

Kapitel 13

Implizite Funktionen und Mannigfaltigkeiten

13.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Für das Hauptresultat dieses Kapitels, den Satz über implizite Funktionen, benötigen wir den Banachschen Fixpunktsatz, der Anwendungen auch in vielen anderen Bereichen der Analysis hat.

13.1.1 Satz (Banachscher Fixpunktsatz). Sei $\langle M, d \rangle$ ein vollständiger metrischer Raum. Weiters sei $T : M \rightarrow M$ eine strikte Kontraktion, also

$$d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M,$$

mit einem festen $0 \leq q < 1$. Dann hat die Fixpunktgleichung $x = Tx$ genau eine Lösung z in M . Definiert man für ein beliebiges $y_0 \in M$ induktiv $y_n := Ty_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z , also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ mal}}(y) = z$.

Beweis. Zunächst kann es höchstens einen Fixpunkt geben. Sind nämlich z_1, z_2 Fixpunkte von T , also $Tz_1 = z_1, Tz_2 = z_2$, so folgt $d(z_1, z_2) = d(Tz_1, Tz_2) \leq q \cdot d(z_1, z_2)$. Wegen $0 \leq q < 1$ ist das nur für $d(z_1, z_2) = 0$ möglich. Weiters ist $T : M \rightarrow M$ gleichmäßig stetig, da aus $d(x, y) < \epsilon$ die Ungleichung $d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y) < q \cdot \epsilon < \epsilon$ folgt.

Mittels vollständiger Induktion zeigen wir die Ungleichung

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq q^n \cdot d(y_0, y_1). \quad (13.1)$$

Für $n = 0$ ist diese klar und der Induktionsschritt folgt aus $d(y_{n+1}, y_{n+2}) = d(Ty_n, Ty_{n+1}) \leq q \cdot d(y_n, y_{n+1}) \leq q^{n+1} \cdot d(y_0, y_1)$. Folglich gilt für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + \dots + d(y_{m-1}, y_m) \\ &\leq (q^n + \dots + q^{m-1}) \cdot d(y_0, y_1) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(y_0, y_1), \end{aligned}$$

da wegen $0 \leq q < 1$ Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} q^k$ gegen $\frac{q^n}{1-q}$ konvergiert. Also erweist sich $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Cauchy-Folge, wodurch der Grenzwert $z := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ existiert. Dass z ein Fixpunkt ist, folgt wegen der Stetigkeit von T aus

$$Tz = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = z. \quad \square$$

13.1.2 Beispiel. Wir wollen hier als wichtiges Beispiel für die Anwendbarkeit von Satz 13.1.1 eine einfache Version des *Satzes von Picard-Lindelöf* aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bringen. Dazu sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\alpha \in I$ als linken Randpunkt, $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $\xi \in X$, $G : I \times X \rightarrow X$ stetig und derart, dass

$$\|G(t, x) - G(t, y)\| \leq \eta(t) \cdot \|x - y\| \quad \text{für alle } t \in I, x, y \in X,$$

mit einer stetigen Funktion $\eta : I \rightarrow [0, +\infty)$. Zudem setzen wir voraus, dass

$$c := \sup_{t \in I} \int_{\alpha}^t \eta(v) dv < +\infty \quad \text{und} \quad \sup_{t \in I} \left\| \int_{\alpha}^t G(s, \xi) ds \right\| \cdot \chi(t) < +\infty, \quad (13.2)$$

wobei

$$\chi(t) := \exp\left(-\int_{\alpha}^t \eta(v) dv\right) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Es sei bemerkt, dass für kompakte Intervalle I die Bedingungen (13.2) für jedes stetige $\eta : I \rightarrow [0, +\infty)$ erfüllt ist.

