1}\{\lambda\}$ ergibt und infolge in $\mathcal{R}$ liegt. Umgekehrt hat jedes $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ die Darstellung (14.1) und ist infolge von der Form (14.2) mit paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{R}$ und $\alpha_i \neq 0$.
Für f in der Form (14.2) mit paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{R}$ gilt $|f| = \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \cdot \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ und $\alpha \cdot f = \sum_{i=1}^m \alpha \cdot \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Gilt neben (14.2) mit paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{R}$ auch $g = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \mathbb{1}_{B_j}$ mit paarweise disjunkten $B_j \in \mathcal{R}$, so folgt

$$f + g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i \setminus \bigcup_{j=1}^n B_j} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \mathbb{1}_{B_j \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i} . \tag{14.3}$$

[5]Für $f(\Omega) = \{0\}$ interpretieren wir (14.1) als die Nullfunktion.
[6]Für $m = 0$ interpretieren wir (14.2) als die Nullfunktion.

Die hier auftretenden Mengen sind paarweise disjunkt, womit $f + g \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$.
Da wir $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ im Falle eines Ringes $\mathcal{R}$ als Vektorraum identifiziert haben, erhalten wir schließlich wegen $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ für $A \in \mathcal{R}$, dass alle Funktion $f : \Omega \to \mathcal{R}$ von der Form (14.2) mit beliebigen $A_i \in \mathcal{R}$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ zu $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ gehören. ❑

14.3 M-fortsetzbare Funktionale

Wenn wir in den kommenden Abschnitten von einer Summe $\sum_{k\in\Omega} a_k$ von Zahlen $a_k \in [0,+\infty]$, $k \in \Omega$, mit einer nichtleeren Menge Ω sprechen, dann wollen wir das im Sinne folgender Bemerkung verstehen.

14.3.1 Bemerkung. In Definition 5.4.2 wurde für eine nichtleere Menge Ω und Zahlen $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \Omega$, der Ausdruck $\sum_{k\in\Omega} a_k$ durch

$$\sum_{k\in\Omega} a_k = \lim_{A\in\mathcal{E}(\Omega)} \sum_{k\in A} a_k$$

definiert, falls der rechts stehende Grenzwert in $\mathbb{R}$ bzw. allgemeiner in $[-\infty,+\infty]$ existiert. Dabei ist $\mathcal{E}(\Omega)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von Ω gerichtet durch $\subseteq$. Ist $a_k \in [0,+\infty)$ für alle $k \in \Omega$, so bildet $(\sum_{k\in A} a_k)_{A\in\mathcal{E}(\Omega)}$ ein monoton wachsendes Netz in $\mathbb{R}$, womit

$$\sum_{k\in\Omega} a_k = \lim_{A\in\mathcal{E}(\Omega)} \sum_{k\in A} a_k = \sup_{A\in\mathcal{E}(\Omega)} \sum_{k\in A} a_k$$

als Element von $[0,+\infty]$ immer existiert; siehe Definition 5.4.2. Um auch $\sum_{k\in\Omega} a_k$ einen Sinn zu geben, wenn $a_k \in [0,+\infty]$, $k \in \Omega$, setzen wir $\sum_{k\in\Omega} a_k := +\infty$, falls einer der Summanden $+\infty$ gleicht.
Im Falle $a_k \in [0,+\infty]$, $k \in \Omega$, folgt für $n \in \mathbb{N}$ und jedes endliche $A \subseteq \{k \in \Omega : a_k \geq \frac{1}{n}\}$, dass $\alpha := \sum_{k\in\Omega} a_k < +\infty \geq \sum_{k\in A} a_k \geq \frac{\#A}{n}$, wodurch für $\alpha < +\infty$ die Menge A und infolge $\{k \in \Omega : a_k \geq \frac{1}{n}\}$ höchstens $n \cdot \alpha$ Elemente haben kann. Wir schließen auf die Abzählbarkeit von

$$\{k \in \Omega : a_k \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{k \in \Omega : a_k \geq \frac{1}{n}\}.$$

Haben wir $\Omega = \dot{\bigcup}_{i\in I}\Omega_i$ mit nichtleerer Indexmenge I und nichtleeren Mengen Ω_i, $i \in I$, so leitet man aus Proposition 5.4.8 her, dass für $a_m \in [0,+\infty]$, $k \in \Omega$, mit $\sum_{k\in\Omega} a_k < +\infty$

$$\sum_{i\in I} \Big(\sum_{k\in\Omega_i} a_k\Big) = \sum_{k\in\Omega} a_k\,, \tag{14.4}$$

wobei $\sum_{k\in\Omega_i} a_k < +\infty$ für alle $i \in I$. Gilt umgekehrt $\sum_{i\in I}\Big(\sum_{k\in\Omega_i} a_k\Big) < +\infty$, so erhalten wir mit Lemma 5.4.9 ebenfalls (14.4). Also gilt (14.4) auch, wenn einer und damit beide Ausdrücke gleich $+\infty$ sind.
Für $a_{k,i} \in [0,+\infty]$, $k \in \Omega$, $i \in I$, mit einer Indexmenge I gilt wegen des Lemmas vom iterierten Supremum zudem

$$\sup_{i\in I} \sum_{k\in\Omega} a_{k,i} = \sup_{i\in I} \sup_{A\in\mathcal{E}(\Omega)} \sum_{k\in A} a_{k,i} = \sup_{A\in\mathcal{E}(\Omega)} \sum_{k\in A} (\sup_{i\in I} a_{k,i}) = \sum_{k\in\Omega} (\sup_{i\in I} a_{k,i})\,. \tag{14.5}$$

14.3.2 Definition. Sei $\mathcal{F}$ ein unter $|.|$ abgeschlossener Raum von Funktionen und sei M eine unendliche Menge; vgl. Definition 14.2.1. Wir nennen eine Abbildung $\phi : \mathcal{F}_+ \to [0, +\infty]$ *M-fortsetzbares Funktional*, falls für $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}_+$ und $\alpha \in [0, +\infty)$

$$\phi(\alpha f) = \alpha\phi(f),\ \phi(f_1) + \phi(f_2) = \phi(f_1 + f_2)\,,$$

und falls für ein punktweise monoton wachsendes Netz $(f_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{F}_+$ mit einem im Vergleich zu M weniger oder gleich mächtigen I und für $f \in \mathcal{F}_+$ immer

$$f \leq \sup_{i\in I} f_i \implies \phi(f) \leq \sup_{i\in I} \phi(f_i)\,. \tag{14.6}$$

Ein ϕ wie in Definition 14.3.2 ist monoton, denn für $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_+$ mit $f_1 \leq f_2$ gilt $f_2 - f_1 \in \mathcal{F}_+$, wodurch $\phi(f_2 - f_1) \geq 0$ und somit

$$\phi(f_1) \leq \phi(f_1) + \phi(f_2 - f_1) = \phi(f_2)\,.$$

14.3.3 Bemerkung. Ist mit der Notation aus Definition 14.3.2 $(f_i)_{i\in I}$ ein punktweise monoton wachsendes Netz aus $\mathcal{F}_+$, so stellt $(\phi(f_i))_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz in $[0, +\infty]$ dar, und ist daher in $[0, +\infty]$ gegen $\sup_{i\in I} \phi(f_i)$ konvergent. Dabei konvergiert auch $(f_i)_{i\in I}$ und zwar punktweise gegen $\sup_{i\in I} f_i$. Also gilt im Falle eines I mit kleinerer oder gleicher Mächtigkeit wie M, dass

$$\mathcal{F}_+ \ni f \leq \lim_{i\in I} f_i \implies \phi(f) \leq \lim_{i\in I} \phi(f_i)\,.$$

14.3.4 Bemerkung. Für $M = \mathbb{N}$ ist die Bedingung (14.6) nur für monoton wachsende Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu überprüfen. Ist nämlich $(f_i)_{i\in I}$ eine monoton wachsendes Netz mit einem abzählbaren I, also $I = i(\mathbb{N})$ für eine Funktion $i : \mathbb{N} \to I$, so kann man induktiv natürliche Zahlen $n_1 < n_2 < \dots$ derart konstruieren, dass $i(n_k) \leq i(n_{k+1})$ und $i(k) \leq i(n_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wodurch $(f_{i(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_{i(n_k)} = \sup_{i\in I} f_i$ und $\sup_{k\in\mathbb{N}} \phi(f_{i(n_k)}) = \sup_{i\in I} \phi(f_i)$ ist.

14.3.5 Lemma. *Ein M-fortsetzbares $\phi : \mathcal{F}_+ \to [0, +\infty]$ lässt sich zu einer monotonen Abbildung $\phi_\uparrow^M : \mathcal{F}_\uparrow^M \to [0, +\infty]$ fortsetzen. Diese Fortsetzung hat die Eigenschaft, dass für ein punktweise monoton wachsendes Netz $(f_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{F}_+$ mit einem im Vergleich zu M weniger oder gleich mächtigen I*

$$\phi_\uparrow^M(\lim_{i\in I} f_i) = \lim_{i\in I} \phi(f_i)\,.$$

Beweis. Gemäß Fakta 14.2.2, 3, kann jede Funktion aus $\mathcal{F}_\uparrow^M$ als punktweiser Grenzwert eines monoton wachsenden Netzes $(f_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{F}_+$ mit einem im Vergleich zu M weniger oder gleich mächtigen I dargestellt werden.
Können wir für zwei derartige Netze $(f_i)_{i\in I}$ und $(g_j)_{j\in J}$ mit $\lim_{i\in I} f_i = \lim_{j\in J} g_j$ zeigen, dass $\lim_{i\in I} \phi(f_i) = \lim_{j\in J} \phi(g_j)$, so ist durch $\phi_\uparrow^M(\lim_{i\in I} f_i) := \lim_{i\in I} \phi(f_i)$ eine Fortsetzung von ϕ auf $\mathcal{F}_\uparrow^M$ wohldefiniert. Offenbar reicht es von $\lim_{i\in I} f_i \leq \lim_{j\in J} g_j$ auf $\lim_{i\in I} \phi(f_i) \leq$

$\lim_{j\in J}\phi(g_j)$ zu schließen, womit auch die Monotonie der Fortsetzung $\phi_\uparrow^M$ nachgewiesen wäre. In der Tat folgt aus $\lim_{i\in I} f_i \leq \lim_{j\in J} g_j$ für festes $i \in I$

$$\mathcal{F}_+ \ni f_i \leq \lim_{j\in J} g_j \text{ und damit } \phi(f_i) \leq \lim_{j\in J}\phi(g_j),$$

womit $\lim_{i\in I}\phi(f_i) \leq \lim_{j\in J}\phi(g_j)$. ❑

14.3.6 Beispiel. Für ein nichtleeres Ω ist $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{R}^\Omega : f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \text{ ist endlich}\}$ offenbar ein unter $|.|$ abgeschlossener Raum von Funktionen im Sinne von Definition 14.2.1. Wir halten eine Funktion aus $[0,+\infty]^\Omega$, geschrieben als Tupel $(\eta_k)_{k\in\Omega}$, fest, und definieren für $f \in \mathcal{F}_+ = \mathcal{F}\cap[0,+\infty)^\Omega$

$$\phi(f) := \sum_{k\in\Omega}\eta_k\cdot f(k) \ \ (\in [0,+\infty]).$$

Man beachte, dass wegen unserer Wahl von $\mathcal{F}$ hier nur endlich viele Summanden ungleich Null sind. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz in $[0,+\infty)^\Omega$ und $f \in [0,+\infty)^\Omega$ mit $f \leq \lim_{i\in I} f_i$. Aus (14.5) erhalten wir

$$\phi(f) \leq \sum_{k\in\Omega}\eta_k\cdot\lim_{i\in I} f_i(k) = \lim_{i\in I}\sum_{k\in\Omega}\eta_k\cdot f_i(k) = \lim_{i\in I}\phi(f_i). \tag{14.7}$$

Insbesondere ist ϕ M-fortsetzbar für jedes beliebige unendliche M.
Da jedes $g \in [0,+\infty]^\Omega$ als $\sup\{f \in \mathcal{F}_+ : f \leq g\}$ geschrieben werden kann, gilt $\mathcal{F}_\uparrow^M = [0,+\infty]^\Omega$ für jedes unendliche M, welches gleichmächtig oder mächtiger als $\mathcal{F}_+$ ist. Schreiben wir $g \in [0,+\infty]^\Omega$ als $g = \lim_{i\in I} f_i$ mit einem monoton wachsenden Netz aus $\mathcal{F}_+$, so folgt wegen der Gleichheit in (14.7) auch $\phi_\uparrow^M(g) = \sum_{k\in\Omega}\eta_k\cdot g(k)$.

14.3.7 Lemma. *Die Abbildung $\phi_\uparrow^M : \mathcal{F}_\uparrow^M \to [0,+\infty]$ hat folgende Eigenschaften.*

(i) $\phi_\uparrow^M(\lim_{i\in I} g_i) = \lim_{i\in I}\phi_\uparrow^M(g_i)$ für jedes monoton wachsende Netz $(g_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{F}_\uparrow^M$ mit einem im Vergleich zu M weniger oder gleich mächtigen I.

(ii) $\phi_\uparrow^M(\alpha g_1) = \alpha\phi_\uparrow^M(g_1)$ und $\phi_\uparrow^M(g_1+g_2) = \phi_\uparrow^M(g_1)+\phi_\uparrow^M(g_2)$, wenn $g_1, g_2 \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ und $\alpha \in [0,+\infty]$.

(iii) Sind g_i, $i \in I$, Funktionen aus $\mathcal{F}_\uparrow^M$ mit einer im Vergleich zu M weniger oder gleich mächtigen Indexmenge I, so gilt $\phi_\uparrow^M(\sum_{i\in I} g_i) = \sum_{i\in I}\phi_\uparrow^M(g_i)$.

Beweis.

(i) Sei $(g_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz aus $\mathcal{F}_\uparrow^M$ mit einem im Vergleich zu M weniger oder gleich mächtigen I. Wegen der Monotonie von $\phi_\uparrow^M$ existiert $\lim_{i\in I}\phi_\uparrow^M(g_i)$, wobei $0 \leq \lim_{i\in I}\phi_\uparrow^M(g_i) \leq \phi_\uparrow^M(\lim_{i\in I} g_i) \leq +\infty$. Für die umgekehrte Ungleichung schreiben wir g_i als $\sup_{m\in M} f_{i,m}$ mit gewissen $f_{i,m} \in \mathcal{F}_+$, $m \in M$, womit auch

$$\lim_{i\in I} g_i = \sup_{i\in I} g_i = \sup_{(i,m)\in I} f_{i,m} = \lim_{B\in\mathcal{E}(I\times M)}\big(\max_{(j,m)\in B} f_{j,m}\big);$$

siehe Übungsaufgabe 6 und Fakta 14.2.2, 3. Da $\mathcal{E}(I \times M)$ gleichmächtig wie M ist, gilt $\phi_\uparrow^M(\lim_{i\in I} g_i) = \lim_{B\in\mathcal{E}(I\times M)} \phi(\max_{(j,m)\in B} f_{j,m})$ gemäß Lemma 14.3.5. Ist dieser Ausdruck größer Null und $0 < \alpha < \phi_\uparrow^M(\lim_{i\in I} g_i)$ beliebig, so folgt die Existenz eines endlichen $B \subseteq I \times M$ mit $\alpha < \phi(\max_{(j,m)\in B} f_{j,m})$.

Da I eine gerichtete Menge ist, gibt es ein $k \in I$ mit $k \succeq j$ für alle $(j, m) \in B$. Wegen $f_{j,m} \le g_j \le g_k$ für alle $(j, m) \in B$, folgt $\max_{(j,m)\in B} f_{j,m} \le g_k$, wodurch

$$\alpha < \phi(\max_{(j,m)\in B} f_{j,m}) = \phi_\uparrow^M(\max_{(j,m)\in B} f_{j,m}) \le \phi_\uparrow^M(g_k) \le \lim_{i\in I} \phi_\uparrow^M(g_i)$$

und schließlich $\phi_\uparrow^M(\lim_{i\in I} g_i) \le \lim_{i\in I} \phi_\uparrow^M(g_i)$.

(ii) Gemäß Fakta 14.2.2 gilt $g_1 = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} f_{1,A}, g_2 = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} f_{2,A}$ mit monoton wachsenden Netzen $(f_{1,A})_{A\in\mathcal{E}(M)}, (f_{2,A})_{A\in\mathcal{E}(M)}$. Es folgt $g_1 + g_2 = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)}(f_{1,A} + f_{2,A})$, und infolge

$$\phi_\uparrow^M(g_1 + g_2) = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} \phi(f_{1,A} + f_{2,A}) = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} \phi(f_{1,A}) + \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} \phi(f_{2,A}) = \phi_\uparrow^M(g_1) + \phi_\uparrow^M(g_2)\,.$$

Entsprechend zeigt man $\phi_\uparrow^M(\alpha g_1) = \alpha\phi_\uparrow^M(g_1)$ für $\alpha \in [0, +\infty)$. Schließlich gilt $\phi_\uparrow^M((+\infty) \cdot g_1) = \phi_\uparrow^M(\lim_{n\to\infty} n \cdot g_1) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \phi_\uparrow^M(g_1) = (+\infty) \cdot \phi_\uparrow^M(g_1)$.

(iii) Da auch $\mathcal{E}(I)$ gleich oder weniger mächtig als M ist, folgt aus den Punkten (i) und (ii)

$$\phi_\uparrow^M\Big(\sum_{i\in I} g_i\Big) = \phi_\uparrow^M\Big(\lim_{B\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in B} g_i\Big) = \lim_{B\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in B} \phi_\uparrow^M(g_i) = \sum_{i\in I} \phi_\uparrow^M(g_i)\,. \qquad \square$$

Als weiteres Beispiel wollen wir für einen Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ auf einer nichtleeren Menge Ω wie in Definition 14.2.5 ein $\mathbb{N}$-fortsetzbares Funktional auf $\mathcal{F}(\mathcal{R})_+$ definieren; vgl. Lemma 14.2.6. Dazu benötigen wir folgende Begriffsbildung.

14.3.8 Definition. Als *Maß* auf einem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ bezeichnet man eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$, welche $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt und *σ-additiv* ist, also

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n)$$

für alle Folgen paarweiser disjunkter $D_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, wo auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{R}$ gilt, erfüllt. Die Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n)$ ist im Sinne von Bemerkung 14.3.1 zu verstehen.

14.3.9 Fakta. Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ein Maß.

1. Da sich zwei disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{R}$ mit $\emptyset$ zu einer paarweise disjunkten Mengenfolge fortsetzen lassen, gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Also sind Maße auf Ringen auch endlich additiv.

2. Maße sind monoton, da für Mengen $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq B$ die Ungleichung $\mu(A) \le \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B)$ gilt.

3. Für $A_n \in \mathcal{R},\ n \in \mathbb{N}$, sind die Mengen $D_n := A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $A_1 \cup \cdots \cup A_n = D_1 \cup \cdots \cup D_n,\ n \in \mathbb{N}$. Also gilt im Fall, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{R}$,
$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_n) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)\,.$$
4. Für eine monoton wachsende Mengenfolge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{R}$ bildet $C_1 := D_1,\ C_n := D_n \setminus D_{n-1}, n \ge 2$, eine Mengenfolge bestehend aus paarweise disjunkten Mengen. Wegen $\bigcup_{j=1}^n D_j = \bigcup_{j=1}^n C_j$ gilt für jedes Maß $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$
$$\mu(D_n) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^n C_j\Big) = \sum_{j=1}^n \mu(C_j) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(C_j) = \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j\Big)\,.$$
5. Für eine monoton fallende Mengenfolge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{R}$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{R}$, wobei $\mu(D_m) < +\infty$ für mindestens ein $m \in \mathbb{N}$ und infolge $\mu(D_n) \le \mu(D_m) < +\infty$ für $n \ge m$, erhalten wir aus 4
$$\mu(D_m) - \mu(D_n) = \mu(D_m \setminus D_n) \overset{m\le n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\Big(\bigcup_{m\le n\in\mathbb{N}} (D_m \setminus D_n)\Big) = \mu(D_m) - \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n\Big)\,,$$
wodurch $\lim_{n\to\infty} \mu(D_n) = \mu\big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} D_j\big)$.

14.3.10 Lemma. *Sei μ ein Maß auf einem Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Wir definieren die Abbildung $\phi_\mu : \mathcal{F}(\mathcal{R})_+ \to [0, +\infty]$ durch*
$$\phi_\mu(f) := \sum_{\lambda\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \lambda \cdot \mu(f^{-1}\{\lambda\})\,. \tag{14.8}$$
Dann ist ϕ_μ ein $\mathbb{N}$-fortsetzbares Funktional; vgl. Definition 14.3.2.

Beweis. Für jede Darstellung eines beliebigen $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})_+$ in der Form (14.2) mit paarweise disjunkten Mengen $A_i \in \mathcal{R}$ und $\lambda \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ ist $f^{-1}\{\lambda\}$ die Vereinigung aller A_i mit $\alpha_i = \lambda$. Wegen der Additivität von μ ist $\mu(f^{-1}\{\lambda\})$ genau die Summe der entsprechenden $\mu(A_i)$, womit auch
$$\phi_\mu(f) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mu(A_i)\,.$$
Für $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot \mathbb{1}_{B_j} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})_+$ mit paarweise disjunkten $A_i \in \mathcal{R}$ und paarweise disjunkten $B_j \in \mathcal{R}$ folgt wegen (14.3) und der Additivität von μ
$$\begin{aligned}\phi_\mu(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha \cdot \alpha_i + \beta \cdot \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j)&\\ + \sum_{i=1}^m \alpha \cdot \alpha_i \cdot \mu(A_i \setminus \bigcup_j B_j) + \sum_{j=1}^n \beta \cdot \beta_j \cdot \mu(B_j \setminus \bigcup_i A_i)&\\ = \sum_{i=1}^m \alpha \cdot \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{j=1}^n \beta \cdot \beta_j \cdot \mu(B_j) = \alpha \cdot \phi_\mu(f) + \beta \cdot \phi_\mu(g)\,.&\end{aligned}$$

Schließlich gelte $\mathcal{F}(\mathcal{R})_+ \ni f \leq \lim_{n\to\infty} f_n$ mit einer monoton wachsenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{F}(\mathcal{R})_+$. Um $\phi_\mu(f) \leq \lim_{n\to\infty} \phi_\mu(f_n)$ zu zeigen, stellen wir f in der Form $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{A_k}$ mit paarweise disjunkten A_k und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in (0, +\infty)$ dar.
Wir halten $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < \alpha_k$ für alle $k = 1, \dots, m$ fest. Für $k \in \{1, \dots, m\}$ und $x \in A_k$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) > \alpha_k - \epsilon$, also $A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k \cap f_n^{-1}(\alpha_k - \epsilon, +\infty)$. Wegen der Monotonie von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\left(A_k \cap f_n^{-1}(\alpha_k - \epsilon, +\infty)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Mengenfolge, weshalb mit Fakta 14.3.9

$$\mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_k \cap f_n^{-1}(\alpha_k - \epsilon, +\infty))$$

folgt. Für $g_n := \sum_{k=1}^m (\alpha_k - \epsilon) \cdot \mathbb{1}_{A_k \cap f_n^{-1}(\alpha_k - \epsilon, +\infty)}$ gilt $g_n \leq f_n$ sowie

$$\begin{aligned}\phi_\mu(f) - \epsilon \cdot \sum_{k=1}^m \mu(A_k) &= \phi_\mu(\sum_{k=1}^m (\alpha_k - \epsilon) \cdot \mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^m (\alpha_k - \epsilon) \cdot \lim_{n\to\infty} \mu(A_k \cap f_n^{-1}(\alpha_k - \epsilon, +\infty)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \phi_\mu(g_n) \leq \lim_{n\to\infty} \phi_\mu(f_n)\,.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir schließlich $\phi_\mu(f) \leq \lim_{n\to\infty} \phi_\mu(f_n)$. Nach Bemerkung 14.3.4 ist ϕ_μ ein $\mathbb{N}$-fortsetzbares Funktional. ❑

14.4 σ-Algebren und messbare Funktionen

14.4.1 Definition. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra*, falls

$$\Omega \in \mathcal{A}, \;\; (A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}) \;\; \text{und} \;\; (A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A})\,. \tag{14.9}$$

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ wird als *Messraum* bezeichnet.

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, so folgt wegen $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$ aus $A, B \in \mathcal{A}$ auch

$$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{A}\,.$$

14.4.2 Bemerkung. Erfüllt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die ersten beiden Eigenschaften in (14.9), so folgt aus der de Morganschen Regel die Äquivalenz der Eigenschaften

$$(A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{A}) \;\; \text{und} \;\; (A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A})\,.$$

Treffen diese zu, so gilt auch $(A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A})$. Insbesondere sind σ-Algebren auch Ringe; vgl. Definition 14.2.5.
Hat $\mathcal{A}$ neben den ersten beiden Eigenschaften in (14.9) und $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{A}$ zusätzlich die Eigenschaft, dass für paarweise disjunkte $D_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, immer auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, denn sind $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebig und setzt man $D_1 = A_1$ und $D_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$, so sind die D_n paarweise disjunkte Elemente von $\mathcal{A}$ und infolge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{A}$.

14.4.3 Lemma. *Ist Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem, so gibt es immer eine bezüglich $\subseteq$ kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{K}$ enthält.*

Beweis. Zunächst überzeugt man sich leicht davon, dass für eine nichtleere Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$, so dass jedes $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ eine in $\mathcal{P}(\Omega)$ enthaltenen σ-Algebren ist, auch $\bigcap_{\mathcal{A}\in\mathfrak{M}} \mathcal{A}$ eine in $\mathcal{P}(\Omega)$ enthaltenen σ-Algebra ist; vgl. Definition 14.4.1. Die Menge

$$\mathfrak{M} := \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

ist eine solche nichtleere Menge, da $\mathcal{P}(\Omega)$ selber eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{K}$ enthält. Offenbar ist dann $\bigcap_{\mathcal{A}\in\mathfrak{M}} \mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{K}$ enthält. ❑

14.4.4 Definition. Ist Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein beliebiges Mengensystem, so bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{K}$ enthält. Wir nennen $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ *die von $\mathcal{K}$ erzeugte σ-Algebra* und $\mathcal{K}$ den Erzeuger von $\mathcal{A}(\mathcal{K})$.

14.4.5 Beispiel. Für $\Omega = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und $\mathcal{K} = \{[-\infty, d) : d \in \mathbb{R}\}$ nennt man $\mathcal{E} := \mathcal{A}(\mathcal{K})$ die σ-Algebra aller *Borel-Teilmengen* von $\mathbb{R}\dot{\cup}\{-\infty, +\infty\}$. Dabei gilt für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$

$$\{+\infty\} = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-\infty, n)\Big)^c \in \mathcal{E},\ \{-\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-\infty, -n) = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-\infty, -n)^c\Big)^c \in \mathcal{E},$$

$$[-\infty, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-\infty, a + \frac{1}{n}) = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-\infty, a + \frac{1}{n})^c\Big)^c \in \mathcal{E},$$

$$(a, +\infty] = [-\infty, a]^c \in \mathcal{E},\ [a, +\infty] = [-\infty, a)^c \in \mathcal{E},$$

$$[a, b] = [a, +\infty] \cap [-\infty, b] \in \mathcal{E},\ (a, b) = (a, +\infty] \cap [-\infty, b) \in \mathcal{E},$$

$$[a, b) = [a, +\infty] \cap [-\infty, b) \in \mathcal{E},\ (a, b] = (a, +\infty] \cap [-\infty, b] \in \mathcal{E}.$$

Man erkennt leicht, dass neben $\mathcal{K}$ jedes der Mengensysteme $\{[-\infty, d] : d \in \mathbb{R}\}$, $\{(d, +\infty] : d \in \mathbb{R}\}$, $\{[d, +\infty] : d \in \mathbb{R}\}$, $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{-\infty\}\}$, $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{-\infty\}\}$ auch ein Erzeuger von $\mathcal{E}$ ist.

14.4.6 Definition. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Sigma, \mathcal{B})$ zwei Messräume. Eine Funktion $f : \Omega \to \Sigma$ heißt *$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar*, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Wenn klar ist, um welche σ-Algebren es sich handelt, so spricht man einfach von einer messbaren Funktion.
Eine Funktion $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ nennt man *messbar bezüglich* $\mathcal{A}$, wenn sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{E}$-messbar ist, wobei $\mathcal{E}$ die σ-Algebra der Borelmengen aus Beispiel 14.4.5 ist.

14.4.7 Lemma. *Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Sigma, \mathcal{B})$ zwei Messräume. Weiters sei $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Sigma)$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}$, also $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{K})$. Eine Funktion $f : \Omega \to \Sigma$ ist genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{K}$.*
Insbesondere ist $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $f^{-1}[-\infty, c) \in \mathcal{A}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ bzw. wenn $f^{-1}[-\infty, c] \in \mathcal{A}$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Offenbar ist die Bedingung notwendig für die Messbarkeit. Nimmt man umgekehrt an, dass $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{K}$, so ist $\{B \in \mathcal{P}(\Sigma) : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra, welche $\mathcal{K}$ umfasst, womit dieses Mengensystem auch $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{K})$ umfasst; vgl. Lemma 14.4.3. Das bedeutet aber gerade, dass $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.
Die Aussage für Funktionen $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ist ein Spezialfall der ersten Aussage, weil $\{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\{[-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeuger von $\mathcal{E}$ ist. ❑

14.4.8 Beispiel. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Sigma, \mathcal{B})$ Messräume.

(i) Für $A \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma$ ist die durch $f(x) = a$, $x \in A$, und $f(x) = b$, $x \in \Omega \setminus A$, definierte Funktion $f : \Omega \to \Sigma$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, denn für $B \in \mathcal{B}$ gilt $f^{-1}(B) = \emptyset$, wenn $a \notin B$ und $b \notin B$, $f^{-1}(B) = A$, wenn $a \in B$ und $b \notin B$, $f^{-1}(B) = \Omega \setminus A$, wenn $a \notin B$ und $b \in B$, und $f^{-1}(B) = \Omega$, wenn $a \in B$ und $b \in B$.

Insbesondere sind auch konstante Funktionen messbar.

(ii) Ist $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ von der Bauart $f = \alpha \cdot \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $\alpha \in [-\infty, +\infty]$, so ist nach dem vorherigen Punkt f bezüglich $\mathcal{A}$ messbar.

(iii) Für eine monoton wachsende oder monoton fallende Funktion $F : [-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$ ist $F^{-1}[-\infty, c)$ ein Intervall; siehe Bemerkung 6.2.1. Gemäß Lemma 14.4.7 und Beispiel 14.4.5 ist F $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-messbar.

(iv) Insbesondere ist die durch $\exp(-\infty) = 0$ und $\exp(+\infty) = +\infty$ fortgesetzte Funktion $\exp : [-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$ $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-messbar.

(v) Setzen wir die Bijektion $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ durch $\ln(0) = -\infty$ und $\ln(+\infty) = +\infty$ fort zu einer Bijektion $\ln : [0, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$, so ist die Abbildung $f : [-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$ definiert durch $f(t) = \ln |t|$ $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-messbar, weil $f^{-1}[-\infty, c) = (-\mathrm{e}^c, +\mathrm{e}^c)$ in $\mathcal{E}$ liegt.

(vi) Definieren wir $f : [-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$ durch $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, und $f(\pm\infty) = +\infty$, so gilt $f^{-1}[-\infty, c) = \emptyset$ für $c \leq 0$ und $f^{-1}[-\infty, c) = (-c, +c)$ für $c > 0$, womit auch diese Funktion $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-messbar ist.

14.4.9 Fakta. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Sigma, \mathcal{B})$ und $(\Delta, \mathcal{C})$ Messräume.

1. Wegen $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ für $C \in \mathcal{C}$ ist die Zusammensetzung $g \circ f : \Omega \to \Delta$ einer $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbaren Funktion $f : \Omega \to \Sigma$ und einer $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$-messbaren Funktion $g : \Sigma \to \Delta$ dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$ messbar.

2. Sind $f, g : \Omega \to \Sigma$ messbar und $C \in \mathcal{A}$, so ist auch die Funktion $h : \Omega \to \Sigma$ definiert durch $h(x) = f(x)$ für $x \in C$ und $h(x) = g(x)$ für $x \in \Omega \setminus C$ messbar, denn es gilt $h^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \cap C) \cup (g^{-1}(B) \setminus C)$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

3. Wegen $(\lambda f)^{-1}[-\infty, c) = f^{-1}[-\infty, \frac{c}{\lambda})$ und $(-\lambda f)^{-1}[-\infty, c) = f^{-1}(-\frac{c}{\lambda}, +\infty]$ ist für $\lambda \in (0, +\infty)$ mit $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ auch $\pm\lambda f$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$. Da konstante Funktionen messbar sind, gilt das auch für $0 = 0 \cdot f$, womit die Messbarkeit von f jene von λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ impliziert.

4. Für bezüglich $\mathcal{A}$ messbare $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ist gemäß Beispiel 14.4.8 die Abbildung $|f| : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ eine Zusammensetzung messbarer Funktionen und wegen 1 infolge messbar. Aus $\max(f, g)^{-1}[-\infty, c) = f^{-1}[-\infty, c) \cap g^{-1}[-\infty, c)$ und $\min(f, g)^{-1}[-\infty, c) = f^{-1}[-\infty, c) \cup g^{-1}[-\infty, c)$ erhalten wir die Messbarkeit von $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$.

5. Für zwei messbare Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ist auch $f+g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar, wobei wir voraussetzen, dass $f(x) + g(x)$ für alle $x \in \Omega$ sinnvoll definiert ist. Wir müssen daher ausschließen, dass einer der Werte $f(x), g(x)$ mit $+\infty$ und der andere mit $-\infty$ übereinstimmt, also $(f^{-1}\{+\infty\} \cap g^{-1}\{-\infty\}) \cup (f^{-1}\{-\infty\} \cap g^{-1}\{+\infty\}) = \emptyset$. In der Tat gilt

$$(f+g)^{-1}[-\infty, c) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}[-\infty, q) \cap g^{-1}[-\infty, c-q)\,,$$

womit sich diese Menge als abzählbare Vereinigung von Schnitten von Mengen aus $\mathcal{A}$ darstellt, und infolge auch in $\mathcal{A}$ liegt.

6. Falls im letzten Punkt die in $\mathcal{A}$ liegende Menge

$$M := (f^{-1}\{+\infty\} \cap g^{-1}\{-\infty\}) \cup (f^{-1}\{-\infty\} \cap g^{-1}\{+\infty\})$$

nicht leer ist, so kann man zum Beispiel $(f+g)(x) = 0$ für $x \in M$ setzen, und erhält wieder eine messbare Funktion.

7. Nach 5 und Beispiel 14.4.8 sind alle Treppenfunktionen aus $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ messbar; vgl. Lemma 14.2.6.

   Zum Beispiel ist die durch $\operatorname{sgn}(\pm\infty) = \pm 1$ erweiterte Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn} : [-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$ eine solche Treppenfunktion und infolge $\mathcal{E}$-$\mathcal{E}$-messbar.

8. Für zwei messbare Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ gilt

$$\{x \in \Omega : f(x) < g(x)\} = \{x \in \Omega : 0 < g(x) + (-f(x))\}\,,$$

wobei $g(x) + (-f(x))$ gemäß 6 definiert ist. Die Messbarkeit von $g + (-f)$ impliziert somit $\{x \in \Omega : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$. Infolge gilt auch $\{x \in \Omega : f(x) \leq g(x)\} = \Omega \setminus \{x \in \Omega : g(x) < f(x)\} \in \mathcal{A}$.

9. Für zwei messbare Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ist auch $f \cdot g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar. In der Tat sind $\ln|f|$, $\ln|g|$, $\operatorname{sgn}(f)$ und $\operatorname{sgn}(g)$ als Zusammensetzungen messbarer Funktionen wieder messbar; vgl. Beispiel 14.4.8 und 1. Wegen 5 ist dann auch $\ln|f \cdot g| = \ln|f| + \ln|g|$ und infolge die Zusammensetzung $\exp(\ln|f \cdot g|) = |f \cdot g|$ messbar. Für $\xi, \eta \in \{-1, 0, +1\}$ gilt $(f \cdot g)(x) = (\xi \cdot \eta) \cdot |(f \cdot g)(x)|$ auf $(\operatorname{sgn}(f))^{-1}(\{\xi\}) \cap (\operatorname{sgn}(g))^{-1}(\{\eta\})$ ($\in \mathcal{A}$), woraus wir mit 2 die Messbarkeit von $f \cdot g$ erhalten.

10. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen auf Ω mit Werten in $[-\infty, +\infty]$, so sind die punktweise gebildeten Funktionen $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ und im Falle der Existenz somit auch $\lim_{n\to\infty} f_n$ messbar. In der Tat gilt für alle $c \in \mathbb{R}$

$$(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n)^{-1}[-\infty, c) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[-\infty, c) \in \mathcal{A}\,.$$

Die Messbarkeit von $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ folgt aus $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = -\inf_{n\in\mathbb{N}} -f_n$. Daraus folgt dann auch die Messbarkeit von $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$.

Das folgende Resultat ist einer der gewichtigen Gründe, warum sich das Konzept der Messbarkeit auf σ-Algebren als ausgesprochen fruchtbar herausgestellt hat. Es besagt, dass $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\uparrow^\mathbb{N}$ genau die Menge aller messbaren $[0,+\infty]$-wertigen Funktionen ist.

14.4.10 Lemma. *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine Funktion $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ mit $f(\Omega) \subseteq [0,+\infty]$ ist genau dann messbar, wenn $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ für eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_+$; vgl. Definition 14.2.4. Die Messbarkeit von f ist also äquivalent zu $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_\uparrow^\mathbb{N}$; vgl. Fakta 14.2.2.*

Beweis. Wir haben in Fakta 14.4.9 gesehen, dass alle Treppenfunktion aus $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ messbar sind und dass der punktweise Grenzwert einer Folge messbarer Funktionen wieder messbar ist.
Für ein beliebiges messbares $f : \Omega \to [-\infty,+\infty]$ mit $f(\Omega) \subseteq [0,+\infty]$ und $n \in \mathbb{N}$ ist umgekehrt die Funktion

$$f_n := \sum_{j=1}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})} + n \cdot f^{-1}[n,+\infty] \tag{14.10}$$

aus $\mathcal{F}(\mathcal{A})_+$. Man überprüft auf elementare Weise, dass $f_n \leq f_{n+1}$ und $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$. ❑

14.5 Integrale nichtnegativer Funktionen

Gemäß Bemerkung 14.4.2 ist jede σ-Algebra auch ein Ring. Somit sind Maße wie in Definition 14.3.8 insbesondere auf σ-Algebren $\mathcal{A}$ wohldefiniert. Die Forderung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{A}$ ist dabei gegenstandslos, da dies bei σ-Algebren ohnehin immer erfüllt ist.

14.5.1 Definition. Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ ein Maß, so nennen wir das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen *Maßraum*.
Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt *endlich* bezüglich μ, wenn $\mu(A) < +\infty$. Sie heißt *σ-endlich* bezüglich μ, wenn A als[7] $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ darstellbar ist. Das Maß μ heißt *endlich* bzw. *σ-endlich*, wenn Ω bezüglich μ endlich bzw. σ-endlich ist.
Ein Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ nennt man *μ-Nullmenge* oder kurz *Nullmenge*.

Aus Fakta 14.3.9, 4, erkennt man sofort, dass die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.

14.5.2 Definition. Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und ist $\phi_\mu : \mathcal{F}(\mathcal{A})_+ \to [0,+\infty]$ das $\mathbb{N}$-fortsetzbares Funktional aus Lemma 14.3.10, so definieren für jede messbare Funktion $f : \Omega \to [-\infty,+\infty]$ mit $f(\Omega) \subseteq [0,+\infty]$ das *Lebesgue-Integral* von f nach μ durch

$$\int f \, d\mu := (\phi_\mu)_\uparrow^\mathbb{N}(f),$$

[7] Wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$ ist jede σ-endliche Menge auch als disjunkte Vereinigung von endlichen Mengen darstellbar.

wobei $(\phi_\mu)^{\mathbb{N}}_\uparrow : \mathcal{F}(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}_\uparrow \to [0, +\infty]$ gemäß Lemma 14.3.5 mit $\phi = \phi_\mu$ definiert ist; vgl. auch Lemma 14.4.10.

Wenn wir im Folgenden von bezüglich $\mathcal{A}$ messbaren Funktionen $f : \Omega \to [0, +\infty]$ sprechen, dann meinen wir bezüglich $\mathcal{A}$ messbare Funktionen $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ mit $f(\Omega) \subseteq [0, +\infty]$.

14.5.3 Fakta. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ messbar und $\alpha, \beta \in [0, +\infty]$. Mit Lemma 14.3.5 und Lemma 14.3.7 erhalten wir folgende Regeln

1. $$\text{Aus } f \leq g \text{ folgt } \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu \,.$$

2. $$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu \,.$$

3. Es gilt[8] $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$ für jede monoton wachsende Folge messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$, womit auch $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int g_n \, d\mu$ für jede Folge messbarer $g_n : \Omega \to [0, +\infty]$.

4. Ist $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen, so gilt[9]
$$\begin{aligned} \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{n \leq j \in \mathbb{N}} f_j \big) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \inf_{n \leq j \in \mathbb{N}} f_j \, d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int \inf_{n \leq j \in \mathbb{N}} f_j \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \,, \end{aligned}$$
da $(\inf_{n \leq j \in \mathbb{N}} f_j)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen ist.

5. Wegen $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_+$ für $A \in \mathcal{A}$ gilt $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = (\phi_\mu)^{\mathbb{N}}_\uparrow(\mathbb{1}_A) = \phi_\mu(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$.

6. Für messbare Funktionen $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ mit $f \leq g$ außerhalb einer Nullmenge A folgt $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. In der Tat erhalten wir wegen $f \leq f \cdot \mathbb{1}_{A^c} + (+\infty) \cdot \mathbb{1}_A$ und $f \cdot \mathbb{1}_{A^c} \leq g$ aus 1 und 2
$$\int f \, d\mu \leq \int f \cdot \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu + \int (+\infty) \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu \leq \int g \, d\mu \,.$$
Insbesondere gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$, falls $f = g$ außerhalb einer Nullmenge.

7. Wegen $(+\infty) \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}\{+\infty\}}, \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_{\{x: f(x) \geq \frac{1}{n}\}} \leq f$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $\int f \, d\mu < +\infty$ wegen des vorherigen Punktes $(+\infty) \cdot \mu(f^{-1}\{+\infty\}) < +\infty$ sowie $\frac{1}{n} \cdot \mu(\{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\}) < +\infty$. Somit erhalten wir $\mu(f^{-1}\{+\infty\}) = 0$ und $\mu(\{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\}) < +\infty$, was auch die σ-Endlichkeit von $\{x \in \Omega : f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ nach sich zieht.