Wir werden zeigen, dass es dann eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow X$ gibt, welche

$$f'(t) = G(t, f(t)) \quad \text{für alle } t \in I \quad \text{und} \quad f(\alpha) = \xi$$

erfüllt. Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, Satz 8.4.5, in der Version Fakta 9.3.16, 5, für Banachraum-wertige Funktionen ist die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen f äquivalent zur Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow X$ mit

$$f(t) = \xi + \int_{\alpha}^t G(s, f(s)) ds \quad \text{für alle } t \in I. \quad (13.3)$$

Wir betrachten dafür den Vektorraum $C_{\chi, b}(I, X)$ aller stetigen Funktionen $g : I \rightarrow X$, für die $\|g\|_{\chi, \infty} := \sup_{t \in I} \|g(t)\| \cdot \chi(t) < +\infty$. Man erkennt leicht, dass $h \mapsto h \cdot \chi$ eine lineare und isometrische Bijektion von $(C_{\chi, b}(I, X), \|\cdot\|_{\chi, \infty})$ auf den Banachraum $(C_b(I, X), \|\cdot\|_{\infty})$ abgibt; siehe Beispiel 9.1.9, (iv). Infolge ist auch $(C_{\chi, b}(I, X), \|\cdot\|_{\chi, \infty})$ ein Banachraum. Für ein kompaktes I sind wegen $0 < \sup_{t \in I} \chi(t) < +\infty$ die Räume $C_b(I, X)$ und $C_{\chi, b}(I, X)$ gleich und $\|\cdot\|_{\chi, \infty}$ ist zu $\|\cdot\|_{\infty}$ äquivalent; siehe Definition 9.2.1.

Für stetiges $g : I \rightarrow X$ definieren wir

$$(Tg)(t) := \xi + \int_{\alpha}^t G(s, g(s)) ds \quad \text{für } t \in I,$$

und erhalten wegen der Stetigkeit von G wieder eine stetige Funktion $Tg : I \rightarrow X$. Aus $\frac{d}{ds} \exp(\int_{\alpha}^s \eta(v) dv) = \eta(s) \cdot \exp(\int_{\alpha}^s \eta(v) dv)$ folgern wir für $g, h \in C_{\chi, b}(I, X)$

$$\begin{aligned} \|T(g)(t) - T(h)(t)\| \cdot \chi(t) &= \left\| \int_{\alpha}^t (G(s, g(s)) - G(s, h(s))) ds \right\| \cdot \chi(t) \\ &\leq \int_{\alpha}^t \eta(s) \cdot \|g(s) - h(s)\| \cdot \chi(s) \cdot \exp\left(\int_{\alpha}^s \eta(v) dv\right) ds \cdot \chi(t) \\ &\leq \|g - h\|_{\chi, \infty} \cdot \int_{\alpha}^t \eta(s) \cdot \exp\left(\int_{\alpha}^s \eta(v) dv\right) ds \cdot \chi(t) \\ &= \|g - h\|_{\chi, \infty} \cdot \left(\exp\left(\int_{\alpha}^t \eta(v) dv\right) - 1\right) \cdot \chi(t) \end{aligned}$$

Nehmen wir das Supremum über alle $t \in I$, so folgt mit (13.2)

$$\|T(g) - T(h)\|_{\chi, \infty} \leq (1 - \exp(-c)) \cdot \|g - h\|_{\chi, \infty} < +\infty. \quad (13.4)$$

Wegen $\|\xi\| \cdot \chi(t) < 1$ liegt die konstante Funktion ξ in $C_{\chi, b}(I, X)$. Für $h(t) = \xi$, $t \in I$, und $g \in C_{\chi, b}(I, X)$ schließen wir mit (13.2) und (13.4) auf

$$\begin{aligned} \|T(g)\|_{\chi, \infty} &\leq \|T(g) - T(\xi)\|_{\chi, \infty} + \|T(\xi)\|_{\chi, \infty} \\ &\leq \|T(g) - T(\xi)\|_{\chi, \infty} + \|\xi\|_{\chi, \infty} + \sup_{t \in I} \left\| \int_{\alpha}^t G(s, \xi) ds \right\| \cdot \chi(t) < +\infty. \end{aligned}$$