[8] Diese Tatsache ist auch als *Satz von der monotonen Konvergenz* bekannt.
[9] Diese Ungleichung ist als *Lemma von Fatou* bekannt.

8. Ist ν ein weiteres Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ derart, dass $\nu(A) \leq \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, so gilt für die gemäß Lemma 14.3.10 $\mathbb{N}$-fortsetzbaren Funktionale $\phi_\nu, \phi_\mu : \mathcal{F}(\mathcal{A})_+ \to [0, +\infty]$ wegen (14.8) die Ungleichung $\phi_\nu(f) \leq \phi_\mu(f)$ für alle $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_+$, womit auch $(\phi_\nu)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(f) \leq (\phi_\mu)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(f)$ für alle $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$; siehe Lemma 14.3.5. Nach Lemma 14.4.10 gilt daher für alle messbaren $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ mit $f(\Omega) \subseteq [0, +\infty]$
$$\int f \, d\nu \leq \int f \, d\mu .$$

14.5.4 Beispiel. Für eine nichtleere Menge Ω betrachten wir die σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Teilmengen von Ω, und für eine feste Funktion aus $[0, +\infty]^\Omega$, geschrieben als Tupel $(\eta_k)_{k\in\Omega}$, die Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$
$$\mu(A) := \sum_{k\in A} \eta_k .$$
Für $\eta_k = 1$ für alle $k \in \Omega$ spricht man vom *Zählmaß* auf Ω. Mit (14.4) weist man für jedes $(\eta_k)_{k\in\Omega} \in [0, +\infty]^\Omega$ leicht nach, dass μ ein Maß ist. Da bezüglich $\mathcal{P}(\Omega)$ alle Funktionen messbar sind, gilt $\mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega))^{\mathbb{N}}_{\uparrow} = [0, +\infty]^\Omega$; vgl. Lemma 14.4.10. Für $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega))_+$ mit paarweisen disjunkten A_i gilt
$$\phi_\mu(f) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{k\in A_i} \eta_k = \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot f(k) ,$$
und für $g = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega))^{\mathbb{N}}_{\uparrow} = [0, +\infty]^\Omega$ mit einer monoton wachsenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}(\mathcal{P}(\Omega))_+$ gilt wegen (14.5)
$$\int g \, d\mu = (\phi_\mu)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot f_n(k) = \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot g(k) .$$
Ist $\omega \in \Omega$ und $\eta_k = 0$ für $k \neq \omega$ sowie $\eta_\omega = 1$, so wird das entsprechende $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ auch *Punktmaß bei x* genannt. Man schreibt dafür auch δ_ω statt μ.

14.6 Integrierbare $[-\infty, +\infty]$-wertige Funktionen

Im vorherigen Abschnitt haben wir das Integral von messbaren Funktionen mit Werten in $[0, +\infty]$ definiert. Wir wollen hier unter gewissen Voraussetzungen auch Funktionen mit Werten in $[-\infty, +\infty]$ integrieren. Dazu sei daran erinnert, dass das Maximum und das Minimum zweier messbarer Funktionen wieder messbar ist; siehe Fakta 14.4.9.

14.6.1 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ setzen wir $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := -\min(f, 0)$. Falls f messbar ist, falls $\int f^+ \, d\mu < +\infty$ und falls $\int f^- \, d\mu < +\infty$, dann nennen wir f *integrierbar*, und setzen[10]
$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \quad (\in \mathbb{R}) .$$

[10] Auch diesen Ausdruck nennen wir *Lebesgue-Integral* von f nach μ.

Mit $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty])$ wollen wir die Menge aller auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ integrierbaren Funktionen mit Werten in $[-\infty, +\infty]$ bezeichnen. Schließlich setzen wir $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) := \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty]) \cap \mathbb{R}^\Omega$.

Wenn der Integrand explizit als Funktion von einer Variablen $x \in \Omega$ angegeben ist, so schreiben wir für $\int f \, d\mu$ auch $\int f(x) \, d\mu(x)$.

14.6.2 Fakta.

1. Wegen $f^-, f^+ \leq |f| = f^+ + f^-$ ist ein messbares $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ genau dann integrierbar, wenn $\int |f| \, d\mu < +\infty$, wobei in diesem Fall
$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu .$$
Insbesondere ist $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ integrierbar, wenn $|f| \leq |g|$ für ein integrierbares $g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$; vgl. Fakta 14.5.3, 1.

2. Sind $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ integrierbar und gilt $f \leq g$, so erhalten wir $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$ und infolge $\int f^+ \, d\mu \leq \int g^+ \, d\mu$ sowie $-\int f^- \, d\mu \leq -\int g^- \, d\mu$. Also folgt
$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu .$$

3. Aus[11] $\max(\alpha f, 0) = \alpha \max(f, 0)$, $\min(\alpha f, 0) = \alpha \min(f, 0)$ für $\alpha \in [0, +\infty)$ und $\max(-f, 0) = -\min(f, 0)$ folgt
$$\int \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int f \, d\mu \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$
falls f integrierbar ist.

4. Für ein messbares $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ und messbare $p, q : \Omega \to [0, +\infty]$ mit $p - q = f = f^+ - f^-$, wobei $f(x) = +\infty = g(x)$ für kein $x \in \Omega$ gilt und wobei p und q integrierbar sind, folgt aus $f^+ \leq p$, $f^- \leq q$ die Integrierbarkeit von f. Außerdem gilt $p + f^- = q + f^+$ und daher $\int p \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int q \, d\mu + \int f^+ \, d\mu$, also
$$\int p \, d\mu - \int q \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

5. Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar und derart, dass für kein $x \in \Omega$ einer der Werte $f(x), g(x)$ mit $+\infty$ und der andere mit $-\infty$ übereinstimmt, so gilt $f^+(x) + g^+(x) = +\infty = f^-(x) + g^-(x)$ für kein $x \in \Omega$, womit $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ sinnvoll definiert ist. Wegen $\int (f^+(x) + g^+) \, d\mu < +\infty$ und $\int (f^- + g^-) \, d\mu < +\infty$ erhalten wir aus dem vorherigen Punkt die Integrierbarkeit von $f + g$, wobei
$$\int (f + g) \, d\mu = \int (f^+ + g^+) \, d\mu - \int (f^- + g^-) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu .$$

[11] Beachte die in Abschnitt 14.1 festgelegten Rechenregeln.

6. Nach obigen Eigenschaften ist $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und das Integral ein lineares Funktional darauf.

7. Unterscheiden sich messbare Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ höchstens auf einer Nullmenge $A \in \mathcal{A}$, so tun das auch f^+ und g^+. Gemäß Fakta 14.5.3 gilt $\int f^+ \, d\mu = \int g^+ \, d\mu$. Genauso folgt $\int f^- \, d\mu = \int g^- \, d\mu$. Damit ist f genau dann integrierbar, wenn g es ist, wobei in dem Fall

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu \,. \tag{14.11}$$

14.6.3 Beispiel. Für eine nichtleere Menge Ω betrachten wir wie in Beispiel 14.5.4 die σ-Algebra $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Teilmengen von Ω, und für eine fest Funktion aus $[0, +\infty]^\Omega$, geschrieben als Tupel $(\eta_k)_{k\in\Omega}$, das Maß $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$

$$\mu(A) := \sum_{k\in A} \eta_k \,.$$

In dieser Situation ist jede Funktion $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar. Wie in Beispiel 14.5.4 gesehen gilt

$$\int |f| \, d\mu = \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot |f(k)| \,.$$

Nach Satz 5.4.4 ist dieser Ausdruck endlich genau dann, wenn $\sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot f(k)$ unbedingt konvergiert. In dem Fall erhalten wir mit Proposition 5.4.8

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \sum_{k\in\Omega, f(k)\geq 0} \eta_k \cdot f(k) - \sum_{k\in\Omega, f(k)<0} \eta_k \cdot (-f(k)) = \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot f(k) \,.$$

Ähnlich wie in Fakta 14.5.3, 7, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{k\in\Omega \\ \eta_k\cdot|f(k)|\geq\frac{1}{n}}} \frac{1}{n} \leq \sum_{\substack{k\in\Omega \\ \eta_k\cdot|f(k)|\geq\frac{1}{n}}} \eta_k \cdot |f(k)| \leq \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot |f(k)| < +\infty \,,$$

womit $\{k \in \Omega : \eta_k \cdot |f(k)| \geq \frac{1}{n}\}$ endlich und infolge die Menge $\{k \in \Omega : \eta_k \cdot f(k) \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{k \in \Omega : \eta_k \cdot |f(k)| \geq \frac{1}{n}\}$ abzählbar ist.

14.6.4 Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für bezüglich $\mathcal{A}$ messbare $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ schreiben wir

$$f \sim_\mu g \;:\Leftrightarrow\; \exists A \in \mathcal{A},\, \mu(A) = 0 \,:\, f|_{\Omega\setminus A} = g|_{\Omega\setminus A} \,. \tag{14.12}$$

Man überprüft leicht, dass $\sim_\mu$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller bezüglich $\mathcal{A}$ messbaren Funktionen nach $[-\infty, +\infty]$ ist.
Wenn wir im Folgenden für messbare Funktionen $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ sagen, dass $f \leq g$ *μ-fast überall* oder kurz μ-f.ü. gilt, so soll das heißen, dass $f(x) \leq g(x)$ für alle

$x \in \Omega \setminus N$ mit einer μ-Nullmenge N, oder äquivalent dazu, dass $f_1 \leq g_1$ für gewisse $f_1 \in [f]_{\sim_\mu}$, $g_1 \in [g]_{\sim_\mu}$. Entsprechend definieren wir $f = g$ μ-fast überall und $f \geq g$ μ-fast überall. Allgemeiner bedeutet die Gültigkeit μ-fast überall einer gewissen Aussage, welche sich auf messbare Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bezieht, dass diese Aussage für alle $x \in \Omega \setminus N$ gilt, wobei $N \in \mathcal{A}$ eine gewisse μ-Nullmenge ist.

14.6.5 Satz (*von der beschränkten Konvergenz*). *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und die Funktion $g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ integrierbar. Sind $f_n : \Omega \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbare Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ μ-f.ü. und $|f_n| \leq |g|$ μ-f.ü. für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu . \tag{14.13}$$

Beweis. Gemäß Fakta 14.5.3, 7, gilt $g(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \Omega$ außerhalb der Nullmenge $g^{-1}\{-\infty, +\infty\}$. Sind $N_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathcal{A}$, μ-Nullmengen derart, dass $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in \Omega \setminus N_n$ und dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$, so ist auch $L := g^{-1}\{-\infty, +\infty\} \cup N \cup \bigcup_n N_n$ eine Nullmenge. Wegen Fakta 14.6.2, 7, können wir f_n, f und g durch die bezüglich $\sim_\mu$ jeweils äquivalenten Funktionen $f_n \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus L}$, $f \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus L}$ und $g \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus L}$ ersetzen, ohne den Wahrheitsgehalt von (14.13) zu ändern. Somit können wir $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $|f_n(x)| \leq |g(x)| < +\infty$ und infolge auch $|f(x)| \leq |g(x)| < +\infty$ für alle $x \in \Omega$ annehmen. Mit g sind daher auch auch f und alle f_n integrierbar; vgl. Fakta 14.6.2, 1.

Die Funktionen $g_n := |f| + |g| - |f_n - f|$, $n \in \mathbb{N}$, sind dann wohldefiniert und messbar auf Ω, haben Werte in $[0, +\infty]$ und erfüllen $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = |f(x)| + |g(x)|$, $x \in \Omega$. Wegen Fakta 14.5.3, 4, folgt

$$\int (|f|+|g|) \, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} g_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int (|f|+|g|) \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu$$

mit endlichem $\int (|f| + |g|) \, d\mu$, woraus

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0 ,$$

also (14.13) folgt. ❑

14.6.6 Bemerkung. Für messbare Funktionen $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ derart, dass nur eine der beiden Größen $\int f^+ \, d\mu$, $\int f^- \, d\mu$ aus $[0, +\infty]$ kleiner als $+\infty$ ist, können wir das Integral nach μ ebenfalls durch

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \quad (\in [-\infty, +\infty])$$

definieren, wobei $\int f \, d\mu$ gleich $+\infty$ $(-\infty)$ ist, wenn $\int f^+ \, d\mu = +\infty$ $(\int f^- \, d\mu = +\infty)$. Es gelten dann ähnliche Eigenschaften wie in Fakta 14.6.2.

14.7 Multiplizierte, eingeschränkte und transformierte Maße

14.7.1 Lemma. *Ist* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $g : \Omega \to [0, +\infty]$ *messbar, so wird durch*

$$(g \cdot \mu)(A) := \int \mathbb{1}_A \cdot g \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

ein Maß $g \cdot \mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ *auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *definiert.*
Für jede messbare Funktion $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ *ist die Integrierbarkeit gemäß Definition 14.6.1 von* f *bezüglich* $g \cdot \mu$ *äquivalent zu jener von* $f \cdot g$ *bezüglich* μ*, wobei in dem Fall*

$$\int f \, d(g \cdot \mu) = \int f \cdot g \, d\mu \,. \tag{14.14}$$

Für $f : \Omega \to [0, +\infty]$ *trifft* (14.14) *immer zu, wobei diese Integrale als Elemente von* $[0, +\infty]$ *zu betrachten sind, und es gilt* $f \cdot (g \cdot \mu) = (f \cdot g) \cdot \mu$.

Beweis. Wegen $(g \cdot \mu)(\emptyset) = \int 0 \, d\mu = 0$ und weil aus Fakta 14.5.3, 3, angewendet auf $(\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{D_n})_{n \in \mathbb{N}}$ für paarweise disjunkte $D_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, die σ-Additivität von $g \cdot \mu$ folgt, ist $g \cdot \mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$; vgl. Definition 14.3.8. Für $f = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{A}$ gilt (14.14) wegen

$$\int f \, d(g \cdot \mu) = (g \cdot \mu)(A) = \int \mathbb{1}_A \cdot g \, d\mu = \int f \cdot g \, d\mu \,.$$

Die Linearität von Integralen impliziert die Gültigkeit von (14.14) für alle nichtnegativen Treppenfunktionen $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_+$; vgl. Definition 14.2.4 und Lemma 14.2.6. Aus Fakta 14.5.3, 3, erhalten wir für $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_\uparrow^{\mathbb{N}}$ und eine gemäß Fakta 14.2.2 existierende monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}(\mathcal{A})_+$ mit $\lim_{n \to \infty} f_n = f$

$$\int f \, d(g \cdot \mu) = (\phi_{(g \cdot \mu)})_\uparrow^{\mathbb{N}}(f) = \lim_{n \to \infty} \phi_{(g \cdot \mu)}(f_n) = \lim_{n \to \infty} \int f_n \cdot g \, d\mu = \int f \cdot g \, d\mu \,. \tag{14.15}$$

Wenden wir diese Gleichheit auf $\mathbb{1}_A \cdot f$ ($\in \mathcal{F}(\mathcal{A})_\uparrow^{\mathbb{N}}$) statt f an, so erhalten wir $f \cdot (g \cdot \mu) = (f \cdot g) \cdot \mu$. Schließlich folgt für ein messbares $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ aus der Anwendung von (14.15) auf $|f|$ wegen Fakta 14.6.2, 1, die Äquivalenz der Integrierbarkeit von f bezüglich $g \cdot \mu$ und der von $f \cdot g$ bezüglich μ. (14.14) erhalten wir in dem Fall aus Definition 14.6.1. ❑

14.7.2 Proposition. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sein* $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ *messbar.*

(i) Ist $A \in \mathcal{A}$ σ*-endlich, haben* f *und* g *nur Werte in* $[0, +\infty]$ *und gilt* $\int \mathbb{1}_B \cdot f \, d\mu \leq \int \mathbb{1}_B \cdot g \, d\mu$ *für alle* $B \in \mathcal{A}$ *mit* $B \subseteq A$*, so folgt* $\mathbb{1}_A \cdot f \leq \mathbb{1}_A \cdot g$ μ*-fast überall.*

(ii) Ist μ σ*-endlich, haben* f *und* g *nur Werte in* $[0, +\infty]$ *und gilt* $(f \cdot \mu)(B) \leq (g \cdot \mu)(B)$ *für alle* $B \in \mathcal{A}$*, so folgt* $f \leq g$ μ*-fast überall.*

(iii) Sind f, g integrierbar und derart, dass $\int \mathbb{1}_B \cdot f \, \mathrm{d}\mu \leq \int \mathbb{1}_B \cdot g \, \mathrm{d}\mu$ für alle $B \in \mathcal{A}$, so folgt $f \leq g$ μ-fast überall.

(iv) Hat f nur Werte in $[0, +\infty]$, so gilt $f = 0$ μ-fast überall genau dann, wenn $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Beweis. Seien f, g Funktionen mit Werten in $[0, +\infty]$ und sei $A \in \mathcal{A}$ σ-endlich mit $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, wobei $\mu(A_k) < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$. Als Folge von Fakta 14.4.9, 8, gilt

$$M_n := \{x \in \Omega : g(x) + \frac{1}{n} \leq f(x),\ g(x) \leq n\} \in \mathcal{A} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}\,.$$

Aus $\mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot (g + \frac{1}{n}) \leq \mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot f$ folgt

$$\int \mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot g \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{n} \cdot \mu(A_k \cap M_n) = \int \mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot (g + \frac{1}{n}) \, \mathrm{d}\mu \leq \int \mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot f \, \mathrm{d}\mu\,.$$

Nach der Voraussetzung in (i) ist die rechte Seite kleiner oder gleich $\int \mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot g \, \mathrm{d}\mu$, wobei dieses Integral wegen $\mu(A_k\cap M_n) < +\infty$ und $\mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot g \leq \mathbb{1}_{A_k\cap M_n} \cdot n$ endlich ist. Wir schließen somit auf $\mu(A_k \cap M_n) = 0$, wodurch auch $A \cap \{x \in \Omega : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} A_k \cap M_n$ eine μ-Nullmenge ist. Wir haben also (i) und für $A = \Omega$ auch (ii) nachgewiesen.
Für integrierbare $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ ist wegen Fakta 14.5.3, 7, und Fakta 14.6.2, 1,

$$A := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0 \ \text{ oder } \ g(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega : |f(x)| > 0\} \cup \{x \in \Omega : |g(x)| > 0\}$$

σ-endlich und für $C := f^{-1}\{-\infty, +\infty\} \cup g^{-1}\{-\infty, +\infty\}$ gilt $\mu(C) = 0$. Setzen wir noch $D := \{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}$ $(\subseteq A)$, so ist die Funktion $h := \mathbb{1}_{D\setminus C} \cdot f - \mathbb{1}_{D\setminus C} \cdot g$ wohldefiniert, nichtnegativ, gemäß Fakta 14.6.2 integrierbar und erfüllt nach der Voraussetzung in (iii)

$$(h \cdot \mu)(B) = \int \mathbb{1}_{B\cap D\setminus C} \cdot f \, \mathrm{d}\mu - \int \mathbb{1}_{B\cap D\setminus C} \cdot g \, \mathrm{d}\mu \leq 0 \leq (0 \cdot \mu)(B)$$

für alle $B \in \mathcal{A}$. Aus (i) angewendet auf unsere Situation folgt $h = \mathbb{1}_A \cdot h \leq 0$ und daher $h = 0$ μ-fast überall, was $\mu(D \setminus C) = 0$ und wegen $0 \leq \mu(D \cap C) \leq \mu(C) = 0$ auch $\mu(D) = 0$ nach sich zieht. Also gilt $f \leq g$ μ-fast überall.
Schließlich folgt aus $f = 0$ μ-fast überall wegen Fakta 14.5.3, 6, $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int 0 \, \mathrm{d}\mu = 0$. Umgekehrt schließen wir von $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ wegen $\int \mathbb{1}_B \cdot f \, \mathrm{d}\mu \leq \int f \, \mathrm{d}\mu = 0 = \int \mathbb{1}_B \cdot 0 \, \mathrm{d}\mu$ für alle $B \in \mathcal{A}$ mit (iii) auf $f \leq 0$ und daher auf $f = 0$ μ-fast überall. ❑

14.7.3 Lemma. *Seien (Υ, C) und $(\Omega, \mathcal{A})$ Messräume derart, dass $\Upsilon \subseteq \Omega$ und $C \subseteq \mathcal{A}$. Weiters sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann ist die Einschränkung $\mu|_C$ ein Maß auf (Υ, C). Für jedes bezüglich C messbare $f : \Upsilon \to [-\infty, +\infty]$ ist die mit $f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon$ bezeichnete Fortsetzung auf Ω derart, dass $(f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon)(x) = 0$ für $x \in \Omega \setminus \Upsilon$, messbar bezüglich $\mathcal{A}$, wobei*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu|_C = \int f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon \, \mathrm{d}\mu \tag{14.16}$$

in dem Sinne, dass die Integrierbarkeit von f bezüglich $\mu|_C$ äquivalent zur Integrierbarkeit von $f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon$ bezüglich μ ist[11].

[11] Im Falle $f(\Upsilon) \subseteq [0, +\infty]$ gilt somit (14.16) immer.

Beweis. Wegen $\Upsilon \in C \subseteq \mathcal{A}$ ist $\mu|_C$ ein Maß auf (Υ, C). Die Messbarkeit der Funktion $f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ folgt aus $(f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon)^{-1}[-\infty, c) = f^{-1}[-\infty, c) \in C \subseteq \mathcal{A}$, wenn $c \leq 0$, und $(f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon)^{-1}[-\infty, c) = f^{-1}[-\infty, c) \cup (\Omega \setminus \Upsilon) \in \mathcal{A}$, wenn $c > 0$.
Wegen Lemma 14.4.10 gilt insbesondere $\{g \cdot \mathbb{1}_\Upsilon : g \in \mathcal{F}(C)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}\} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$, wobei im Falle $g \in \mathcal{F}(C)_+$ offenbar $g \cdot \mathbb{1}_\Upsilon \in \mathcal{F}(\mathcal{A})_+$. Unmittelbar aus (14.8) erhalten wir $\phi_{\mu|_C}(g) = \phi_\mu(g \cdot \mathbb{1}_\Upsilon)$ für $g \in \mathcal{F}(C)_+$ und damit $(\phi_{\mu|_C})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(g) = (\phi_\mu)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(g \cdot \mathbb{1}_\Upsilon)$ für $g \in \mathcal{F}(C)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$; siehe Lemma 14.3.5. Wenden wir das für ein messbares $f : \Upsilon \to [-\infty, +\infty]$ auf $|f|$ an, so erhalten wir die Äquivalenz der Integrierbarkeit von f bezüglich $\mu|_C$ und der von $f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon$ bezüglich μ. Schließlich ist in dem Fall (14.16) eine unmittelbare Folge aus Definition 14.6.1. ❑

14.7.4 Fakta. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Sigma, \mathcal{B})$ Messräume und $\emptyset \neq \Upsilon \subseteq \Omega$.

1. Wie man sofort nachprüft, bildet das Mengensystem $\mathcal{A}_\Upsilon := \{A \cap \Upsilon : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf Υ. Diese σ-Algebra heißt *Spur-σ-Algebra*. Im Falle $\Upsilon \in \mathcal{A}$ gilt dabei $\mathcal{A}_\Upsilon = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq \Upsilon\}$.

2. Wird in 1 die σ-Algebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ gemäß Definition 14.4.4 erzeugt, so wird $\mathcal{A}_\Upsilon$ von $\{K \cap \Upsilon : K \in \mathcal{K}\}$ erzeugt. In der Tat gilt offenbar $\mathcal{A}_\Upsilon \supseteq \{K \cap \Upsilon : K \in \mathcal{K}\}$ und daher $\mathcal{A}_\Upsilon \supseteq \mathcal{A}(\{K \cap \Upsilon : K \in \mathcal{K}\})$. Nach Lemma 14.4.7 ist umgekehrt die Einbettungsabbildung $\iota : \Upsilon \to \Omega$ sicherlich $\mathcal{A}(\{K \cap \Upsilon : K \in \mathcal{K}\})$-$\mathcal{A}$-messbar, woraus $\iota^{-1}(A) = A \cap \Upsilon \in \mathcal{A}(\{K \cap \Upsilon : K \in \mathcal{K}\})$ für $A \in \mathcal{A}$ und daher auch $\mathcal{A}_\Upsilon \subseteq \mathcal{A}(\{K \cap \Upsilon : K \in \mathcal{K}\})$ folgt.

3. Für $f : \Omega \to \Sigma$ und $\Lambda \subseteq \Sigma$ mit $f(\Omega) \subseteq \Lambda$ ist wegen $f^{-1}(B \cap \Lambda) = f^{-1}(B)$ die $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-Messbarkeit von $f : \Omega \to \Sigma$ zur $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_\Lambda$-Messbarkeit von $f : \Upsilon \to \Lambda$ äquivalent.

   Insbesondere ist $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ mit $f(\Omega) \subseteq [0, +\infty]$ genau dann bezüglich $\mathcal{A}$ messbar, wenn $f : \Omega \to [0, +\infty]$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{E}_{[0,+\infty]}$-messbar ist; vergleiche Definition 14.4.6.

4. Ist $f : \Omega \to \Sigma$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar, so erhalten wir aus $(f|_\Upsilon)^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap \Upsilon$ für $B \in \mathcal{B}$ die $\mathcal{A}_\Upsilon$-$\mathcal{B}$-Messbarkeit von $f|_\Upsilon : \Upsilon \to \Sigma$.

5. Im Falle $\Upsilon \in \mathcal{A}$ können wir Lemma 14.7.3 auf $C := \mathcal{A}_\Upsilon \subseteq \mathcal{A}$ anwenden und erhalten zusammen mit dem vorherigen Punkt, dass eine Funktion $f : \Upsilon \to [-\infty, +\infty]$ genau dann bezüglich $\mathcal{A}_\Upsilon$ messbar ist, wenn $f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ bezüglich $\mathcal{A}$ messbar ist. Ist $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Maß, so gilt in dem Fall

$$\int f \, d\mu|_{\mathcal{A}_\Upsilon} = \int f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon \, d\mu \tag{14.17}$$

   in dem Sinne, dass die Integrierbarkeit von f bezüglich $\mu|_{\mathcal{A}_\Upsilon}$ äquivalent zur Integrierbarkeit von $f \cdot \mathbb{1}_\Upsilon$ bezüglich μ ist.

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\Upsilon \subseteq \Omega$ mit $\Upsilon \in \mathcal{A}$ und $f : \Upsilon \to [-\infty, +\infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{A}_\Upsilon$, so lassen wir meist die Einschränkung des Maßes auf $\mathcal{A}_\Upsilon$ unter den Tisch fallen und schreiben für den Ausdruck in (14.17)

$$\int_\Upsilon f \, d\mu \, .$$

Um den zugrunde liegenden Messraum klarer hervorzuheben, werden wir im Folgenden auch im Falle $\Upsilon = \Omega$ diese Schreibweise für Integrale verwenden, also meist $\int_\Omega f \, d\mu$ statt $\int f \, d\mu$ schreiben.

14.7.5 Satz. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und (Υ, C) eine Menge versehen mit einer σ-Algebra, und sei $T : \Omega \to \Upsilon$ messbar. Weiters sei $\mu \circ T^{-1} : C \to [0, +\infty]$ definiert durch $(\mu \circ T^{-1})(B) := \mu(T^{-1}(B))$. Dann ist $\mu \circ T^{-1}$ ein Maß, das sogenannte* Bildmaß *von μ unter T. Für messbare Funktionen $f : \Upsilon \to [-\infty, +\infty]$ gilt*

$$\int_\Omega f \circ T \, d\mu = \int_\Upsilon f \, d(\mu \circ T^{-1}) \tag{14.18}$$

in dem Sinne, dass die Integrierbarkeit von $f \circ T$ bezüglich μ äquivalent zur Integrierbarkeit von f bezüglich $\mu \circ T^{-1}$ ist.[12]

Beweis. Dass $\mu \circ T^{-1} : C \to [0, +\infty]$ ein Maß ist, folgt unmittelbar daraus, dass die Urbilder von Schnitten bzw. Vereinigungen von Mengen die Schnitte bzw. Vereinigungen der Urbilder dieser Mengen sind. Für $f \in \mathcal{F}(C)$ mit $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ mit $\alpha_i > 0$ und paarweise disjunkten $A_i \in C$ erhalten wir $f \circ T = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{T^{-1}(A_i)}$ und daher $f \circ T \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$; vgl. Lemma 14.2.6. Dabei gilt

$$\phi_\mu(f \circ T) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mu(T^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot (\mu \circ T^{-1})(A_i) = \phi_{(\mu \circ T^{-1})}(f) .$$

Für $f = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{F}(C)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$ mit einer monoton wachsenden Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}(C)_+$, folgt $f \circ T = \lim_{n\to\infty} f_n \circ T \in \mathcal{F}(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$ und somit

$$(\phi_\mu)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(f \circ T) = \lim_{n\to\infty} \phi_\mu(f_n \circ T) = \lim_{n\to\infty} \phi_{(\mu \circ T^{-1})}(f_n) = (\phi_{(\mu \circ T^{-1})})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(f) . \tag{14.19}$$

Mit $f : \Upsilon \to [-\infty, +\infty]$ ist nach Fakta 14.4.9, 1, auch $f \circ T : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar. Wenden wir (14.19) auf $|f|$ an, so folgt die Äquivalenz der Integrierbarkeit von $f \circ T$ bezüglich μ und der von f bezüglich $\mu \circ T^{-1}$. Schließlich erhalten wir (14.18) aus Definition 14.6.1. ❑

14.8 Von Funktionalen erzeugte σ-Algebren

Für die weitere Entwicklung der Maßtheorie wollen wir, ausgehend von einer nichtleeren Menge Ω, einem unter $|.|$ abgeschlossenen Raum von Funktionen $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^\Omega$, einer unendlichen Menge M und einem M-fortsetzbaren Funktional $\phi : \mathcal{F}_+ \to [0, +\infty]$, die Überlegungen von Abschnitt 14.2 und 14.3 fortführen. Dazu sei $\mathcal{F}^M_{\uparrow} \subseteq [0, +\infty]^\Omega$ wieder wie in Definition 14.2.1 und $\phi^M_{\uparrow} : \mathcal{F}^M_{\uparrow} \to [0, +\infty]$ die Fortsetzung von ϕ wie in Lemma 14.3.5.

[12] Im Falle $f(\Upsilon) \subseteq [0, +\infty]$ gilt somit (14.18) immer.

14.8.1 Definition. Sei $\phi^M_{\uparrow\downarrow} : [0,+\infty]^\Omega \to [0,+\infty]$ definiert durch

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}(h) := \inf\{\phi^M_\uparrow(g) : h \leq g \in \mathcal{F}^M_\uparrow\},$$

wobei $\inf\emptyset := +\infty$.

14.8.2 Lemma. *Die Abbildung $\phi^M_{\uparrow\downarrow} : [0,+\infty]^\Omega \to [0,+\infty]$ hat folgende Eigenschaften.*

(i) $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(g) = \phi^M_\uparrow(g)$ *für* $g \in \mathcal{F}^M_\uparrow$.

(ii) $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(h_1) \leq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h_2)$, *wenn* $h_1 \leq h_2$.

(iii) Für $h_n \in [0,+\infty]^\Omega$, $n \in \mathbb{N}$, *gilt* $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h_n)$.

(iv) $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\alpha \cdot h) = \alpha \cdot \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h)$ *für* $h \in [0,+\infty]^\Omega$ *und* $\alpha \in [0,+\infty]$.

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der Monotonie von $\phi^M_\uparrow$ und die zweite aus der Tatsache, dass das Infimum von größeren Mengen höchstens kleiner wird.
Für den Nachweis von (iii) sei $h_n \in [0,+\infty]^\Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Falls $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(h_n) = +\infty$ für mindestens ein n, so folgt aus (ii), dass auch $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n) = +\infty$. Anderenfalls sei $\epsilon > 0$ beliebig und wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in \mathcal{F}^M_\uparrow$ mit $g_n \geq h_n$ und

$$\phi^M_\uparrow(g_n) - \frac{\epsilon}{2^n} \leq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h_n).$$

Es folgt $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \mathcal{F}^M_\uparrow$ und wegen Lemma 14.3.7 auch

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h_n) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi^M_\uparrow(g_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\epsilon}{2^n} = \phi^M_\uparrow(\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n) - \epsilon \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n) - \epsilon.$$

Wir erhalten (iii) nach dem Grenzübergang $\epsilon \to 0+$.
Um (iv) zu zeigen, sei $h \in [0,+\infty]^\Omega$. Für $\alpha \in (0,+\infty)$ gilt

$$\alpha \cdot \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h) = \inf\{\alpha \cdot \phi^M_\uparrow(g) : h \leq g \in \mathcal{F}^M_\uparrow\} = \inf\{\phi^M_\uparrow(\alpha \cdot g) : \alpha \cdot h \leq \alpha \cdot g \in \mathcal{F}^M_\uparrow\} = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(\alpha h).$$

Wegen (i) und Lemma 14.3.7 gilt $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(0 \cdot h) = 0 = 0 \cdot \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h)$. Schließlich erhalten wir im Falle $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(h) = 0$

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}((+\infty) \cdot h) = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(\sum_{n\in\mathbb{N}} h) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h) = 0 = (+\infty) \cdot \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h),$$

und im Fall $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(h) > 0$ wegen $\phi^M_{\uparrow\downarrow}((+\infty) \cdot h) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(n \cdot h) = n \cdot \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h)$

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}((+\infty) \cdot h) = +\infty = (+\infty) \cdot \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h).$$

❑

14.8.3 Lemma. *Für $A \subseteq \Omega$ gilt*

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_A) = \inf\{\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_B) : \exists f \in \mathcal{F}^M_\uparrow \text{ mit } A \subseteq B = f^{-1}(1,+\infty]\}$$

Beweis. Monotoniebedingt gilt die Ungleichung $\leq$. Andererseits folgt aus $\mathbb{1}_A \leq f \in \mathcal{F}_{\uparrow}^M$ offenbar $A \subseteq f^{-1}(c, +\infty]$ für jedes $0 < c < 1$, wobei $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_{f^{-1}(c,+\infty]} \leq \frac{1}{c} f$. Zusammen mit Lemma 14.8.2 schließen wir auf

$$\phi_{\uparrow\downarrow}^M(\mathbb{1}_A) = \inf\{\phi_{\uparrow\downarrow}^M(\mathbb{1}_{f^{-1}(c,+\infty]}) : c \in (0,1)\,, f \in \mathcal{F}_{\uparrow}^M, \mathbb{1}_A \leq f\}\,.$$

Wegen $g^{-1}(1, +\infty] = f^{-1}(c, +\infty]$ für $g = \frac{1}{c} f$ folgt daraus die Behauptung. ❑

Die Menge $\mathcal{X} = [0, +\infty]^\Omega$ und das Funktional $\psi = \phi_{\uparrow\downarrow}^M$ erfüllen die Eigenschaften, welche in der folgenden Definition gefordert werden. Insbesondere ist das Mengensystem $\mathcal{A}(\phi_{\uparrow\downarrow}^M) \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ wohldefiniert.

14.8.4 Definition. Sei $\mathcal{X} \subseteq [0, +\infty]^\Omega$ eine Menge von Funktionen derart, dass $\mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{X}$

$$[0, +\infty] \cdot h \in \mathcal{X} \;\text{ und }\; \mathbb{1}_A \cdot h \in \mathcal{X} \;\text{ für alle }\; h \in \mathcal{X} \;\text{ und }\; A \in \mathcal{P}(\Omega)\,.$$

Weiters erfülle $\psi : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$

(i) $\psi(h_1) \leq \psi(h_2)$ für $h_1, h_2 \in \mathcal{X}$ mit $h_1 \leq h_2$,

(ii) $\psi(\alpha h) = \alpha\psi(h)$ für $\alpha \in [0, +\infty]$ und $h \in \mathcal{X}$,

(iii) $\psi(h \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi(h \cdot \mathbb{1}_{D_n})$ für $h \in \mathcal{X}$ und paarweise disjunkte $D_n \in \mathcal{P}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir definieren dann $\mathcal{A}(\psi) \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ als die Menge aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$, so dass

$$\psi(h) = \psi(h \cdot \mathbb{1}_A) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{A^c}) \quad \text{für alle} \quad h \in \mathcal{X}\,. \tag{14.20}$$

14.8.5 Bemerkung. Die Ungleichung $\psi(h) \geq \psi(h \cdot \mathbb{1}_A) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{A^c})$ für alle $h \in \mathcal{X}$ ist wegen Eigenschaft (iii) in Definition 14.8.4 schon hinreichend für $A \in \mathcal{A}(\psi)$. Klarerweise reicht es, diese Ungleichung nur für alle $h \in \mathcal{X}$ mit $\psi(h) < +\infty$ zu überprüfen.

Für $E, F \subseteq \Omega$ mit $E \in \mathcal{A}(\psi)$, $E \cap F = \emptyset$ und $h \in \mathcal{X}$ erhalten wir aus (14.20)

$$\psi(h \cdot \mathbb{1}_{E\cup F}) = \psi(h \cdot \mathbb{1}_{E\cup F} \cdot \mathbb{1}_E) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{E\cup F} \cdot \mathbb{1}_{E^c}) = \psi(h \cdot \mathbb{1}_E) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_F)\,. \tag{14.21}$$

Sind $D_n \in \mathcal{A}(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt und $h \in \mathcal{X}$, so folgt induktiv

$$\psi(h \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N D_n}) = \sum_{n=1}^N \psi(h \cdot \mathbb{1}_{D_n}) \quad \text{für alle} \quad N \in \mathbb{N}\,. \tag{14.22}$$

Für den folgenden Satz 14.8.7 bedarf es noch einer Begriffsbildung.

14.8.6 Definition. Ein Maß μ auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt *vollständig* auf $\mathcal{A}$, wenn aus $A \subseteq B$, $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) = 0$ immer $A \in \mathcal{A}$ folgt.

14.8.7 Satz (*Satz von Carathéodory*)**.** *Für eine nichtleere Menge Ω, ein $\mathcal{X} \subseteq [0,+\infty]^\Omega$ und $\psi : \mathcal{X} \to [0,+\infty]$ wie in Definition 14.8.4 ist das Mengensystem $\mathcal{A}(\psi)$ eine σ-Algebra derart, dass $C \in \mathcal{A}(\psi)$ für alle C mit $\psi(\mathbb{1}_C) = 0$. Zudem gilt*

$$\psi(h \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi(h \cdot \mathbb{1}_{D_n}) \tag{14.23}$$

für paarweise disjunkte $D_n \in \mathcal{A}(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, und $h \in \mathcal{X}$.
Insbesondere ist die Abbildung $\mu : \mathcal{A}(\psi) \to [0,+\infty]$ definiert durch $\mu(A) = \psi(\mathbb{1}_A)$ ein vollständiges Maß auf $\mathcal{A}(\psi)$.

Beweis. Aus der Definition von $\mathcal{A}(\psi)$ folgt unmittelbar, dass mit $A \in \mathcal{A}(\psi)$ auch $A^c \in \mathcal{A}(\psi)$. Sind $A, B \in \mathcal{A}(\psi)$ und $h \in \mathcal{X}$ beliebig, so folgt aus (14.20) angewendet auf h und dann auf $h \cdot \mathbb{1}_{A^c}$, aus (14.21) für die Mengen A und $A^c \cap B$ sowie aus $\mathbb{1}_{A^c} \cdot \mathbb{1}_{B^c} = \mathbb{1}_{(A\cup B)^c}$

$$\begin{aligned}\psi(h) &= \psi(h \cdot \mathbb{1}_A) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{A^c}) = \psi(h \cdot \mathbb{1}_A) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{A^c} \cdot \mathbb{1}_B) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{A^c} \cdot \mathbb{1}_{B^c}) \\ &= \psi(h \cdot \mathbb{1}_{A\cup B}) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{(A\cup B)^c})\,;\end{aligned}$$

also $A \cup B \in \mathcal{A}(\psi)$. Induktiv erhalten wir $\bigcup_{n=1}^N D_n \in \mathcal{A}(\psi)$ für alle $N \in \mathbb{N}$, wenn $D_n \in \mathcal{A}(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge paarweise disjunkter $D_n \in \mathcal{A}(\psi)$, $n \in \mathbb{N}$, ist. Zusammen mit (14.22) und wegen $(\bigcup_{n=1}^N D_n)^c \supseteq (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)^c$ folgt für $h \in \mathcal{X}$

$$\psi(h) = \psi(h \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^N D_n}) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{(\bigcup_{n=1}^N D_n)^c}) \geq \sum_{n=1}^N \psi(h \cdot \mathbb{1}_{D_n}) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)^c})\,.$$

Für $N \to \infty$ erhalten wir

$$\psi(h) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi(h \cdot \mathbb{1}_{D_n}) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)^c}) \geq \psi(h \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}) + \psi(h \cdot \mathbb{1}_{(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)^c})\,. \tag{14.24}$$

Gemäß Bemerkung 14.8.5 gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{A}(\psi)$ und infolge Gleichheit in (14.24). Ersetzen wir h durch $h \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}$, so leiten wir davon auch $\psi(h \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi(h \cdot \mathbb{1}_{D_n})$ ab. Gemäß Bemerkung 14.4.2 ist $\mathcal{A}(\psi)$ eine σ-Algebra.
Aus $\psi(\mathbb{1}_C) = 0$ folgt für $h \in \mathcal{X}$ wegen $h \cdot \mathbb{1}_C \leq (+\infty) \cdot \mathbb{1}_C$

$$\psi(h \cdot \mathbb{1}_C) \leq \psi((+\infty) \cdot \mathbb{1}_C) = (+\infty) \cdot \psi(\mathbb{1}_C) = 0\,.$$

Wegen $h \cdot \mathbb{1}_{C^c} \leq h$ erhalten wir daher $C \in \mathcal{A}(\psi)$ aus Bemerkung 14.8.5.
Dass μ ein Maß ist, folgt aus $\mu(\emptyset) = \psi(0 \cdot \mathbb{1}_\Omega) = 0 \cdot \psi(\mathbb{1}_\Omega) = 0$ sowie (14.23) mit $h = \mathbb{1}_\Omega$.
Da $A \subseteq B$, $B \in \mathcal{A}(\psi)$ mit $\mu(B) = 0$ die Ungleichung $0 \leq \psi(\mathbb{1}_A) \leq \psi(\mathbb{1}_B) = \mu(B) = 0$ bedingt, ist μ vollständig auf $\mathcal{A}(\psi)$. ❑

Wir kommen zurück zu dem Fall, dass $\mathcal{X} = [0,+\infty]^\Omega$ und $\psi = \phi_{\uparrow\downarrow}^M$; vgl. Definition 14.8.1.