Also bildet T den Raum $C_{\chi, b}(I, X)$ nach $C_{\chi, b}(I, X)$ hinein ab. Zudem besagt (13.4) wegen $0 < \exp(-c)$, dass $T : C_{\chi, b}(I, X) \rightarrow C_{\chi, b}(I, X)$ eine strikte Kontraktion darstellt. Somit können wir Satz 13.1.1 anwenden und erkennen, dass $Tf = f$ und infolge die Integralgleichung (13.3) in $C_{\chi, b}(I, X)$ genau eine Lösung hat.

Ist h eine weitere stetige Lösung von (13.3) und $J \subseteq I$ ein beliebiges kompaktes Teilintervall mit $\alpha \in J$, so folgt $h|_J \in C_{\chi|_J, b}(J, X)$ und $T(h|_J) = h|_J$ für die nach obiger Überlegung definierte strikte Kontraktion $T : C_{\chi|_J, b}(J, X) \rightarrow C_{\chi|_J, b}(J, X)$. Weil $T(g) = g$ auf $C_{\chi|_J, b}(J, X)$ eine eindeutige Lösung hat, erhalten wir $h|_J = f|_J$, und folglich $h = f$.

13.2 Implizite Funktionen

13.2.1 Bemerkung. Erfüllt eine stetig differenzierbare Funktion $\eta(\xi)$ die Beziehung

$$F(\xi, \eta(\xi))^T = 0 \quad (13.5)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so kann man $\eta'(\xi)$ durch sogenanntes *implizites Differenzieren* berechnen. Dazu setzen wir $f_1(\xi) := \xi$, $f_2(\xi) := \eta(\xi)$ und $f(\xi) := (f_1(\xi), f_2(\xi))^T \in \mathbb{R}^2$. Gemäß (13.5) gilt $h(\xi) := F \circ f(\xi) = 0$, womit auch $h'(\xi) = 0$. Aus der Kettenregel schließen wir auf

$$0 = h'(\xi) = \frac{\partial}{\partial x_1} F(\xi, \eta(\xi))^T \cdot 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} F(\xi, \eta(\xi))^T \cdot \eta'(\xi).$$

Im Fall $\frac{\partial F}{\partial x_2}(\xi, \eta(\xi)) \neq 0$ folgt $\eta'(\xi) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_1} F(\xi, \eta(\xi))^T}{\frac{\partial}{\partial x_2} F(\xi, \eta(\xi))^T}$.

13.2.2 Beispiel. Betrachte die Gleichung $F(\xi_1, \xi_2)^T = 0$ wobei

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ x = (\xi_1, \xi_2)^T \mapsto \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1. \end{cases}$$

Ist durch die implizite Gleichung $F(\xi, \eta(\xi))^T = 0$ eine Funktion $\eta(\xi)$ wohldefiniert? Nein, denn stets erfüllt mit einer Zahl $\eta(\xi)$ auch $-\eta(\xi)$ diese Beziehung. Man sieht jedoch, dass

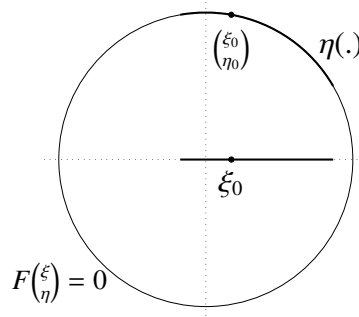


Abbildung 13.1: Lokale Darstellbarkeit von $F(\xi, \eta)^T = 0$ als Funktion $\eta(\xi)$

für $\xi_0 \neq \pm 1$ zumindest lokal um ξ_0 eine stetige und stetig differenzierbare Funktion $\eta(\cdot)$ mit $F(\xi, \eta(\xi))^T = 0$ definiert werden kann, wenn man sich nur im Punkt ξ_0 auf einen der beiden möglichen Werte $\eta(\xi_0) = \eta_0$ bzw. $\eta(\xi_0) = -\eta_0$ festlegt.

Beachte, dass wegen $\xi_0 \neq \pm 1$ für jedes η_0 mit $F(\xi_0, \eta_0)^T = 0$ auch $\frac{\partial}{\partial x_2} F(\xi_0, \eta_0)^T \neq 0$. Lokal um ξ_0 erhält man die Ableitung der Lösungsfunktion η durch implizites Differenzieren:

$$0 = \frac{d}{d\xi} F(\xi, \eta(\xi))^T = \frac{\partial}{\partial x_1} F(\xi, \eta(\xi))^T \cdot 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} F(\xi, \eta(\xi))^T \cdot \eta'(\xi) = 2\xi + 2\eta(\xi) \cdot \eta'(\xi),$$

wodurch $\eta'(\xi) = -\frac{\xi}{\eta(\xi)}$.

Wie wir eben gesehen haben, ist es nicht klar, ob durch eine implizite Gleichung $F(\xi, \eta(\xi))^T = 0$ tatsächlich eine Funktion definiert ist. Wie man mit Hilfe von Beispiel 13.2.2 vielleicht erahnen kann, spielt dabei die Bedingung $\frac{\partial}{\partial x_2} F(\xi_0, \eta_0)^T \neq 0$ eine Rolle. Der in diesem Abschnitt bewiesene Satz über implizite Funktionen, Satz 13.2.3, gibt die exakte und allgemein formulierte Bestätigung dieser Vorahnung.

Die Ausgangssituation beim Satz über implizite Funktionen ist die, dass eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ gegeben ist. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir hier die Elemente von \mathbb{R}^{n+m} als (x, y) , wobei $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

Für $(x, y) \in D$ betrachten wir $dF(x, y) \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^m)$ als $m \times (n + m)$ Matrix. Nun nehmen wir die ersten n Spalten und fassen sie zur Matrix $dF_1(x, y)$ zusammen. Entsprechend seien

$dF_2(x, y)$ die letzten m Spalten. Man hat also

$$dF(x, y) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x, y) \end{pmatrix}}_{=dF_1(x,y)} \mid \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}(x, y) \end{pmatrix}}_{=dF_2(x,y)} \right)$$

Mit $dF(x, y)$ sind klarerweise auch $dF_1(x, y)$ und $dF_2(x, y)$ stetig in (x, y) . Für festes y ist $x \mapsto dF_1(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Ableitung der Funktion $x \mapsto F(x, y)$. Entsprechend ist $y \mapsto dF_2(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Ableitung der Funktion $y \mapsto F(x, y)$ bei festem x .

13.2.3 Satz (Satz über implizite Funktionen). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen und $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Weiters sei $(a, b) \in D$ mit $F(a, b) = 0$ derart, dass $dF_2(a, b)$ invertierbar ist, also

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}(a, b) \right)_{i,j=1}^m \neq 0.$$

- (i) Dann existieren offene Kugeln $U = U_\delta(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ um a und $V = U_\rho(b) \subseteq \mathbb{R}^m$ um b sowie eine stetige Funktion $g : U \rightarrow V$ mit $U \times V \subseteq D$ und

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in U. \quad (13.6)$$

- (ii) Die Funktion g löst die Gleichung $F(x, y) = 0$ auf $U \times V$ vollständig in dem Sinne, dass für $(x, y) \in U \times V$ die Gleichheit $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $y = g(x)$. Insbesondere haben wir $b = g(a)$.

- (iii) Die Matrix $dF_2(u, v) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist für alle $(u, v) \in U \times V$ invertierbar, und die Funktion g ist stetig differenzierbar, wobei für alle $x \in U$

$$dg(x) = -dF_2(x, g(x))^{-1} dF_1(x, g(x)).$$

Beweis.