14.8.8 Korollar. *Sei $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ ein unter $|.|$ abgeschlossener Raum von Funktionen, M unendlich, $\phi : \mathcal{F}_+ \to [0,+\infty]$ ein M-fortsetzbares Funktional wie in Definition 14.3.2, $\mathcal{F}_\uparrow^M \subseteq [0,+\infty]^\Omega$ wie in Definition 14.2.1 und $\phi_\uparrow^M : \mathcal{F}_\uparrow^M \to [0,+\infty]$ die Fortsetzung von*

ϕ wie in Lemma 14.3.5. Bezeichnet $\phi^M_{\uparrow\downarrow}$ die Fortsetzung von $\phi^M_{\uparrow}$ gemäß Definition 14.8.1, $\mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow})$ und μ die σ-Algebra bzw. das Maß aus Satz 14.8.7 für $\psi = \phi^M_{\uparrow\downarrow}$, so gilt

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f)$$

für jedes bezüglich $\mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow})$ messbare $f : \Omega \to [0, +\infty]$.

Beweis. Für $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ mit paarweise disjunkten $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow})$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0, +\infty]$ folgt aus (14.23) und Lemma 14.8.2

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) = \sum_{i=1}^m \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mu(\mathbb{1}_{A_i}) = \int f \, \mathrm{d}\mu \,. \tag{14.25}$$

Auch aus (14.23) erhalten wir für beliebige bezüglich $\mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow})$ messbare $f : \Omega \to [0, +\infty]$

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(0,+\infty]}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]}) + \phi^M_{\uparrow\downarrow}((+\infty) \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}\{+\infty\}}) \,. \tag{14.26}$$

Wegen $2^n \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]} \le f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]}$ für $n \in \mathbb{Z}$ folgt im Falle $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]}) = \mu(f^{-1}(2^n, 2^{n+1}]) = +\infty$

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]}) = +\infty = \int f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]} \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Im Falle $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]}) = \mu(f^{-1}(2^n, 2^{n+1}]) < +\infty$ gilt für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \le n$

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} (2^n + j2^k) \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n+j2^k, 2^n+(j+1)2^k]}}_{=:g_k} \le f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]} \le \underbrace{\sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} (2^n + (j+1)2^k) \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n+j2^k, 2^n+(j+1)2^k]}}_{=:h_k} \,,$$

wodurch wir mit (14.25)

$$\begin{aligned}
-2^k \mu(f^{-1}(2^n, 2^{n+1}]) &= \sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} -2^k \mu(f^{-1}(2^n + j2^k, 2^n + (j+1)2^k]) = \int g_k \, \mathrm{d}\mu - \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h_k) \\
&\le \int f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]} \, \mathrm{d}\mu - \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]}) \le \int h_k \, \mathrm{d}\mu - \phi^M_{\uparrow\downarrow}(g_k) \\
&\le \sum_{j=0}^{2^{n-k}-1} 2^k \mu(f^{-1}(2^n + j2^k, 2^n + (j+1)2^k]) = 2^k \mu(f^{-1}(2^n, 2^{n+1}])
\end{aligned}$$

erhalten. Lassen wir k gegen $-\infty$ streben, so folgt $\int f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]} \, \mathrm{d}\mu = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(2^n,2^{n+1}]})$, wodurch (14.26) mit $\int f \, \mathrm{d}\mu$ übereinstimmt. ❑

14.8.9 Lemma. *Für $A \subseteq \Omega$ gilt $A \in \mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow})$ genau dann, wenn*

$$\phi^M_{\uparrow}(f) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_A) + \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{A^c}) \quad \text{für alle} \quad f \in \mathcal{F}^M_{\uparrow} \quad \text{mit} \quad \phi^M_{\uparrow}(f) < +\infty\,. \tag{14.27}$$

Beweis. Sei $h \in [0, +\infty]^\Omega$. Für $\mathcal{F}^M_{\uparrow} \ni f \geq h$ gilt wegen der Voraussetzung (14.27) im Fall $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) < +\infty$ und wegen $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) = +\infty$ anderenfalls

$$\phi^M_{\uparrow}(f) = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_A) + \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{A^c}) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h \cdot \mathbb{1}_A) + \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h \cdot \mathbb{1}_{A^c})\,.$$

Nehmen wir das Infimum über alle $f \in \mathcal{F}^M_{\uparrow}$, $f \geq h$, so folgt wegen Bemerkung 14.8.5 die Beziehung (14.20). ❑

14.8.10 Lemma. *Für alle $A \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}^M_{\uparrow}$ gilt $A \in \mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow})$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{F}^M_{\uparrow}$ mit $\phi^M_{\uparrow}(f) < +\infty$. Gemäß Lemma 14.2.3 gilt $f \cdot \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}^M_{\uparrow}$, womit $f \cdot \mathbb{1}_A = \lim_{i\in I} f_i$ für ein monoton wachsendes Netz $(f_i)_{i\in I}$ mit einer im Vergleich zu M gleich oder weniger mächtigen, gerichteten Menge I; siehe Fakta 14.2.2. Es folgt $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_A \cdot f) = \lim_{i\in I} \phi(f_i)$; vgl. Lemma 14.3.5.
Wegen Lemma 14.2.3 gilt $\mathcal{F}^M_{\uparrow} \ni f - f_i \geq f - f \cdot \mathbb{1}_A = f \cdot \mathbb{1}_{A^c}$ und weiter $\phi^M_{\uparrow}(f) - \phi(f_i) = \phi^M_{\uparrow}(f - f_i) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{A^c})$; vgl. Lemma 14.3.7. Von

$$\phi^M_{\uparrow}(f) - \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_A) = \phi^M_{\uparrow}(f) - \lim_{i\in I} \phi(f_i) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{A^c})$$

schließen wir mit Lemma 14.8.9 auf $A \in \mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow})$. ❑

14.8.11 Bemerkung (*). Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ zwei unter $|.|$ abgeschlossene Räume von Funktionen und sei ϕ ein M-fortsetzbares Funktional auf $\mathcal{F}_+$ und φ ein N-fortsetzbares Funktional auf $\mathcal{G}_+$. Gelte dabei $\mathcal{F}^M_{\uparrow} \subseteq \mathcal{G}^N_{\uparrow}$ und $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) = \varphi^N_{\uparrow}(f)$ für alle $f \in \mathcal{G}^N_{\uparrow}$. Wegen $\phi^M_{\uparrow}(f) = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) = \varphi^N_{\uparrow}(f)$ für $f \in \mathcal{F}^M_{\uparrow}$ folgt unmittelbar aus Definition 14.8.1, dass $\phi^M_{\uparrow\downarrow}(h) \geq \varphi^N_{\uparrow\downarrow}(h)$ für alle $h \in [0, +\infty]^\Omega$.
Aus der Monotonie von $\phi^M_{\uparrow\downarrow}$ erhalten wir andererseits für $\mathcal{G}^N_{\uparrow} \ni f \geq h \in [0, +\infty]^\Omega$ auch $\varphi^N_{\uparrow}(f) = \phi^M_{\uparrow\downarrow}(f) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h)$. Gemäß Definition 14.8.1 folgt daraus $\varphi^N_{\uparrow\downarrow}(h) \geq \phi^M_{\uparrow\downarrow}(h)$, und zusammen mit obigen Überlegungen

$$\phi^M_{\uparrow\downarrow}(h) = \varphi^N_{\uparrow\downarrow}(h) \quad \text{für alle} \quad h \in [0, +\infty]^\Omega \quad \text{und infolge} \quad \mathcal{A}(\phi^M_{\uparrow\downarrow}) = \mathcal{A}(\varphi^N_{\uparrow\downarrow})\,.$$

14.9 Fortsetzung von Maßen und Vergleichssatz

Wir wollen die Erkenntnisse des vorigen Abschnitts auf eine spezielle Situation anwenden. Dazu sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer nichtleeren Menge Ω und $\omega : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ein Maß auf $\mathcal{R}$; vgl. Definition 14.2.5 und Definition 14.3.8. Weiters sei der unter $|.|$ abgeschlossene Raum von Funktionen $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ wie in Lemma 14.2.6 und das $\mathbb{N}$-fortsetzbare Funktional $\phi_\omega : \mathcal{F}(\mathcal{R})_+ \to [0, +\infty]$ wie in Lemma 14.3.10. Gemäß Lemma 14.8.3 gilt für $A \subseteq \Omega$

$$(\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_A) = \inf\left\{(\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_B) : A \subseteq B = f^{-1}(1, +\infty] \ \text{ für ein } \ f \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}(\mathcal{R})_{\uparrow}\right\}.$$

Jede Menge $f^{-1}(1,+\infty] = B \supseteq A$ mit $f = \lim f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{R})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$, wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{F}(\mathcal{R})_+$ ist, lässt sich auch als $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(1,+\infty)$ anschreiben. Die Mengen $f_n^{-1}(1,+\infty) \in \mathcal{R}$ hängen monoton wachsend von $n \in \mathbb{N}$ ab, weshalb $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ mit paarweise disjunkten Mengen $R_n = f_n^{-1}(1,+\infty) \setminus f_{n-1}^{-1}(1,+\infty) \in \mathcal{R}$. Aus $\mathbb{1}_B = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{R_j} \in \mathcal{F}(\mathcal{R})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$ erhalten wir $(\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_B) = (\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(\mathbb{1}_B) = \lim_{n\to\infty} \phi_\omega(\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{R_j}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \omega(R_j)$, und schließen damit auf

$$(\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_A) \tag{14.28}$$
$$= \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \omega(R_j) : A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \text{ mit paarweise disjunkten } R_j \in \mathcal{R}\}.$$

Wenden wir Satz 14.8.7 auf $(\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow} : [0,+\infty]^\Omega \to [0,+\infty]$ an, so erhalten wir ein vollständiges Maß μ auf der σ-Algebra $\mathcal{A}((\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$. Wegen Lemma 14.8.10 folgt aus $\mathbb{1}_A \in \mathcal{F}(\mathcal{R})_+ \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$ für $A \in \mathcal{R}$, dass $A \in \mathcal{A}((\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$. Wegen Korollar 14.8.8 gilt dabei.

$$\omega(A) = \phi_\omega(\mathbb{1}_A) = (\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(\mathbb{1}_A) = (\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A).$$

Also erhalten wir $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}((\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$ und $\omega = \mu|_{\mathcal{R}}$. Gemäß Definition 14.4.4 schließen wir auf $\mathcal{A}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}((\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$, und wegen $\omega = \mu|_{\mathcal{R}} = (\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})})|_{\mathcal{R}}$ gilt folgende Aussage.

14.9.1 Satz (*Fortsetzungssatz*)**.** *Für einen Ring $\mathcal{R}$ auf einer nichtleeren Menge Ω lässt sich jedes Maß $\omega : \mathcal{R} \to [0,+\infty]$ mittels der rechten Seite von* (14.28) *fortsetzen zu einem Maß auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.*

14.9.2 Fakta (*)**.** Mit obiger Notation und einem zusätzlichen Maßraum $(\Sigma, \mathcal{B}, \nu)$ gelten folgende Sachverhalte.

1. Offenbar gilt $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A}(\mathcal{R}))$ und infolge $\mathcal{F}(\mathcal{R})^{\mathbb{N}}_{\uparrow} \subseteq \mathcal{F}^{\mathbb{N}}(\mathcal{A}(\mathcal{R}))_{\uparrow}$, wobei wegen Lemma 14.7.3 angewendet für $\Upsilon = \Omega$ und wegen Korollar 14.8.8
$$(\phi_{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(f) = \int_\Omega f \, d\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})} = \int_\Omega f \, d\mu = (\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(f)$$
für alle $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}(\mathcal{R}))^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$. Nach Bemerkung 14.8.11 gilt dann $(\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow} = (\phi_{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}})^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}$ und $\mathcal{A}((\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}) = \mathcal{A}((\phi_{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}})^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$. Also ergibt eine neuerliche Anwendung obiger Prozedur auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ anstatt $\mathcal{R}$ nichts Neues.

2. Durch
$$\overline{\mathcal{B}} := \{B \cup N : B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{B}, \nu(C) = 0, N \subseteq C\} \; (\subseteq \mathcal{P}(\Sigma))$$
wird unter anderem wegen $(B \cup N)^c = (B \cup C)^c \cup (C \setminus (B \cup N))$ eine $\mathcal{B}$ enthaltende σ-Algebra definiert. Setzt man dabei $\bar\nu(B \cup N) := \nu(B)$ für $B, C \in \mathcal{B}$ mit $\nu(C) = 0$ und $N \subseteq C$, so erhalten wir ein wohldefiniertes, vollständiges Maß $\bar\nu : \overline{\mathcal{B}} \to [0,+\infty]$; siehe Übungsaufgabe 14.36. Der Maßraum $(\Sigma, \overline{\mathcal{B}}, \bar\nu)$ heißt *Vervollständigung* von $(\Sigma, \mathcal{B}, \nu)$ und $\overline{\mathcal{B}}$.

3. Eine Funktion $f : \Sigma \to [-\infty, +\infty]$ ist genau dann bezüglich $\overline{\mathcal{B}}$ messbar, wenn es eine bezüglich $\mathcal{B}$ messbare Funktion $g : \Sigma \to [-\infty, +\infty]$ und ein $N \in \mathcal{B}$ mit $\nu(N) = 0$ und $\{x \in \Sigma : f(x) \neq g(x)\} \subseteq N$ gibt.

   Um das einzusehen, sei zunächst $f : \Sigma \to [-\infty, +\infty]$ bezüglich $\overline{\mathcal{B}}$ messbar. Da $f = \max(f, 0) - (-\min(f, 0))$ mit bezüglich $\overline{\mathcal{B}}$ messbaren $\max(f, 0), -\min(f, 0)$ gilt, können wir von Anfang an $f(\Sigma) \subseteq [0, +\infty]$ annehmen. Wegen Lemma 14.4.10 gilt $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ für eine monoton wachsende Folge $f_n \in \mathcal{F}(\overline{\mathcal{B}})_+$; vgl. Definition 14.2.4. Zu $f_n = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{B_k}$ mit $\alpha_k \in (0, +\infty)$ und paarweise disjunkten $B_k \in \overline{\mathcal{B}}$ gibt es ν-Nullmengen $N_1, \ldots, N_m \in \mathcal{B}$ und $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}$ mit $A_k \subseteq B_k$ und $B_k \setminus A_k \subseteq N_k$ für $k = 1, \ldots, m$. Für $g_n := \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ gilt $\{x \in \Sigma : f_n(x) \neq g_n(x)\} \subseteq N_1 \cup \cdots \cup N_m =: M_n \in \mathcal{B}$ mit $\nu(M_n) = 0$. Setzen wir $g := \liminf_{n\to\infty} g_n$, so folgt

$$\{x \in \Sigma : f(x) \neq g(x)\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \Sigma : f_n(x) \neq g_n(x)\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{B}$$

   mit $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) = 0$. Ist umgekehrt $g : \Sigma \to [-\infty, +\infty]$ bezüglich $\mathcal{B}$ messbar mit $\{x \in \Sigma : f(x) \neq g(x)\} \subseteq N \in \mathcal{B}$ und $\nu(N) = 0$, so ist f wegen $f^{-1}(B) = (g^{-1}(B) \cap (\Sigma \setminus N)) \cup (f^{-1}(B) \cap N) \in \overline{\mathcal{B}}$ für alle B aus der σ-Algebra $\mathcal{E}$ wie in Beispiel 14.4.5 bezüglich $\overline{\mathcal{B}}$ messbar.

4. Sind $f, g : \Sigma \to [0, +\infty]$ Funktionen wie im vorherigen Punkt, so folgt aus Lemma 14.7.3 angewendet für $\Omega = \Upsilon = \Sigma$ und $C = \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{B}}$ und Fakta 14.5.3, 6,

$$\int_\Sigma f \, d\bar{\nu} = \int_\Sigma g \, d\bar{\nu} = \int_\Sigma g \, d\bar{\nu}|_{\mathcal{B}} = \int_\Sigma g \, d\nu \,. \tag{14.29}$$

   Für allgemeine $f, g : \Sigma \to [-\infty, +\infty]$ wie im vorherigen Punkt ist f genau dann integrierbar, wenn g es ist. In dem Fall gilt auch (14.29).

5. Da μ auf $\mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}})$ ein vollständiges Maß ist, gilt

$$\overline{\mathcal{A}(\mathcal{R})} \subseteq \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}}) \text{ sowie } \mu|_{\overline{\mathcal{A}(\mathcal{R})}} = \overline{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}} \,.$$

   Umgekehrt liegen alle $A \in \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}})$ mit $\mu(A) < +\infty$ in $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{R})}$. In der Tat stimmt $\mu(A)$ gemäß Satz 14.8.7 mit (14.28) überein. Infolge gibt es $B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ mit $A \subseteq B_n$ und $\mu(A) > \mu(B_n) - \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wodurch $A \subseteq B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ mit $\mu(A) = \mu(B)$. Wendet man diese Überlegung statt A auf $B \setminus A \in \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}})$ an, so folgt die Existenz eines $C \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ mit $B \setminus A \subseteq C$ und $\mu(C) = \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = 0$; also gilt $A = (B \setminus C) \cup (C \cap A) \in \overline{\mathcal{A}(\mathcal{R})}$.

   Es liegen sogar alle σ-endlichen $A \in \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}})$ in $\overline{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}}$, denn aus $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_n \in \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}})$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, erhalten aus $A_n \in \overline{\mathcal{A}(\mathcal{R})}$ sicherlich $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \overline{\mathcal{A}(\mathcal{R})}$.

   Ist ganz Ω σ-endlich, so auch jedes $A \in \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}})$, womit in dem Fall sogar $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{R})} = \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}})$.

6. Ist $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{A}((\phi_\omega)^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$ mit $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$, so ist $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ nach Fakta 14.5.3, 7, σ-endlich. Nach 5 ist f infolge messbar bezüglich $\overline{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}}$, wodurch gemäß Lemma 14.7.3 und 4 mit einer bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ messbaren Funktion $g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ derart, dass $\overline{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}}\{x \in \Sigma : f(x) \neq g(x)\} = 0$,
$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \, d\overline{\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})}} = \int_\Omega g \, d\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{R})} .$$

In Satz 14.9.1 stellt sich die Frage, ob die Fortsetzung von ω eindeutig ist. Wir werden sehen, dass im Falle
$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \ \text{ mit } \ \Omega_n \in \mathcal{R}, \ \omega(\Omega_n) < +\infty \ \text{ für alle } \ n \in \mathbb{N}, \tag{14.30}$$
die Fortsetzung tatsächlich eindeutig ist. Wir benötigen dazu eine Überlegung bezüglich bestimmter Mengensysteme.

14.9.3 Definition. Ein Mengensystem $\emptyset \neq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ nennt man *Dynkin-System* auf Ω, falls
$$\begin{aligned} &\Omega \in \mathcal{D}, \\ &D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^c \in \mathcal{D} \ \text{ und} \\ &D_n \in \mathcal{D}, \ n \in \mathbb{N}, \ \text{ mit } \ D_m \cap D_n = \emptyset \ \text{ für } \ m \neq n \ \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D} . \end{aligned} \tag{14.31}$$

Man erkennt leicht, dass der Durchschnitt von beliebig vielen Dynkin-Systemen auf Ω wieder ein solches ist. Offenbar sind alle σ-Algebren auch Dynkin-Systeme. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

14.9.4 Lemma. *Ist aber $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ durchschnittsstabil, also $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{K}$ für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, und ist $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ der Durchschnitt aller $\mathcal{K}$ enthaltenden Dynkin-Systeme, so ist $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ sogar eine σ-Algebra und stimmt mit $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ überein.*

Beweis. Für festes $K \in \mathcal{K}$ ist das Mengensystem $\mathcal{D}_K = \{C \subseteq \Omega : C \cap K \in \mathcal{D}(\mathcal{K})\}$ ein Dynkin-System, was man leicht mit Hilfe der Gleichheit $C^c \cap K = K \cap (K \cap C)^c = (K^c \cup (K \cap C) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots)^c$ überprüft. Die Voraussetzung, dass $\mathcal{K}$ durchschnittsstabil ist, ergibt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}_K$, wodurch $\mathcal{D}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{D}_K$. Wegen der Beliebigkeit von $K \in \mathcal{K}$ umfasst für jedes $E \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$ auch das Dynkin-System $\mathcal{D}_E = \{C \subseteq \Omega : C \cap E \in \mathcal{D}(\mathcal{K})\}$ das Mengensystem $\mathcal{K}$, und infolge $\mathcal{D}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{D}_E$. Das wiederum impliziert $E \cap F \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$ für $E, F \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$, was nach Bemerkung 14.4.2 besagt, dass $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ eine σ-Algebra ist.
Da jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist, folgt $\mathcal{D}(\mathcal{K}) = \mathcal{A}(\mathcal{K})$. ❑

14.9.5 Satz (*Vergleichssatz*)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$, also $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{K})$, welcher durchschnittsstabil ist.*
Sind $\theta : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ und $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ Maße derart, dass $\theta|_{\mathcal{K}} = \nu|_{\mathcal{K}}$ und dass eine Folge $K_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\theta(K_n) = \nu(K_n) < +\infty$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$ existiert, so folgt $\theta = \nu$.

Beweis. Das Mengensystem

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \theta(A \cap K_n) = \nu(A \cap K_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

enthält wegen $\theta(K_n) = \nu(K_n)$ die Menge Ω. Zudem folgt aus $A \in \mathcal{D}$, dass $\theta(K_n \setminus A) = \theta(K_n) - \theta(A \cap K_n) = \nu(K_n) - \nu(A \cap K_n) = \nu(K_n \setminus A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $A^c \in \mathcal{D}$. Schließlich gilt für paarweise disjunkte $D_k \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}$,

$$\theta(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k \cap K_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \theta(D_k \cap K_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(D_k \cap K_n) = \nu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k \cap K_n),\ n \in \mathbb{N},$$

also $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$. Somit ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, welches voraussetzungsgemäß $\mathcal{K}$ und infolge $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ umfasst. Nach Lemma 14.9.4 gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{K}) = \mathcal{D}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$, wodurch für jedes $A \in \mathcal{A}$ wegen

$$A = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1})) \cap K_n$$

mit paarweise disjunkten $(A \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1})) \cap K_n,\ n \in \mathbb{N}$,

$$\theta(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \theta\Big((A \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1})) \cap K_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu\Big((A \setminus (K_1 \cup \cdots \cup K_{n-1})) \cap K_n\Big) = \nu(A).$$

❑

Da Ringe durchschnittsstabil sind, folgt aus Satz 14.9.5 unmittelbar, dass im Falle der Gültigkeit von (14.30) die Fortsetzung von ω auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ in Satz 14.9.1 eindeutig ist.

14.9.6 Korollar. *Ist $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer nichtleeren Menge Ω und $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{R}) \to [0, +\infty]$ ein Maß derart, dass $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ mit $K_n \in \mathcal{R}$ und $\nu(K_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{A})$*

$$\nu(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(R_j) : A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \text{ mit paarweise disjunkten } R_j \in \mathcal{R}\}. \tag{14.32}$$

Insbesondere folgt für jedes weitere Maß $\theta : \mathcal{A}(\mathcal{R}) \to [0, +\infty]$ aus $\theta|_{\mathcal{R}} \leq \nu|_{\mathcal{R}}$ automatisch $\theta \leq \nu$ auf ganz $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Beweis. Gemäß Satz 14.9.1 und Satz 14.9.5 hat $\nu|_{\mathcal{R}}$ eine eindeutige Fortsetzung auf $\mathcal{A}(\mathcal{R})$. Diese Fortsetzungen stimmen einerseits mit ν überein. Andererseits ist sie nach Satz 14.9.1 durch die rechte Seite von (14.28) mit $\nu|_{\mathcal{R}}$ statt ω gegeben, womit (14.32) zutrifft.
Ist $\theta : \mathcal{A}(\mathcal{R}) \to [0, +\infty]$ ein weiteres Maß mit $\theta|_{\mathcal{R}} \leq \nu|_{\mathcal{R}}$ und infolge $\theta(K_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir durch Anwendung von (14.32) auf die beiden Maße unmittelbar $\theta \leq \nu$ auf ganz $\mathcal{A}(\mathcal{R})$. ❑

14.10 Der Darstellungssatz von Riesz

14.10.1 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Wegen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist die σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ wohldefiniert. Ihre Elemente heißen *Borel-Teilmengen* von Ω.

14.10.2 Fakta. Seien $(\Omega, \mathcal{T})$ und $(\Sigma, \mathcal{U})$ zwei topologische Räume.

1. Ist $f : \Omega \to \mathcal{U}$ stetig, so folgt wegen $f^{-1}(U) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T})$ für alle $U \in \mathcal{U}$ aus Lemma 14.4.7 die $\mathcal{A}(\mathcal{T})$-$\mathcal{A}(\mathcal{U})$-Messbarkeit von f.

2. Versieht man $[-\infty, +\infty]$ mit der Topologie $\mathcal{O}$, welche $\{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\} \cup \{(c, +\infty] : c \in \mathbb{R}\}$ als Subbasis hat, so stimmen die Borelmengen $\mathcal{E}$ aus Beispiel 14.4.5 mit den Borelmengen im Sinne von Definition 14.10.1 überein, wie man aus
$$\{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\} \cup \{(c, +\infty] : c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{O} \subseteq \mathcal{E}$$
unschwer herleitet, indem man die von diesen Mengensystemen erzeugten σ-Algebren betrachtet. Die Inklusion $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{E}$ gilt, da
$$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\} \cup \{[-\infty, c) : c \in \mathbb{Q}\} \cup \{(c, +\infty] : c \in \mathbb{Q}\}$$
gemäß Übungsaufgabe 14.38 eine abzählbare Basis von $\mathcal{O}$ abgibt und infolge jede offene Menge aus $\mathcal{O}$ als Vereinigung abzählbar vieler Mengen aus $\mathcal{E}$ geschrieben werden kann.

3. Für einen topologische Raum $(\Omega, \mathcal{T})$ ist jedes stetige $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$, wobei wir $[-\infty, +\infty]$ mit obiger Topologie $\mathcal{O}$ versehen, wegen 1 messbar bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

4. Für $\Upsilon \subseteq \Omega$ gilt $\mathcal{A}(\mathcal{T})_\Upsilon = \mathcal{A}(\mathcal{T}_\Upsilon)$ gemäß Fakta 14.7.4, 2. Die Spur-σ-Algebra der Borelteilmengen von Ω sind also genau die Borelteilmengen von Υ bezüglich der Spurtopologie. Im Falle $\Upsilon \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ gilt auch $\mathcal{A}(\mathcal{T})_\Upsilon = \{A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}) : A \subseteq \Upsilon\}$.

5. Die Spurtopologie $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ stimmt mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^1$ auf $\mathbb{R}$ überein; siehe Beispiel 12.1.4 und Übungsaufgabe 12.26. Nach dem vorherigen Punkt gilt daher $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1) = \mathcal{E}_\mathbb{R} \subseteq \mathcal{E}$.

Für den Rest dieses Abschnittes sei $\Omega \neq \emptyset$ versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ derart, dass $(\Omega, \mathcal{T})$ einen lokalkompakten Hausdorff-Raum abgibt. Wir betrachten den Vektorraum $C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derart, dass $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ in einer kompakten Menge enthalten ist; siehe Definition 12.17.6. Weiters nehmen wir an, dass $\phi : C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein *positives, lineares Funktional* ist, wobei positiv bedeutet, dass $f \geq 0$ immer $\phi(f) \geq 0$ nach sich zieht.

14.10.3 Lemma. *Die Menge $\mathcal{F} := C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ ist ein unter $|.|$ abgeschlossener Raum von Funktionen gemäß Definition 14.2.1 und $\phi|_{\mathcal{F}_+}$ ist ein M-fortsetzbares Funktional gemäß Definition 14.3.2 für jede Menge M mit einer gleichen oder größeren Mächtigkeit wie $\mathcal{F}_+$.*

Beweis. $C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ ist gemäß Fakta 12.17.7 ein Vektorraum, wobei $f \in C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ offenbar $|f| \in C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ nach sich zieht. Also bildet $C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ einen unter $|.|$ abgeschlossenen Raum von Funktionen wie in Definition 14.2.1. Wegen der vorausgesetzten Linearität von ϕ auf $C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ bleibt zu zeigen, dass für ein beliebiges monoton wachsendes Netz $(f_i)_{i\in I}$ aus $\mathcal{F}_+$ und $f \in \mathcal{F}_+$ immer

$$f \leq \sup_{i\in I} f_i \;\Rightarrow\; \phi(f) \leq \sup_{i\in I} \phi(f_i)\,. \tag{14.33}$$

Dazu sei $K \subseteq \Omega$ eine kompakte, $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ enthaltende Menge. Gemäß Lemma 12.17.8 gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{F}_+$ mit Werten in $[0, 1]$ und $g|_K = \mathbb{1}|_K$. Sei $\epsilon > 0$ zunächst fest. Zu $x \in K$ gibt es wegen $f(x) \leq \sup_{i\in I} f_i(x)$ ein $j(x) \in J$ mit $f(x) - \epsilon < f_{j(x)}(x)$, und ob der Stetigkeit aller beteiligter Funktionen eine offene Umgebung $U(x)$ von x, so dass $f(t) - \epsilon < f_{j(x)}(t)$ sogar für alle $t \in U(x)$. Nun bildet $\{U(x) : x \in K\}$ eine Überdeckung von K, wodurch es $x_1, \dots, x_n \in K$ mit $K \subseteq U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)$ gibt. Jedes $t \in K$ liegt in mindestens einem $U(x_k)$, weshalb monotoniebedingt für $I \ni i \succeq j(x_1), \dots, j(x_n)$

$$f(t) - \epsilon < f_{j(x_k)}(t) \leq f_i(t)\,,$$

und damit $f \leq f_i + \epsilon$ auf K. Weil f außerhalb von K verschwindet, gilt $f \leq f_i + \epsilon \cdot g$ auf Ω, was $\phi(f) \leq \sup_{i\in I} \phi(f_i) + \epsilon\phi(g)$ nach sich zieht. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt (14.33). ❑

Im Folgenden sei daran erinnert, dass eine Funktion $h : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ *von unten halbstetig* heißt, wenn $h^{-1}(c, +\infty]$ in Ω für alle $c \in \mathbb{R}$ offen ist. Wegen

$$(\sup_{j\in J} h_j)^{-1}(c, +\infty] = \bigcup_{j\in J} h_j^{-1}(c, +\infty]$$

ist das punktweise Supremum einer jeden Familie von von unten halbstetigen Funktionen wieder von unten halbstetig. Man überzeugt sich auch leicht davon, dass $\mathbb{1}_U$ genau dann von unten halbstetig ist, wenn U offene Teilmenge von Ω ist. Offenbar sind alle von unten halbstetigen Funktionen auch messbar bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ aller Borel-Teilmengen von Ω; vgl. Definition 14.10.1.

14.10.4 Lemma. *Für eine im Vergleich zu $\mathcal{F}_+$ gleich mächtigen oder mächtigeren Menge M liegt eine Funktion $f : \Omega \to [0, +\infty]$ genau dann in $\mathcal{F}_\uparrow^M$, wenn f von unten halbstetig ist. Insbesondere gilt $\mathbb{1}_U \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ für alle offenen $U \subseteq \Omega$.*

Beweis. Jedes $f \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ ist als Supremum von von unten halbstetigen Funktionen selber von unten halbstetig. Sei umgekehrt $f : \Omega \to [0, +\infty]$ von unten halbstetig.
Zu $x \in \Omega$ und $\eta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \eta < f(x)$ gibt es gemäß Lemma 12.17.8 ein $g \in \mathcal{F}$ mit $g(x) = \eta$, $g \leq \eta$ und $g^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq f^{-1}(\eta, +\infty]$, wodurch $g \leq f$. Wir erkennen, dass $\sup_{f\geq g\in\mathcal{F}} g(x) = f(x)$ für jedes $x \in \Omega$, also $f \in \mathcal{F}_\uparrow^M$. ❑

Sei $(\phi|_{\mathcal{F}_+})_\uparrow^M$ wie in Lemma 14.3.5 definiert ausgehend von $\phi|_{\mathcal{F}_+}$ und M wie in Lemma 14.10.3, sei $(\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M$ wie in Definition 14.8.1 und bezeichne $\mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M)$ die σ-Algebra aus

Definition 14.8.4 mit $\mathcal{X} = [0, +\infty]^\Omega$ und $\psi = (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}$. Lemma 14.10.4 und Lemma 14.8.10 implizieren $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow})$, was gemäß Definition 14.4.4

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}) \tag{14.34}$$

nach sich zieht. Bezeichnet μ das gemäß Satz 14.8.7 durch $(\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}$ auf $\mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow})$ erzeugte Maß, so gilt $\int_\Omega f \, d\mu = (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}(f)$ für alle bezüglich $\mathcal{A}(((\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow})_{\downarrow})$ messbaren $f : \Omega \to [0, +\infty]$; vgl. Korollar 14.8.8. Da alle $f \in C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ messbar sind, folgt aus Lemma 14.7.3 angewendet auf $\Upsilon = \Omega$ und $C = \mathcal{A}(\mathcal{T})$

$$\int_\Omega f \, d\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T})} = \phi(f) \quad \text{für alle} \quad f \in C^+_{00}(\Omega, \mathbb{R}), \tag{14.35}$$

wobei $C^+_{00}(\Omega, \mathbb{R}) = C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) \cap [0, +\infty)^\Omega$.
Für das Folgende sei bemerkt, dass in einem Hausdorff-Raum $(\Omega, \mathcal{T})$ die Menge $\mathcal{K}$ aller kompakten Teilmengen $K \subseteq \Omega$ in der Menge aller abgeschlossenen Mengen und daher in $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ enthalten ist.

14.10.5 Definition. Ein Maß ω auf $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ heißt *Borelmaß*, wenn $\omega(K) < +\infty$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Ein Borelmaß ω heißt *Riesz-regulär*, wenn

$$\omega(O) = \sup\{\omega(K) : \mathcal{K} \ni K \subseteq O\} \quad \text{und} \quad \omega(A) = \inf\{\omega(P) : \mathcal{T} \ni P \supseteq A\}$$

für alle $O \in \mathcal{T}$ und alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$.

14.10.6 Lemma. *Das gemäß Satz 14.8.7 durch $(\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}$ auf $\mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow})$ erzeugte Maß μ erfüllt $\mu(K) < +\infty$ für alle $K \in \mathcal{K}$, $\mu(A) = \inf\{\mu(P) : \mathcal{T} \ni P \supseteq A\}$ für alle $A \in \mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow})$ und $\mu(O) = \sup\{\mu(K) : \mathcal{K} \ni K \subseteq O\}$ für alle $O \in \mathcal{T}$. Insbesondere ist die Einschränkung von μ auf $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ ein Riesz-reguläres Borelmaß.*

Beweis. Wenden wir Lemma 12.17.8 auf $K \in \mathcal{K}$ und Ω an, so erhalten wir ein $g \in \mathcal{F}_+$ mit $\mathbb{1}_K \leq g$, wodurch

$$\mu(K) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_K) \leq (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}(g) = \phi(g) < +\infty\,.$$

Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 14.8.3 unter Beachtung von Lemma 14.10.4. Für ein $O \in \mathcal{T}$ gilt $\mathbb{1}_O \in \mathcal{F}^M_{\uparrow}$, womit

$$\mu(O) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_O) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow}(\mathbb{1}_O) = \sup\{\phi(f) : \mathcal{F}_+ \ni f \leq \mathbb{1}_O\}\,,$$

da die hier verwendete Menge der $f \leq \mathbb{1}_O$ gerichtet durch $\leq$ ist; vgl. Lemma 14.3.5. Für ein solches f und $n \in \mathbb{N}$ ist $f^{-1}[\frac{1}{n}, 1]$ eine kompakte Teilmenge von O, wobei $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[\frac{1}{n}, 1] = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Aus Fakta 14.3.9 erhalten wir

$$\phi(f) \leq (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}(\mathbb{1}_{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})}) = \mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})) = \sup\{\mu(f^{-1}[\frac{1}{n}, 1]) : n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Daraus und aus der Monotonie von μ folgt $\mu(O) = \sup\{\mu(K) : \mathcal{K} \ni K \subseteq O\}$. ❑

14.10.7 Satz (*Darstellungssatz von Riesz*)**.** *Ist* $(\Omega, \mathcal{T})$ *ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, so steht die Menge aller positiven, linearen Funktionale* $\phi : C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *vermöge*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\omega = \phi(f) \quad \textit{für alle} \quad f \in C_{00}(\Omega, \mathbb{R}),$$

in bijektiver Beziehung zur Menge aller Riesz-regulären Borelmaße $\omega : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$.

Beweis. Ist ω ein Borelmaß, so gibt es zu jedem $f \in C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ ein Kompaktum K mit $|f| \leq \|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}_K$, wodurch $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\omega$ wohldefiniert ist; vgl. Fakta 14.6.2. Insbesondere ist $C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) \ni f \mapsto \int_\Omega f \, \mathrm{d}\omega \in \mathbb{R}$ linear und positiv.
Ist umgekehrt $\phi : C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linear und positiv, so setzen wir $\omega = \mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T})}$, wobei μ wie in Lemma 14.10.6 ist. Für $f \in C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ gehören $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = -\min(f, 0)$ zu $\mathcal{F}_+$. Also folgt aus der Definition des Integrals in Definition 14.6.1 und (14.35), dass

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\omega = \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\omega - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\omega = \phi(f^+) - \phi(f^-) = \phi(f^+ - f^-) = \phi(f).$$

Dass ω ein Riesz-reguläres Borelmaß ist, haben wir in Lemma 14.10.6 gesehen. Es bleibt die Eindeutigkeit von ω zu zeigen.
Dazu sei $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ein weiteres Riesz-reguläres Borelmaß mit den erwähnten Eigenschaften. Wegen $\nu(K) = \inf\{\mu(P) : \mathcal{T} \ni P \supseteq K\}$ für ein $K \in \mathcal{K}$ gibt es zu $\epsilon > 0$ ein offenes $V \supseteq K$ mit $\nu(V) < \nu(K) + \epsilon$. Nach Lemma 12.17.8 gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{F}_+$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $f(K) \subseteq \{1\}, f(V^c) \subseteq \{0\}$. Es folgt

$$\nu(K) = \int_\Omega \mathbb{1}_K \, \mathrm{d}\nu \leq \int_\Omega f \, \mathrm{d}\nu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\omega \leq \int_\Omega \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\omega = \omega(V) < \omega(K) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\nu(K) \leq \omega(K)$. Die umgekehrte Ungleichung erhält man, wenn man ν und ω vertauscht. Also stimmen ν und ω auf den kompakten Teilmengen überein. Wegen $\nu(O) = \sup\{\nu(K) : \mathcal{K} \ni K \subseteq O\}$ und der entsprechenden Beziehung für ω stimmen sie auch auf $\mathcal{T}$ überein. Schließlich folgt für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$

$$\nu(A) = \inf\{\nu(P) : \mathcal{T} \ni P \supseteq A\} = \inf\{\omega(P) : \mathcal{T} \ni P \supseteq A\} = \omega(A).$$

❑

14.10.8 Korollar (*)**.** *Ist* ω *das Maß aus Satz 14.10.7, so gilt für jedes monoton wachsende Netz* $(f_i)_{i \in I}$ *von von unten halbstetigen Funktionen* $f_i : \Omega \to [0, +\infty]$

$$\int_\Omega \lim_{i \in I} f_i \, \mathrm{d}\omega = \lim_{i \in I} \int_\Omega f_i \, \mathrm{d}\omega.$$

Beweis. Wie weiter oben erwähnt, ist auch $\lim_{i \in I} f_i = \sup_{i \in I} f_i$ von unten halbstetig, womit alle f_i und auch $\lim_{i \in I} f_i$ messbar bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ sind. Wegen (14.34) folgt aus Korollar 14.8.8 und Lemma 14.8.2 $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}(f) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow}(f)$ für $f = f_i$, $i \in I$, und für $f = \lim_{i \in I} f_i$. Die Behauptung folgt somit aus $(\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow}(\lim_{i \in I} f_i) = \lim_{i \in I} (\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow}(f_i)$, wenn wir M mächtig genug wählen; vgl. Lemma 14.3.7. ❑

14.10.9 Bemerkung (*). Sei $\phi : C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein positives, lineares Funktional und ω das Riesz-reguläre Maß aus Satz 14.10.7. Ausgehend von dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}(\mathcal{T}), \omega)$ betrachten wir $\phi_\omega : \mathcal{F}(\mathcal{A}(\mathcal{T}))_+ \to [0, +\infty]$ wie in Lemma 14.3.10.
Wegen Lemma 14.10.4 und Lemma 14.4.10 folgt $\mathcal{F}_\uparrow^M \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{A}(\mathcal{T}))_\uparrow^{\mathbb{N}}$, und wegen Korollar 14.8.8 gilt für $f \in \mathcal{F}(\mathcal{A}(\mathcal{T}))_\uparrow^{\mathbb{N}}$

$$(\phi_\omega)_\uparrow^{\mathbb{N}}(f) = \int_\Omega f \, d\mu = (\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M(f),$$

wobei μ wie in Lemma 14.10.6 ist. Nach Bemerkung 14.8.11 gilt also

$$(\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M(h) = (\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}}(h) \ \text{ für alle } \ h \in [0, +\infty]^\Omega \ \text{ und infolge } \ \mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M) = \mathcal{A}((\phi_\omega)_{\uparrow\downarrow}^{\mathbb{N}}).$$

Folgendes Lemma wird später von Nutzen sein.