\rightsquigarrow Wir setzen $B = dF_2(a, b)$ und wählen $\alpha > 0$ derart, dass $U_\alpha^{\|\cdot\|_\infty}(a, b) \subseteq D$. Für $x \in U_\alpha^{\|\cdot\|_\infty}(a) (\subseteq \mathbb{R}^n)$ sei

$$\Phi_x : \underbrace{U_\alpha^{\|\cdot\|_\infty}(b)}_{\subseteq \mathbb{R}^m} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{definiert durch } \Phi_x(y) := y - B^{-1}F(x, y).$$

Offenbar ist Φ_x stetig differenzierbar, wobei $d\Phi_x(y) = I - B^{-1}dF_2(x, y)$. Weiters sei $\psi : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ die monoton wachsende Funktion

$$\psi(\eta) := \sup_{(x,y) \in K_\eta^{\|\cdot\|_\infty}(a,b)} \|d\Phi_x(y)\|.$$

Nach dem Resultat am Ende von Abschnitt 10.1 in [K] angewandt auf die konvexe Menge $K_\eta^{\|\cdot\|_\infty}(b)$ gilt für alle $x \in K_\eta^{\|\cdot\|_\infty}(a)$, $y_1, y_2 \in K_\eta^{\|\cdot\|_\infty}(b)$

$$\|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)\|_\infty \leq \psi(\eta) \|y_1 - y_2\|_\infty. \quad (13.7)$$

Wegen der Stetigkeit von $(x, y) \mapsto d\Phi_x(y)$ und wegen $d\Phi_a(b) = 0$ gilt

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \psi(\eta) = 0. \quad (13.8)$$

Insbesondere gibt es ein $\rho \in (0, a)$ mit

$$\psi(\rho) \leq \frac{1}{2}. \quad (13.9)$$

Infolge gilt $\|d\Phi_x(y)\| = \|I - B^{-1}dF_2(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$ für $(x, y) \in K_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a, b)$, womit $B^{-1}dF_2(x, y) = I - (I - B^{-1}dF_2(x, y))$ für solche (x, y) und daher auch $dF_2(x, y)$ invertierbar ist; siehe Beispiel 9.3.6.

Wegen der Stetigkeit von F bei (a, b) existiert ein $\delta \in (0, \rho]$ mit

$$\|F(x, b)\|_\infty = \|F(x, b) - F(a, b)\|_\infty \leq \frac{\rho}{4\|B^{-1}\|} \quad \text{für alle } x \in U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(a). \quad (13.10)$$

Wir setzen $U := U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(a)$ und $V := U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(b)$. Man beachte dabei

$$U \times V \subseteq U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a) \times U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(b) = U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(a, b) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}. \quad (13.11)$$

Für eine Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ derart, dass $h(x) \in V$ für alle $x \in U$, können wir wegen (13.11) auch die Funktion $T(h) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$T(h)(x) := h(x) - B^{-1}F(x, h(x)) \quad \text{für } x \in U \quad (13.12)$$

definieren. Eine Funktion $g : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$ erfüllt genau dann $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$, wenn $T(g) = g$. Diese Fixpunktgleichung wollen wir mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, Satz 13.1.1, behandeln.

↪ Dazu betrachten wir den Banachraum $C_b(U, \mathbb{R}^m)$ versehen mit der Supremumsnorm¹ $\|f\| := \sup_{x \in U} \|f(x)\|_\infty$ und darin die abgeschlossene Kugel $K_{\frac{\rho}{2}}(h_0) =: \mathcal{M}$ um das Element $h_0 \in C_b(U, \mathbb{R}^m)$, wobei $h_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ die konstante Funktion $x \mapsto b$ ist. Als abgeschlossene Teilmenge eines vollständig metrischen Raumes ist \mathcal{M} versehen mit $d(h_1, h_2) := \|h_1 - h_2\|$ ein vollständig metrischer Raum.