14.10.10 Lemma (*). *Seien $(\Omega, \mathcal{T})$ und $(\Upsilon, \mathcal{O})$ lokalkompakte Hausdorff-Räume und $T : \Omega \to \Upsilon$ ein Homöomorphismus. Die Abbildungen T und T^{-1} sind dann messbar, wenn Ω mit $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ und Υ mit $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ versehen werden. Für ein Maß $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ist das gemäß Satz 14.7.5 definierte Maß $\mu \circ T^{-1} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ genau dann ein Borelmaß bzw. ein Riesz-reguläres Borelmaß, wenn μ ein Borelmaß bzw. ein Riesz-reguläres Borelmaß ist.*

Beweis. Die Messbarkeit folgt unmittelbar aus Fakta 14.10.2. Weil $K \mapsto T^{-1}(K)$ eine Bijektion zwischen allen kompakten Teilmengen von Υ und allen kompakten Teilmengen von Ω darstellt, gilt $\mu \circ T^{-1}(K) = \mu(T^{-1}(K)) < +\infty$ für alle kompakten Teilmengen K von Υ genau dann, wenn $\mu(L) < +\infty$ für alle kompakten Teilmengen L von Ω. Also ist $\mu \circ T^{-1}$ genau dann ein Borelmaß, wenn μ ein solches ist. Ist μ Riesz-regulär, so folgt für $B \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$

$$\begin{aligned} \inf\{(\mu \circ T^{-1})(P) : \mathcal{O} \ni P \supseteq B\} &= \inf\{\mu(O) : O \in \mathcal{T}, \ T(O) \supseteq B\} \\ &= \inf\{\mu(O) : \mathcal{T} \ni O \supseteq T^{-1}(B)\} = \mu(T^{-1}(B)) = (\mu \circ T^{-1})(B), \end{aligned}$$

und für $O \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$

$$\begin{aligned} \sup\{(\mu \circ T^{-1})(K) : K \subseteq O, \ K \text{ kompakt}\} &= \sup\{\mu(L) : T(L) \subseteq O, \ L \text{ kompakt}\} \\ &= \sup\{\mu(L) : L \subseteq T^{-1}(O), \ L \text{ kompakt}\} = \mu(T^{-1}(O)) = (\mu \circ T^{-1})(O), \end{aligned}$$

womit auch $(\mu \circ T^{-1})$ Riesz-regulär ist. Die Umkehrung folgt aus Symmetriegründen. ❑

14.10.11 Beispiel. Versehen wir ein nichtleere Ω mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(\Omega)$, so bildet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ einen lokalkompakten Hausdorff-Raum, wobei $C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^\Omega : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \text{ ist endlich}\}$. Wir halten eine Funktion aus $[0, +\infty)^\Omega$, geschrieben als Tupel $(\eta_k)_{k \in \Omega}$, fest, und definieren ein positives, lineares Funktional $\phi : C_{00}(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(f) := \sum_{k \in \Omega} \eta_k \cdot f(k) \quad \text{für} \quad f \in C_{00}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Wie schon in Beispiel 14.3.6 festgestellt folgt dann für $\mathcal{F} = C_{00}(\Omega, \mathbb{R})$ und einem beliebigen unendlichen M, welches gleichmächtig oder mächtiger als $\mathcal{F}_+$ ist, dass $\mathcal{F}_\uparrow^M = [0, +\infty]^\Omega$ und $(\phi|_{\mathcal{F}_+})_\uparrow^M(f) = \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot f(k)$ für alle $f \in [0, +\infty]^\Omega$.
Wegen $\mathcal{F}_\uparrow^M = [0, +\infty]^\Omega$ gilt $(\phi|_{\mathcal{F}_+})_\uparrow^M = (\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M$ und wegen $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{A}(\mathcal{P}(\Omega)) \subseteq \mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M)$ auch $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M)$. Das entsprechende Maß ω aus Satz 14.10.7 ist gegeben durch

$$\omega(A) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M(\mathbb{1}_A) = \sum_{k\in\Omega} \eta_k \cdot \mathbb{1}_A(k) = \sum_{k\in A} \eta_k \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{P}(\Omega)\,.$$

Für das folgende Beispiel und auch für später benötigen wir für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus $C_{00}^+(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, welche definiert sind durch

$$h_n(t) := \begin{cases} 0 & t \in \mathbb{R} \setminus (0,1)\,, \\ 1 & t \in [\frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}]\,, \\ (n+1)t & t \in (0, \frac{1}{n+1})\,, \\ n+1-(n+1)t & t \in (1 - \frac{1}{n+1}, 1)\,. \end{cases} \tag{14.36}$$

Man erkennt sofort, dass $h_n \to \mathbb{1}_{(0,1)}$ für $n \to \infty$ punktweise und monoton wachsend ist.

14.10.12 Beispiel. Wir betrachten den topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^1)$, wobei $\mathcal{T}^1$ die Euklidischen Topologie gemäß Beispiel 12.1.4 bezeichnet, und eine monoton wachsende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $f \in C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definieren wir

$$\phi_F(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}F(t) := \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(t)\,\mathrm{d}F(t)\,,$$

wobei das *Riemann-Stieltjes-Integral*

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(t)\,\mathrm{d}F(t) = \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j)(F(\xi_j) - F(\xi_{j-1}))$$

gemäß[13] Definition 11.2.2 zu verstehen ist. Da $F|_{[-\alpha,+\alpha]}$ beschränkte Variation $F(\alpha) - F(-\alpha) < +\infty$ hat, existieren diese Riemann-Stieltjes-Integrale; vgl. Fakta 11.2.3 ,2. Wegen $f(x) = 0$ für $x \notin [-\beta, +\beta]$ für hinreichend großes $\beta > 0$, stimmen diese Riemann-Stieltjes-Integrale für alle $\alpha \geq \beta$ überein; vgl. Fakta 11.2.3 ,4. Also ist $\phi_F(f) \in \mathbb{R}$ wohldefiniert.
Gemäß Fakta 11.2.3 sind Riemann-Stieltjes-Integrale linear im Integranden. Da F monoton wachsend ist und damit $\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j)(F(\xi_j) - F(\xi_{j-1})) \geq 0$ für $0 \leq f \in C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt, bildet $\phi_F : C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional. Nach Satz 14.10.7 existiert ein ϕ_F darstellendes Borelmaß ω_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{T}^1))$, also

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\omega_F = \phi_F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}F(t) \tag{14.37}$$

[13] Um mit Definition 11.2.2 ganz konform zu gehen, müssen wir $F(\xi_j) - F(\xi_{j-1}) \in \mathbb{R}$ als 1-Vektor angewendet auf 1×1-Matrix $f(\alpha_j) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ interpretieren.

für alle $f \in C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ausgehend von der Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (14.36) konvergiert für $-\infty < a < b < +\infty$ die Funktionenfolge $(t \mapsto h_n(\frac{t-a}{b-a}))_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C_{00}^+(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ monoton wachsend gegen $\mathbb{1}_{(a,b)}$. Wegen (14.37) erhalten wir

$$\omega_F(a,b) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(a,b)} \, d\omega_F = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big) d\omega_F(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big) dF(t) .$$

Wie man elementar nachprüft, gilt

$$\begin{aligned} F((b - \frac{b-a}{n+1}) -) - F((a + \frac{b-a}{n+1}) +) &= \int_a^b \mathbb{1}_{(a+\frac{b-a}{n+1}, b-\frac{b-a}{n+1})}(t) \, dF(t) \\ &\leq \int_a^b h_n\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big) dF(t) \leq \int_a^b \mathbb{1}_{(a,b)}(t) \, dF(t) = F(b-) - F(a+) , \end{aligned}$$

wobei $F(x\pm) = \lim_{t\to x\pm} F(t)$. Für $n \to \infty$ folgt $\omega_F(a,b) = F(b-) - F(a+)$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{(a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n})} = \mathbb{1}_{[a,b]}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{(a,b+\frac{1}{n})} = \mathbb{1}_{(a,b]}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{(a-\frac{1}{n},b)} = \mathbb{1}_{[a,b)}$ zusammen mit Satz 14.6.5 erhalten wir also

$$\begin{aligned} \omega_F(a,b) &= F(b-) - F(a+), \quad \omega_F[a,b] = F(b+) - F(a-), \\ \omega_F(a,b] &= F(b+) - F(a+), \quad \omega_F[a,b) = F(b-) - F(a-) . \end{aligned} \tag{14.38}$$

14.11 Das Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^d$

Für den lokalkompakten Raum $\Omega = \mathbb{R}^d$ versehen mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^d$ gemäß Beispiel 12.1.4 betrachten wir $\phi : C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f((x_1, \dots, x_d)^T) \, dx_d \dots dx_1 \quad \text{für} \quad f \in C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) , \tag{14.39}$$

wobei dies als iteriertes uneigentliches Riemann-Integral zu verstehen ist; vgl. Definition 8.6.1. Offenbar können wir dabei die Integralgrenzen $-\infty$, $+\infty$ durch $-\alpha$ und $+\alpha$ für ein $\alpha > 0$ mit $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq [-\alpha, +\alpha]^d$ ersetzen.
Das innerste Integral $\int_{-\alpha}^{+\alpha} f((x_1, \dots, x_d)^T) \, dx_d$ hängt nach Korollar 8.7.9 stetig von $(x_1, \dots, x_{d-1})^T \in [-\alpha, +\alpha]^{d-1}$ ab. Also können wir über $[-\alpha, +\alpha]$ nach x_{d-1} integrieren. Wir erhalten eine in $(x_1, \dots, x_{d-2})^T \in [-\alpha, +\alpha]^{d-2}$ stetige Funktion. Wiederholte Anwendung dieser Schlussweise zeigt, dass $\phi(f)$ tatsächlich wohldefiniert ist. Die Integrationsreihenfolge ist wegen Satz 8.7.10 übrigens irrelevant. Man überzeugt sich auch ganz leicht davon, dass ϕ linear und positiv ist.

14.11.1 Definition. Das gemäß Satz 14.10.7 eindeutige Riesz-reguläres Borelmaß ω mit $\int_\Omega f \, d\omega = \phi(f)$ für alle $f \in C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ heißt *Lebesgues-Maß* auf und wird mit λ_d bezeichnet.

Für $f \in C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und für ein festes $y = (y_1, \dots, y_d)^T \in \mathbb{R}^d$ liegt $f_y : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_y(x) = f(x + y)$ offenbar wieder in $C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Aus der Substitutionsregel, Lemma 8.4.12, folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f((x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)^T)\, \mathrm{d}x_d = \int_{-\infty}^{+\infty} f((x_1 + y_1, \dots, x_{d-1} + y_{d-1}, x_d)^T)\, \mathrm{d}x_d .$$

Wieder nach der Substitutionsregel folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} & f((x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)^T)\, \mathrm{d}x_d\, \mathrm{d}x_{d-1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f((x_1 + y_1, \dots, x_{d-2} + y_{d-2}, x_{d-1}, x_d)^T)\, \mathrm{d}x_d\, \mathrm{d}x_{d-1} .\end{aligned}$$

Wiederholte Anwendung dieser Schlussweise ergibt am Ende $\phi(f_y) = \phi(f)$.
Für $\mathcal{F} = C_{00}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und einer Menge M, welche gleichmächtig wie $\mathcal{F}_+$ ist, folgt wegen $(\sup_{m\in M} f_m)_y = \sup_{m\in M}(f_m)_y$ aus $f \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ auch $f_y \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$; vgl. Lemma 14.10.4. Ist $(f_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz aus $\mathcal{F}$ mit einer im Vergleich zu M gleich oder weniger mächtigen gerichteten Menge I, so gilt

$$(\phi|_{\mathcal{F}_+})_\uparrow^M((\lim_{i\in I} f_i)_y) = \lim_{i\in I} \phi((f_i)_y) = \lim_{i\in I} \phi(f_m) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})_\uparrow^M(\lim_{i\in I} f_i) ,$$

womit $(\phi|_{\mathcal{F}_+})_\uparrow^M(f_y) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})_\uparrow^M(f)$ für alle $f \in \mathcal{F}_\uparrow^M$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Daraus schließt man leicht auf $(\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M(h_y) = (\phi|_M)_{\uparrow\downarrow}^M(h)$ für alle $h : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$.

14.11.2 Lemma. *Für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ ist die σ-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ invariant unter der Abbildung $A \mapsto A - y$, wobei $\lambda_d(A - y) = \lambda_d(A)$. Zudem gilt für jedes messbare $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ die Gleichheit $\int_{\mathbb{R}^d} f_y \, \mathrm{d}\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}\lambda_d$ in dem Sinne, dass die Integrierbarkeit von f_y äquivalent zu jener von f ist.*[14]

Beweis. Die Abbildung $x \mapsto x + y$ ist stetig als Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^d$. Aus Lemma 14.4.7 folgt dann ihre $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$-$\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$-Messbarkeit, womit das Urbild $A - y$ von A unter dieser Abbildung in $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ liegt. Dabei gilt $\lambda_d(A - y) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M((\mathbb{1}_A)_y) = (\phi|_{\mathcal{F}_+})_{\uparrow\downarrow}^M(\mathbb{1}_A) = \lambda_d(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$. Aus Korollar 14.8.8 in Verbindung mit Lemma 14.7.3, angewendet auf $\Upsilon = \Omega$ und $C = \mathcal{A}(\mathcal{T})$, folgt schließlich die behauptete Gleichheit der Integrale für messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$; siehe auch Definition 14.6.1. Für integrierbare $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ folgt sie dann aus Definition 14.6.1. ❑

14.11.3 Fakta.

1. Sind a, b Vektoren aus $\mathbb{R}^d$, deren Einträge $a_j \leq b_j$ für $j = 1, \dots, d$ erfüllen, so schreiben wir $a \leq b$ und setzen

$$\begin{aligned}(a, b) &:= (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d), \quad (a, b] := (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] ,\\ [a, b) &:= [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d), \quad [a, b] := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] .\end{aligned}$$

[14] Im Falle $f(\mathbb{R}^d) \subseteq [0, +\infty]$ gilt somit diese Gleichheit immer.

Wegen $(a,b), [a,b]^c \in \mathcal{T}^d$ gilt $(a,b), [a,b] \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$, womit auch $(a,b] = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}(a_1, b_1 + \frac{1}{k}) \times \cdots \times (a_d, b_d + \frac{1}{k}) \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ und entsprechend $[a,b) \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$.

Liegen $a, b \in \mathbb{R}^d$ sogar in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d$, so nennen wir $(a,b]$ *dyadische Rechtecke*. Die Menge aller dyadischen Rechtecke wollen wir mit $\mathcal{D}_d$ bezeichnen. Wegen $\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d \subseteq \frac{1}{2^{n+1}}\mathbb{Z}^d$ gibt es zu $(a,b], (c,d] \in \mathcal{D}_d$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a, b, c, d \in \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d$, woraus

$$(a,b] \cap (c,d] = (\max(a_1,c_1), \min(b_1,d_1)] \times \cdots \times (\max(a_d,c_d), \min(b_d,d_d)] \in \mathcal{D}_d$$

folgt. Also ist $\mathcal{D}_d$ durchschnittsstabil.

2. Für ein offenes $O \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$C_n := \bigcup_{\substack{x\in\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d,\\ x+[0,\frac{1}{2^n}]^d\subseteq O}} x + (0, \frac{1}{2^n}]^d = \bigcup_{\substack{x\in\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d,\\ x+[0,\frac{1}{2^n}]^d\subseteq O}} (x_1, x_1 + \frac{1}{2^n}] \times \cdots \times (x_d, x_d + \frac{1}{2^n}]$$

eine Vereinigung von höchstens abzählbar vielen, augenscheinlich paarweise disjunkten Mengen. Klarerweise gilt $C_n \subseteq O$, und wegen $x + (0, \frac{1}{2^n}]^d = \bigcup_{\varepsilon\in\{0,1\}^d} x + \frac{1}{2^{n+1}}\varepsilon + (0, \frac{1}{2^{n+1}}]^d$ mit $x + [0, \frac{1}{2^n}]^d = \bigcup_{\varepsilon\in\{0,1\}^d} x + \frac{1}{2^{n+1}}\varepsilon + [0, \frac{1}{2^{n+1}}]^d$ auch $C_n \subseteq C_{n+1}$.

Weil die $x + (0, \frac{1}{2^n}]^d$ mit $x \in \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d$ paarweise disjunkt sind und die Vereinigung aller dieser Mengen ganz $\mathbb{R}^d$ ist, gibt es zu $y \in O$ ein eindeutiges $x \in \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d$ mit $y \in x + (0, \frac{1}{2^n}]^d$. Wählt man $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $K^{\|.\|_\infty}_{\frac{1}{2^n}}(y) \subseteq O$, dann folgt aus $\|u - y\|_\infty \le \frac{1}{2^n}$ für alle $u \in x + [0, \frac{1}{2^n}]^d$, dass $x + [0, \frac{1}{2^n}]^d \subseteq K^{\|.\|_\infty}_{\frac{1}{2^n}}(y) \subseteq O$, womit $y \in C_n$.

Insgesamt haben wir

$$O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{x\in\frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d,\\ x+[0,\frac{1}{2^n}]^d\subseteq O}} x + [0, \frac{1}{2^n}]^d \tag{14.40}$$

nachgewiesen. Wegen $x + [0, \frac{1}{2^n}]^d \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ und (14.40) ist die Menge $\mathcal{D}_d$ aller dyadischen Rechtecke ein Erzeuger von $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$.

3. Wir definieren die offenbar $\emptyset$ enthaltende Menge

$$\mathcal{R}_d := \{\bigcup_{i\in I} R_i : I \text{ ist endlich mit paarweise disjunkten } R_i \in \mathcal{D}_d, i \in I\}.$$

Für $A, B \in \mathcal{R}_d$ gibt es immer ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ mit $A = \bigcup_{x\in Z_A} x + (0, \frac{1}{2^n}]^d$ und $B = \bigcup_{x\in Z_B} x + (0, \frac{1}{2^n}]^d$, wobei wir $Z_A = \{x \in \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d : x + (0, \frac{1}{2^n}]^d \subseteq A\}$ und $Z_B = \{x \in \frac{1}{2^n}\mathbb{Z}^d : x + (0, \frac{1}{2^n}]^d \subseteq B\}$ setzen. Es folgt

$$A \setminus B = \bigcup_{x\in Z_A\setminus Z_B} x + (0, \frac{1}{2^n}]^d \in \mathcal{R}_d \quad \text{und} \quad A \cup B = \bigcup_{x\in Z_A\cup Z_B} x + (0, \frac{1}{2^n}]^d \in \mathcal{R}_d,$$

wodurch sich $\mathcal{R}_d$ ($\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$) als Ring wie in Definition 14.2.5 auf $\mathbb{R}^d$ herausstellt. Gemäß 2 gilt dabei $\mathcal{A}(\mathcal{R}_d) = \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$.

4. Ausgehend von der Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (14.36) konvergiert für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a \le b$ die Funktionenfolge
$$g_n(x) := \prod_{j=1}^{d} h_n\Big(\frac{x_j - a_j}{b_j - a_j}\Big)$$
punktweise und monoton wachsend gegen $\mathbb{1}_{(a,b)}$. Mit (14.39) folgt
$$\begin{aligned}\lambda_d(a,b) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{(a,b)}\,\mathrm{d}\lambda_d = \lim_{n\to\infty}\phi(g_n) = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{d}\int_{a_j}^{b_j} h_n\Big(\frac{x_j-a_j}{b_j-a_j}\Big)\,\mathrm{d}x_j \\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)(1-\frac{1}{n}) = \prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)\,.\end{aligned}$$
Für $e := (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^d$ gilt $\lim_{n\to\infty}\mathbb{1}_{(a-\frac{1}{n}e,b+\frac{1}{n}e)} = \mathbb{1}_{[a,b]}$, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{1}_{(a,b+\frac{1}{n}e)} = \mathbb{1}_{(a,b]}$ und $\lim_{n\to\infty}\mathbb{1}_{(a-\frac{1}{n}e,b)} = \mathbb{1}_{[a,b)}$ punktweise, womit wegen Satz 14.6.5
$$\lambda_d[a,b] = \lambda_d(a,b] = \lambda_d[a,b) = \lambda_d(a,b) = \prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)\,. \tag{14.41}$$
Insbesondere gilt $\{x\} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ mit $\lambda_d(\{x\}) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d$ und infolge $N \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ mit $\lambda_d(N) = 0$ für alle abzählbaren $N \subseteq \mathbb{R}^d$.

5. Aus (14.41) und den Überlegungen in 2 schließen wir auf $\lambda_d(O) > 0$ für alle nichtleeren offenen $O \subseteq \mathbb{R}^d$, weshalb $N^\circ = \emptyset$ für jede λ_d-Nullmengen $N \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ gilt; siehe Definition 12.2.11. Wegen $c\ell(N^c) = (N^\circ)^c = \mathbb{R}^d$ ist das Komplement einer solchen Nullmenge dicht; siehe Fakta 12.2.12.

14.11.4 Bemerkung (*). Weil wir $\mathbb{R}^d$ als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen schreiben können, wobei $\lambda_d(K) < +\infty$ für jedes kompakte $K \subseteq \mathbb{R}^d$, folgt aus Bemerkung 14.10.9, Fakta 14.9.2, 5, sowie Fakta 14.11.3, 3, dass
$$\mathcal{A}((\phi|_{\mathcal{F}_+})^M_{\uparrow\downarrow}) = \mathcal{A}((\phi_{\lambda_d})^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}) = \overline{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)} = \overline{\mathcal{A}(\mathcal{R}_d)}\,.$$
Hier ist M gleichmächtig wie $\mathcal{F}_+$, wobei $\mathcal{F} = C_{00}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$. Diese σ-Algebra wird auch als $\mathcal{L}^d$ angeschrieben und heißt Menge aller *Lebesgue-Teilmengen* von $\mathbb{R}^d$. Wie etwa in [E] nachzulesen ist, gibt es Teilmengen von $\mathbb{R}^d$, die nicht in $\mathcal{L}^d$ liegen, womit $\mathcal{L}^d \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Das gemäß Satz 14.8.7 erzeugte, vollständige Maß $\bar\lambda_d := \mu$ auf $\mathcal{L}^d$, für das $\bar\lambda_d|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)} = \lambda_d$ gilt, stimmt mit der rechten Seite von (14.28) überein, wenn dort $\omega = \lambda_d$ und $\mathcal{R} = \mathcal{R}_d$. Da jedes Element von $\mathcal{R}_d$ eine endliche Vereinigung von paarweise disjunkten, dyadischen Rechtecken aus $\mathcal{D}_d$ ist, gilt sogar
$$\bar\lambda_d(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda_d(R_j) : A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j \text{ mit paarweise disjunkten } R_j \in \mathcal{D}_d,\, j\in\mathbb{N}\}\,. \tag{14.42}$$
Wegen $(h\cdot\mathbb{1}_A)_y = h_y\cdot\mathbb{1}_{A-y}$ erfüllt ein $A \subseteq \mathbb{R}^d$ genau dann (14.20), wenn $A-y$ diese Gleichung erfüllt. Also ist auch die σ-Algebra $\mathcal{L}^d$ invariant unter der Abbildung $A \mapsto A-y$, und es gilt $\bar\lambda_d(A-y) = \bar\lambda_d(A)$.

14.11.5 Lemma. *Ist μ ein auf $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ translationsinvariantes Borelmaß, also $\mu(A-y) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$, so gilt $\mu = c \cdot \lambda_d$ für ein $c \in [0, +\infty)$.*

Beweis. Für $a, b \in 2^{-n} \cdot \mathbb{Z}^d$ mit $a \leq b$ gilt wegen der Translationsinvarianz[15]

$$\mu(a,b] = \mu\Big(\bigcup_{\substack{x \in \frac{1}{2^n} \cdot \mathbb{Z}^d, \\ a < x \leq b}} x + (-\frac{1}{2^n}, 0] \times \cdots \times (-\frac{1}{2^n}, 0] \Big) = 2^{dn} \cdot \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) \cdot \mu\Big((0, \frac{1}{2^n}]^d\Big).$$

Für $(a,b] = (0,1]^d$ folgt $2^{dn} \cdot \mu((0, \frac{1}{2^n}]^d) = \mu((0,1]^d) < +\infty$, weil μ auf kompakten und infolge auf allen beschränkten Mengen aus $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ endliche Werte annimmt.
Diese Überlegungen gelten natürlich auch für das translationsinvariante Lebesgue-Maß, wobei $\lambda_d\big((0,1]^d\big) = 1$; vgl. (14.41). Also gilt für allgemeine dyadische Rechtecke $(a,b]$

$$\mu(a,b] = \mu\Big((0,1]^d\Big) \cdot \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \mu\Big((0,1]^d\Big) \cdot \lambda_d(a,b]\,.$$

Da $\mathcal{D}_d$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ ist, folgt aus Satz 14.9.5, dass $\mu = c\lambda_d$ mit $c = \mu((0,1]^d)$. ❑

14.11.6 Lemma. *Sei $T : x \mapsto Ax + b$ eine bijektive affine Abbildung auf $\mathbb{R}^d$, also $A \in GL(d, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^d$, wobei $GL(d, \mathbb{R})$ den Raum aller regulären reellen $d \times d$-Matrizen bezeichnet. Dann sind T und T^{-1} messbar und es gilt ($B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$)*

$$\lambda_d\big(T(B)\big) = |\det A| \cdot \lambda_d(B)\,.$$

Beweis. Wegen Fakta 14.10.2 folgt die Messbarkeit aus der Stetigkeit von T bzw. T^{-1}. Für den Rest der Aussage können wir uns wegen Lemma 14.11.2 auf lineare Abbildungen beschränken, also $A = T$.
Gemäß Satz 14.7.5 wird durch $\mu(B) := \lambda_d(A(B))$, $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$, ein Maß auf $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ definiert. Die Linearität von A und die Translationsinvarianz von λ_d bedingt

$$\mu(a + B) = \lambda_d\big(A(a) + A(B)\big) = \lambda_d\big(A(B)\big) = \mu(B)\,.$$

Nach Lemma 14.11.5 gilt $\mu(B) = c \cdot \lambda_d(B)$, $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$, für ein $c \in [0, +\infty)$.
Ist $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ eine Diagonalmatrix mit $a_j > 0$, so folgt $c = |\det A|$ aus

$$\lambda_d\big(A((0,1]^d)\big) = \lambda_d\big((0,a_1] \times \cdots \times (0,a_d]\big) = \prod_{j=1}^d a_j = \det A \cdot \lambda_d((0,1]^d)\,.$$

Ist A eine orthogonale Matrix, also $AA^* = A^*A = I$, so erhalten wir aus Fakta 14.11.3, 5,

$$\lambda_d\big(A(\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\})\big) = \lambda_d\big(\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}\big) > 0\,,$$

[15] Für $a, b, x \in \mathbb{R}^d$ bedeutet $a < x$ bzw. $x \leq b$, dass $a_j < x_j$ bzw. $x_j \leq b_j$ für alle $j = 1, \ldots, d$.

und infolge $c = 1 = |\det A|$.
Für ein allgemeines invertierbares A ist AA^* eine positiv definite Matrix, und wegen des Spektralsatzes aus der Linearen Algebra durch eine orthogonale Matrix V diagonalisierbar, also $AA^* = VD^2V^*$ mit einer Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen. Setzen wir $W = D^{-1}V^*A$, so folgt $WW^* = D^{-1}V^*AA^*VD^{-1} = I$ und $A = VDW$. Somit ist W orthogonal und wegen obiger Spezialfälle gilt

$$\lambda_d\Big(A(B)\Big) = \lambda_d\Big(VDW(B)\Big) = \lambda_d\Big(DW(B)\Big) = \det D \cdot \lambda_d\Big(W(B)\Big) = \det D \cdot \lambda_d(B)\,.$$

Aus $(\det D)^2 = \det D^2 = \det AA^* = (\det A)^2$ folgt schließlich $c = \det D = |\det A|$. ❑

Wir können folgenden Zusammenhang zwischen Riemann-Integral und Lebesgue-Integral nach λ_1 herstellen, wobei wir ab jetzt für λ_1 meist λ schreiben wollen.

14.11.7 Proposition. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

(i) Für beschränktes f und kompaktes $I = [a, b]$ ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine λ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[a,b]}$ derart gibt, dass f auf $[a, b] \setminus N$ stetig ist. In dem Fall können wir die N so wählen, dass $f \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus N}$ bezüglich[16] $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[a,b]}$ messbar ist, und[17]

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus N}\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{14.43}$$

(ii) Sei I nicht kompakt und $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über jedes kompakte Teilintervall von I. Dann gibt es eine λ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_I$ derart, dass $f \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N}$ bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_I$ messbar ist, und $f \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N}$ ist genau dann nach λ über I integrierbar, wenn f absolut uneigentlich Riemann-integrierbar ist, also $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über I ist.

Beweis. Ist $I = [a, b]$ kompakt und f beschränkt, so gilt gemäß (8.3)

$$\inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}(O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z})) = \inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}) - \sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}) = \int_a^{\overline{b}} f\,dx - \int_{\underline{a}}^{b} f\,dx\,,$$

wobei $O(\mathcal{Z})$ $(U(\mathcal{Z}))$ die Obersumme (Untersumme) zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Intervalls $[a, b]$ der Funktion f bezeichnet. Sei $(\mathcal{Z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit

$$\lim_{k\to\infty}(O(\mathcal{Z}_k) - U(\mathcal{Z}_k)) = \inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}(O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}))\,.$$

Die Elemente von $\mathcal{Z}_k$ wollen wir mit $\xi_{k,0} < \cdots < \xi_{k,n(\mathcal{Z}_k)}$ bezeichnen. Da $O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z})$ monoton fallend von $\mathcal{Z}$ abhängt, können wir die Folge so wählen, dass

$$|\mathcal{Z}_k| = \max\{\xi_{k,1} - \xi_{k,0}, \ldots, \xi_{k,n(\mathcal{Z}_k)} - \xi_{k,n(\mathcal{Z}_k)-1}\} < \frac{1}{k} \tag{14.44}$$

[16] Siehe Fakta 14.7.4, 1.

[17] Für bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[a,b]}$ messbare und Riemann-integrierbare f lässt sich dieser Ausdruck auch als $\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda$ anschreiben; vgl. Fakta 14.5.3, 6.

sowie $\mathcal{Z}_{k+1} \supseteq \mathcal{Z}_k$ gilt. Wir definieren $g_k, h_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g_k(x) := f(a) \cdot \mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z}_k)} \inf_{t \in [\xi_{k,j-1}, \xi_{k,j}]} f(t) \cdot \mathbb{1}_{(\xi_{k,j-1}, \xi_{k,j}]}(x)\,,$$

$$h_k(x) := f(a) \cdot \mathbb{1}_{\{a\}}(x) + \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z}_k)} \sup_{t \in [\xi_{k,j-1}, \xi_{k,j}]} f(t) \cdot \mathbb{1}_{(\xi_{k,j-1}, \xi_{k,j}]}(x)\,,$$

und erkennen $g_k \leq f \leq h_k$. Weiters gilt wegen (14.41)

$$U(\mathcal{Z}_k) = \int_{[a,b]} g_k \, \mathrm{d}\lambda \quad \text{und} \quad O(\mathcal{Z}_k) = \int_{[a,b]} h_k \, \mathrm{d}\lambda\,.$$

Aus der Monotonie der Zerlegungsfolge $(\mathcal{Z}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ folgert man leicht, dass g_k (h_k) monoton wachsend (fallend) ist. Außerdem sind wegen $|g_k|, |h_k| \leq \|f\|_\infty$ diese Funktionenfolgen beschränkt. Also existieren $g := \lim_{k\to\infty} g_k$ und $h := \lim_{k\to\infty} h_k$ auf ganz $[a,b]$, und diese sind bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[a,b]}$ messbar, wobei $g \leq f \leq h$. Aus dem Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5, folgt

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} (h-g)\, \mathrm{d}\lambda &= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} h_k \, \mathrm{d}\lambda - \int_{[a,b]} g_k \, \mathrm{d}\lambda \right) \\ &= \lim_{k\to\infty} O(\mathcal{Z}_k) - U(\mathcal{Z}_k) = \overline{\int_a^b} f\,dx - \underline{\int_a^b} f\,dx\,.\end{aligned} \tag{14.45}$$

Also ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn $g = h$ außerhalb eine λ-Nullmenge; siehe Proposition 14.7.2. Wir setzen $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_k$ und bemerken, dass M abzählbar und somit auch eine λ-Nullmenge ist.

Sei $t \in [a,b] \setminus M$ mit $g(t) = h(t)$. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir $k \in \mathbb{N}$ mit $h_k(t) - g_k(t) < \epsilon$. Wegen $t \notin M \supseteq \mathcal{Z}_k$, gibt es ein $\delta > 0$ mit $(t-\delta, t+\delta) \cap \mathcal{Z}_k = \emptyset$, wodurch $h_k(t) = h_k(s)$ und $g_k(t) = g_k(s)$ für alle $s \in (t-\delta, t+\delta)$. Zusammen mit $g_k \leq f \leq h_k$ folgt

$$-\epsilon < g_k(t) - h_k(t) = g_k(t) - h_k(s) \leq f(t) - f(s) \leq h_k(t) - g_k(s) = h_k(t) - g_k(t) < \epsilon$$

für $s \in (t-\delta, t+\delta)$, womit f bei s stetig ist.

Sei umgekehrt f stetig bei $t \in (a,b]$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $|f(t) - f(s)| < \epsilon$ für $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap [a,b]$. Ist $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \delta$, so folgt aus $t \in (\xi_{k,j-1}, \xi_{k,j}]$ sogar $[\xi_{k,j-1}, \xi_{k,j}] \subseteq (t-\delta, t+\delta)$, womit

$$g_k(t) = \inf_{s\in[\xi_{k,j-1},\xi_{k,j}]} f(s) \geq f(t) - \epsilon \quad \text{sowie} \quad h_k(t) = \sup_{s\in[\xi_{k,j-1},\xi_{k,j}]} f(s) \leq f(t) + \epsilon\,,$$

also $0 \leq h(t) - g(t) \leq h_k(t) - g_k(t) < 2\epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $h(t) - g(t) = 0$. Insgesamt stimmen die Stetigkeitspunkte von f in $[a,b] \setminus M$ mit $\{t \in [a,b] \setminus M : h(t) = g(t)\}$ überein. Wegen $\lambda(M) = 0$ ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f genau dann eine

λ-Nullmenge, wenn die in $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ liegende Menge $N := \{t \in [a,b] : h(t) \neq g(t)\}$ eine λ-Nullmenge ist, was gemäß (14.45) zur Riemann-Integrierbarkeit von f äquivalent ist. Wegen $g \leq f \leq h$ gilt in dem Fall $g \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus N} = f \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus N} = h \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus N}$. Mit Satz 14.6.5 schließen wir auf

$$U(\mathcal{Z}_k) = \int_{[a,b]} g_k \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus N} \, \mathrm{d}\lambda \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} g \cdot \mathbb{1}_{[a,b]\setminus N} \, \mathrm{d}\lambda \, ,$$

und daher auf (14.43).
Sei nun I nicht kompakt mit Intervallränder $a < b$, $a, b \in [-\infty, +\infty]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über jedes kompakte Teilintervall von I. Weiters seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in I mit $a_n < b_n$, die monoton fallend bzw. wachsend gegen a bzw. b konvergieren, wobei im Falle $a \in I$ immer $a_n = a$ und im Falle $b \in I$ immer $b_n = b$. Mit N_n bezeichnen wir die λ-Nullmenge aus dem ersten Beweisteil angewendet auf $f|_{[a_n,b_n]}$ und setzen $N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Dann gilt $N \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_I$ mit $\lambda(N) = 0$, wobei $f \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N} = \lim_{n\to\infty} f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]\setminus N_n} \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N}$ bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_I$ messbar ist. Gemäß Fakta 14.5.3, 3, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f(x)| \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} |f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]\setminus N}| \, \mathrm{d}\lambda = \int_I |f \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N}| \, \mathrm{d}\lambda \quad (\in [0, +\infty]) \, .$$

Somit ist $f \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N}$ genau dann integrierbar, wenn obiger Limes existiert, also wenn f absolut uneigentlich Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall ist wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5,

$$\int_I f \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N} \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f \cdot \mathbb{1}_{[a_n,b_n]\setminus N} \, \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

❑

14.11.8 Bemerkung (*)**.** Für Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine auf allen kompakten Teilintervallen Riemann-integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei die λ-Nullmenge N wie in Proposition 14.11.7. Insbesondere ist $f \cdot \mathbb{1}_{I\setminus N}$ bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_I$ und infolge auch bezüglich $\mathcal{L}_I^1$ messbar; vgl. Bemerkung 14.11.4. Gemäß Fakta 14.9.2, 4, gilt dann

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_I f \, \mathrm{d}\bar{\lambda} \, ,$$

wobei $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1$ wie in Bemerkung 14.11.4 ist.

14.11.9 Beispiel. Ein klassisches Beispiel für ein Integral, das zwar als uneigentliches Riemann-Integral, aber nicht als Lebesgue-Integral existiert ist

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{t} \, \mathrm{d}t \, .$$

Wir haben nämlich in Beispiel 8.6.2 die Konvergenz von $\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\sin \pi t}{t} \, \mathrm{d}t$ nachgerechnet. Wir haben aber auch gesehen, dass das uneigentliche Riemann-Integral $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin \pi t|}{t} \, \mathrm{d}t$ nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert. Nach Proposition 14.11.7 existiert das Integral daher nicht im Sinne von Lebesgue.

14.11.10 Beispiel. Man betrachte die *Gammafunktion* $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{t-1} \, \mathrm{d}x \quad \text{für} \quad t \in (0, +\infty)\,, \tag{14.46}$$

als uneigentliches Riemann-Integral. Für $t \in [\alpha, \beta] \subseteq (0, +\infty)$ überzeugt man sich leicht, dass $|\mathrm{e}^{-x} x^{t-1}| \leq g(x)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $x \in (0, +\infty)$, wobei mit einem geeigneten $M > 0$

$$g(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}\,, & \text{falls } x \in (0, 1]\,, \\ M\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,, & \text{falls } x \in (1, +\infty)\,. \end{cases}$$

Da das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^{+\infty} g(x) \, \mathrm{d}x$ konvergiert, existiert wegen Lemma 8.6.3 auch (14.46) als uneigentliche Riemann-Integral. Gemäß Proposition 14.11.7 ist dann die stetige und infolge messbare Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} x^{t-1}$ über $(0, +\infty)$ nach λ im Lebesgueschen Sinne integrierbar, und (14.46) stimmt überein mit

$$\Gamma(t) = \int_{(0,+\infty)} \mathrm{e}^{-x} x^{t-1} \, \mathrm{d}\lambda(x)\,.$$

14.12 Reguläre Maße*

Wir wollen in diesem Abschnitt anknüpfend an die Überlegungen rund um Definition 14.10.5 die Approximierbarkeit von Maßen durch ihre Werte auf kompakten bzw. offenen Mengen behandeln. Zunächst wollen wir die Begriffe aus Definition 14.10.5 verfeinern.

14.12.1 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und bezeichne $\mathcal{K}$ die Menge aller kompakten Teilmengen von Ω. Ein Maß ω auf $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ heißt *Borelmaß*, wenn[18] $\omega(K) < +\infty$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Eine Menge $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ heißt *von innen regulär* in Bezug auf ω, falls

$$\omega(A) = \sup\{\omega(K) : \mathcal{K} \ni K \subseteq A\},$$

und sie heißt *von außen regulär* in Bezug auf ω, wenn

$$\omega(A) = \inf\{\omega(O) : \mathcal{T} \ni O \supseteq A\}.$$

Ist $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ sowohl von innen als auch von außen regulär in Bezug auf ω, so heißt A *regulär* in Bezug auf ω. Ist klar, um welches Maß es sich handelt, so wird der Bezug auf das betroffene Maß meist weggelassen. Ein Borelmaß heißt (von innen, von außen) *regulär*, wenn alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ (von innen, von außen) regulär sind.

14.12.2 Bemerkung (*)**.** Ist $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und ω ein Maß auf $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, so nennt man ω *lokal endlich*, wenn jeder Punkt in Ω eine Umgebung endlichen Maßes hat. Da jede Überdeckung einer kompakten Menge mit offenen Mengen endlichen Maßes eine endliche Teilüberdeckung hat, ist jedes lokal endliche Maß ein Borelmaß. Auf lokalkompakten Hausdorff-Räumen ist offenbar jedes Borelmaß auch lokal endlich.

[18] Man beachte, dass in Hausdorff-Räumen alle kompakten Teilmengen abgeschlossen sind und damit in $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ liegen.

14.12.3 Bemerkung. Man sieht unmittelbar, dass ein A mit $\omega(A) < +\infty$ genau dann regulär ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein kompaktes $K \subseteq A$ und ein offenes $O \supseteq A$ mit $\omega(O \setminus K) < \epsilon$ gibt.
Trivialerweise sind alle offenen Teilmengen von Ω von außen und alle kompakten Teilmengen von Ω von innen regulär. Die leere Menge ist damit regulär.

14.12.4 Lemma. *Sei $\omega : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß auf einem Hausdorff-Raum $(\Omega, \mathcal{T})$. Die Menge $\mathcal{R}_\omega$ aller bezüglich ω regulären $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $\omega(A) < +\infty$ bildet einen Ring, wobei zusätzlich*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}_\omega, \quad \textit{wenn } A_n \in \mathcal{R}_\omega \textit{ für alle } n \in \mathbb{N} \textit{ und } \omega\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) < +\infty . \tag{14.47}$$

Insbesondere ist $\mathcal{R}_\omega$ eine σ-Algebra, falls $\Omega \in \mathcal{R}_\omega$.

Beweis. Für $A, B \in \mathcal{R}_\omega$ gibt es gemäß Bemerkung 14.12.3 zu jedem $\epsilon > 0$ kompakte Mengen K_A, K_B und offene Mengen O_A, O_B mit

$$K_A \subseteq A \subseteq O_A, \quad K_B \subseteq B \subseteq O_B, \quad \omega(O_A \setminus K_A) < \epsilon, \quad \omega(O_B \setminus K_B) < \epsilon .$$

Es folgt $K_A \setminus O_B \subseteq A \setminus B \subseteq O_A \setminus K_B$, wobei die linke Menge kompakt und die rechte offen ist. Wegen

$$(O_A \setminus K_B) \setminus (K_A \setminus O_B) = (O_A \setminus K_A) \setminus K_B \cup (O_B \setminus K_B) \cap O_A \subseteq (O_A \setminus K_A) \cup (O_B \setminus K_B) ,$$

erhalten wir $\omega((O_A \setminus K_B) \setminus (K_A \setminus O_B)) < 2\epsilon$, weshalb $A \setminus B \in \mathcal{R}_\omega$; siehe Bemerkung 14.12.3.
Um (14.47) nachzuweisen, können wir die $A_n \in \mathcal{R}_\omega$, $n \in \mathbb{N}$, als paarweise disjunkt annehmen, indem wir nötigenfalls die A_n durch $(\dots((A_n \setminus A_{n-1}) \setminus A_{n-2}) \setminus \dots) \setminus A_1 \in \mathcal{R}_\omega$ ersetzen, deren Vereinigung mit der Vereinigung der ursprünglich gegebenen A_n übereinstimmt. Zu $\epsilon > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein kompaktes K_n und ein offenes O_n mit $K_n \subseteq A_n \subseteq O_n$ und $\omega(O_n \setminus K_n) < 2^{-n}\epsilon$. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega(O_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \omega(A_n) + \epsilon = \omega\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) + \epsilon < +\infty$$

gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N+1}^{\infty} \omega(O_n) < \epsilon$. Setzen wir $K = \bigcup_{n=1}^{N} K_n$ und $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, so folgt

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq O, \quad O \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \setminus K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (O_n \setminus K_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} O_n ,$$

und wegen der σ-Subadditivität $\omega(O \setminus K) \le \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\epsilon + \epsilon < 2\epsilon$, womit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}_\omega$. ❑

14.12.5 Satz. *Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $\omega : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß.*

(i) Ist ω endlich und jedes offene $P \subseteq \Omega$ von innen regulär, dann ist ω regulär.

(ii) *Sind für ein $O \in \mathcal{T}$ mit $\omega(O) < +\infty$ alle offenen $P \subseteq O$ von innen regulär, so sind sogar alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $A \subseteq O$ regulär.*

(iii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $O_n \in \mathcal{T}$ derart, dass $\omega(O_n) < +\infty$ und dass alle offenen Teilmengen von O_n von innen regulär sind. Dann ist jedes $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ regulär.*

(iv) *Hat $(\Omega, \mathcal{T})$ eine abzählbare Basis $\mathcal{G}$ derart, dass alle $G \in \mathcal{G}$ von innen regulär und von endlichem Maß sind, dann ist ω regulär.*

(v) *Ist $(\Omega, \mathcal{T})$ ein lokalkompakt mit einer abzählbaren Basis, so ist ω regulär.*

Beweis.

(i) Nach Voraussetzung ist jede offene Teilmenge von Ω von innen regulär. Da trivialerweise jede offene Teilmenge auch von außen regulär ist, umfasst $\mathcal{R}_\omega$ aus Lemma 14.12.4 ganz $\mathcal{T}$. Nach Lemma 14.12.4 ist $\mathcal{R}_\omega$ somit eine σ-Algebra, welche wegen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}_\omega \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ übereinstimmt.

(ii) Man betrachte O versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}_O$. Wegen $O \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ gilt

$$\mathcal{A}(\mathcal{T}_O) = \{B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}) : B \subseteq O\}$$

gemäß Fakta 14.10.2, 4. Die Einschränkung $\omega|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}_O)} : \mathcal{A}(\mathcal{T}_O) \to [0, +\infty]$ ist dann ein Borelmaß auf $(O, \mathcal{T}_O)$, welches voraussetzungsgemäß endlich ist. Außerdem ist jedes offene $P \in \mathcal{T}_O$ auch in $\mathcal{T}$ und damit laut Voraussetzung von innen regulär; siehe dafür auch Satz 12.12.2, (ii). Wegen (i) sind alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}_O)$ regulär.

(iii) Für ein beliebiges $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ gilt

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (O_n \cap A)\,. \tag{14.48}$$

Voraussetzungsgemäß können wir (ii) anwenden und erkennen, dass alle Mengen $O_n \cap A$, $n \in \mathbb{N}$, regulär sind. Im Falle $\omega(A) < +\infty$ folgt die Regularität von A wegen (14.47) aus (14.48).

Im Falle $\omega(A) = +\infty$ ist A trivialerweise von außen regulär. Zudem erhalten wir aus (14.48) zusammen mit Fakta 14.3.9, 4,

$$\lim_{n\to\infty} \omega((O_1 \cap A) \cup \cdots \cup (O_n \cap A)) = \omega(A) = +\infty\,.$$

Also gibt es zu jedem $\alpha > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha < \omega((O_1 \cap A) \cup \cdots \cup (O_n \cap A))$, wobei $(O_1 \cap A) \cup \cdots \cup (O_n \cap A)$ gemäß Lemma 14.12.4 regulär ist. Insbesondere gibt es ein kompaktes $K \subseteq (O_1 \cap A) \cup \cdots \cup (O_n \cap A) \subseteq A$ mit

$$\alpha < \omega(K) \leq \omega((O_1 \cap A) \cup \cdots \cup (O_n \cap A))\,,$$

was A auch als von innen regulär ausweist.

(iv) Da alle offenen Mengen von außen regulär sind, gilt voraussetzungsgemäß $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}_\omega$. Jede offene Menge lässt sich als Vereinigung gewisser und klarerweise höchstens abzählbar vieler $G \in \mathcal{G}$ schreiben, womit $\{O \in \mathcal{T} : \omega(O) < +\infty\} \subseteq \mathcal{R}_\omega$ gemäß (14.47). Insbesondere gilt die Voraussetzung von (iii) für $\{O_n : n \in \mathbb{N}\} := \mathcal{G}$. Wegen $\Omega = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ ist daher ω regulär.

(v) Sei $\mathcal{G}$ eine abzählbare Basis und $\mathcal{G}' := \{G \in \mathcal{G} : \omega(G) < +\infty\}$.

Für $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ folgt aus der Lokalkompaktheit die Existenz einer offenen Menge V_x mit kompaktem Abschluss und $x \in V_x \subseteq c\ell(V_x) \subseteq O$; siehe Korollar 12.17.4. Da $\mathcal{G}$ Basis ist, gibt es ein $G_x \in \mathcal{G}$ mit $x \in G_x \subseteq V_x$, wodurch sich auch $c\ell(G_x)$ ($\subseteq c\ell(V_x)$) als kompakt erweist. Aus $\omega(G_x) \leq \omega(c\ell(G_x)) < +\infty$ folgt $G_x \in \mathcal{G}'$, und wegen $O = \bigcup_{x\in O} G_x = \bigcup_{x\in O} c\ell(G_x)$ stellt sich $\mathcal{G}'$ als abzählbare Basis heraus.

Für $O \in \mathcal{G}'$ finden wir daher $x_n \in O$, $n \in \mathbb{N}$, mit $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} c\ell(G_{x_n})$. Wir folgern aus Fakta 14.3.9, 4, dass

$$\omega(O) = \lim_{N\to\infty} \omega\Big(\bigcup_{n=1}^{N} c\ell(G_{x_n})\Big).$$

Wegen der Kompaktheit von $\bigcup_{n=1}^{N} c\ell(G_{x_n})$ ist $O \in \mathcal{G}'$ von innen regulär, weshalb die Basis $\mathcal{G}'$ die Voraussetzungen von (iv) erfüllt.

❑

14.12.6 Proposition. *Sei* $(\Omega, \mathcal{T})$ *ein* Polnischer Raum, *gebe es also eine abzählbare dichte Teilmenge von* Ω *und eine Metrik* d *auf* Ω *mit* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ *derart, dass* $\langle\Omega, d\rangle$ *einen vollständig metrischen Raum abgibt. Ist* ω lokal endlich, *hat also jeder Punkt in* Ω *eine Umgebung endlichen Maßes, dann ist* ω *regulär.*

Beweis. Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Polnischer Raum mit einer Metrik d derart, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ und dass $\langle\Omega, d\rangle$ ein vollständig metrischer Raum ist. Gemäß Proposition 12.5.9 gibt es eine abzählbare Basis $\mathcal{G}$. Ist ω lokal endlich, so überzeugt man sich leicht, dass dann auch $\mathcal{G}' := \{B \in \mathcal{G} : \omega(B) < +\infty\}$ eine Basis abgibt. Um die Regularität von ω zu zeigen, reicht es nach Satz 14.12.5, (iv), die Regularität von innen aller $B \in \mathcal{G}'$ nachzuweisen.
Jedes offene $B \subseteq \Omega$ ist wegen[19] $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \Omega : d(x, \Omega \setminus B) \geq \frac{1}{n}\}$ die Vereinigung einer aufsteigenden Mengenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestehend aus abgeschlossenen Mengen. Können wir für ein offenes B mit $\omega(B) < +\infty$ zeigen, dass diese F_n von innen regulär sind, so gibt es zu jedem $\alpha < \omega(B) = \lim_{n\to\infty} \omega(F_n)$ ein n mit $\alpha < \omega(F_n)$ und infolge ein kompaktes $K \subseteq F_n \subseteq B$ mit $\alpha < \omega(K)$. Somit ist B von innen regulär und wir sind fertig.
Es reicht also zu zeigen, dass jedes abgeschlossene $F \subseteq \Omega$ mit $\omega(F) < +\infty$ von innen regulär ist. Nach Proposition 12.7.5 gibt es eine abzählbare und in F dichte Teilmenge $\{x_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq F$, womit $F \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_\eta(x_j)$ für jedes $\eta > 0$. Wegen Fakta 14.3.9, 4, gilt

$$\omega(F) = \lim_{k\to\infty} \omega\Big(F \cap \bigcup_{j=1}^{k} K_{\frac{1}{n}}(x_j)\Big).$$

[19] Der Abstand von einem Punkt zu einer Menge wurde in Definition 12.14.1 erklärt.

Insbesondere gibt es zu $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ immer ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\omega(F \setminus \bigcup_{j=1}^{k_n} K_{\frac{1}{n}}(x_j)) < \frac{\epsilon}{2^n}\,.$$

Wir wollen die Menge $K := F \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{k_n} K_{\frac{1}{n}}(x_j)$ als kompakte Teilmenge von F identifizieren. In der Tat ist K als abgeschlossene Teilmenge eines vollständig metrischen Raumes selber vollständig; vgl. Lemma 9.1.6. Zu $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n} < \delta$ ist $K = K \cap \bigcup_{j=1}^{k_n} K_{\frac{1}{n}}(x_j)$ eine Zerlegung von K in endlich viele Menge mit $d(K_{\frac{1}{n}}(x_j) \cap K) \leq \frac{2}{n} < \delta$. Also ist K auch total beschränkt und infolge kompakt; vgl. Satz 12.15.3. Aus

$$\omega(F \setminus K) = \omega\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F \setminus \bigcup_{j=1}^{k_n} K_{\frac{1}{n}}(x_j)\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

samt der Beliebigkeit von $\epsilon > 0$ folgt die Regularität von innen. ❑

14.12.7 Beispiel. Ist ω ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ oder allgemeiner auf $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, so ist ω nach Satz 14.12.5, (v), immer regulär. Eine abzählbare Basis ist dabei etwa die Menge aller offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten bzw. die Menge aller offenen d-dimensionalen Rechtecke mit rationalen Eckpunkten.

14.12.8 Bemerkung. Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein lokalkompakt Hausdorff-Raum und $\omega : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ein Riesz-reguläres Borelmaß wie in Definition 14.10.5. Jedes $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ ist nach dieser Definition von außen regulär. Im Falle $\omega(A) < +\infty$ gibt es ein $O \in \mathcal{T}$ mit $O \supseteq A$ und $\omega(O) < +\infty$. Da wieder nach Definition 14.10.5 alle offenen $P \subseteq O$ von innen regulär sind, erhalten wir aus Satz 14.12.5, (ii), dass unser gegebenes $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ mit $\omega(A) < +\infty$ sogar regulär ist.

14.12.9 Korollar. *Sei* $(\Omega, \mathcal{T})$ *ein Hausdorff-Raum und* $\omega : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ *ein Borelmaß derart, dass alle* $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ *mit* $\omega(A) < +\infty$ *von innen regulär*[20] *sind. Ist* $g : \Omega \to [0, +\infty]$ *integrierbar bezüglich* ω*, so ist das gemäß Lemma 14.7.1 definierte Maß* $g \cdot \omega : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty)$ *regulär und endlich.*

Beweis. Wegen $(g \cdot \omega)(\Omega) = \int_\Omega g\, d\omega < +\infty$ ist $g \cdot \omega$ endlich. Nach Satz 14.12.5, (i), genügt es zu zeigen, dass $g \cdot \omega$ von innen regulär ist. Dazu sei $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ und $\eta \in \mathbb{R}$ mit $\eta < (g \cdot \omega)(A)$ $(\in [0, +\infty]\,)$. Wegen $\omega(A) = \omega(A \cap \{x \in \Omega : 0 < g(x)\})$ und weil für $n \in \mathbb{N}$ und $A_n := A \cap \{x \in \Omega : \frac{1}{n} \leq g(x)\}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A \cap \{x \in \Omega : 0 < g(x)\} \quad \text{sowie} \quad A_m \subseteq A_{m+1} \;\; \text{für alle} \;\; m \in \mathbb{N}$$

gilt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\eta < g \cdot \omega(A_n)$; siehe Fakta 14.3.9, 4. Es folgt $\frac{1}{n} \cdot \omega(A_n) \leq (g \cdot \omega)(A_n) \leq (g \cdot \omega)(\Omega) < +\infty$. Nach Voraussetzung gibt es daher kompakte $K_j \subseteq A_n$, $j \in \mathbb{N}$,

[20] Im Fall $\omega(\Omega) < +\infty$ ist nach Satz 14.12.5, (i), diese Bedingung schon erfüllt, wenn alle offenen A von innen regulär sind. Für lokalkompakte Hausdorff-Räume $(\Omega, \mathcal{T})$ ist diese Bedingung nach Bemerkung 14.12.8 erfüllt, wenn ω Riesz-reguläre ist.

mit $\omega(A_n) - \omega(K_j) < \frac{1}{j}$. Indem wir K_j durch $K_1 \cup \cdots \cup K_j$ ersetzen, können wir die K_j auch als monoton wachsend voraussetzen, womit

$$\omega(A_n \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j) = \omega(A_n) - \lim_{j\to\infty} \omega(K_j) = 0\,,$$

und infolge $(g \cdot \omega)(A_n \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j) = 0$; siehe Proposition 14.7.2, (iv). Also gilt

$$\lim_{j\to\infty}(g \cdot \omega)(K_j) = (g \cdot \omega)(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j) = (g \cdot \omega)(A_n)\,,$$

wodurch $\eta < g \cdot \omega(K_j)$ für ein hinreichend großes $j \in \mathbb{N}$. Somit haben wir $(g \cdot \omega)(A) = \sup\{\omega(K) : \mathcal{K} \ni K \subseteq A\}$ nachgewiesen. ❑

14.12.10 Definition. Für einen Hausdorff-Raum $(\Omega, \mathcal{T})$ und ein Maß $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ nennt man

$$\operatorname{supp}\mu := \{x \in \omega : \mu(O) > 0 \ \text{ für alle } \ O \in \mathcal{T} \ \text{ mit } \ x \in O\}$$

den *Träger von* μ.

14.12.11 Fakta.

1. Der Träger eines Maßes μ ist immer abgeschlossen. Liegt nämlich x im Abschluss von $\operatorname{supp}\mu$ und gilt $x \in O \in \mathcal{T}$, so gibt es ein $y \in O \cap \operatorname{supp}\mu$, weshalb $\mu(O) > 0$ gemäß Definition 14.12.10.

2. Nach Definition 14.12.10 gilt $O \cap \operatorname{supp}\mu = \emptyset$ für jedes $O \in \mathcal{T}$ mit $\mu(O) = 0$.

3. Ist μ ein Maß mit der Eigenschaft, dass alle offenen $O \in \mathcal{T}$ von innen regulär sind, oder hat $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis, so ist $\Omega \setminus \operatorname{supp}\mu$ die bezüglich $\subseteq$ größte offene Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $\mu(O) = 0$, womit auch $\operatorname{supp}\mu = \emptyset$ zu $\mu = 0$ äquivalent ist. Um das zu zeigen, reicht es nach dem vorherigen Punkt, $\mu(\Omega \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ nachzuweisen:

   Zu $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}\mu$ gibt es ein $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x$ und $\mu(O_x) = 0$.

   Ist $K \subseteq \Omega \setminus \operatorname{supp}\mu$ kompakt, so gibt es $x_1, \dots, x_n \in K$ mit $K \subseteq O_{x_1} \cup \cdots \cup O_{x_n}$, wodurch $\mu(K) \le \mu(O_{x_1}) + \cdots + \mu(O_{x_n}) = 0$. Die vorausgesetzte Regularität von innen impliziert $\mu(\Omega \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$. Im Fall, dass alle offenen $O \in \mathcal{T}$ von innen regulär sind, erhalten wir $\mu(\Omega \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$.

   Im Fall, dass $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis hat, können wir O_x aus dieser Basis wählen, indem wir die ursprünglichen O_x nötigenfalls verkleinern. Also ist $\mathcal{M} := \{O_x : x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}\mu\}$ abzählbar, wodurch wieder $\mu(\Omega \setminus \operatorname{supp}\mu) \le \sum_{M\in\mathcal{M}} \mu(M) = 0$.

4. Gilt eine der Voraussetzungen aus dem vorherigen Punkt und ist $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, so folgt aus dem vorherigen Punkt und nach (14.17)

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \mathbb{1}_{\operatorname{supp}\mu} \, d\mu = \int_{\operatorname{supp}\mu} f \, d\mu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T})_{\operatorname{supp}\mu}}\,,$$

   wobei die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte Seite existiert.

5. Ist $(\Omega, \mathcal{T})$ lokalkompakt und Hausdorffsch, so folgt leicht aus Lemma 12.17.8 für ein Maß $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$, dass $x \in \operatorname{supp} \mu$ genau dann, wenn es zu jedem $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ eine stetige Funktion $f : \Omega \to [0, +\infty)$ gibt mit $\operatorname{supp} f \subseteq O$, $f(x) > 0$ und $\int_\Omega f \, d\mu > 0$.

   Insbesondere lässt sich in Satz 14.10.7 der Träger von ω alleine durch ϕ beschreiben.

14.13 Initiale σ-Algebren

In Analogie zu initialen Topologien betrachten wir initiale σ-Algebren; vgl. Satz 12.6.1.

14.13.1 Satz. *Für eine nichtleere Menge Ω, Messräume $(\Upsilon_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, und Abbildungen $f_i : \Omega \to \Upsilon_i$, $i \in I$, ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$ die bezüglich $\subseteq$ kleinste σ-Algebra auf Ω mit der Eigenschaft, dass für alle $i \in I$ die Funktion f_i $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-messbar ist; vgl. Lemma 14.4.3. Diese σ-Algebra wird die* initiale σ-Algebra *auf Ω bezüglich der Abbildungen f_i, $i \in I$, und der σ-Algebren $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, genannt.*
Ist zusätzlich $(\Sigma, \mathcal{B})$ ein beliebiger Messraum und $h : \Sigma \to \Omega$ eine Abbildung, so ist h dabei genau dann $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$-messbar, wenn $f_i \circ h : \Sigma \to \Upsilon_i$ für alle $i \in I$, $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}_i$-messbar ist.

Beweis. Ist C eine beliebige σ-Algebra auf Ω, so ist die $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-Messbarkeit von f_i für alle $i \in I$ äquivalent zu $f_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subseteq C$ für alle $i \in I$ und infolge auch äquivalent zu $\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq C$. Somit ist $\mathcal{A} := \mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$ die bezüglich $\subseteq$ kleinste σ-Algebra mit der Eigenschaft, dass für alle $i \in I$ die Funktion f_i $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-messbar ist.
Die $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$-Messbarkeit von $h : \Sigma \to \Omega$ ist nach Lemma 14.4.7 äquivalent zu $h^{-1}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j)) \subseteq \mathcal{B}$. Wegen $h^{-1}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j)) = \bigcup_{j \in I} (f_j \circ h)^{-1}(\mathcal{A}_j)$ ist das wiederum äquivalent zur gleichzeitigen $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}_i$-Messbarkeit aller $f_i \circ h : \Sigma \to \Upsilon_i$. ❑

14.13.2 Lemma. *Seien $\Omega \neq \emptyset$, $(\Upsilon_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, Messräume und $f_i : \Omega \to \Upsilon_i$, $i \in I$, Abbildungen. Werden die σ-Algebren $\mathcal{A}_i$ von Mengensystemen $\mathcal{K}_i$ erzeugt, also $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(\mathcal{K}_i)$, so stimmt die initiale σ-Algebra $\mathcal{A}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i))$ mit $\mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{K}_j))$ überein.*

Beweis. In der Tat gilt einerseits $\mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{K}_j)) \subseteq \mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$. Andererseits sind gemäß Lemma 14.4.7 alle f_i $\mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{K}_j))$-$\mathcal{A}_i$-messbar, weshalb auch $\mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j)) \subseteq \mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{K}_j))$, da $\mathcal{A}(\bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$ die bezüglich $\subseteq$ kleinste σ-Algebra auf Ω mit dieser Eigenschaft ist. ❑

14.13.3 Bemerkung. Die initiale σ-Algebra bezüglich einer einzigen Abbildung $f : \Omega \to \Upsilon$ und einer σ-Algebra C auf Υ ist $f^{-1}(C)$, da dieses Mengensystem schon eine σ-Algebra auf Υ bildet.

Auch das folgende Resultat ist das Analogon des entsprechenden Ergebnisses für initiale Topologien; vgl. Lemma 12.6.4.

14.13.4 Lemma. *Seien Ω und Υ_i, $i \in I$, nichtleere Mengen. Für jedes $i \in I$ sei $f_i : \Omega \to \Upsilon_i$ eine Abbildungen. Weiters seien zu jedem $i \in I$ eine Indexmenge J_i und zu jedem $j \in J_i$ ein*

Messraum $(\Sigma_{i,j}, \mathcal{A}_{i,j})$ *und eine Abbildung* $g_{i,j} : \Upsilon_i \to \Sigma_{i,j}$ *gegeben. Für jedes* $i \in I$ *versehen wir* Υ_i *mit der initialen* σ*-Algebra* $\mathcal{A}_i := \mathcal{A}(\bigcup_{j\in J_i} g_{i,j}^{-1}(\mathcal{A}_{i,j}))$.
Unter diesen Voraussetzungen stimmt die initiale σ*-Algebra auf* Ω *bezüglich* $f_i,\ i \in I$, *und* $\mathcal{A}_i,\ i \in I$, *mit der initialen* σ*-Algebra auf* Ω *bezüglich* $g_{i,j} \circ f_i : \Omega \to \Sigma_{i,j},\ i \in I, j \in J_i$, *und* $\mathcal{A}_{i,j},\ i \in I, j \in J_i$ *überein.*

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ irgendeine σ-Algebra auf Ω, so ist wegen der letzten Aussage von Satz 14.13.1, angewendet auf $(\Upsilon_i, \mathcal{A}_i)$, die Tatsache, dass für alle $i \in I$ die Funktion $f_i : \Omega \to \Upsilon_i$, $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}_i$-messbar ist, dazu äquivalent, dass für alle $i \in I, j \in J_i$ die Abbildungen $g_{i,j} \circ f_i : \Omega \to \Sigma_{i,j}$ $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}_{i,j}$-messbar ist.
Also stimmt die bezüglich $\subseteq$ kleinste aller σ-Algebren, welche die erste Bedingung erfüllen – das ist die initiale σ-Algebra auf Ω bezüglich $f_i,\ i \in I$, und $\mathcal{A}_i,\ i \in I$ – mit der bezüglich $\subseteq$ kleinsten aller σ-Algebren, welche die zweite Bedingung erfüllen, – das ist die initiale σ-Algebra auf Ω bezüglich $g_{i,j} \circ f_i : \Omega \to \Sigma_{i,j},\ i \in I, j \in J_i$, und $\mathcal{A}_{i,j},\ i \in I, j \in J_i$ – überein. ❑

14.13.5 Bemerkung. Sei Υ eine nichtleere Teilmenge von Ω, wobei Ω mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ versehen ist. Die initiale σ-Algebra bezüglich der Einbettungsabbildung $\iota : \Upsilon \to \Omega$, definiert durch $\iota(x) = x,\ x \in \Upsilon$, und $\mathcal{A}$ ist wegen Bemerkung 14.13.3

$$\iota^{-1}(\mathcal{A}) = \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}_\Upsilon\,,$$

und somit genau die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ auf Υ wie in Fakta 14.7.4. Die Aussage in Fakta 14.7.4, 3, erhalten wir dann auch aus Satz 14.13.1. Zudem stellt Lemma 14.13.2 eine Verallgemeinerung von Fakta 14.7.4, 2, dar.

14.13.6 Definition. Für Messräume $(\Upsilon_i, \mathcal{A}_i),\ i \in I$, nennt man die initiale σ-Algebra auf $\prod_{i\in I} \Upsilon_i$ bezüglich der Projektionen $\pi_j : \prod_{i\in I} \Upsilon_i \to \Upsilon_j,\ j \in I$ und $\mathcal{A}_j,\ j \in I$, die *Produkt-*σ*-Algebra* der $\mathcal{A}_j,\ j \in I$, und schreiben $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ dafür.

14.13.7 Fakta.

1. Die Produkt-σ-Algebra wird nach Satz 14.13.1 von der Menge aller Mengen der Bauart $\pi_j^{-1}(A) = \prod_{i\in I} A_i$ mit $A_j = A$ und $A_i = \Upsilon_i$ für $i \neq j$ erzeugt, wobei $j \in I$ und $A \in \mathcal{A}_j$ läuft. Da der Durchschnitt abzählbar vieler Mengen einer σ-Algebra wieder in dieser σ-Algebra liegt, enthält $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ alle Mengen der Bauart $\prod_{i\in I} B_i$, wo $B_i \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$ und $B_i = \Upsilon_i$ für alle bis auf abzählbar viele $i \in I$, und wird von diesen Mengen erzeugt.

2. Mit der Notation aus Definition 14.13.6 seien zusätzlich $\emptyset \neq \Omega_i \subseteq \Upsilon_i,\ i \in I$. Unmittelbar aus Lemma 14.13.4 erhalten wir, dass $\bigotimes_{i\in I} (\mathcal{A}_i)_{\Omega_i} = (\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i)_{\prod_{i\in I}\Omega_i}$.

3. Mit der Notation aus Lemma 14.13.4 gelte zusätzlich $\Upsilon_i = \prod_{j\in J_i} \Sigma_{i,j}$, $\Omega = \prod_{i\in I} \Upsilon_i$, $f_i = \pi_i$ und $g_{i,j} = \pi_{i,j}$, wobei π_i die Projektion von Ω auf Υ_i und $\pi_{i,j}$ die Projektion von Υ_i auf $\Sigma_{i,j}$ bezeichnet. Identifiziert man Ω mit $\prod_{i\in I, j\in J_i} \Sigma_{i,j}$, so erhalten wir aus Lemma 14.13.4, dass $\bigotimes_{i\in I} (\bigotimes_{j\in J_i} \mathcal{A}_{i,j}) = \bigotimes_{i\in I, j\in J_i} \mathcal{A}_{i,j}$.

4. Sind $(\Upsilon_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, so folgt mit Lemma 14.13.2, dass $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i) = \mathcal{A}(\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$. Die Produkttopologie $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ auf $\prod_{i\in I} \Upsilon_i$ ist initiale Topologie bezüglich der Abbildungen π_i und damit die kleinste Topologie, welche $\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ umfasst; vgl. Definition 12.7.6 und Satz 12.6.1. Insbesondere gilt für die Menge $\mathcal{A}(\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ aller Borelteilmengen von $\prod_{i\in I} \Upsilon_i$, dass
$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{A}(\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)\,.$$
5. Ist I abzählbar und erfüllt jeder der Räume $(\Upsilon_i, \mathcal{T}_i)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so gilt sogar
$$\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i) = \mathcal{A}(\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)\,.$$
Ist nämlich $\mathcal{B}_i$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}_i$ für jedes $i \in I$, so bildet
$$\mathcal{B} := \{\pi_{i_1}^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(B_n) : n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I, B_1 \in \mathcal{B}_{i_1}, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_{i_n}\}$$
eine abzählbare Basis von $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$. Insbesondere lässt sich jedes $O \in \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ als abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ schreiben. Wegen $\mathcal{B} \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i)$ folgt $O \in \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i)$; also $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i)$ und damit $\mathcal{A}(\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i) \subseteq \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i)$.
6. (*) Für ein endliches I seien $(\Upsilon_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, lokalkompakte Hausdorff-Räume. Bekannterweise ist dann auch $(\prod_{i\in I} \Upsilon_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum; vgl. Fakta 12.10.2, 6, und Satz 12.13.2. Die lineare Hülle $\mathcal{G}$ von
$$\{\prod_{i\in I} f_i \circ \pi_i : f_i \in C_{00}(\Upsilon_i, \mathbb{R}),\ i \in I\}$$
in $\mathbb{R}^{\prod_{i\in I} \Upsilon_i}$ bildet einen linearen Teilraum von $C_{00}(\prod_{i\in I} \Upsilon_i, \mathbb{R}) \subseteq C_0(\prod_{i\in I} \Upsilon_i, \mathbb{R})$; vgl. Definition 12.17.6. Zudem gilt $\mathcal{G} \cdot \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$, und wie man aus Lemma 12.17.8 unschwer folgert, ist $\mathcal{G}$ punktetrennend und nirgends identisch verschwindend. Wegen des Satzes von Stone-Weierstraß in der Version von Korollar 12.18.11 ist $\mathcal{G}$ bezüglich der Supremumsnorm dicht in $C_0(\prod_{i\in I} \Upsilon_i, \mathbb{R})$. Insbesondere ist jede Funktion aus $C_0(\prod_{i\in I} \Upsilon_i, \mathbb{R})$ gleichmäßiger und daher auch punktweiser Grenzwert einer Folge aus $\mathcal{G}$.

   Da nach Fakta 14.4.9 die Funktionen in $\mathcal{G}$ messbar bezüglich $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i)$ sind, ist auch jede Funktion aus $C_0(\prod_{i\in I} \Upsilon_i, \mathbb{R})$ und somit jede aus $C_{00}(\prod_{i\in I} \Upsilon_i, \mathbb{R})$ messbar bezüglich $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}(\mathcal{T}_i)$; siehe Fakta 14.4.9, 10.

14.14 Produktmaße

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Wir versehen $\Omega \times \Upsilon$ mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gemäß Definition 14.13.6 und setzen für $M \subseteq \Omega \times \Upsilon$ und $x \in \Omega$, $y \in \Upsilon$
$$M_x = \{\eta \in \Upsilon : (x, \eta) \in M\}, \quad M_y = \{\xi \in \Omega : (\xi, y) \in M\}\,.$$

Offenbar gilt $M_x = \pi_\Upsilon(M \cap (\{x\} \times \Upsilon))$ und $M_y = \pi_\Omega(M \cap (\Omega \times \{y\}))$, wobei π_Υ (π_Ω) die Projektion von $\Omega \times \Upsilon$ auf Υ (Ω) bezeichnet.

14.14.1 Lemma. *Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ derart, dass $C \subseteq A \times B$ für gewisse $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A) < +\infty, \nu(B) < +\infty$. Für alle $x \in \Omega$ und $y \in \Upsilon$ gilt dann $C_x \in \mathcal{B}$ und $C_y \in \mathcal{A}$. Zudem ist die Funktion $\Omega \ni x \mapsto \nu(C_x) \in [0, +\infty]$ und die Funktion $\Upsilon \ni y \mapsto \mu(C_y) \in [0, +\infty]$ messbar. Schließlich gilt*

$$\int_\Omega \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Upsilon \mu(C_y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,, \tag{14.49}$$

wobei für $C = E \times F$ mit $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{B}$ diese Integrale mit $\mu(E) \cdot \nu(F)$ übereinstimmen.

Beweis. Die Abbildung $\phi_y : \Omega \to \Omega \times \Upsilon$ definiert durch $\phi_y(\xi) = (\xi, y)$ ist nach Satz 14.13.1 messbar, da die Zusammensetzung dieser Funktion mit π_Υ konstant und mit π_Ω die Identität ist. Wir erhalten $C_y = \phi_y^{-1}(C) \in \mathcal{A}_A$; siehe Fakta 14.7.4 bzw. Bemerkung 14.13.5. Entsprechend zeigt man $C_x \in \mathcal{B}_B$. Somit sind die Funktionen $y \mapsto \mu(C_y)$ und $x \mapsto \nu(C_x)$ wohldefiniert auf Υ bzw. Ω mit Werten in $[0, \mu(A)]$ bzw. $[0, \nu(B)]$.
Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller $C \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{A \times B}$ derart, dass $\Omega \ni x \mapsto \nu(C_x)$ und $\Upsilon \ni y \mapsto \mu(C_y)$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ sind und zusätzlich (14.49) gilt. Für $C = E \times F$ mit $E \in \mathcal{A}_A$ und $F \in \mathcal{B}_B$ gilt $\nu((E \times F)_x) = \mathbb{1}_E(x) \cdot \nu(F)$ und $\mu((E \times F)_y) = \mathbb{1}_F(y) \cdot \mu(E)$, womit beide messbar von x bzw. y abhängen. Aus

$$\int_\Omega \nu((E \times F)_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega \mathbb{1}_E(x) \cdot \nu(F)\,\mathrm{d}\mu(x) = \mu(E) \cdot \nu(F) = \int_\Upsilon \mu((E \times F)_y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

erhalten wir $E \times F \in \mathcal{D}$, womit auch $A \times B \in \mathcal{D}$.
Für allgemeines $C \in \mathcal{D}$ ist $\nu(((A \times B) \setminus C)_x) = \nu((A \times B)_x) - \nu(C_x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \nu(B) - \nu(C_x)$ als Funktion in x und entsprechend $\mu(((A \times B) \setminus C)_y) = \mathbb{1}_B(y) \cdot \mu(A) - \mu(C_y)$ als Funktion in y messbar. Wegen

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu(((A \times B) \setminus C)_x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \mu(A) \cdot \nu(B) - \int_\Omega \nu(C_x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \mu(A) \cdot \nu(B) - \int_\Upsilon \mu(C_y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_\Upsilon \mu(((A \times B) \setminus C)_y)\,\mathrm{d}\nu(y)\end{aligned}$$

liegt mit C dann auch $(A \times B) \setminus C$ in $\mathcal{D}$. Für paarweise disjunkte $C_n \in \mathcal{D},\ n \in \mathbb{N}$, ist

$$\nu((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)_x) = \nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C_n)_x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((C_n)_x)$$

in x und $\mu((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)_y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(D_y)$ in y messbar. Wegen

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)_x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \nu((C_n)_x)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Upsilon \mu((C_n)_y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_\Upsilon \mu((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)_y)\,\mathrm{d}\nu(y)\end{aligned}$$

gilt auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \in \mathcal{D}$. Also ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System auf $A \times B$, welches das durchschnittsstabile Mengensystem $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cap (A \times B) = \{E \times F : E \in \mathcal{A}_A,\ F \in \mathcal{B}_B\}$ umfasst. Daraus folgt $\mathcal{D} = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{A\times B}$, da nach Lemma 14.9.4

$$\mathcal{D}((\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cap (A \times B)) \subseteq \mathcal{D} \subseteq (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{A\times B} = \mathcal{D}((\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cap (A \times B))\,.$$

❑

14.14.2 Bemerkung. Für das Folgende ist es hilfreich, die Menge $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu}$ aller C aus $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft, dass $C \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n$ für gewisse $A_n \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A_n) < +\infty$, $\nu(B_n) < +\infty$ herauszustellen. Indem man $A_1 \cup\cdots\cup A_n$ statt A_n und $B_1 \cup\cdots\cup B_n$ statt B_n betrachtet, kann man die $A_n,\ n \in \mathbb{N}$, und die $B_n,\ n \in \mathbb{N}$, als monoton wachsend voraussetzen. Damit sehen wir auch, dass $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu}$ genau die Menge aller $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ derart ist, dass $C \subseteq A \times B$ mit σ-endlichen $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Da die Vereinigung von abzählbar vielen σ-endlichen Mengen wieder σ-endlich ist, identifizieren wir $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu}$ als abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Vereinigungen.

14.14.3 Korollar. *Für ein bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ messbares $f : \Omega \times \Upsilon \to [0, +\infty]$ mit $f^{-1}(0, +\infty] \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu}$ ist $\xi \mapsto f(\xi, y)$ ($\eta \mapsto f(x, \eta)$) messbar auf Ω (Υ) für alle $y \in \Upsilon$ ($x \in \Omega$). Zudem sind $y \mapsto \int_\Omega f(\xi, y)\,d\mu(\xi)$ sowie $x \mapsto \int_\Upsilon f(x, \eta)\,d\nu(\eta)$ beide messbar. Schließlich gilt*

$$\int_\Omega \int_\Upsilon f(x, y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \int_\Upsilon \int_\Omega f(x, y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\,. \tag{14.50}$$

Beweis. Laut Voraussetzung haben wir $f^{-1}(0, +\infty] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n$, wobei $A_n \in \mathcal{A}$, $B_n \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A_n) < +\infty$, $\nu(B_n) < +\infty$ und $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; vgl. Bemerkung 14.14.2. Laut Lemma 14.4.10 gilt $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ für eine monoton wachsende Folge $f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, womit auch $f = \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_{A_n\times B_n}$. Dabei bildet auch $f_n \cdot \mathbb{1}_{A_n\times B_n},\ n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge, und jedes $f_n \cdot \mathbb{1}_{A_n\times B_n}$ ist eine Linearkombination von Funktionen der Bauart $\mathbb{1}_C$, wobei C die Voraussetzungen von Lemma 14.14.1 erfüllt.
Für $g = \mathbb{1}_C$ folgt aus $g(\xi, y) = \mathbb{1}_{C_y}(\xi)$, $g(x, \eta) = \mathbb{1}_{C_x}(\eta)$ sowie aus $\int_\Omega g(\xi, y)\,d\mu(\xi) = \mu(C_y)$, $\int_\Upsilon g(x, \eta)\,d\nu(\eta) = \nu(C_x)$ wegen Lemma 14.14.1 die Messbarkeit von $\xi \mapsto g(\xi, y)$, $\eta \mapsto g(x, \eta)$ sowie von $y \mapsto \int_\Omega g(\xi, y)\,d\mu(\xi)$ und $x \mapsto \int_\Upsilon g(x, \eta)\,d\nu(\eta)$, wobei

$$\int_\Omega \int_\Upsilon g(x, y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \int_\Upsilon \int_\Omega g(x, y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\,.$$

Wegen der Linearität der Messbarkeit und des Integrals gelten diese Tatsachen auch für $g = f_n \cdot \mathbb{1}_{A_n\times B_n}$. Aus Fakta 14.4.9 und Fakta 14.5.3 erkennen wir schließlich, dass diese Tatsachen auch für $g = \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_{A_n\times B_n} = f$ zutreffen. ❑

Wie man sich leicht überzeugt, bildet die Menge $\mathcal{F}((\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu})$ aller bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ messbarer Funktionen $f : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu}$ einen unter $|.|$ abgeschlossenen Raum von Funktionen wie in Definition 14.2.1; siehe Fakta 14.4.9 und

Bemerkung 14.14.2. Zudem definieren wir $\phi : \mathcal{F}((\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu})_+ \to [0,+\infty]$, indem $\phi(f)$ der Wert der Integrale in (14.50) zugeordnet wird.

Für eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}((\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu})_+$ ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{F}((\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu})_\uparrow^{\mathbb{N}}$ bezüglich $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ messbar, hat Werte in $[0,+\infty]$ und erfüllt $f^{-1}(0,+\infty] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu}$; vgl. Bemerkung 14.14.2. Dabei gilt wegen Fakta 14.5.3, 3,

$$\lim_{n\to\infty}\phi(f_n) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty}\int_\Upsilon f_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Omega\int_\Upsilon f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,. \tag{14.51}$$

Umgekehrt liegt wegen Lemma 14.4.10 jede bezüglich $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ messbare Funktion mit Werten in $[0,+\infty]$ und $f^{-1}(0,+\infty] \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu}$ in $\mathcal{F}((\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu})_\uparrow^{\mathbb{N}}$. Aus (14.51) und aus der Linearität von Integralen erkennt man auch, dass ϕ ein $\mathbb{N}$-fortsetzbares Funktional ist. Weiters folgt daraus für $f \in \mathcal{F}((\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu})_\uparrow^{\mathbb{N}}$ mit Korollar 14.14.3

$$\phi_\uparrow^{\mathbb{N}}(f) = \int_\Omega\int_\Upsilon f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_\Upsilon\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\,. \tag{14.52}$$

14.14.4 Satz (*von Fubini*)**.** *Sind $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ und $(\Upsilon,\mathcal{B},\nu)$ Maßräume, so gibt es ein Maß $\mu\otimes\nu : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,+\infty]$ derart, dass $(\mu\otimes\nu)(E\times F) = \mu(E)\cdot\nu(F)$ für alle $E\in\mathcal{A}$, $F\in\mathcal{B}$, $\mu(A) < +\infty, \nu(B) < +\infty$ und dass für jede bezüglich $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ messbare Funktionen $f : \Omega\times\Upsilon \to [0,+\infty]$ mit $f^{-1}(0,+\infty] \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu}$*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Upsilon} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int_\Omega\int_\Upsilon f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_\Upsilon\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\,.\end{aligned} \tag{14.53}$$

Jedes bezüglich $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ messbare $f : \Omega\times\Upsilon \to [-\infty,+\infty]$ mit $f^{-1}([-\infty,+\infty]\setminus\{0\}) \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu}$ ist genau dann integrierbar bezüglich $\mu\otimes\nu$, wenn einer der beiden iterierten Integrale[21] *$\int_\Omega\int_\Upsilon |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$, $\int_\Upsilon\int_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)$ endlich ist. In dem Fall sind*

$$L := \{x\in\Omega : \int_\Upsilon |f(x,y)|\,\mathrm{d}\nu(y) = +\infty\} \;\; \textit{und} \;\; N := \{y\in\Upsilon : \int_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x) = +\infty\}$$

Nullmengen aus $\mathcal{A}$ beziehungsweise $\mathcal{B}$. Schließlich ist $x \mapsto \int_\Upsilon f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ über $\Omega\setminus L$ nach μ und $y \mapsto \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ über $\Upsilon\setminus N$ nach ν integrierbar, wobei[22]

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Upsilon} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int_{\Omega\setminus L}\int_\Upsilon f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\Upsilon\setminus N}\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y)\,.\end{aligned} \tag{14.54}$$

[21] Wegen Korollar 14.14.3 sind diese iterierten Integrale ohnehin gleich.

[22] Oft wird stillschweigend über die Nullmengen $L \subseteq \Omega$ und $N \subseteq \Upsilon$ hinweggegangen und statt (14.54) einfach (14.53) geschrieben, obwohl diese Nullmengen von Bedeutung sind. Im Allgemeinen ist nämlich $y \mapsto f(x,y)$ nicht für alle $x\in\Omega$ und $x \mapsto f(x,y)$ nicht für alle $y\in\Upsilon$ integrierbar.

Beweis. Aus Lemma 14.8.10 folgt $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu} \subseteq \mathcal{A}(\phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$. Für festes $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und beliebiges $f \in \mathcal{F}((\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$ gilt $f^{-1}(0, +\infty] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n$, wobei $A_n \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A_n) < +\infty$, $\nu(B_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also folgt $C := D \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times B_n \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu} \subseteq \mathcal{A}(\phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$. Wegen $f \cdot \mathbb{1}_C = f \cdot \mathbb{1}_D$ und $f \cdot \mathbb{1}_{C^c} = f \cdot \mathbb{1}_{D^c}$ gilt somit

$$\phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(f) = \phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_C) + \phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{C^c}) = \phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_D) + \phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(f \cdot \mathbb{1}_{D^c}),$$

was gemäß Lemma 14.8.9 bedeutet, dass $D \in \mathcal{A}(\phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$; also $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}(\phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow})$.
Bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ messbare Funktionen $f : \Omega \times \Upsilon \to [0, +\infty]$ mit $f^{-1}(0, +\infty] \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu}$ gehören zu $\mathcal{F}((\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu})^{\mathbb{N}}_{\uparrow}$. Gemäß Korollar 14.8.8 gilt

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}(f) = \phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow}(f),$$

wobei $\mu \otimes \nu$ das gemäß Satz 14.8.7 von $\phi^{\mathbb{N}}_{\uparrow\downarrow}$ induzierte und auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ eingeschränkte Maß ist. Wir erhalten die Gültigkeit von (14.53) daher sofort aus (14.52). Für $f = \mathbb{1}_{E\times F}$ mit $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{B}$, $\mu(A) < +\infty$, $\nu(B) < +\infty$ folgt aus (14.53), dass $(\mu \otimes \nu)(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$. Ist schließlich $f : \Omega \times \Upsilon \to [-\infty, +\infty]$ bezüglich $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ messbar mit $f^{-1}([-\infty, +\infty] \setminus \{0\}) \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu}$, so ist die Integrierbarkeit von f gemäß Fakta 14.6.2, 1, äquivalent zu $\int_{\Omega\times\Upsilon} |f(x, y)|\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) < +\infty$, was wegen (14.53) angewendet auf $|f|$ äquivalent zur behaupteten Bedingung über die iterierten Integrale ist.
In dem Fall gilt also $\int_\Omega \int_\Upsilon |f(x, y)|\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty$. Gemäß Fakta 14.5.3, 7, ist dann $L := \{x \in \Omega : \int_\Upsilon |f(x, y)|\, \mathrm{d}\nu(y) = +\infty\}$ eine μ-Nullmenge. Wegen (14.53) und Fakta 14.5.3, 6, gilt für $f_+ = \max(f, 0)$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Upsilon} f_+(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f_+(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{\Omega\setminus L} \int_\Upsilon f_+(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

wobei das innere Integral für alle $x \in \Omega \setminus L$ sicherlich endlich ist. Dasselbe gilt für $f_- = -\max(-f, 0)$. Wegen Fakta 14.6.2, 4, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times\Upsilon} f(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) &= \int_{\Omega\times\Upsilon} f_+(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) - \int_{\Omega\times\Upsilon} f_-(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y)\\ &= \int_{\Omega\setminus L} \int_\Upsilon f_+(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) - \int_{\Omega\setminus L} \int_\Upsilon f_-(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{\Omega\setminus L} \Big(\int_\Upsilon f_+(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y) - \int_\Upsilon f_-(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y) \Big)\, \mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{\Omega\setminus L} \int_\Upsilon f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit in (14.54) zeigt man genauso. ❑

14.14.5 Bemerkung. Das in Satz 14.14.4 konstruierte Maß $\mu \otimes \nu$ heißt *Produktmaß* von μ und ν. Sind Ω und Υ beide σ-endlich, gilt also $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu,\nu} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, so ist wegen Satz 14.9.5 das Maß $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ eindeutig durch $(\mu \otimes \nu)(E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$ bestimmt, da dann $\{E \times F : E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{B}\}$ einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ abgibt.

14.14.6 Bemerkung. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^r, \mathcal{A}(\mathcal{T}^r), \lambda_r)$ und $(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}^s, \mathcal{A}(\mathcal{T}^s), \lambda_s)$ für $r, s \in \mathbb{N}$. Für alle $p \in \mathbb{N}$ ist λ_p σ-endlich und der topologische Raum $(\mathbb{R}^p, \mathcal{T}^p)$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Aus Bemerkung 14.14.5 und aus Fakta 14.13.7, 5, erhalten wir $\mathcal{A}(\mathcal{T}^r) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{T}^s) = \mathcal{A}(\mathcal{T}^{r+s})$ auf $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^{r+s}$.
Jedes dyadische Rechteck $(a, b] \in \mathcal{D}_{r+s}$ wie in Fakta 14.11.3 lässt sich als $(a, b] = (\pi_r(a), \pi_r(b)] \times (\pi_s(a), \pi_s(b)]$ mit $(\pi_r(a), \pi_r(b)] \in \mathcal{D}_r$, $(\pi_s(a), \pi_s(b)] \in \mathcal{D}_s$ schreiben, wobei $\pi_r : \mathbb{R}^{r+s} \to \mathbb{R}^r$ ($\pi_s : \mathbb{R}^{r+s} \to \mathbb{R}^s$) die Projektion auf die vorderen r (hinteren s) Einträge ist. Wie in Fakta 14.11.3 ausgeführt, gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_{r+s}(a, b] &= \prod_{j=1}^{r+s}(b_j - a_j) = \prod_{j=1}^{r}(b_j - a_j) \cdot \prod_{j=r+1}^{r+s}(b_j - a_j) \\
&= \lambda_r(\pi_r(a), \pi_r(b)] \cdot \lambda_s(\pi_s(a), \pi_s(b)] \\
&= (\lambda_r \otimes \lambda_s)\big((\pi_r(a), \pi_r(b)] \times (\pi_s(a), \pi_s(b)]\big),
\end{aligned}$$

womit λ_{r+s} und $\lambda_r \otimes \lambda_s$ auf dem durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathcal{D}_{r+s}$ von $\mathcal{A}(\mathcal{T}^r) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{T}^s) = \mathcal{A}(\mathcal{T}^{r+s})$ übereinstimmen. Wegen Satz 14.9.5 schließen wir auf $\lambda_{r+s} = \lambda_r \otimes \lambda_s$.

14.14.7 Beispiel. Für $d_1, d_2, d \in \mathbb{N}$ mit $d = d_1 + d_2$ kann man das Maß einer Borelmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ mit $M \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ wegen Satz 14.14.4 durch

$$\lambda_d(M) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_M \, d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \mathbb{1}_A(x, y) \, d\lambda_{d_2}(y) \, d\lambda_{d_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \lambda_{d_2}(M_x) \, d\lambda_{d_1}(x) \quad (14.55)$$

berechnen, wobei $M_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x, y) \in M\}$.
Ist insbesondere M von der Bauart

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 < y < f(x)\}$$

mit einer messbaren Funktion $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$, so folgt $M = \bigcup_{0 \le q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(q, +\infty) \times (0, q) \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^{d+1})$. Aus $\lambda_1(M_x) = f(x)$ erhalten wir

$$\lambda_{d+1}(M) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\lambda_d(x).$$

Im Falle von $d = 1$ und einer Riemann-integrierbaren Funktion f (mit 0 außerhalb seines kompakten Definitionsintervalls fortgesetzt) erkennen wir damit, dass die bekannte Interpretation des Riemann-Integrals als Fläche unter dem Funktionsgraphen im Sinne der Maßtheorie eine korrekte ist.

14.14.8 Beispiel. Sei $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^n)$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ messbar. Man betrachte f als Teilmenge

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D\}.$$

von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Als Nullstellenmenge der auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ messbaren Funktion $(x, y) \mapsto y - f(x)$ liegt M in $\mathcal{A}(\mathcal{T}^{m+n})$, wobei $\lambda_{m+n}(\Gamma(f)) = 0$, wie man leicht aus (14.55) folgert.

14.14.9 Bemerkung. Sei $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $T(x) = Ax + b$ affin derart, dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ singulär ist, also $\det A = 0$. Folglich ist $A(\mathbb{R}^d)$ ein echter linearer Teilraum von $\mathbb{R}^d$, womit $VA(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}$ für ein $d_1 \in \{0, \dots, d-1\}$ und eine geeignete lineare Bijektion $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gilt.
Wegen Beispiel 14.14.8 folgt $0 = \lambda_d(\mathbb{R}^{d_1} \times \{0\}) = |\det V| \cdot \lambda_d(A(\mathbb{R}^d))$. Infolge ist $T(B)$ für alle $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ in einer λ_d-Nullmenge aus $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ enthalten. Gemäß Bemerkung 14.11.4 gilt $T(B) \in \mathcal{L}^d$ mit $\bar{\lambda}_d(T(B)) = 0$.

14.14.10 Beispiel. Wir definieren die *Betafunktion* $B : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

als absolut konvergentes uneigentliches Riemann-Integral. Diese Funktion steht in einem engen Zusammenhang zur Gammafunktion; vgl. Beispiel 14.11.10. In der Tat erhalten wir mit der einfachen Substitution $u = v - t$ und durch die Interpretation des uneigentlichen Riemann-Integrals als Lebesgue-Integral gemäß Proposition 14.11.7

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\cdot\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}u^{y-1}\mathrm{e}^{-t-u}du\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} t^{x-1}(v-t)^{y-1}\mathrm{e}^{-v}dv\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(t,+\infty)}(v)t^{x-1}(v-t)^{y-1}\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}\lambda(v)\right)\mathrm{d}\lambda(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_M(t,v)\cdot t^{x-1}(v-t)^{y-1}\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}\lambda_2(t,v).\end{aligned}$$

Die vierte Gleichheit folgt dabei wegen $\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)\cdot\mathbb{1}_{(t,+\infty)}(v) = \mathbb{1}_M(t, v)$ für $M := \{(t, v) \in \mathbb{R}^2 : v > t > 0\}$ aus dem Satz von Fubini, Satz 14.14.4, zusammen mit Bemerkung 14.14.6, wenn wir beachten, dass der Integrand aufgrund der Stetigkeit $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$-messbar und nichtnegativ ist. Wendet man den Satz von Fubini nochmals mit umgekehrter Integrationsreihenfolge an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\cdot\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{v} t^{x-1}(v-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-v}dv\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{1} w^{x-1}(1-w)^{y-1}\,\mathrm{d}w\right)v^{x+y-1}\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v = B(x,y)\cdot\Gamma(x+y),\end{aligned}$$

und damit

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{14.56}$$

14.14.11 Beispiel. Wir wollen für $d \in \mathbb{N}$ das d-dimensionale Lebesgue Maß der Kugel $K_R^d(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq R\}$ mit Radius $R > 0$ bestimmen. Zunächst sei bemerkt, dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{d+1}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{d(d-2)\cdot\dots\cdot 1}{(d+1)(d-1)\cdot\dots\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}\,, & \text{falls } d \text{ ungerade}\,, \\ \\ \frac{d(d-2)\cdot\dots\cdot 2}{(d+1)(d-1)\cdot\dots\cdot 1}\,, & \text{falls } d \text{ gerade}\,, \end{cases} \tag{14.57}$$

wie man unschwer durch Induktion nach d mit Hilfe zweimaliger partieller Integration nachweist. Wir wollen

$$\lambda_d(K_R^d(0)) = \begin{cases} \frac{2(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{d(d-2)\cdot\dots\cdot 1} \cdot R^d\,, & \text{falls } d \text{ ungerade}\,, \\ \\ \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{d(d-2)\cdot\dots\cdot 2} \cdot R^d\,, & \text{falls } d \text{ gerade}\,, \end{cases} \tag{14.58}$$

ebenfalls durch Induktion nach d zeigen. Im Falle $d = 1$ ist diese Formel wegen $\lambda_d(K_R^1(0)) = \lambda_1([-R, +R]) = 2R$ richtig. Für allgemeines $d \in \mathbb{N}$ und $x \in [-R, +R]$ gilt

$$\begin{aligned} \left(K_R^{d+1}(0)\right)_x &= \{y \in \mathbb{R}^d : (x, y) \in K_R^{d+1}(0)\} = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|_2^2 \leq R^2 - x^2\} \\ &= K^d_{\sqrt{R^2-x^2}}(0) = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot K_1^d(0)\,. \end{aligned}$$

Lemma 14.11.6 angewendet auf $T = \operatorname{diag}(\sqrt{R^2 - x^2}, \dots, \sqrt{R^2 - x^2}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ergibt $\lambda_d((K_R^{d+1}(0))_x) = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^d \cdot \lambda_d(K_1^d(0))$. Daraus und aus $\left(K_R^{d+1}(0)\right)_x = \emptyset$ im Falle $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, +R]$ folgt wegen (14.55)

$$\lambda_{d+1}(K_R^{d+1}(0)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_d((K_R^{d+1}(0))_x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[-R,R]} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^d \cdot \lambda_d(K_1^d(0))\,\mathrm{d}\lambda(x)\,.$$

Die Interpretation der rechten Seite dieses Ausdrucks als Riemann-Integral und die Substitution $x = R\cos t$ ergeben

$$\lambda_{d+1}(K_R^{d+1}(0)) = \lambda_d(K_1^d(0)) \cdot 2\,R^{d+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{d+1}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Eine angenommene Gültigkeit von (14.58) für $d \in \mathbb{N}$ zusammen mit (14.57) impliziert folglich (14.58) für $d + 1$.

14.14.12 Bemerkung (*)**.** Sind $(\Omega, \mathcal{T}), (\Upsilon, \mathcal{U})$ lokalkompakte Hausdorff-Räume, so ist auch der Produktraum $\Omega \times \Upsilon$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{U}$ ein solcher. Wie in Fakta 14.13.7, 4, gesehen gilt $\mathcal{A}(\mathcal{T} \times \mathcal{U}) \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{U})$. Wir nehmen zusätzlich $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ und $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{U}) \to [0, +\infty]$ als Riesz-reguläre Borelmaße auf $(\Omega, \mathcal{A}(\mathcal{T}))$ bzw. $(\Upsilon, \mathcal{A}(\mathcal{U}))$ an.
Jedes $f \in C_{00}(\Omega \times \Upsilon, \mathbb{R})$ ist bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{U})$ messbar; vgl. Fakta 14.13.7, 6. Außerdem verschwindet f außerhalb einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \Omega \times \Upsilon$. Weil auch

$\pi_\Omega(K) \times \pi_\Upsilon(K)$ ($\supseteq K$) kompakt ist, können wir $K = K_1 \times K_2$ mit kompakten $K_1 \subseteq \Omega, K_2 \subseteq \Upsilon$ annehmen, womit $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \in (\mathcal{A}(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{U}))_{\mu,\nu}$ und

$$\int_\Omega \int_\Upsilon |f(x,y)| \, d\nu(y) \, d\mu(x) \leq \|f\|_\infty \cdot \int_\Omega \int_\Upsilon \mathbb{1}_{K_1}(x) \cdot \mathbb{1}_{K_2}(y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \|f\|_\infty \cdot \mu(K_1) \cdot \nu(K_2)$$

endlich ist. Wegen Satz 14.14.4 gilt

$$\phi(f) := \int_{\Omega \times \Upsilon} f(x,y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_\Omega \int_\Upsilon f(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \int_\Upsilon \int_\Omega f(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) ,$$

und man überprüft leicht, dass die damit definierte Abbildung $\phi : C_{00}(\Omega \times \Upsilon, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional ist. Nach Satz 14.10.7 erhalten wir $\phi(f) = \int_{\Omega \times \Upsilon} f \, d\omega$ für alle $f \in C_{00}(\Omega \times \Upsilon, \mathbb{R})$ mit einem eindeutigen, Riesz-regulären Maß $\omega : \mathcal{A}(\mathcal{T} \times \mathcal{U}) \to [0, +\infty]$. Für $C \in (\mathcal{A}(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{U}))_{\mu,\nu}$ ($\subseteq \mathcal{A}(\mathcal{T} \times \mathcal{U})$) wollen wir $\omega(C) = (\mu \otimes \nu)(C)$ nachweisen. Dazu können wir wegen Fakta 14.3.9 und Bemerkung 14.14.2 annehmen, dass $C \subseteq O \times P$ mit $O \in \mathcal{A}(\mathcal{T}), P \in \mathcal{A}(\mathcal{U}), \mu(O) < +\infty, \nu(P) < +\infty$. Weil μ und ν beide Riesz-regulär sind, können wir zusätzlich $O \in \mathcal{T}, P \in \mathcal{U}$ voraussetzen.
Für $A \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{U}$ mit $A \subseteq O, B \subseteq P$, kompakte $L \subseteq A \times B, L_1 \subseteq A, L_2 \subseteq B$ mit $\pi_\Omega(L) \subseteq L_1$, $\pi_\Upsilon(L) \subseteq L_2$ und nach Lemma 12.17.8 existierende $g \in C_{00}^+(\Omega, \mathbb{R})$ und $h \in C_{00}^+(\Upsilon, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{1}_{L_1} \leq g \leq \mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_{L_2} \leq h \leq \mathbb{1}_B$ liegt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \Upsilon} g(x) \cdot h(y) \, d\omega(x,y) = \phi((x,y) \mapsto g(x) \cdot h(y)) &= \int_{\Omega \times \Upsilon} g(x) \cdot h(y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) \\ &= \int_\Omega g \, d\mu \cdot \int_\Upsilon h \, d\nu \end{aligned}$$

im Intervall $[\mu(L_1) \cdot \nu(L_2), \mu(A) \cdot \nu(B)]$ und wegen $\mathbb{1}_L(x,y) \leq \mathbb{1}_{L_1 \times L_2}(x,y) \leq g(x) \cdot h(y) \leq \mathbb{1}_{A \times B}(x,y)$ auch im Intervall $[\omega(L), \omega(A \times B)]$. Da für hinreichend großes L bzw. L_1, L_2 diese Intervalle wegen der Regularität von innen aller offenen Mengen von beliebig kleiner Länge sind, folgt $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) = \omega(A \times B)$.
Also stimmen ω und $\mu \otimes \nu$ auf dem durchschnittsstabilen Erzeuger $\{A \times B : A \in \mathcal{T}_O, B \in \mathcal{U}_P\}$ von $(\mathcal{A}(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{U}))_{O \times P} = (\mathcal{A}(\mathcal{T})_O) \otimes (\mathcal{A}(\mathcal{U})_P) = \mathcal{A}(\mathcal{T}_O) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{U}_P)$ überein; vgl. Fakta 14.13.7 und Fakta 14.10.2, 4. Wegen Satz 14.9.5 stimmen sie dann auf $(\mathcal{A}(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{U}))_{O \times P}$ überein, womit auch $\omega(C) = (\mu \otimes \nu)(C)$.

14.15 Integrale komplexwertiger und vektorwertiger Funktionen

Wir wollen zunächst wiederholen, wie das Lebesguesche Integral von Funktionen mit Werten in $[0, +\infty]$ und dann in $[-\infty, +\infty]$ eingeführt wurde. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein *Maßraum*, also Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ ein Maß.
Ausgehend von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ haben wir in Lemma 14.3.10 einer $[0, +\infty)$-wertigen Treppenfunktion $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mathbb{1}_{A_j}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in (0, +\infty)$ und paarweise

disjunkten $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ den Wert

$$\phi(f) := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \mu(A_j)$$

zugeordnet. Dieses ϕ hatte die nötigen Eigenschaften, um Lemma 14.3.5 anzuwenden, womit ϕ auf die Menge aller punktweisen Grenzwerte von monoton wachsenden Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit Werten in $[0, +\infty)$ erweitertet werden konnte. Diese Menge von punktweisen Grenzwerten stimmt gemäß Lemma 14.4.10 überein mit der Menge aller bezüglich $\mathcal{A}$ messbaren Funktionen $f : \Omega \to [0, +\infty]$. Also konnten wir in Definition 14.5.2 einer jeden messbaren Funktionen $f : \Omega \to [0, +\infty]$ durch

$$\int_\Omega f \, d\mu := \lim_{k\to\infty} \phi(f_k) \;\; (\in [0, +\infty]\,)$$

auf eindeutige Weise ihr Integral nach μ zuordnen.
Eine bezüglich $\mathcal{A}$ messbare Funktion $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ haben wir integrierbar genannt, wenn $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$. In diesem Fall haben wir

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega \max(f, 0) \, d\mu - \int_\Omega - \min(f, 0) \, d\mu \;\; (\in \mathbb{R}\,)$$

gesetzt; vgl. Definition 14.6.1. Für $\mathbb{R}^d$-wertige Funktionen liegt folgende Definition nahe.

14.15.1 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $d \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\pi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die j-te Komponente. Wir nennen eine Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ bezüglich $\mathcal{A}$ *messbar*, wenn jede Komponentenfunktion $\pi_j \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, von f bezüglich $\mathcal{A}$ messbar ist.
Eine Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt *integrierbar*, wenn jede Komponentenfunktion von f integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_\Omega f \, d\mu := \left(\int_\Omega \pi_j \circ f \, d\mu \right)_{j=1,\dots,d} \;\; (\in \mathbb{R}^d\,)\,.$$

Mit $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ wollen wir die Menge aller auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ integrierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ bezeichnen; vgl. Definition 14.6.1.

Wegen $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ haben wir somit auch definiert, was die Messbarkeit bzw. die Integrierbarkeit einer komplexwertigen Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ bedeutet. Für integrierbare $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt insbesondere

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \, d\mu\,.$$

14.15.2 Fakta.

1. Bezeichnet $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ die σ-Algebra der Borelmengen auf $\mathbb{R}^d$ wie in Definition 14.4.6, so ist wegen Satz 14.13.1 zusammen mit Fakta 14.13.7, 5, eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ genau dann messbar im Sinne von Definition 14.15.1, wenn sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$ messbar ist.

2. Man zeigt auf elementare Weise, dass $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ genau dann eine $\mathbb{R}^d$-wertige *Treppenfunktion* ist, also $f = \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{A_k} a_k$ mit $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^d$ und $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ gilt, wenn $\pi_j \circ f$ für alle $j = 1, \ldots, d$ eine reellwertige Treppenfunktion ist; siehe Definition 14.2.4 und Lemma 14.2.6. Im Falle $\mu(A_k) < +\infty$, $k = 1, \ldots, m$, ist f integrierbar mit $\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{k=1}^m \mu(A_k) a_k$.

3. Man überprüft durch Anwendung der bekannten Eigenschaften $\mathbb{R}$-wertiger, messbarer Funktion leicht, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ auch αf und $f + g$ messbar sind.

   Sind f und g sogar integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist es auch $\alpha f + \beta g$ und es gilt
$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu + \beta \int_\Omega g \, d\mu \,,$$
   womit $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

4. Da jede der Normen $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ als Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ stetig ist, sind für messbares $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ auch die Zusammensetzungen $\|f(.)\|_1, \|f(.)\|_2, \|f(.)\|_\infty$ messbare Abbildungen von Ω nach $\mathbb{R}$. Weil für $x \in \Omega$ und $j = 1, \ldots, d$
$$|\pi_j \circ f(x)| \le \|f(x)\|_\infty \le \|f(x)\|_2 \le \|f(x)\|_1 = |\pi_1 \circ f(x)| + \cdots + |\pi_d \circ f(x)| \quad (14.59)$$
   gilt, ist f genau dann integrierbar, wenn $\int_\Omega \|f(x)\|_m \, d\mu(x) < +\infty$ für ein $m \in \{1, 2, \infty\}$.

5. Für komplexwertige messbare Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ist wegen $\mathrm{Re}(f \cdot g) = (\mathrm{Re}\, f) \cdot (\mathrm{Re}\, g) - (\mathrm{Im}\, f) \cdot (\mathrm{Im}\, g)$ und $\mathrm{Im}(f \cdot g) = (\mathrm{Re}\, f) \cdot (\mathrm{Im}\, g) + (\mathrm{Im}\, f) \cdot (\mathrm{Re}\, g)$ auch $f \cdot g$ messbar; vgl. Fakta 14.4.9, 9.

   Ist $f(x)$ immer ungleich Null, so ist wegen der Stetigkeit und der damit verbundenen $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$-$\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$ Messbarkeit von $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf[23] $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Funktion $\frac{1}{f}$ auch messbar.

6. Wegen (14.59) gilt für ein messbares $f : \Omega \to \mathbb{C}$ genau dann $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, wenn $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$. Daraus folgt leicht, dass für integrierbare $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar ist, wobei
$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu + \beta \int_\Omega g \, d\mu \,,$$
   wie man durch Zerlegung von von $\alpha f + \beta g$ in Real- und Imaginärteil erkennt. Insbesondere ist $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ sogar ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

7. Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ gilt
$$\left| \int f \, d\mu \right| \le \int |f| \, d\mu \,.$$
   Diese Ungleichung zeigt man zunächst für komplexwertige Treppenfunktionen im Sinne von 2, und allgemein durch Approximation von $(\mathrm{Re}\, f)_\pm$ und $(\mathrm{Im}\, f)_\pm$ mit einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen wie in Lemma 14.4.10.

[23] Siehe Fakta 14.10.2, 4.

8. Offenbar gilt fürs komplexe Konjugieren

$$\overline{\int_\Omega f \, d\mu} = \int_\Omega \overline{f} \, d\mu$$

   in dem Sinne, dass die Existenz des Integrales links die Existenz des Integrales rechts impliziert und umgekehrt.

9. Durch Betrachtung der einzelnen Komponentenfunktionen erkennen wir auch, dass der Satz von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5, der Satz von Fubini, Satz 14.14.4, und die Aussagen bzw. Gleichungen in Lemma 14.7.1, Lemma 14.7.3, (14.17), Satz 14.7.5 und Proposition 14.11.7 sinngemäß auch für komplex- oder gar vektorwertiger Funktionen f gelten.

10. Ein nützlicher Sachverhalt bei der Integration von komplexwertigen Funktionen ist der, dass die Funktion $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$z = r \exp(i\phi) \mapsto \ln r + i\phi \,,$$

   messbar ist, wenn man etwa festlegt, dass der Winkel ϕ aus $[0, 2\pi)$ ist. Die Messbarkeit folgt aus der Tatsache, dass $\log : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ stetig ist.

   Diese Sachverhalt ermöglicht uns nämlich eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ als $r(.) \exp(i\phi(.))$ mit messbaren Funktionen $r : \Omega \to [0, +\infty]$ und $\phi : \Omega \to [0, 2\pi)$ zu schreiben. Dabei ist f genau dann integrierbar, wenn $|f| = r$ integrierbar ist.

Eine nützliche Tatsache, die einem die Verwendung von Lebesgue-Integralen gegenüber der von Riemann-Integralen schmackhaft macht, ist die viel einfacher zu handhabende Vertauschung von Grenzwerten und Integralen; vgl. etwa den Beweis von Korollar 8.7.9.

14.15.3 Lemma. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\langle T, d\rangle$ ein metrischer Raum, $s \in T$ und $f : T \times \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ eine Funktion derart, dass*

(i) $x \mapsto f(t, x)$ für alle $t \in T$ integrierbar ist,

(ii) $t \mapsto f(t, x)$ für fast alle $x \in \Omega$ stetig im Punkt s ist,

(iii) es eine offene Kugel $U_\delta(s)$ um s und eine auf Ω integrierbare Funktion – man spricht von einer integrierbaren Majorante – $g : \Omega \to [0, +\infty]$ derart gibt, dass für alle $t \in U_\delta(s)$ die Ungleichung

$$|f(t, .)| \leq g$$

μ-fast überall[24] gilt.

Dann ist die Funktion $F(t) := \int_\Omega f(t, .) \, d\mu$ bei s stetig.

[24] Man beachte, dass die Ausnahmenullmenge im Allgemeinen von t abhängt.

Beweis. Sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige, in T gegen s konvergente Folge. Ab einem Index m gilt $s_n \in U_\delta(s)$. Ist N die Vereinigung der Ausnahmenullmengen aus der zweiten Voraussetzung und der dritten Voraussetzung zu den Funktionen $f(s_m,.), f(s_{m+1},.),\dots$ sowie $f(s,.)$, dann folgt $\mu(N)=0$. Für $n\geq m$ und $x\in\Omega\setminus N$ gilt $|f(s_n,x)-f(s,x)|\leq 2g(x)$ und $\lim_{n\to\infty}|f(s_n,x)-f(s,x)|=0$. Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5, folgt

$$\big|F(s)-F(s_n)\big| = \left|\int_\Omega (f(s_n,.)-f(s,.))\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_\Omega |f(s_n,.)-f(s,.)|\,\mathrm{d}\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{14.60}$$

❑

Folgendes Lemma behandelt die Vertauschung von Integrieren und Differenzieren.

14.15.4 Lemma. *Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum, $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, $s\in I$ und $f: I\times\Omega\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ eine Funktion derart, dass*

(i) $x\mapsto f(t,x)$ für alle $t\in I$ integrierbar ist,

(ii) $t\mapsto f(t,x)$ differenzierbar im Punkt s für fast alle $x\in\Omega$ ist,

(iii) es ein $\delta>0$ und eine auf Ω integrierbare Funktion – man spricht von einer integrierbaren Majorante – $g:\Omega\to[0,+\infty]$ derart gibt, dass für alle $t\in(s-\delta,s+\delta)\cap I\setminus\{s\}$ die Ungleichung

$$\left|\frac{f(t,.)-f(s,.)}{t-s}\right|\leq g$$

μ-fast überall[24] gilt.

Die beiden letzten Punkte sind insbesondere erfüllt, wenn es ein $\delta>0$, eine integrierbare Funktion $g:\Omega\to[0,+\infty]$ und eine feste Nullmenge $N\in\mathcal{A}$ derart gibt, dass für alle $t\in(s-\delta,s+\delta)\cap I$ und alle $x\in\Omega\setminus N$ die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ nach t existiert, wobei

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\leq g(x)\,. \tag{14.61}$$

Dann ist die Funktion $F(t):=\int_\Omega f(t,.)\,\mathrm{d}\mu$ bei s differenzierbar und es gilt[25]

$$F'(s)=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(s,.)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Beweis. Indem wir f in Real- und Imaginärteil zerlegen, können wir uns auf reellwertige Funktionen beschränken. Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige, in I gegen s konvergente Folge, so gilt $s_n\in(s-\delta,s+\delta)$ für alle $n\geq n_0$ mit einem $n_0\in\mathbb{N}$. Die Vereinigung L der abzählbar vielen

[25] Man beachte, dass genau genommen der Integrand eine integrierbare Funktion ist, welche mit $\frac{\partial f}{\partial t}(s,.)$ überall ausgenommen einer Nullmenge übereinstimmt.

Ausnahmenullmengen aus der zweiten Voraussetzung und der dritten Voraussetzung zu $t = s_n$, $n \geq n_0$, erfüllt $\mu(L) = 0$. Für $n \geq n_0$ und $x \in \Omega \setminus L$ folgt

$$\left|\frac{f(s_n, x) - f(s, x)}{s_n - s}\right| \leq g(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(s_n, x) - f(s, x)}{s_n - s} = \frac{\partial f}{\partial t}(s, x)\,,$$

womit sich auch $\Omega \setminus L \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(s, x)$ als messbar herausstellt. Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz, Satz 14.6.5, ist die mit Null auf L fortgesetzte Funktion $\Omega \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(s, x)$ integrierbar, wobei

$$\frac{F(s) - F(s_n)}{s - s_n} = \int_\Omega \frac{f(s_n, .) - f(s, .)}{s_n - s}\, \mathrm{d}\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(s, x)\, \mathrm{d}\mu\,.$$

Ist (14.61) erfüllt, so folgt für alle $t \in (s - \delta, s + \delta) \cap I \setminus \{s\}$ und alle $x \in \Omega \setminus N$ aus dem Mittelwertsatz $\left|\frac{f(t,x)-f(s,x)}{t-s}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\tau, x)\right| \leq g(x)$ mit einem τ, das zwischen t und s liegt[26]. ❑

14.15.5 Lemma. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion derart, dass*

(i) $x \mapsto f(z, x)$ für alle $z \in G$ integrierbar ist,

(ii) $z \mapsto f(z, x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ mit einer festen Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ holomorph ist,

(iii) zu jeder kompakten Menge $K \subseteq G$ es eine auf Ω integrierbare Funktion $g_K : \Omega \to [0, +\infty]$ derart gibt, dass für alle $z \in K$ und $x \in \Omega \setminus N$ die Abschätzung $|f(z, x)| \leq g_K(x)$ gilt, wobei N die feste Nullmenge aus dem vorherigen Punkt ist.

Dann ist die Funktion $F(z) := \int_\Omega f(z, .)\, \mathrm{d}\mu$ holomorph auf G, wobei[27]

$$F^{(n)}(z) = \int_\Omega \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, .)\, \mathrm{d}\mu\,. \tag{14.62}$$

Beweis. Zu einer abgeschlossenen Kugel $K_{2r}(w) \subseteq G$ mit $r > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein integrierbares $g_{w,r} : \Omega \to [0, +\infty]$ so, dass $|f(z, x)| \leq g_{w,r}(x)$ für alle $z \in K_{2r}(w)$ und $x \in \Omega \setminus N$. Für verschiedene $z_1, z_2 \in K_r(w)$ gilt nach der Cauchyschen Integralformel (11.31) in Abschnitt 11.6 mit dem Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to G$, $t \mapsto w + 2r \cdot \exp(\mathrm{i}t)$, wegen $|z_1 - \zeta|, |z_2 - \zeta| \geq r$ für $\zeta = \gamma(t)$

$$\left|\frac{f(z_1, x) - f(z_2, x)}{z_1 - z_2}\right| = \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta, x)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}\, \mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{2}{r} g_{w,r}(x)\,.$$

Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige gegen ein $w \in G$ konvergente Folge mit $z_n \neq w$ und oBdA. $z_n \in K_r(w) \subseteq K_{2r}(w) \subseteq G$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus $\left|\frac{f(z_n,x)-f(w,x)}{z_n-w}\right| \leq \frac{2}{r} g_{w,r}(x)$ und

[26] τ hängt im Allgemeinen auch von x ab, was der Grund dafür ist, dass man in (14.61) eine Ausnahmemenge benötigt, welche nicht von t abhängt.

[27] Ähnlich wie in Lemma 14.15.4 ist der Integrand eine integrierbare Funktion, welche mit $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, .)$ auf $\Omega \setminus N$ übereinstimmt.

$\frac{f(z_n,x)-f(w,x)}{z_n-w} \to \frac{\partial f}{\partial z}(w,x)$ für $x \in \Omega \setminus N$ nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz die Integrierbarkeit von $\frac{\partial f}{\partial z}(w,x)$ und

$$\frac{F(z_n)-F(w)}{z_n-w} = \int_{\Omega\setminus N} \frac{f(z_n,x)-f(w,x)}{z_n-w}\,\mathrm{d}\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega\setminus N} \frac{\partial f}{\partial z}(w,.)\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Also existiert $F'(w)$ und stimmt mit $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(w,.)\,\mathrm{d}\mu$ überein.
Insbesondere erfüllt auch $(z,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ die erste Voraussetzung des aktuellen Lemmas. Auch die zweite Voraussetzung ist erfüllt, da die komplexe Ableitung holomorpher Funktionen wieder holomorph ist. Wir wollen auch die dritte Voraussetzung nachweisen. Dazu sei wieder $K_{2r}(w) \subseteq G$ und $g_{w,r} : \Omega \to [0,+\infty]$ integrierbar mit $|f(z,x)| \leq g_{w,r}(x),\ z \in K_{2r}(w), x \in \Omega \setminus N$. Für $z \in K_r(w)$ folgt aus der Cauchyschen Integralformel für höhere Ableitungen in Abschnitt 11.6 mit $\gamma(t) = w + 2r \cdot \exp(it),\ t \in [0,2\pi]$, die Abschätzung

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta,x)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leq \frac{2}{r} g_{w,r}(x)\,.$$

Ist $K \subseteq G$ kompakt, so wird K von endlich vielen Kreisen der Form $U_r(w)$ mit $w \in K$ und $K_{2r}(w) \subseteq G$ überdeckt. Nimmt man das Maximum $h_K(x)$ der entsprechenden Funktionen $\frac{2}{r} g_{w,r}(x)$, so folgt $\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\right| \leq h_K(x),\ z \in K, x \in \Omega \setminus N$. Also ist auch die dritte Voraussetzung des aktuellen Lemma für $(z,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$ nachgewiesen.
Mit allen Voraussetzungen des aktuellen Lemma erfüllt $w \mapsto F'(w) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(w,.)\,\mathrm{d}\mu$ auch die von Lemma 14.15.3, womit $w \mapsto F'(w)$ stetig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq G$ und infolge auf ganz G ist. Gemäß Definition 11.6.5 ist F holomorph.
Wendet man das Gezeigte auf $\frac{\partial f}{\partial z}$ an und beachtet die Cauchyschen Integralformel für höhere Ableitungen in Abschnitt 11.6, so zeigt man schließlich induktiv (14.62) für alle $n \in \mathbb{N}$. ❑

14.15.6 Beispiel. Als Beispiel dafür, wie einfach im Vergleich zum Riemann-Integral die Voraussetzungen für die Vertauschung etwa von Integrieren und Differenzieren zu überprüfen sind, betrachte man die Gammafunktion aus Beispiel 14.11.10.
Wenden wir Lemma 14.15.3 mit der integrierbaren Majorante $g(x)$ aus Beispiel 14.11.10 und dem metrischen Raum $[\alpha,\beta] \subseteq (0,+\infty)$ an, so erkennen wir, dass $\Gamma(t)$ auf $[\alpha,\beta]$, und wegen der Beliebigkeit von $\alpha,\beta \in (0,+\infty)$, auch auf $(0,+\infty)$ stetig ist.
Weiters gilt $\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{-x} x^{t-1} = (\log x)\mathrm{e}^{-x} x^{t-1},\ t \in (0,+\infty)$. Der Betrag dieser Funktion lässt sich für $t \in [\alpha,\beta]$ durch die ebenfalls integrierbare Funktion $|\log x| \cdot g(x)$ abschätzen. Deshalb können wir Lemma 14.15.4 anwenden, und erhalten auf $[\alpha,\beta]$ und infolge auf ganz $(0,+\infty)$

$$\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} (\log x)\mathrm{e}^{-x} x^{t-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Wiederholen wir obige Schlussweise, so erhalten wir

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} (\log x)^k \mathrm{e}^{-x} x^{t-1}\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,. \tag{14.63}$$

Aus $\ln(1+s) \le s$ für $s > -1$ folgt $\mathbb{1}_{(0,n)}(x) \cdot (1-\frac{x}{n})^n \le e^{-x}$ für $x > 0$. Damit ist $g(x)$ eine integrierbare Majorante der Folge $\mathbb{1}_{(0,n)}(x) \cdot x^{t-1}(1-\frac{x}{n})^n$, die punktweise gegen $e^{-x}x^{t-1}$ konvergiert. Wegen des Satzes von der beschränkten Konvergenz folgt die *Grenzwertdarstellung* der Γ-Funktion:

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{t-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\ldots(t+n)} \,. \tag{14.64}$$

Die letzte Gleichheit erhält man durch wiederholte partielle Integration.
Mit Hilfe von Lemma 14.15.5 können wir in ganz analoger Schlussweise zeigen, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ die Funktion $\Gamma(z)$ holomorph ist, dass sich die komplexe Ableitung nach z wie in (14.63) berechnet und dass auch (14.64) gilt. Wegen $|x^z| = x^{\operatorname{Re} z}$ kann man nämlich dieselbe Majorante $g(x)$ verwenden.

14.15.7 Beispiel. Wir betrachten für $t \in [-1, 1)$ die Funktion

$$F(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{t}{n^2}\right).$$

Für $t \le 0$ gilt wegen $\ln(x) \le x-1,\ x > 0$,

$$0 \le \ln\left(1-\frac{t}{n^2}\right) \le \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \le \frac{1}{n^2}\,,$$

und für $t \in (0,1)$ und $n > 1$ gilt

$$\left|\ln\left(1-\frac{t}{n^2}\right)\right| = -\ln\left(1-\frac{t}{n^2}\right) = \ln\frac{1}{1-\frac{t}{n^2}} = \ln\left(1+\frac{\frac{t}{n^2}}{1-\frac{t}{n^2}}\right) \le \frac{\frac{t}{n^2}}{1-\frac{t}{n^2}} \le \frac{2}{n^2}\,.$$

Also ist $F(t)$ für alle $t \in [-1,1)$ absolut und somit unbedingt konvergent; vgl. Satz 5.4.4. Wie in Beispiel 14.6.3, angewendet auf $\Omega = \mathbb{N}$ und $\eta_k = 1,\ k \in \Omega$, gesehen, existiert das Integral

$$F(t) = \ln(1-t) + \int_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \ln\left(1-\frac{t}{n^2}\right) \mathrm{d}\mu(n)\,,$$

wobei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,+\infty]$ das Zählmaß $\mu(A) = \sum_{k\in A} 1$ ist. Wir haben gerade gezeigt, dass der Betrag des Integranden sich durch $g(n) := \frac{2}{n^2}$ unabhängig von t nach oben abschätzen lässt. Wegen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \int_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \frac{2}{n^2}\,\mathrm{d}\mu(n) < +\infty$$

kann man Lemma 14.15.3 anwenden, und erhält die Stetigkeit in jedem Punkt $s \in [-1,1)$. Man beachte, dass man wegen $\left|\ln\left(1-\frac{t}{n^2}\right)\right| \le g(n),\ n > 1, t \in [-1,1)$, die Stetigkeit von $F(t)$ auch aus dem Weierstraß Kriterium Korollar 6.8.4 zusammen mit Korollar 6.6.14 erhält. In der Tat bedeutet das Weierstraß Kriterium nichts anderes, als die Existenz einer integrierbaren Majorante für den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$.

14.16 Haarsches Maß auf topologischen Gruppen*

Wir wollen in diesem Abschnitt eine interessante Anwendung für den Darstellungssatz von Riesz, Satz 14.10.7, präsentieren. Die topologischen Räume, welche hier zugrunde liegen, sind sogenannte topologische Gruppen.

14.16.1 Definition. Eine Gruppe[28] G versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ heißt *topologische Gruppe*, falls die Gruppenoperationen

$$\begin{cases} G\times G & \to & G\,, \\ (x,y) & \mapsto & x\cdot y\,, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} G & \to & G\,, \\ x & \mapsto & x^{-1}\,, \end{cases}$$

stetig sind, wobei $G\times G$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ versehen ist. In dem Fall schreiben wir die topologische Gruppe an als $(G,\mathcal{T})$.
Wir nennen eine Topologische Gruppe $(G,\mathcal{T})$ eine *lokalkompakte Gruppe*, wenn $(G,\mathcal{T})$ als topologischer Raum lokalkompakt und Hausdorffsch ist.

14.16.2 Beispiel.

(i) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition und versehen mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^1$ bilden eine lokalkompakte Gruppe. In der Tat sind $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ni(x,y)\to x+y\in\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}\ni x\mapsto -x\in\mathbb{R}$ stetig. Zudem ist $(\mathbb{R},\mathcal{T}^1)$ Hausdorffsch und lokalkompakt.

(ii) Die Menge $\mathbb{R}^d$ mit der Vektoraddition und versehen mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^d$ ist aus denselben Gründen eine lokalkompakte Gruppe.

(iii) Die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^+$ mit der Multiplikation und versehen mit der Euklidischen Topologie sind auch eine lokalkompakte Gruppe. Das folgt aus der wohlbekannten Tatsachen, dass $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\ni(x,y)\to xy\in\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^+\ni x\mapsto\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^+$ stetig sind.

Die Abbildung $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ist bekannterweise eine Bijektion derart, dass $\exp(0)=1$ und $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$ für $x,y\in\mathbb{R}$, womit exp einen Gruppenisomorphismus darstellt. Zusätzlich ist diese Abbildung ein Homöomorphismus, wenn wir $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^+$ mit der Euklidischen Topologie versehen. Also überträgt exp sowohl die algebraische als auch die topologische Struktur.

(iv) Ähnlich wie $\mathbb{R}^+$ bildet auch $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit der Multiplikation und versehen mit der Euklidischen Topologie eine lokalkompakte Gruppe.

(v) Die Gruppe $GL(d,\mathbb{R})$ aller regulären reellen $d\times d$-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation kann als Teilmenge von $\mathbb{R}^{d\times d}\simeq\mathbb{R}^{d^2}$ ebenfalls mit der der Euklidischen Topologie versehen werden. Sie bildet dann auch eine topologische Gruppe, da gemäß Lemma 9.2.8 und Korollar 9.3.7 die Operationen $GL(d,\mathbb{R})\times GL(d,\mathbb{R})\ni(A,B)\mapsto A\cdot B\in GL(d,\mathbb{R})$ sowie $GL(d,\mathbb{R})\ni A\mapsto A^{-1}\in GL(d,\mathbb{R})$ stetig sind. Weil

[28] Wenn nichts anderes bemerkt wird, schreiben wir für $x,y\in G$ die binäre Gruppenoperation auf $(G,\cdot)$ multiplikativ, also $x\cdot y$ oder xy, und die Inverse als x^{-1}. Das neutrale Element wird mit e bezeichnet.

$GL(d,\mathbb{R})$ gemäß Korollar 9.3.7 offen in $\mathbb{R}^{d\times d} \simeq \mathbb{R}^{d^2}$ ist, bildet $GL(d,\mathbb{R})$ sogar eine lokalkompakte Gruppe.

Indem man die Gruppe $GL(d,\mathbb{C})$ aller regulären komplexen $d\times d$-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation als abgeschlossene Untergruppe von $GL(2d,\mathbb{R})$ identifiziert, sieht man leicht, dass auch $GL(d,\mathbb{C})$ eine lokalkompakte Gruppe bildet.

(vi) Versehen wir eine abstrakte Gruppe G mit der diskreten Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(G)$, so bildet auch diese eine lokalkompakte Gruppe.

Wir sehen insbesondere, dass ein und dieselbe Gruppe wie etwa $(\mathbb{R},+)$ mit zwei verschiedenen Topologien zu einer topologischen Gruppe gemacht werden kann.

14.16.3 Fakta.

1. Da die inverse Abbildung von $G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$ gerade sie selbst ist, stellt sie sogar einen Homöomorphismus dar.

2. Hält man $z \in G$ fest, so ist Einbettungsabbildung $G \ni x \mapsto (x,z) \in G\times G$ stetig. Somit ist auch die Zusammensetzung dieser Abbildung mit $G\times G \ni (x,y) \to xy \in G$, also die Abbildung $G \ni x \mapsto xz \in G$ stetig. Die Inverse davon ist $x \mapsto xz^{-1}$ und daher ebenfalls stetig. Also bildet $G \ni x \mapsto xz \in G$ einen Homöomorphismus. Entsprechend zeigt man das für $G \ni x \mapsto zx \in G$.

3. Ist U eine Umgebung des neutralen Elementes e in einer topologischen Gruppe $(G,\mathcal{T})$, so folgt wegen $e\cdot e = e$ aus der Stetigkeit der Gruppenmultiplikation die Existenz einer offenen, (e,e) enthaltenden Teilmenge $O \subseteq G\times G$ mit $\cdot(O) := \{x\cdot y : (x,y)\in O\} \subseteq U$. Da gemäß (12.16) die Mengen der Form $P\times Q,\ P,Q\in\mathcal{T}$, eine Basis von $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ bilden, können wir $O = P\times Q$ annehmen, wobei $e\in P,Q\in\mathcal{T}$.

   Nach 1 ist dann $V = P\cap Q\cap P^{-1}\cap Q^{-1}$ eine offene Umgebung von e derart, dass
   $$V\cdot V\subseteq U \quad\text{und}\quad V^{-1} = V\,.$$

4. Jede topologische Gruppe erfüllt das Trennungsaxiom $(T3)$; siehe Definition 12.10.1.

   Um das einzusehen sei $A\subseteq G$ abgeschlossen und $x\in G\setminus A$. Infolge liegt das neutrale Element e nicht in der abgeschlossenen Menge $x^{-1}\cdot A$; siehe 2. Wegen 3 gibt es ein offenes $V = V^{-1}$ mit $e\in V\cdot V\subseteq G\setminus(x^{-1}\cdot A) = x^{-1}\cdot(G\setminus A)$.

   Für $y\in x\cdot V\cap(A\cdot V)$, also $y = x\cdot v_1 = a\cdot v_2$ mit $a\in A$ und $v_1,v_2\in V$, folgt der Widerspruch
   $$a = x\cdot(v_1\cdot v_2^{-1}) \in x\cdot V\cdot V^{-1} = x\cdot V\cdot V\subseteq x\cdot x^{-1}\cdot(G\setminus A) = G\setminus A\,.$$

   Also sind die offene Menge $x\cdot V\ (\ni x)$ und die wegen $A\cdot V = \bigcup_{a\in A} a\cdot V$ ebenfalls offene Menge $A\cdot V\ (\supseteq A)$ disjunkt.

14.16.4 Lemma. *Für eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T})$ ist jedes $f \in C_{00}(G, \mathbb{R})$ gleichmäßig stetig in dem Sinne, dass*

$$\forall \epsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(e) : \ \forall x, y \in G, \ x^{-1}y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon ,$$

und auch gleichmäßig stetig in dem Sinne, dass

$$\forall \epsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(e) : \ \forall x, y \in G, \ yx^{-1} \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon ,$$

wobei $\mathcal{U}(e)$ den Umgebungsfilter von e bezeichnet.

Beweis. Wäre diese Aussage für ein $f \in C_{00}(G, \mathbb{R})$ falsch, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es zu jedem $U \in \mathcal{U}(e)$ zwei Punkte $s_U, t_U \in G$ mit $s_U^{-1} t_U \in U$ und $|f(s_U) - f(t_U)| \geq \epsilon$ gibt. Setzen wir $x_U := s_{U \cap U^{-1}}$ und $y_U := t_{U \cap U^{-1}}$, so konvergiert $(x_U^{-1} y_U)_{U \in \mathcal{U}(e)}$ wegen $x_U^{-1} y_U \in U \cap U^{-1} \subseteq U$ gegen e, wenn wir $\mathcal{U}(e)$ mittels $\preceq := \supseteq$ zu einer gerichteten Menge machen.
Aus $|f(x_U) - f(y_U)| \geq \epsilon$ folgt, dass immer mindestens einer der Punkte x_U, y_U in $\operatorname{supp}(f)$ liegt. Wir wählen die Notation so, dass $x_U \in \operatorname{supp}(f)$. Wegen $y_U^{-1} x_U = (x_U^{-1} y_U)^{-1} \in U \cap U^{-1}$ bleibt die Enthaltenseinsrelation $x_U^{-1} y_U \in U \cap U^{-1}$ bei einer möglichen Vertauschung von x_U und y_U erhalten.
Da $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist, gibt es ein gegen ein $x \in \operatorname{supp}(f)$ konvergentes Teilnetz $(x_{U(i)})_{i \in I}$ von $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(e)}$. Da dann $(x_{U(i)}^{-1} y_{U(i)})_{i \in I}$ gegen e konvergiert, folgt aus der Stetigkeit der Gruppenmultiplikation

$$\lim_{i \in I} y_{U(i)} = \lim_{i \in I} x_{U(i)} \cdot x_{U(i)}^{-1} \cdot y_{U(i)} = x \cdot e = x .$$

Infolge konvergiert das Netz $((x_{U(i)}, y_{U(i)}))_{i \in I}$ in $G \times G$ gegen (x, x), was wegen der Stetigkeit von $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$

$$\lim_{i \in I} |f(x_{U(i)}) - f(y_{U(i)})| = |f(x) - f(x)| = 0$$

nach sich zieht. Das widerspricht aber der Tatsache, dass $|f(x_{U(i)}) - f(y_{U(i)})| \geq \epsilon, \ i \in I$.
Die gleichmäßige Stetigkeit im zweiten Sinne zeigt man fast genauso. ❑

Im Beweis des folgenden Satz 14.16.5, welcher eine Verallgemeinerung der Konstruktion des Lebesgueschen Maßes auf $\mathbb{R}^d$ darstellt, werden wir für eine Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ und ein $s \in G$ mit $l(s)f : G \to \mathbb{R}$ die durch $(l(s)f)(x) := f(s^{-1}x), \ x \in G$, definierte Funktion bezeichnen. Wegen

$$(l(s)(l(t)f))(x) = (l(t)f)(s^{-1}x) = f(t^{-1}s^{-1}x) = (l(st)f)(x), \quad s, t, x \in G ,$$

gilt dabei $l(s)(l(t)f) = l(st)f$ für alle $s, t \in G$ und Funktionen $f : G \to \mathbb{R}$.

14.16.5 Satz. *Jede lokalkompakte Gruppe $(G, \mathcal{T})$ besitzt ein nicht verschwindendes Riesz-reguläres Borelmaß $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$, welches $\mu(s \cdot A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ und $s \in G$ erfüllt, also* linksinvariant *ist. Dabei gilt $\int f \, d\mu > 0$ für alle $f \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.*

Beweis.

⇝ Seien Funktionen $f \in C_{00}^+(G,\mathbb{R}) = C_{00}(G,\mathbb{R}) \cap [0,+\infty)^G$ und $g \in C_{00}^+(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ gegeben. Für $\alpha \in (1,+\infty)$ ist $g^{-1}(\frac{\|g\|_\infty}{\alpha},+\infty)$ eine nichtleere offene Teilmenge von G. Man überzeugt sich leicht davon, dass dann $\{s \cdot g^{-1}(\frac{\|g\|_\infty}{\alpha},+\infty) : s \in G\}$ eine offene Überdeckung von G und daher auch von der kompakten Menge $\operatorname{supp}(f)$ abgibt. Infolge gibt es $s_1,\dots,s_n \in G$ mit $\bigcup_{j=1,\dots,n} s_j \cdot g^{-1}(\frac{\|g\|_\infty}{\alpha},+\infty) \supseteq \operatorname{supp}(f)$. Also gibt es zu jedem $x \in \operatorname{supp}(f)$ ein $j \in \{1,\dots,n\}$ mit $x \in s_j \cdot g^{-1}(\frac{\|g\|_\infty}{\alpha},+\infty)$, wodurch

$$f(x) \le \|f\|_\infty = \frac{\alpha\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \cdot \frac{\|g\|_\infty}{\alpha} \le \frac{\alpha\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty}\, g(s_j^{-1}x)\,,$$

da $s_j^{-1}x \in g^{-1}(\frac{\|g\|_\infty}{\alpha},+\infty)$ und somit $g(s_j^{-1}x) > \frac{\|g\|_\infty}{\alpha}$. Infolge erhalten wir die Existenz von $s_1,\dots,s_n \in G$ und $c_1,\dots,c_n \in [0,+\infty)$ derart, dass

$$f \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(s_j)g\,.$$

⇝ Für jedes $f \in C_{00}^+(G,\mathbb{R})$ und jedes $g \in C_{00}^+(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ setzen wir

$$(f:g) := \inf\{\sum_{j=1}^n c_j : s_1,\dots,s_n \in G,\ c_1,\dots,c_n \in [0,+\infty),\ f \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(s_j)g\}\,.$$

Wir haben oben gesehen, dass die Menge, worüber das Infimum gebildet wird, nicht leer ist. Offenbar gilt $(0:g) = 0$ und $(cf:g) = c(f:g)$ für $c \in (0,+\infty)$. Da $f \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(s_j)g$ zu $l(s)f \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(ss_j)g$ äquivalent ist, gilt $(l(s)f:g) = (f:g)$.

Für beliebige $s_1,\dots,s_n;\ t_1,\dots,t_m \in G,\ c_1,\dots,c_n;\ \mathrm{d}_1,\dots,d_m \in [0,+\infty)$ mit $f_1 \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(s_j)g$ und $f_2 \le \sum_{j=1}^m d_j\, l(t_j)g$ folgt

$$f_1 + f_2 \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(s_j)g + \sum_{j=1}^m d_j\, l(t_j)g\,,$$

und daher $(f_1+f_2:g) \le \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{j=1}^m d_j$, womit $(f_1+f_2:g) \le (f_1:g)+(f_2:g)$ gilt.

Für $f \in C_{00}^+(G,\mathbb{R})$ und $g,h \in C_{00}^+(G,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ folgt aus $f \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(s_j)g$ und $g \le \sum_{k=1}^m d_k\, l(t_k)h$ die Ungleichung

$$f \le \sum_{j=1}^n c_j\, l(s_j)g \le \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j d_k\, l(s_j t_k)h\,.$$

Wir erhalten $(f:h) \le \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j d_k = \left(\sum_{j=1}^n c_j\right) \cdot (\sum_{k=1}^m d_k)$. Nimmt man das Infimum über alle solchen $s_j \in G$, $c_j \ge 0$ sowie $t_k \in G$, $d_k \ge 0$, so schließen wir auf

$$(f:h) \le (f:g)\cdot(g:h)\,. \tag{14.65}$$

Aus $f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \, l(s_j)g$ folgt schließlich $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j$ und daher

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \cdot (f : g), \tag{14.66}$$

weshalb auch $(f : g) > 0$ für $f \neq 0$.

⇝ Wir halten nun $f_0 \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ fest und definieren für jedes $g \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ die Abbildung $\phi_g : C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \to [0, +\infty)$ durch

$$\phi_g(f) := \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}.$$

Aus den oben gezeigten Eigenschaften folgt für $f, h \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ sowie $c \in (0, +\infty)$ und $s \in G$

$$\phi_g(f + h) \leq \phi_g(f) + \phi_g(h), \quad \phi_g(cf) = c\phi_g(f), \quad \phi_g(l(s)f) = \phi_g(f).$$

Wegen (14.65) gilt $(f : g) \leq (f : f_0)(f_0 : g)$ und $(f_0 : g) \leq (f_0 : f)(f : g)$, wodurch

$$\phi_g(f) \in \Big[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)\Big]. \tag{14.67}$$

⇝ Seien $f_1, f_2 \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ fest gehalten. Wir wollen hier zeigen, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte Umgebung U von e derart gibt, dass für $g \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq U$ immer

$$\phi_g(f_1) + \phi_g(f_2) \leq \phi_g(f_1 + f_2) + \epsilon. \tag{14.68}$$

Dazu wähle zuerst $h \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ gemäß Lemma 12.17.8 derart, dass $h(x) = 1$ für alle $x \in \operatorname{supp}(f_1 + f_2)$. Mit beliebigem, aber zunächst festem $\delta > 0$ setzen wir $f := f_1 + f_2 + \delta h$ und für $j = 1, 2$

$$h_j(x) := \begin{cases} \frac{f_j(x)}{f(x)} & , \quad f(x) \neq 0, \\ 0 & , \quad f(x) = 0. \end{cases}$$

Wegen $f(x) > 0$ für $x \in \operatorname{supp}(f_1 + f_2)$ ist $h_j(x)$ stetig auf $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$. Für $x \in \{y \in G : f_1(y) + f_2(y) = 0\}$ gilt $h_j(x) = 0$. Also sind h_1 und h_2 stetig auf den abgeschlossenen Mengen $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$ und $\{y \in G : f_1(y) + f_2(y) = 0\}$, deren Vereinigung mit G übereinstimmt, weshalb wir mit Lemma 12.7.4 auf die Stetigkeit dieser Funktionen auf ganz G schließen.

Gemäß Lemma 14.16.4 sind die Funktionen h_1 und h_2 sogar gleichmäßig stetig. Also gibt es eine Umgebung U von e derart, dass $|h_j(x) - h_j(y)| \leq \delta$ für alle $x, y \in G$ mit $x^{-1}y \in U$. Wegen der Lokalkompaktheit können wir U als kompakt annehmen; siehe Korollar 12.17.4. Ist $g \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq U$, so folgt für $s, x \in G$ mit $s^{-1}x \in U$ wegen $|h_j(x) - h_j(s)| \leq \delta$

$$h_j(x) \cdot (l(s)g)(x) \leq (h_j(s) + \delta) \cdot (l(s)g)(x).$$

Für $s^{-1}x \notin U$ gilt diese Ungleichung auch, da dann $(l(s)g)(x) = g(s^{-1}x) = 0$. Somit folgt aus $f \leq \sum_{k=1}^{n} c_k\, l(s_k)g$

$$f_j = f \cdot h_j \leq \sum_{k=1}^{n} c_k\, h_j \cdot (l(s_k)g) \leq \sum_{k=1}^{n} c_k\, (h_j(s_k) + \delta) \cdot (l(s_k)g)\,.$$

Also gilt $(f_j : g) \leq \sum_{k=1}^{n} c_k(h_j(s_k) + \delta)$ und wegen $h_1 + h_2 \leq 1$ sogar

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (1 + 2\delta) \sum_{k=1}^{n} c_k\,.$$

Da $\sum_{k=1}^{n} c_k\, l(s_k)g \ \geq f$ beliebig war, erhalten wir

$$\begin{aligned}(f_1 : g) + (f_2 : g) &\leq (1 + 2\delta)\,(f : g) = (1 + 2\delta)\,(f_1 + f_2 + \delta h : g)\\ &\leq (1 + 2\delta)\,\big((f_1 + f_2 : g) + \delta\,(h : g)\big)\,.\end{aligned}$$

Dividieren wir durch $(f_0 : g)$ ergibt

$$\phi_g(f_1) + \phi_g(f_2) \leq \phi_g(f_1 + f_2) + (2\delta\,\phi_g(f_1 + f_2) + (1 + 2\delta)\delta\,\phi_g(h)).$$

Nach (14.67) lässt sich die rechte Klammer durch $2\delta\,(f_1 + f_2 : f_0) + (1 + 2\delta)\delta\,(h : f_0)$ und daher unabhängig von g nach oben abschätzen. Wählt man $\delta > 0$ hinreichend klein, so sehen wir also, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte Umgebung U von e derart gibt, dass für $g \in C_{00}^{+}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq U$ immer (14.68) gilt.

$\rightsquigarrow$ Für jedes $g \in C_{00}^{+}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ bildet ϕ_g die Menge $C_{00}^{+}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ in die reellen Zahlen ab, wobei $\phi_g(f) \in [\frac{1}{(f_0:f)}, (f : f_0)]$; siehe (14.67). Somit gilt

$$\phi_g \in \prod_{f \in C_{00}^{+}(G,\mathbb{R})\setminus\{0\}} [\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)]\,.$$

Nach dem Satz von Tychonoff, Satz 12.13.2, ist dieses Produkt kompakt. Betrachtet man das Netz $(\phi_{g_U})_{U \in \mathscr{U}(e)}$, wobei $g_U \in C_{00}^{+}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ mit $\operatorname{supp} g_U \subseteq U$ und wobei der Umgebungsfilter $\mathscr{U}(e)$ von e durch $\supseteq$ gerichtet ist, so hat diese Netz ein konvergentes Teilnetz $(\phi_{g_{U(i)}})_{i \in I}$. Für

$$\phi := \lim_{i \in I} \phi_{g_{U(i)}} \in \prod_{f \in C_{00}^{+}(G,\mathbb{R})\setminus\{0\}} [\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)]$$

gilt klarerweise $\lim_{i \in I} \phi_{g_{U(i)}}(f) = \phi(f)$ für alle $f \in C_{00}^{+}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Von $\phi_g(f_0) = 1$, $\phi_g(cf) = c\phi_g(f)$, $\phi_g(f_1 + f_2) \leq \phi_g(f_1) + \phi_g(f_2)$ und $\phi_g(l(s)f) = \phi_g(f)$ für $f, f_1, f_2 \in C_{00}^{+}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $c \in (0, +\infty)$, $s \in G$, schließen wir somit unmittelbar auf

$$\phi(f_0) = 1,\ \phi(cf) = c\phi(f),\ \phi(f_1 + f_2) \leq \phi(f_1) + \phi(f_2),\ \phi(l(s)f) = \phi(f)\,. \tag{14.69}$$

Oben haben wir gezeigt, dass es zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $U \in \mathcal{U}(e)$ derart gibt, dass $\phi_g(f_1) + \phi_g(f_2) \leq \phi_g(f_1 + f_2) + \epsilon$, wenn nur $\operatorname{supp} g \subseteq U$. Insbesondere gilt für $\phi = \lim_{i\in I} \phi_{g_{U(i)}}$, dass $\phi(f_1) + \phi(f_2) \leq \phi(f_1 + f_2) + \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, gilt $\phi(f_1) + \phi(f_2) \leq \phi(f_1 + f_2)$ und infolge

$$\phi(f_1) + \phi(f_2) = \phi(f_1 + f_2), \quad f_1, f_2 \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}, \tag{14.70}$$

womit sich ϕ als additiv herausstellt. Wegen $\phi(f) \in [\frac{1}{(f_0:f)}, (f : f_0)]$ gilt auch $\phi(f) > 0$ für alle $f \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

⇝ Mit $\phi(0) := 0$ setzen wir ϕ zu einer Funktion von $C_{00}^+(G, \mathbb{R})$ nach $[0, +\infty)$ fort. Man erkennt unmittelbar, dass dann (14.70) und (14.69) noch immer erfüllt sind, wobei sogar $c \in [0, +\infty)$.

Für ein beliebiges $f \in C_{00}(G, \mathbb{R})$ definieren wir $\phi(f) := \phi(f^+) - \phi(f^-)$, wobei $f^+ = \max(f, 0) \in C_{00}^+(G, \mathbb{R})$ und $f^- = -\min(f, 0) \in C_{00}^+(G, \mathbb{R})$ wie bekannt $f = f^+ - f^-$ erfüllen, und erhalten eine Fortsetzung $\phi : C_{00}(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\phi(f) \geq 0$ für $f \geq 0$. Gilt $f = f_1 - f_2$ mit beliebigen $f_1, f_2 \in C_{00}^+(G, \mathbb{R})$, so erhalten wir aus $f_1 + f^- = f^+ + f_2 \in C_{00}^+(G, \mathbb{R})$

$$\phi(f_1) + \phi(f^-) = \phi(f_1 + f^-) = \phi(f^+ + f_2) = \phi(f^+) + \phi(f_2),$$

und somit $\phi(f) = \phi(f_1) - \phi(f_2) = \phi(f^+) - \phi(f^-)$. Für $f, g \in C_{00}(G, \mathbb{R})$ und $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$ mit $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_{00}^+(G, \mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\phi(f + g) &= \phi((f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)) = \phi(f_1 + g_1) - \phi(f_2 + g_2)\\ &= \phi(f_1) - \phi(f_2) + \phi(g_1) - \phi(g_2) = \phi(f) + \phi(g),\end{aligned}$$

und wegen $\phi(-f) = \phi(f_2 - f_1) = \phi(f_2) - \phi(f_1) = -\phi(f)$ auch

$$\begin{aligned}\phi(cf) &= \operatorname{sgn}(c) \cdot \phi(|c| \cdot f_1 - |c| \cdot f_2) = \operatorname{sgn}(c) \cdot \phi(|c| \cdot f_1) - \operatorname{sgn}(c) \cdot \phi(|c| \cdot f_2)\\ &= \operatorname{sgn}(c) \cdot |c| \cdot \phi(f_1) - \operatorname{sgn}(c) \cdot |c| \cdot \phi(f_2) = \operatorname{sgn}(c) \cdot |c| \cdot \phi(f) = c \cdot \phi(f).\end{aligned}$$

Aus dem Rieszschen Darstellungssatz, Satz 14.10.7, folgt die Existenz eines eindeutigen Riesz-regulären Borelmaßes $\mu : A(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ mit

$$\phi(f) = \int_G f \, d\mu \quad \text{für alle} \quad f \in C_{00}(G, \mathbb{R}).$$

⇝ Wie in Fakta 14.16.3 festgestellt, ist $T : y \mapsto s^{-1}y$ für ein $s \in G$ ein Homöomorphismus auf G. Wegen Lemma 14.10.10 ist dann auch $\mu \circ T^{-1}$ Riesz-regulär, wobei wegen (14.18) in Satz 14.7.5

$$\phi(f) = \phi(l(s)f) = \int_G f(s^{-1}x) \, d\mu(x) = \int_G f \circ T \, d\mu = \int_G f \, d(\mu \circ T^{-1}).$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 14.10.7 folgt $\mu = \mu \circ T^{-1}$, also $\mu(sA) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$. ❑

Offenbar sind in abelschen Gruppen alle linksinvarianten Maße ν auch *rechtsinvariant*, also $\nu(A \cdot s) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ und $s \in G$. Im Allgemeinen ist dem nicht so. Es gilt aber folgender Zusammenhang.

14.16.6 Korollar. *Ein Maß $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ist genau dann linksinvariant (rechtsinvariant), wenn das gemäß Satz 14.7.5 durch $\check{\nu}(A) = \nu(A^{-1})$ definierte Maß $\check{\nu} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ rechtsinvariant (linksinvariant) ist. Dabei ist ν genau dann ein Riesz-reguläres Borelmaß, wenn $\check{\nu}$ ein solches ist.*
Für ein bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ messbares $f : G \to [-\infty, +\infty]$ $(\mathbb{C})$ und ein linksinvariantes $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ gilt

$$\int_G f(sx)\, \mathrm{d}\nu(x) = \int_G f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \quad \textit{für alle} \quad s \in G\,, \tag{14.71}$$

und für ein rechtsinvariantes ν

$$\int_G f(xs)\, \mathrm{d}\nu(x) = \int_G f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \quad \textit{für alle} \quad s \in G\,, \tag{14.72}$$

in dem Sinne, dass die linken Seiten genau dann existieren, wenn die rechten existieren.

Beweis. Für $s \in G$ und $B \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ gilt $\check{\nu}(Bs) = \nu((Bs)^{-1}) = \nu(s^{-1}B^{-1})$. Somit ist die Rechtsinvarianz von $\check{\nu}$ äquivalent zur Linksinvarianz von ν. Entsprechend verifiziert man die Äquivalenz der Linksinvarianz von $\check{\nu}$ und der Rechtsinvarianz von ν. Die Aussage über die Riesz-Regularität erhalten wir aus Lemma 14.10.10.
Die Gleichungen (14.71) und (14.72) folgen aus (14.18) in Satz 14.7.5, wobei $T : G \to G$ durch $T(x) = sx$ bzw. durch $T(x) = xs$ definiert ist. ❑

14.16.7 Lemma. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe. Für ein Borelmaß $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ und $f \in C_{00}(G, \mathbb{R})$ ist die Funktion*

$$G \ni s \mapsto \int_G f(x\,s)\, \mathrm{d}\nu(x) \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. Die Funktion $x \mapsto f(xs)$ ist auf G integrierbar, da sie messbar und beschränkt ist und außerhalb einer kompakten Menge verschwindet. Wir wählen eine beliebige kompakte Umgebung W von e. Wegen Lemma 14.16.4 gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von e derart, dass

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad x, y \in G \ \text{ mit } \ x^{-1}y \in U\,.$$

Somit gilt $|f(xs) - f(xt)| < \epsilon$, wenn nur $s^{-1}t \in U$. Für $s, t \in G$ mit $s^{-1}t \in U \cap W$ folgt aus $f(xs) \neq 0$

$$x \in \operatorname{supp}(f) \cdot s^{-1} \subseteq \operatorname{supp}(f) \cdot (U \cap W) \cdot t^{-1} \subseteq \operatorname{supp}(f) \cdot W \cdot t^{-1}\,,$$

und aus $f(xt) \neq 0$ die Inklusion $x \in \operatorname{supp}(f) \cdot t^{-1} \subseteq \operatorname{supp}(f) \cdot W \cdot t^{-1}$. Also gilt $f(xt) = 0 = f(xs)$ für $s, t \in G$ mit $s^{-1}t \in U \cap W$ und alle $x \notin \operatorname{supp}(f) \cdot W \cdot t^{-1}$, wodurch für $s^{-1}t \in U \cap W$

$$\int_G |f(xs) - f(xt)| \, \mathrm{d}\nu(x) = \int_{\operatorname{supp}(f)Wt^{-1}} |f(xs) - f(xt)| \, \mathrm{d}\nu(x) \leq \epsilon \cdot \nu(\operatorname{supp}(f) \cdot W \cdot t^{-1}).$$

Dabei gilt $\nu(\operatorname{supp}(f) \cdot W \cdot t^{-1}) < +\infty$, da $\operatorname{supp}(f) \cdot W$ als stetiges Bild der kompakten Teilmenge $\operatorname{supp}(f) \times W$ von $G \times G$ unter der Gruppenmultiplikation selber kompakt ist. Also gibt es bei festem $t \in G$ zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung von t, nämlich $t \cdot (U \cap W)^{-1}$, mit

$$\left| \int_G f(xs) \, \mathrm{d}\nu(x) - \int_G f(xt) \, \mathrm{d}\nu(x) \right| \leq \int_G |f(xs) - f(xt)| \, \mathrm{d}\nu(x) \leq \epsilon \cdot \nu(\operatorname{supp}(f) \cdot W \cdot t^{-1}),$$

für alle $s \in t \cdot (U \cap W)^{-1}$, woraus sich die behauptete Stetigkeit ergibt. ❑

14.16.8 Lemma. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe und $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ das in Satz 14.16.5 konstruierte linksinvariante Riesz-reguläre Borelmaß. Für jedes weitere linksinvariante Riesz-reguläre Borelmaß $\nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ gibt es dann eine stetige Funktion $\triangledown_{\nu/\mu} : G \to [0, +\infty)$ derart, dass*

$$\int g \, \mathrm{d}\check{\nu} = \int \triangledown_{\nu/\mu}(s^{-1}) \cdot g(s) \, \mathrm{d}\mu(s) \quad \textit{für alle} \quad g \in C_{00}(G, \mathbb{R}), \tag{14.73}$$

und dass für beliebiges $h \in C_{00}(G, \mathbb{R})$

$$\triangledown_{\nu/\mu}(s) \cdot \int h \, \mathrm{d}\mu = \int h(ts^{-1}) \, \mathrm{d}\nu(t) \quad \textit{für alle} \quad s \in G. \tag{14.74}$$

Im Falle $\nu = \mu$ gilt $\triangledown_{\mu/\mu}(s) > 0$ für alle $s \in G$.

Beweis. Nach Satz 14.16.5 gilt $\int f \, \mathrm{d}\mu > 0$ für alle $f \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Wir wählen ein solches f und setzen

$$\triangledown_{\nu/\mu}(s) := \frac{1}{\int f \, \mathrm{d}\mu} \cdot \int f(ts^{-1}) \, \mathrm{d}\nu(t). \tag{14.75}$$

Nach Lemma 14.16.7 ist $\triangledown_{\nu/\mu} : G \to [0, +\infty)$ stetig, wobei $\triangledown_{\mu/\mu}(s) > 0$ im Fall $\nu = \mu$, da mit $f \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ auch $(t \mapsto f(ts^{-1})) \in C_{00}^+(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Für ein beliebiges $g \in C_{00}(G, \mathbb{R})$ gilt wegen der in Korollar 14.16.6 gezeigten Rechtsinvarianz von $\check{\nu}$

$$\begin{aligned} \int f \, \mathrm{d}\mu \cdot \int g \, \mathrm{d}\check{\nu} &= \int \Big(\int f(s) \, g(t) \, \mathrm{d}\check{\nu}(t) \Big) \mathrm{d}\mu(s) \\ &= \int \Big(\int f(s) \, g(ts) \, \mathrm{d}\check{\nu}(t) \Big) \mathrm{d}\mu(s). \end{aligned} \tag{14.76}$$

Als Bild der kompakten Menge $(\operatorname{supp} f) \times \operatorname{supp} g$ ($\subseteq G \times G$) unter der stetigen Abbildung $(s, t) \mapsto t \cdot s^{-1}$ ist $\operatorname{supp} g \cdot (\operatorname{supp} f)^{-1}$ ($\subseteq G$) kompakt. Für die Borelmaße μ und ν gilt daher $\mu(\operatorname{supp} f) < +\infty$ und $\nu(\operatorname{supp} g \cdot (\operatorname{supp} f)^{-1}) < +\infty$. Da $(s, t) \mapsto f(s)g(ts)$ außerhalb der kompakten Menge $(\operatorname{supp} f) \times (\operatorname{supp} g \cdot (\operatorname{supp} f)^{-1})$ ($\subseteq G \times G$) verschwindet und da wegen Fakta 14.13.7, 6, diese Funktion messbar bezüglich der Produkt-σ-Algebra ist, können wir den Satz von Fubini, Satz 14.14.4, anwenden. Also stimmt (14.76) überein mit

$$\int \Big(\int f(s)\, g(ts)\, \mathrm{d}\mu(s) \Big) \mathrm{d}\check{\nu}(t) = \int \Big(\int f(t^{-1} \cdot s)\, g(s)\, \mathrm{d}\mu(s) \Big) \mathrm{d}\check{\nu}(t)\,,$$

wobei die Gleichheit aus der Linksinvarianz von μ folgt. Aus den selben Gründen wie oben können wir nochmals den Satz von Fubini, Satz 14.14.4, und dann Satz 14.7.5 auf $T(t) = t^{-1}$ anwenden, wodurch (14.76) übereinstimmt mit

$$\int \Big(\int f(t^{-1} \cdot s)\, g(s)\, \mathrm{d}\check{\nu}(t) \Big) \mathrm{d}\mu(s) = \int \Big(\int f(t \cdot s)\, \mathrm{d}\nu(t) \Big) g(s)\, \mathrm{d}\mu(s)\,.$$

Also erhalten wir

$$\int f\, \mathrm{d}\mu \cdot \int g\, \mathrm{d}\check{\nu} = \int f\, \mathrm{d}\mu \cdot \int \nabla_{\nu/\mu}(s^{-1}) \cdot g(s)\, \mathrm{d}\mu(s)$$

und damit (14.73). Starten wir mit einer anderen Funktion $h \in C_{00}(G, \mathbb{R})$, welche $\int h\, \mathrm{d}\mu \neq 0$ erfüllt, anstatt f, so erhalten wir mit $\nabla_h := \frac{1}{\int h\, \mathrm{d}\mu} \cdot \int h(ts^{-1})\, \mathrm{d}\nu(t)$ und derselben Rechnung wie für f, dass $\int g\, \mathrm{d}\check{\nu} = \int \nabla_h \cdot g\, \mathrm{d}\mu$ für alle $g \in C_{00}(G, \mathbb{R})$. Setzen wir $\phi(x) := \nabla_h(x^{-1}) - \nabla_{\nu/\mu}(x^{-1})$, dann gilt

$$\int \phi \cdot g\, \mathrm{d}\mu = 0 \quad \text{für alle} \quad g \in C_{00}(G, \mathbb{R})\,.$$

Wäre $\phi(x) \neq 0$ für ein $x \in G$, so folgt aus Stetigkeitsgründen $\operatorname{sgn}(\phi(t)) = \operatorname{sgn}(\phi(x))$ und $2|\phi(t)| > |\phi(x)|$ für alle $t \in U$ mit einer offenen Umgebung U von x. Wählen wir $g \in C_{00}^+(G, \mathbb{R})$ mit Hilfe von Lemma 12.17.8 derart, dass $g(x) = 1$ und $\operatorname{supp} g \subseteq U$, so folgt wegen $|\phi| \cdot g \neq 0$ aus Satz 14.16.5 der Widerspruch

$$0 = 2 \operatorname{sgn}(\phi(x)) \cdot \int \phi \cdot g\, \mathrm{d}\mu = 2 \int |\phi| \cdot g\, \mathrm{d}\mu > 0\,.$$

Also gilt $\phi \equiv 0$, womit $\nabla_h = \nabla_{\nu/\mu}$ und infolge auch (14.74) für alle $h \in C_{00}(G, \mathbb{R}) \setminus H$ mit $H = \{h \in C_{00}(G, \mathbb{R}) : \int h\, \mathrm{d}\mu = 0\}$ gilt. Da $C_{00}(G, \mathbb{R}) \setminus H$ den Vektorraum $C_{00}(G, \mathbb{R})$ aufspannt und beide Seiten in (14.74) linear von h abhängen, gilt (14.74) für alle $h \in C_{00}(G, \mathbb{R})$. ❑

14.16.9 Korollar. *Ist $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe, so gibt es bis auf eine multiplikative, nichtnegative Konstante ein eindeutiges linksinvariantes (rechtsinvariantes) Riesz-reguläres Borelmaß.*

Beweis. Die Existenz eines nichtverschwindenden linksinvarianten Riesz-reguläres Borelmaß μ haben wir in Satz 14.16.5 gesehen. Ist ν ein weiteres linksinvarianten Riesz-reguläres Borelmaß, wo folgt aus (14.74) mit $c := \nabla_{\nu/\mu}(e) \in [0, +\infty)$

$$c \cdot \int f\, \mathrm{d}\mu = \int f(t)\, \mathrm{d}\nu(t) \quad \text{für alle} \quad f \in C_{00}(G, \mathbb{R})\,.$$

Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 14.10.7 bedingt $\nu = c \cdot \mu$. Die entsprechende Aussage für rechtsinvariante Riesz-reguläres Borelmaße folgt mit Hilfe von Korollar 14.16.6. ❑

14.16.10 Definition. Ein nichtverschwindendes linksinvariantes (rechtsinvariantes) Riesz-reguläres Borelmaß auf einer lokalkompakte Gruppe $(G, \mathcal{T})$ nennt man ein *linkes Haarsches Maß* (*rechtes Haarsches Maß*) .
Ist μ ein linkes Haarsches Maß, so heißt die gemäß Lemma 14.16.8 existierende stetige Funktion $\triangledown_{\mu/\mu} : G \to (0, +\infty)$ *Modularfunktion* und wird mit $\triangledown_G$ bezeichnet. Man nennt die lokalkompakte Gruppe $(G, \mathcal{T})$ *unimodular*, wenn $\triangledown_G \equiv 1$.

14.16.11 Fakta.

1. Gemäß Korollar 14.16.9 gibt es bis auf eine multiplikative positive Konstante ein eindeutiges linkes Haarsches Maß und ein eindeutiges rechtes Haarsches Maß.

2. Der vorherige Punkt zusammen mit (14.74) zeigt, dass $\triangledown_G = \triangledown_{\mu/\mu}$ unabhängig vom gewählten linken Haarschen Maß ist.

3. Wegen Korollar 14.16.6 ist μ genau dann ein linkes (rechtes) Haarsches Maß, wenn $\check{\mu}$ ein rechtes (linkes) Haarsches Maß ist.

4. Der vorherige Punkt zusammen mit (14.73) und der Eindeutigkeitsaussage in Satz 14.10.7 zeigt, dass $\triangledown_G(.^{-1}) \cdot \mu$ ein rechtes Haarsches Maß ist, wenn μ ein linkes Haarsches Maß ist. Insbesondere ist jedes linke auch ein rechtes Haarsches Maß, falls $(G, \mathcal{T})$ unimodular ist. Umgekehrt folgt aus der Tatsache, dass jedes linke auch ein rechtes Haarsches Maß ist, mit Hilfe von (14.74) die Unimodularität von $(G, \mathcal{T})$.

5. Mit μ ist wegen $\mu((tA)s) = \mu(t(As)) = \mu(As)$ für $s, t \in G$ und $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ zusammen mit Lemma 14.10.10 auch $\mu_s : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ definiert durch $\mu_s(A) = \mu(As)$ ein linkes Haarsches Maß. Für alle $h \in C_{00}(G, \mathbb{R})$ gilt wegen Satz 14.7.5 sowie (14.74)
$$\int h(t)\, d\mu_s(t) = \int h(ts^{-1})\, d\mu(t) = \int h\, d\mu \cdot \triangledown_G(s)\,.$$
Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 14.10.7 impliziert $\mu_s = \triangledown_G(s) \cdot \mu$

6. Wegen $(\mu_s)_t(A) = \mu_s(At) = \mu(Ats) = \mu_{ts}(A)$ folgt aus dem vorherigen Punkt
$$\triangledown_G(t) \cdot \triangledown_G(s) \cdot \mu = \triangledown_G(t) \cdot \mu_s = (\mu_s)_t = \mu_{ts} = \triangledown_G(ts) \cdot \mu\,,$$
also $\triangledown_G(ts) = \triangledown_G(t) \cdot \triangledown_G(s)$ für $s, t \in G$. Für $s = e = t$ folgt $\triangledown_G(e) = 1$, da $\triangledown_G(s) > 0$. Also ist $\triangledown_G : G \to (0, +\infty)$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

14.16.12 Beispiel.

(i) Ist $(G, \mathcal{T})$ kompakt, so gilt $\mu(G) < +\infty$ für ein linkes Haarsches Maß μ. Man normiert in diesem Fall μ üblicherweise derart, dass $\mu(G) = 1$. Gemäß Fakta 14.16.11 ist $s \mapsto \ln(\triangledown_G(s))$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus von G nach $\mathbb{R}$ versehen mit der Addition. Das Bild von G ist somit eine kompakte und daher beschränkte Untergruppe von $\mathbb{R}$. Weil $\{0\}$ die einzige beschränkte Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist, folgt die Unimodularität von $(G, \mathcal{T})$.

(ii) Trägt G die diskrete Topologie, so normiert man ein linkes Haarsches Maß μ üblicherweise derart, dass $\mu(\{e\}) = 1$. Wegen der Linksinvarianz folgt $\mu(\{g\}) = 1$ für alle $g \in G$ und weiter

$$\mu(B) = \begin{cases} |B| & , \quad B \text{ ist endlich} , \\ +\infty & , \quad B \text{ ist unendlich} . \end{cases}$$

Also ist μ das Zählmaß auf G und damit rechtsinvariant. Somit ist $(G, \mathcal{P}(G))$ auch unimodular.

(iii) Für abelsche lokalkompakte Gruppen $(G, \mathcal{T})$ stimmen linke und rechte Haarsche Maße überein, womit sie gemäß Fakta 14.16.11 unimodular sind.

(iv) Das d-dimensionales Lebesguesche Maß λ_d auf $\mathbb{R}^d$ erfüllt $\lambda_d(A) = \lambda_d(a + A)$ für alle $a \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$; siehe Lemma 14.11.2. Also ist λ_d ein linkes und wegen der Kommutativität auch ein rechtes Haarsches Maß von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}^d)$.

Für ein Beispiel einer nicht unimodularen lokalkompakten Gruppe siehe Beispiel 15.2.2.

14.17 Übungsaufgaben

14.1 Man weise nach, dass + und · auf $[0, +\infty]$ wie in Abschnitt 14.1 kommutativ, assoziativ und distributiv sind.

14.2 Man weise nach, dass für $a \in [0, +\infty]$, für konvergente Netze $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}$ aus $[0, +\infty]$ und Teilmengen $\{a_m : m \in M\}, \{b_m : m \in M\} \subseteq [0, +\infty]$

$$\sup_{m\in M} a \cdot b_m = a \cdot \sup_{m\in M} b_m, \;\; \lim_{i\in I} a \cdot b_i = a \cdot \lim_{i\in I} b_i, \;\; \lim_{i\in I}(a_i + b_i) = (\lim_{i\in I} a_i) + (\lim_{i\in I} b_i), ,$$

$$\sum_{m\in M} a \cdot b_m = a \cdot \sum_{m\in M} b_m, \;\; \sum_{m\in M}(a_m + b_m) = (\sum_{m\in M} a_m) + (\sum_{m\in M} b_m) .$$

14.3 Man gebe Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[0, +\infty]$ derart an, dass $\lim_{n\to} a_n \cdot b_n \neq (\lim_{n\to} a_n) \cdot (\lim_{n\to} b_n)$.

14.4 Man weise nach, dass für $x, y, z \in [-\infty, +\infty]$ im Allgemeinen nicht $x + (y + z) = (x + y) + z$ gilt, wenn man neben den Rechenregeln aus Abschnitt 14.1 auch noch $(+\infty) + (-\infty) = 0 = (-\infty) + (+\infty)$ setzt.

14.5 Für $L, M \neq \emptyset$ und eine Funktion $f : L \times M \to [0, +\infty]$ zeige man $\sup\{ f(m, n) : (m, n) \in M \times N \} = \sup\{ \sup\{f(m, n) : m \in M\} : n \in N \} = \sup\{ \sup\{f(m, n) : n \in N\} : m \in M \}$; siehe Lemme vom iterierten Supremum.

14.6 Für $L, M \subseteq [0, +\infty]$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $z \leq \sup L$ zeige man $(\sup L) + (\sup M) = \sup(L + M)$, $\min(\sup L, \sup M) = \sup\{\min(x, y) : x \in L, y \in M\}$, $\max(\sup L, \sup M) = \sup\{\max(x, y) : x \in L, y \in M\}$ und $(\sup L) - z = \sup\{\max(x, z) - z : x \in L\}$.

14.7 Für $C, D \subseteq \Omega \neq \emptyset$ beschreibe man $\mathcal{A}(\{C, D\})$!

14.8 Zeigen Sie, dass die σ-Algebra $\mathcal{E} = \mathcal{A}(\{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\})$ der Borel-Teilmengen auf $[-\infty, +\infty]$ auch $\{[-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$, $\{(c, +\infty] : c \in \mathbb{R}\}$, $\{[c, +\infty] : c \in \mathbb{R}\}$, $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{-\infty\}\}$ sowie $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{-\infty\}\}$ als Erzeuger hat.

14.9 Für $d \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a_n \leq b_n$, $n = 1, \dots, d$, sei $(a, b] := (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$. Liegen a und b in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \mathbb{Z}^d$, so nennen wir $(a, b]$ ein dyadisches Rechteck. Die Menge aller dyadischen Rechtecke wird mit $\mathcal{D}_d$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{R}_d := \{\bigcup_{i \in I} R_i : I \text{ ist endlich mit paarweise disjunkten } R_i \in \mathcal{D}_d, i \in I\}$$

ein Ring ist.

Hinweis: Für $A \in \mathcal{R}_d$ gilt für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, dass $A = \bigcup_{x \in Z_A} x + (0, \frac{1}{2^n}]^d$, wobei $Z_A = \{x \in \frac{1}{2^n} \mathbb{Z}^d : x + (0, \frac{1}{2^n}]^d \subseteq A\}$.

14.10 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel und analog zu $(a, b]$ definiertem $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^d$ zeige man, dass $\mathcal{A}(\mathcal{R}_d)$ mit $\mathcal{A}(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d,\ a_n \leq b_n,\ n = 1, \dots, d\})$ und mit $\mathcal{A}(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d,\ a_n \leq b_n,\ n = 1, \dots, d\})$ übereinstimmt.

14.11 Für eine nichtleere Menge Ω sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ derart, dass $A \cap B = \emptyset$ für ungleiche $A, B \in \mathcal{B}$ und $\bigcup_{A \in \mathcal{D}} A = \Omega$. Man zeige, dass $\mathcal{A}(\mathcal{D}) \supseteq \{\bigcup_{A \in \mathcal{I}} A : \mathcal{I} \subseteq \mathcal{D},\ \mathcal{I} \text{ abzählbar}\}$. Weiters zeige man, dass $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ überabzählbar für unendliches $\mathcal{D}$ ist.

14.12 Zeigen Sie, dass jede abzählbare σ-Algebra endlich ist.

Hinweis: Nehmen sie an, dass $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine σ-Algebra auf Ω mit $A_n \neq A_m$ für $n \neq m$ ist. Betrachten sie die Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ aller Mengen der Bauart $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\epsilon_n}$, wobei $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $A^0 := \Omega \setminus A$ und $A^1 := A$ für $A \subseteq \Omega$.

14.13 Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei $\mathcal{M}$ die Menge aller reellwertigen messbaren Funktionen. Auf $\mathcal{M}$ sei weiters die Relation $\sim_\mu$ durch $f \sim_\mu g \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ definiert. Zeigen Sie, dass $\sim_\mu$ eine Äquivalenzrelation ist, dass $\mathcal{M}$ einen Vektorraum abgibt, dass $[0]_{\sim_\mu}$ ein Unterraum von $\mathcal{M}$ ist, dass $f \sim_\mu g \Leftrightarrow f - g \in [0]_{\sim_\mu}$ für $f, g \in \mathcal{M}$ und dass $\mathcal{M}/\sim_\mu$ auch einen Vektorraum abgibt.

14.14 Für einen Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ seien $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar, so dass $(f^{-1}\{+\infty\} \cap g^{-1}\{-\infty\}) \cup (f^{-1}\{-\infty\} \cap g^{-1}\{+\infty\}) = \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$(f + g)^{-1}[-\infty, c) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}[-\infty, q) \cap g^{-1}[-\infty, c - q)\,,$$

und damit die Messbarkeit von $f + g$. Zeigen Sie die Messbarkeit von $f + g$ auch wenn $(f^{-1}\{+\infty\} \cap g^{-1}\{-\infty\}) \cup (f^{-1}\{-\infty\} \cap g^{-1}\{+\infty\}) \neq \emptyset$, wobei wir $(-\infty) + (+\infty) = 0 = (+\infty) + (-\infty)$ setzen.

14.15 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar mit $f(\Omega) \subseteq [0, +\infty]$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n := \sum_{j=1}^{n2^n - 1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})} + n \cdot f^{-1}[n, +\infty]$$

in $\mathcal{F}(\mathcal{A})_+$ liegt, dass $f_n \leq f_{n+1}$ und dass $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$.

14.16 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(f_i)_{i\in I}$ eine Netz von messbaren Funktionen $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, welches gleichmäßig gegen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch f messbar ist.

14.17 Zeigen Sie, dass für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und ein σ-endliches $A \in \mathcal{A}$ alle Teilmengen $B \subseteq A$ aus $\mathcal{A}$ wieder σ-endlich sind. Weiters zeige man, dass die Vereinigung von abzählbar vielen σ-endlichen Mengen aus $\mathcal{A}$ wieder σ-endlich ist.

Zeigen Sie schließlich, dass diese beiden Aussagen auch gelten, wenn man den Begriff σ-endliche Menge durch Nullmenge ersetzt.

14.18 Sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{A}$ die Menge Teilmengen A von Ω derart, dass A oder $\Omega \setminus A$ abzählbar ist. Weiters sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definiert durch $\mu(A) = 0$ für abzählbare A und $\mu(A) = 1$ für überabzählbare A. Zeigen Sie, dass dann $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist.

14.19 Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $I \neq \emptyset$, μ_i, $i \in I$, Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $\alpha_i \in [0, +\infty]$, $i \in I$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{A} \ni A \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i \cdot \mu_i(A) \in [0, +\infty]$ ein Maß abgibt. Zeigen Sie auch, dass für $x \in \Omega$ die Abbildung $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definiert durch $\delta_x(A) = 1$ für $x \in A$ und durch $\delta_x(A) = 0$ für $x \notin A$ ein Maß ist.

14.20 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit σ-endlichem μ und $\{x\} \in \mathcal{A}$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass dann $\mu = \nu + \omega$ mit Maßen ν und ω, wobei $\nu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \Omega$ und $\omega = \sum_{x\in I} \alpha_x \cdot \delta_x$ mit abzählbarem $I \subseteq \Omega$ und $\alpha_x \in [0, +\infty)$, $x \in I$.

14.21 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_j) < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Man beweise, dass ($\#J$ bezeichnet die Anzahl der Elemente in J)

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1,\dots,m} A_j\Big) = \sum_{J\subseteq\{1,\dots,m\}} (-1)^{1+\#J} \mu\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)$$

14.22 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = \frac{8}{25}$, $\mu(B) = \frac{1}{4}$ und $\mu(A \cap B) = \frac{2}{25}$. Weiters sei $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ gegeben durch $f|_{A\setminus B} \equiv 2$, $f|_B \equiv -2$ und $f|_{\Omega\setminus(A\cup B)} \equiv 0$. Ist f messbar? Wenn ja, berechne man $\int f \, d\mu$.

14.23 Sei $\alpha \in (0, +\infty)$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, +\infty]$ messbar mit $\int f \, d\mu < +\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int n \ln\big(1 + (\frac{f(x)}{n})^\alpha\big) \, d\mu(x)$ für $\alpha = 1$ mit $\int f \, d\mu$, für $\alpha \in (0, 1)$ mit $+\infty$ und für $\alpha \in (1, +\infty)$ mit 0 übereinstimmt.

14.24 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit endlichem μ sowie $(f_i)_{i\in I}$ eine Netz von messbaren und beschränkter Funktionen $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, das gleichmäßig konvergiert. Zeigen Sie unter Verwendung von Übungsaufgabe 14.16

$$\lim_{i\in I} \int f_i \, d\mu = \int \big(\lim_{i\in I} f_i\big) \, d\mu \, .$$

14.25 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Weiters seien $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar und derart, dass $\int f^- \, d\mu < +\infty$ und $\int g^- \, d\mu < +\infty$.

Zeigen Sie, dass $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$, wenn $f \leq g$ außerhalb einer μ-Nullmenge, wobei die Integrale gemäß Bemerkung 14.6.6 definiert sind.

Zeigen Sie weiters, dass $\int \alpha \cdot f \, d\mu = \alpha \cdot \int f \, d\mu$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie schließlich $\int (f + g)^- \, d\mu < +\infty$ sowie $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$, wenn für kein $x \in \Omega$ einer der Werte $f(x), g(x)$ mit $+\infty$ und der andere mit $-\infty$ übereinstimmt.

14.26 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar derart, dass $\int f_n^- \, d\mu < +\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\mu$, wenn die $f_n \leq f_{n+1}$ μ-fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei die Integrale gemäß Bemerkung 14.6.6 definiert sind.

14.27 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit σ-endlichem Maß und $f : \Omega \to [0, +\infty)$ messbar. Zeigen Sie, dass dann $f \cdot \mu$ auch σ-endlich ist.

14.28 Für eine Menge $\Omega \neq \emptyset$ heißt eine Abbildung $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ *äußeres Maß*, wenn $\nu(\emptyset) = 0$, wenn $\nu(A) \leq \nu(B)$ für $A \subseteq B \subseteq \Omega$ und wenn $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(D_n)$ für $D_n \subseteq \Omega$, $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} := \{\alpha \cdot \mathbb{1}_A : \alpha \in [0, +\infty], A \in \mathcal{P}(\Omega)\}$ und $\psi : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ definiert durch $\psi(\alpha \cdot \mathbb{1}_A) = \alpha \cdot \nu(A)$ die Bedingungen in Definition 14.8.4 erfüllen. Für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ zeige man weiters, dass $A \in \mathcal{A}(\nu)$ genau dann, wenn $\nu(B) \geq \nu(A \cap B) + \nu(A^c \cap B)$ für alle $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\nu(B) < +\infty$, wobei $\mathcal{A}(\nu) := \mathcal{A}(\psi)$ gemäß Definition 14.8.4.

14.29 Für $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\emptyset \in \mathcal{S}$ und $\omega : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ mit $\omega(\emptyset) = 0$ zeige man, dass

$$\nu(A) := \inf \{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \omega(B_n) : (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}, \, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \}$$

ein äußeres Maß abgibt.

14.30 Zeigen Sie für äußere Maße $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, +\infty]$, dass auch $\alpha_1 \cdot \nu_1 + \alpha_2 \cdot \nu_2$ ein äußeres Maß ist. Zeigen Sie weiters, dass für ein monoton wachsendes Netz $(\nu_i)_{i\in I}$ von äußeren Maßen auch der mengenweise durch $(\lim_{i\in I} \nu_i)(A) := \lim_{i\in I} \nu_i(A)$ definierte Grenzwert $\lim_{i\in I} \nu_i$ ein äußeres Maß ist.

14.31 Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und $m \geq 0$. Bezeichnet $d(A)$ für $A \subseteq X$ den Durchmesser $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ von A gemäß Definition 12.15.1, so zeige man, dass

$$\nu(A) := \lim_{\epsilon\to 0+} \inf \{ \sum_{n\in\mathbb{N}} d(B_n)^m : (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}}, \, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \, d(B_n) < \epsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \}$$

ein äußeres Maß ist, welches als *metrisches äußeres Maß* bezeichnet wird.

14.32 Zeigen Sie mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel und aus (12.22), dass $\nu(\bigcup_{n\in I} A_n) = \sum_{n\in I} \nu(A_n)$ für $A_n \subseteq X$, $n \in I$ mit $d(A_n, A_m) > 0$, $m, n \in I$, $m \neq n$, zuerst für ein I mit zwei Elementen, dann für ein endliches I und schließlich für ein abzählbares I.

14.33 Mit der Notation aus der Übungsaufgabe 14.31 zeige man, dass die Borelmengen $\mathcal{A}(\mathcal{T}(d))$ in $\mathcal{A}(\nu)$ enthalten sind; vgl. Übungsaufgabe 14.28.

Hinweis: Für ein offenes $O \subseteq X$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachte $O_n := \{x : d(x, O^c) > \frac{1}{n}\}$ und $D_n := O_{n+1} \setminus O_n$. Für $B \subseteq X$ mit $\nu(B) < +\infty$ zeige man $\nu(B) \geq \nu(O^c \cap B) + \nu(O_n \cap B)$, $O_n \cap B \subseteq O \cap B = (O_n \cap B) \cup \bigcup_{k\geq n} (D_k \cap B)$ und $\sum_{k\in 2\mathbb{N}} \nu(D_k \cap B) < +\infty$ sowie $\sum_{k\in 2\mathbb{N}-1} \nu(D_k \cap B) < +\infty$. Aus diesen Informationen leite man $\lim_{n\to\infty} \nu(O_n \cap B) = \nu(O \cap B)$ ab.

14.34 Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ zwei metrische Räume, und $T : X \to Y$ mit $d_Y(T(x_1), T(x_2)) \leq C \cdot d_X(x_1, x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ und einem festen $C \geq 0$. Sind ν_X bzw. ν_Y definiert wie in Übungsaufgabe 14.31 auf X bzw. Y mit demselben $m \geq 0$, so zeige man, dass $\nu_Y(f(A)) \leq C^m \cdot \nu_X(A)$ für alle $A \subseteq X$. Was impliziert dieses Resultat für bijektives $T : X \to Y$ mit $d_Y(T(x_1), T(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in X$?

14.35 Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Sind ν_X bzw. ν_Y definiert wie in Übungsaufgabe 14.31 auf $\langle X, d\rangle$ bzw. $\langle Y, d|_{Y\times Y}\rangle$ mit demselben $m \geq 0$, so zeige man, dass $\nu_Y(A) = \nu_X(A)$ für alle $A \subseteq Y$.

14.36 Zeigen Sie, dass für einen Maßraum $(\Sigma, \mathcal{B}, \nu)$ die Menge $\overline{\mathcal{B}}$ und die Abbildung $\bar{\nu} : \overline{\mathcal{B}} \to [0, +\infty]$ aus Fakta 14.9.2, 2, eine σ-Algebra bzw. ein vollständiges Maß abgeben.

14.37 Zeigen Sie, dass für ein Dynkinsystem $\mathcal{D}$ und $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subseteq B$ auch $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

14.38 Sei $[-\infty, +\infty]$ mit der Topologie O, welche $\{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\} \cup \{(c, +\infty] : c \in \mathbb{R}\}$ als Subbasis hat, versehen. Zeigen Sie, dass dann $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\} \cup \{[-\infty, c) : c \in \mathbb{Q}\} \cup \{(c, +\infty] : c \in \mathbb{Q}\}$ eine abzählbare Basis von O abgibt.

14.39 Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $\omega : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß. Zeigen Sie, dass ein A mit $\omega(A) < +\infty$ genau dann regulär ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein kompaktes $K \subseteq A$ und ein offenes $O \supseteq A$ mit $\omega(O \setminus K) < \epsilon$ gibt.

14.40 Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $\mu, \nu : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ Maße. Zeigen Sie $\operatorname{supp}(\mu + \nu) = \operatorname{supp}\mu \cup \operatorname{supp}\nu$. Zeigen Sie auch, dass $\operatorname{supp}(f \cdot \mu) = \{x \in \Omega : \mu(O \setminus f^{-1}(\{0\})) > 0 \text{ für alle } O \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in O\}$ wenn $f : \Omega \to [0, +\infty]$ bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ messbar ist.

14.41 Sei $\eta_n : \mathbb{R} \to \{0, \dots, 9\}$ die Abbildung, die einer reellen Zahl x die n-te Ziffer nach dem Komma in der Dezimaldarstellung von x zuweist. Im Falle von Mehrdeutigkeit wähle die Ziffernentwicklung derart, dass sie auf $0000\dots$ endet. Zeigen Sie, dass η_n für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar ist, wenn wir $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$ versehen und η_n als Funktionen nach $\mathbb{R}$ hinein betrachten.

14.42 Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^p) \to [0, +\infty]$ ein Maß auf $\mathbb{R}^p$. Für $r > 0$ sei $U_r(x)$ die offene Kugel um x mit Radius r. Man zeige, dass dann
$$x \mapsto \mu(U_r(x))$$
eine auf $\mathbb{R}^p$ von unten halbstetige Funktion mit Werten in $[0, +\infty]$ ist.

Hinweis: Ist $r_n \nearrow r$ monoton wachsend, so folgt aus der σ-Additivität $\mu(U_{r_n}(x)) \to \mu(U_r(x))$. Außerdem gilt für $y \in U_{\frac{r-r_n}{2}}(x)$, dass $U_{r_n}(x) \subseteq U_{\frac{r+r_n}{2}}(y) \subseteq U_r(x)$.

14.43 Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass die Menge M aller $x \in \mathbb{R}$, an denen F unstetig ist, abzählbar ist. Wie lässt sich M mit dem gemäß Beispiel 14.10.12 existierenden Maß ω_F ausdrücken? Was bedeutet insbesondere $M = \emptyset$ für ω_F?

14.44 Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(t) = 0,\ t \leq 0$ und $F(t) = \lfloor t \rfloor,\ t > 0$. Bestimmen Sie das Beispiel 14.10.12 existierende Maß ω_F. Was bedeutet es, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich ω_F ist? Wie lässt sich das Integral $\int_{\mathbb{R}} f \, d\omega_F$ berechnen?

14.45 Man betrachte den lokalkompakten Topologischen Raum $\mathbb{R}$ versehen mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^1$. Man zeige, dass
$$\phi : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$$
ein positives aber unbeschränktes lineares Funktional auf $C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist. Dabei ist $C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ versehen mit der Supremumsnorm.

Anmerkung: $(C_{00}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ ist zwar ein normierter, aber kein Banachraum; siehe Beispiel 12.18.12.

14.46 Sei $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ gegeben durch $f(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ (größte ganze Zahl $\leq \frac{1}{x}$) für $x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ sonst. Ist $f^{\frac{1}{2}}$ auf $\mathbb{R}$ integrierbar, gilt also $\int_{\mathbb{R}} f^{\frac{1}{2}} \, d\lambda < +\infty$? Begründen Sie ihre Antwort!

14.47 Man betrachte

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx .$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert dieses Integral als uneigentliche Riemann-Integral und für welche t existiert das entsprechende Lebesgue-Integral?

14.48 Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \sin(x^t) \, dx .$$

als uneigentliche Riemann-Integral und für welche t existiert das entsprechende Lebesgue-Integral?

14.49 Man zeige, dass für $T \in \mathbb{R}, T > 0$, und $f \in C^1([-T, T], \mathbb{R})$ immer

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{[-T,T]} f(t) \exp(itx) \, d\lambda(t) = 0 .$$

14.50 Man verwende den Satz von der monotonen Konvergenz, um für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$

$$I(t) := \int_{(0,+\infty)} e^{-t^2 x} \frac{e^{2tx} - e^{-2tx}}{e^x - e^{-x}} \, d\lambda(x) = 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1+t^2)^2 - 4t^2}$$

zu zeigen. Schließlich zeige man mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz angewandt auf das Zählmaß, dass $\lim_{t \to 1} I(t) - \frac{4t}{(t^2-1)^2} = \frac{3}{4}$.

Hinweis: Geometrische Reihe.

14.51 Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} (1 - \frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}} \, d\lambda(x)$ sowie $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} \, d\lambda(x)$.

14.52 Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1)} \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2} \, d\lambda(x)$.

Hinweis: Für $0 < x < 1$ zeige man zuerst $\frac{n^2 x}{1+n^3 x^2} \leq x^{-\frac{1}{3}}$.

14.53 Bestimmen Sie für alle $\alpha \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx \sin(x)}{1 + n^\alpha x^\alpha} \, d\lambda(x) .$$

14.54 Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int_{[a,+\infty)} \frac{n^2 x}{1+x^2} e^{-n^2 x^2} \, d\lambda(x) = 0$ für $a > 0$. Gilt das auch für $a = 0$? Begründen Sie ihre Antwort!

14.55 Man betrachte die Ableitung g von $\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ für $x \in (0,1)$ und stelle diese mit Hilfe von Übungsaufgabe 8.36 als Grenzwert einer Reihe dar. Nun betrachte man $x \mapsto \int_{(0,x)} g \, d\lambda$ und leite mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz eine Reihendarstellung für $\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$ her. Weiters beweise man

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right), \quad x \in (0,1) .$$

Schließlich zeige man auch, dass diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das unendliche Produkt ist dabei als Grenzwert von endlichen Partialprodukten zu betrachten.

14.56 Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für $y \in (0, 1)$ setzen wir

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} (1 + t^2) \left(\frac{1}{\pi} \arctan \frac{b - t}{y} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{a - t}{y} \right) \mathrm{d}\mu(t).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz, dass

$$\lim_{y \searrow 0} g(y) = \int_{(a,b)} (t^2 + 1) \, \mathrm{d}\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\{a,b\}} (t^2 + 1) \, \mathrm{d}\mu(t) \,.$$

Hinweis: Berechnen Sie $\lim_{y \searrow 0}$ des Integranden. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass der Integrand durch eine von y unabhängige Konstante beschränkt ist. Unterscheiden Sie dazu die Fälle, $t \in [a - 1, b + 1]$, $t \in (-\infty, a - 1)$ und $t \in (b + 1, +\infty)$.

14.57 Für eine beschränkte Teilmenge $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^m)$ von $\mathbb{R}^m$ zeige man $\lambda_m(A) \leq d_\infty(A)^m$, wobei $d_\infty(A)$ der Durchmesser von A bezüglich der von $\|.\|_\infty$ induzierten Metrik d_∞ auf $\mathbb{R}^m$ ist; siehe Definition 12.14.1.

14.58 Mit der Notation aus Übungsaufgabe 14.31 sei speziell $X = \mathbb{R}^m$ und $d = d_\infty$; vgl. Beispiel 3.1.5. Zeigen Sie für $r > 0$, dass $\nu([-r, +r]^m) \leq (2r)^m$ und dass ν auf beschränkten Teilmengen endlich ist.

14.59 Zeigen Sie mit Hilfe von Lemma 14.11.5 unter Beachtung von Übungsaufgabe 14.33 und mit Hilfe der beiden vorherigen Übungsaufgaben, dass für $X = \mathbb{R}^m$, $d = d_\infty$ und ν wie in Übungsaufgabe 14.31 $\nu|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^m)} = \lambda_m$.

14.60 Zeigen Sie, dass für $X = \mathbb{R}^p$, $d = d_\infty$, $m > p$ und ν wie in Übungsaufgabe 14.31 und für beschränktes $A \subseteq \mathbb{R}^p$ immer $\nu(A) = 0$.

14.61 Für eine nichtleere Menge Ω, Messräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, und Abbildungen $f_i : \Omega_i \to \Omega$, $i \in I$, zeige man, dass $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : f_i^{-1}(A) \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i \in I\}$ die bezüglich $\subseteq$ größte σ-Algebra auf Ω ist, so dass alle f_i bezüglich $\mathcal{A}_i$-$\mathcal{A}$ gleichzeitig messbar sind. Man bezeichnet $\mathcal{A}$ als *finale σ-Algebra* bezüglich der Abbildungen f_i, $i \in I$.

Ist obendrein $(\Sigma, \mathcal{B})$ ein Messraum, so zeige man weiters, dass eine Abbildung $h : \Omega \to \Sigma$ genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar ist, wenn $h \circ f_i : \Omega_i \to \Sigma$ für alle $i \in I$, $\mathcal{A}_i$-$\mathcal{B}$-messbar ist.

14.62 Zeigen Sie, dass für eine Menge Ω und σ-Algebren $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, der Schnitt $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ebenfalls eine σ-Algebra ist. Wie lässt sich dieser Schnitt als finale σ-Algebra darstellen?

14.63 Für paarweise disjunkte Messräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$, sei $\Omega := \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ versehen mit $\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega : A \cap \Omega_i \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i \in I\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω ist. Zeigen Sie auch, dass für einen weiteren Messraum $(\Sigma, \mathcal{B})$ eine Abbildung $h : \Omega \to \Sigma$ genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar ist, wenn für alle $i \in I$ die Einschränkung $h|_{\Omega_i} : \Omega_i \to \Sigma$ $\mathcal{A}_i$-$\mathcal{B}$-messbar ist.

14.64 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ messbar. Man zeige

$$\{(x, y) \in \Omega \times [-\infty, +\infty] : 0 < y < f(x)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{E} \,.$$

Hinweis: Was hat diese Menge mit $\bigcup_{0 \leq q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(q, +\infty] \times (0, q)$ zu tun?

14.65 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass auch $\{(x,y) \in \Omega \times [-\infty,+\infty] : 0 < f(x) < y\}$, $\{(x,y) \in \Omega \times [-\infty,+\infty] : 0 < y \leq f(x)\}$ sowie $\{(x,y) \in \Omega \times [-\infty,+\infty] : 0 < y = f(x)\}$ in $\mathcal{A} \otimes \mathcal{E}$ liegen.

14.66 Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Upsilon, \mathcal{B})$ Messräume mit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{K})$ und $\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{L})$ für gewisse $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\Upsilon)$. Zeigen Sie, dass für die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A}(\{K \times L : K \in \mathcal{K},\ L \in \mathcal{L}\})$ gilt.

14.67 Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Upsilon, \mathcal{B})$ Messräume. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{R}$ aller Mengen der Form $A_1 \times B_1 \cup \cdots \cup A_n \times B_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ und $(A_j \times B_j) \cap (A_k \times B_k) = \emptyset$ für $j \neq k$ ein Ring ist, wobei $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{R})$.

14.68 Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume mit jeweils σ-endlichen Maß. Weiters sei $f : \Omega \to [0,+\infty)$ messbar bezüglich $\mathcal{A}$ und $g : \Upsilon \to [0,+\infty)$ messbar bezüglich $\mathcal{B}$. Zeigen Sie, dass dann $(f \cdot \mu) \otimes (g \cdot \nu) = h \cdot (\mu \otimes \nu)$, wobei $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$; vgl. Satz 14.14.4.

14.69 Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i \in I$, Maßräume mit σ-endlichen Ω_i, wobei I endlich ist. Zeigen Sie mit Induktion nach der Mächtigkeit von I, dass es dann ein eindeutiges Maß (Produktmaß) $\otimes_{i\in I}\mu_i$ auf $(\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i)$ derart gibt, dass $(\otimes_{i\in I}\mu_i)(\prod_{i\in I} E_i) = \prod_{i\in I} \mu_i(E_i)$ für alle $E_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in I$.

14.70 Für $n, m \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^n)$ und messbares $f : D \to \mathbb{R}^m$ zeige man $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D\} \in \mathcal{A}(\mathcal{T}^{m+n})$ und $\lambda_{m+n}(\Gamma(f)) = 0$.

14.71 Man berechne das Volumen von $B \subseteq \mathbb{R}^3$, also $\lambda_3(B)$, wobei B die Menge aller Vektoren, die über der xy-Ebene, unterhalb des Paraboloids $x^2 + y^2 - z = 0$ und innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = a^2$ mit einem festen $a > 0$ liegen, also

$$B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ z \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

14.72 Man weise die aus der Schule bekannte Tatsache nach, dass das Volumen einer Pyramide gleich Grundfläche mal Höhe durch drei ist. Dabei muss die Grundfläche aus $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$ sein.

14.73 Man berechne das Volumen, also das λ_3-Maß, von $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| < 1\}$ und von $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z| + |a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z| + |a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z| < 1\}$ mit Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

14.74 Für festes $r > 0$ sei G die Menge aller $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < r^2$. Man bestimme die Fläche, also das λ_2-Maß, von $\{(x,y)^T \in G : -|x| < y < |x|\}$.

14.75 Bestimmen Sie das Volumen, also das λ_3-Maß, von

$$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 4,\ 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}.$$

14.76 Man berechne das Volumen, also das λ_3-Maß, von

$$\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

14.77 Man berechne die iterierten uneigentlichen Riemann-Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Was lässt sich daraus schließen, wenn man nach $\int_{(0,1)\times(0,1)} \frac{x-y}{(x+y)^3}\, \mathrm{d}\lambda_2(x,y)$ fragt?

14.78 Man betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\xi,\eta)^T := \begin{cases} \frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}, & \text{falls } (\xi,\eta)^T \neq (0,0)^T, \\ 0, & \text{falls } (\xi,\eta)^T = (0,0)^T, \end{cases}$$

und berechne

$$\int_{(0,1]} \left(\int_{(0,1]} f(\xi,\eta)^T \, d\lambda(\xi) \right) d\lambda(\eta) \quad \text{und} \quad \int_{(0,1]} \left(\int_{(0,1]} f(\xi,\eta)^T \, d\lambda(\eta) \right) d\lambda(\xi).$$

Ist $f|_{(0,1]\times(0,1]}$ nach $\lambda_2|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{(0,1]\times(0,1]}}$ integrierbar? Weiters berechne man

$$\int_{(0,1]\times(0,1]} \max(f,0) \, d\lambda_2 \quad \text{sowie} \quad \int_{(0,1]\times(0,1]} -\min(f,0) \, d\lambda_2 .$$

14.79 Bestimmen Sie das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx$, wobei $\frac{\sin(x)}{x} = 1$ für $x = 0$, indem Sie auf $\int_{(0,2n]\times(0,+\infty)} e^{xt} \sin(x) \, d\lambda_2(x,t)$ Satz 14.14.4 anwenden und dann n gegen unendlich gehen lassen.

14.80 Man berechne

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} xy e^{x^2+y^2} \, d\lambda_2(x,y)^T, \quad \int_{\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2<4\}} y^2 \, d\lambda_2(x,y)^T, \quad \int_G xy \, d\lambda_2(x,y)^T,$$

wobei G der Bereich ist, der oberhalb von $y = x^2$ und unterhalb von $y = x + 2$ liegt.

14.81 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte, positiv definite Matrix und $Q(x) := x^T A x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Man berechne

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} \, d\lambda_n(x) .$$

Hinweis: Diagonalisierung!

14.82 Für Maßräume $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, $(\Upsilon,\mathcal{B},\nu)$ sei $\mu\otimes\nu : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,+\infty]$ wie in Satz 14.14.4. Weiters sei $f : \Omega\times\Upsilon \to [-\infty,+\infty]$ messbar bezüglich $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ mit $f^{-1}([-\infty,+\infty]\setminus\{0\}) \in (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_{\mu,\nu}$ und $\int_\Omega \int_\Upsilon f^-(x,y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) < +\infty$. Zeigen Sie, dass dann auch (14.54) mit Nullmengen $L \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{B}$ gilt, wobei die Integrale gemäß Bemerkung 14.6.6 definiert sind.

14.83 Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0,+\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $c \geq 0$. Zeigen Sie, dass durch

$$V(x,y)^T := cy + \frac{y}{\pi} \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t-x)^2+y^2} \, d\mu(t)$$

eine Funktion $V : \mathbb{R}\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und bezüglich $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{R}\times(0,+\infty)}$ messbar ist. Zeigen Sie weiters mit Hilfe von Übungsaufgabe 14.56, dass für $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

$$\lim_{y\searrow 0} \int_{(a,b)} V(x,y)^T \, d\lambda(x) = \int_{(a,b)} (t^2+1) \, d\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\{a,b\}} (t^2+1) \, d\mu(t) .$$

Anmerkung: Dieser Sachverhalt wird als *Stieltjessche Umkehrformel* bezeichnet, weil man das Maß μ aus der Funktion $V(x,y)^T$ rekonstruieren kann.

14.84 Man verifiziere (14.57) durch genaues Nachrechnen.

14.85 Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ versehen mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ bildet.

14.86 Beweisen Sie, dass $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z = r\exp(i\phi) \mapsto \ln r + i\phi$ $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$-$\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$-messbar ist, wenn man etwa festlegt, dass der Winkel ϕ aus $[0, 2\pi)$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Stetigkeit von $\log : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to \mathbb{C}$.

14.87 Für einen Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ beweise man, dass $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ genau dann eine $\mathbb{R}^d$-wertige Treppenfunktion ist, wenn $\pi_j \circ f$ für alle $j = 1, \dots, d$ eine reellwertige Treppenfunktion ist.

14.88 Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ zeige man

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu \, .$$

Gilt für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$ die entsprechende Ungleichung

$$\left\| \int f \, d\mu \right\|_2 \leq \int \|f\|_2 \, d\mu \, ?$$

Begründen Sie ihre Antwort!

14.89 Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ mit einem endlichem μ derart, dass $M(E) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in L$ für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mu(E) > 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) \in L$ für μ-fast alle $x \in \Omega$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $M(E) \in K_\epsilon^{\mathbb{C}}(w)$ für $E = f^{-1}(K_\epsilon^{\mathbb{C}}(w))$, falls $\mu(E) > 0$.

14.90 Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu \neq 0$. Für eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ist das *wesentliche Bild* von f definiert durch $\operatorname{ess}-f(\Omega) := \{z \in \mathbb{C} : \mu(f^{-1}(U_\epsilon(z))) > 0 \text{ für alle } \epsilon > 0\}$.

Zeigen Sie, dass $\operatorname{ess}-f(\Omega) = \operatorname{supp} \mu \circ f^{-1} \neq \emptyset$; vgl. Satz 14.7.5 und Definition 14.12.10. Zeigen Sie weiters für ein messbares $g : \Omega \to \mathbb{C}$, dass $\operatorname{ess}-f(\Omega) = \operatorname{ess}-g(\Omega)$, wenn $f = g$ μ-fast überall gilt. Zeigen Sie schließlich, dass es ein messbares $h : \Omega \to \mathbb{C}$ gibt mit $h(\Omega) = \operatorname{ess}-f(\Omega)$ und $f = h$ μ-fast überall.

14.91 Zeigen Sie, dass die Gammafunktion $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$

$$\Gamma(z) = \int_{(0,+\infty)} e^{-x} x^{z-1} \, d\lambda(x)$$

wohldefiniert und holomorph ist, wobei $x^{z-1} := \exp((z-1) \cdot \ln x)$. Berechnen Sie $\Gamma'(z)$ und zeigen Sie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

14.92 Man zeige, dass $f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} + itx} \, d\lambda(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ist, die $f'(t) + tf(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie mit Hilfe von Übungsaufgabe 13.4, dass infolge $f(t) = \sqrt{2\pi} \exp(-\frac{t^2}{2})$, $t \in \mathbb{R}$.

14.93 Für $t \in (0, +\infty)$ betrachte man die Funktion

$$f(t) = \int_{(0,+\infty)} \mathrm{e}^{-tx} \cdot \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}\lambda(x) .$$

Man berechne $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ sowie $f'(t)$ für $t \in (0, +\infty)$. Begründen Sie Ihre Antwort! Schließlich leite man daraus $f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$ für $t \in (0, +\infty)$ her.

Anmerkung: Siehe auch Beispiel 8.7.14!

14.94 Man zeige: Sind $x, y \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0$, so ist $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t^y}$ über $(0, 1)$ nach dem Lebesgue-Maß integrierbar. Man zeige weiters, dass

$$\int_{(0,1)} \frac{t^{x-1}}{1 + t^y} \, \mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + ny} ,$$

wobei $t^x := \exp(x \ln t)$ und $t^y := \exp(y \ln t)$.

Hinweis: Man schreibe $\frac{t^{x-1}}{1+t^y}$ als $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{x-1+ny}$. Warum ist diese Reihe konvergent? Zum Auffinden einer integrierbare Majorante für $\frac{t^{x-1}}{1+t^y}$ bzw. für die Folge der Partialsummen beachte man, dass für $t \in (0, 1)$ hinreichend nahe bei 1 gilt, dass $2 \operatorname{Re} \exp(\mathrm{i} \operatorname{Im} y \ln t) \geq 1$ und daher $2 \operatorname{Re} t^y \geq t^{\operatorname{Re} y}$.

14.95 Für $x \in (0, 1)$ stelle man $\int_{(0,1)} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}\lambda(t)$ in einer Reihe dar, und zeige

$$\int_{(1,+\infty)} \frac{t^{x-1}}{1 + t} \, \mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x - n} .$$

Schließlich stelle man auch $\int_{(0,+\infty)} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}\lambda(t)$ als Reihe dar!

Hinweis: Zur Berechnung von $\int_{(1,+\infty)} \ldots$ verwende man die Substitution $t = \frac{1}{s}$. Begründen Sie auch, warum man die Substitutionsregel anwenden darf!

14.96 Für $x \in (0, 1)$ zeige man

$$\int_{(0,+\infty)} \frac{t^{x-1}}{1 + t} \, \mathrm{d}\lambda(t) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} .$$

Hinweis: Neben dem vorherigen Beispiel verwende man Übungsaufgabe 8.36 und die Tatsache, dass $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \pi \cot(\pi \frac{x}{2}) - \pi \cot(\pi x)$.

14.97 Seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) = \int_{(0,+\infty)} \frac{\cos xt}{1 + t^2} \, \mathrm{d}\lambda(t), \quad G(x) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1 - \cos xt}{t^2(1 + t^2)} \, \mathrm{d}\lambda(t) .$$

Man zeige, dass F und G stetig sind, dass $F(0) - F(x) + G(x) = |x| \cdot \int_{(0,+\infty)} \frac{(\sin t)^2}{t^2} \, \mathrm{d}\lambda(t)$ und dass G zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $G'' = F$ ist.

14.98 Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathbb{T}_2)_{\mathbb{T}} \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß, wobei $\mathbb{T}$ $(= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$. Zeigen Sie, dass durch $(z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\mu(\zeta)$$

eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion definiert wird. Zeigen Sie weiters, dass $\operatorname{Re} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}$ und infolge $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Hinweis: Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist in $r \cdot \mathbb{D}$ für hinreichend großes $r < 1$ enthalten. Warum?

14.99 Zeigen Sie, dass die Funktion f aus dem vorherigen Beispiel auch durch

$$f(z) = \int_{[0,2\pi)} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \, d\nu(t)$$

mit einem Maß ν auf $[0, 2\pi)$ darstellbar ist. Geben Sie an, wie μ und ν in Verbindung stehen.

14.100 Mit der Notation aus dem vorletzten und dem vorherigen Beispiel gebe man eine Darstellung von $\operatorname{Re} f(z)$ an, und zeige damit, dass immer $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$.

Man berechne f insbesondere, wenn $\nu = \lambda|_{\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)_{[0,2\pi)}}$ und wenn $\nu = \delta_0$ das Punktmaß bei 0 ist.

14.101 Zeigen Sie, dass die Funktion $V : \mathbb{R}\times(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ aus Übungsaufgabe 14.83 Werte in $[0, +\infty)$ hat und zweimal stetig partiell differenzierbar sowie harmonisch ist, also $\frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V = 0$ erfüllt.

14.102 Für $a, t > 0$ sei

$$u(t, a) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) \, dx \,.$$

Zeigen Sie, dass $u : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist, und dass für jedes feste $a > 0$ die Funktion $t \mapsto u(t, a)$ zweimal differenzierbar ist.

Weiters berechne man $\lim_{a\to 0+} u(t, a)$ und $\lim_{a\to+\infty} u(t, a)$.

Hinweis: Für $\lim_{a\to+\infty} u(t, a)$ verwende man die Tatsache, dass $\lim_{|y|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(ixy) \, d\lambda(x) = 0$ für jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Wir werden diesen Sachverhalt in Satz 17.1.2 herleiten.

14.103 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, a) = a^2 u(t, a)$$

und leite daraus $u(t, a) = \frac{\pi}{2} e^{-at}$ her.

Hinweis: Man wende zweimal partielle Integration auf $u(t, a)$ an, und vergleiche das Ergebnis mit $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, a)$. Für $u(t, a) = \frac{\pi}{2} e^{-at}$ verwende man Beispiel 9.3.21 mit $f(t) = (u(t, a), \frac{\partial u(t,a)}{\partial t})^T$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$.

14.104 Man zeige für $a \in \mathbb{R}$, dass die Abbildung $t \mapsto \exp(it)$ von $(a, a + 2\pi)$ nach $\mathbb{T} \setminus \{\exp(ia)\}$ einen Homöomorphismus abgibt, wobei $(a, a + 2\pi)$ und $\mathbb{T} \setminus \{\exp(ia)\}$ mit den Euklidischen Topologien versehen sind.

Man zeige damit, dass $t \mapsto \exp(it)$ als Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{T}$ eine offene Abbildung ist, also offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

Hinweis: Für den ersten Teil verwende man die Folgencharakterisierung der Stetigkeit und die Tatsache, dass $x_n \to x$ genau dann, wenn jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Teilfolge hat. Weiters verwende man, dass $[a, a + 2\pi]$ kompakt ist.

14.105 Man zeige, dass $\{0\}$ die einzige beschränkte Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist.

14.106 Man zeige, dass $(t_1, \dots, t_n)^T \mapsto (\exp(\mathrm{i}t_1), \dots, \exp(\mathrm{i}t_n))^T$ eine offene Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{T}^n$ ist.

14.107 Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{T}$. Man zeige, dass G entweder endlich, oder gleich $\mathbb{T}$ ist.

14.108 Man zeige, dass die Gruppe $U(n, \mathbb{C})$ aller komplexen unitären $n \times n$ Matrizen eine kompakte Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ abgibt. Ist $GL(n, \mathbb{C})$ kompakt?

14.109 Sei G eine topologische Gruppe, e ihr neutrales Element und $\sim$ wie in Korollar 12.9.11. Man zeige, dass $N := [e]_\sim$ ein abgeschlossener Normalteiler ist, und $[x]_\sim$ genau die Nebenklassen bzgl. N sind.

14.110 Man zeige, dass $GL(n, \mathbb{R})$ nicht zusammenhängend und $GL(n, \mathbb{C})$ zusammenhängend ist.

14.111 Man zeige, dass $U(n, \mathbb{C})$ eine zusammenhängende Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist.

14.112 Sei $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe und das Maß μ wie in Satz 14.16.5. Zeigen Sie, dass dann $\mu(O) > 0$ für alle nichtleeren $O \in \mathcal{T}$, und bestimmen Sie $\operatorname{supp} \mu$.