Für $h \in \mathcal{M}$ und $x \in U$ gilt wegen $\|h(x) - b\| \leq \|h - h_0\| \leq \frac{\rho}{2} < \rho$ immer $h(x) \in V$, womit $T(h) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch (13.12) wohldefiniert und offenbar auch stetig ist. Wegen $U \subseteq K_\rho(a)$ und $V \subseteq K_\rho(b)$ erhalten wir aus (13.7) und (13.9) für $h_1, h_2 \in \mathcal{M}$

$$\|T(h_1)(x) - T(h_2)(x)\|_\infty = \|\Phi_x(h_1(x)) - \Phi_x(h_2(x))\|_\infty \leq \frac{\|h_1(x) - h_2(x)\|_\infty}{2} \quad (13.13)$$

¹Normalerweise wird die Supremumsnorm mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet, was wir hier bewusst unterlassen, weil $\|\cdot\|_\infty$ schon für die Maximumnorm auf \mathbb{R}^m steht.

für alle $x \in U$, wodurch sich zusammen mit (13.10) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T(h)(x) - h_0(x)\|_\infty &\leq \|T(h)(x) - T(h_0)(x)\|_\infty + \|T(h_0)(x) - h_0(x)\|_\infty \\ &\leq \frac{\rho}{4} + \|B^{-1}F(x, b)\|_\infty \leq \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$

ergibt. Infolge ist $T(h)$ beschränkt und es gilt $\|T(h) - h_0\| \leq \frac{\rho}{2}$, also $T(h) \in K_{\frac{\rho}{2}}(h_0) = \mathcal{M}$. Zudem bedingt (13.13) die Ungleichung $\|T(h_1) - T(h_2)\| \leq \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\|$, wodurch sich T als strikte Kontraktion von \mathcal{M} nach \mathcal{M} herausstellt.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz, Satz 13.1.1, gibt es eine eindeutige Funktion $g \in \mathcal{M}$, also ein stetiges $g : U \rightarrow K_{\frac{\rho}{2}}(b) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^m$, mit $T(g) = g$ und infolge $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$, wodurch wir (i) gezeigt haben.

↪ Für $(x, y) \in U \times V$ mit $F(x, y) = 0$ folgt $\Phi_x(y) = y - B^{-1}F(x, y) = y$. Wegen $F(x, g(x)) = 0$ gilt auch $\Phi_x(g(x)) = g(x)$. Aus (13.7) und (13.9) erhalten wir

$$\|g(x) - y\|_\infty = \|\Phi_x(g(x)) - \Phi_x(y)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g(x) - y\|_\infty,$$

also $g(x) = y$. Insbesondere gilt $g(a) = b$, womit (ii) nachgewiesen ist.

↪ Für (iii) weisen zunächst nach, dass g bei a differenzierbar ist, wobei

$$dg(a) = -dF_2(a, b)^{-1}dF_1(a, b). \quad (13.14)$$

Für $\|z\|_\infty < \delta$ gilt wegen $F(a, g(a)) = F(a + z, g(a + z)) = 0$

$$\begin{aligned} g(a + z) - g(a) &= (g(a + z) - B^{-1}F(a + z, g(a + z))) \\ &\quad - (g(a) - B^{-1}F(a + z, g(a))) \\ &\quad - B^{-1}(F(a + z, g(a)) - F(a, g(a))) \\ &= \Phi_{a+z}(g(a + z)) - \Phi_{a+z}(g(a)) - B^{-1}(dF_1(a, g(a))z + \|z\|_\infty \epsilon_1(z)) \end{aligned} \quad (13.15)$$

mit einer Funktion $\epsilon_1 : (U \setminus \{a\}) - a \rightarrow \mathbb{R}^m$ derart, dass $\lim_{z \rightarrow 0} \epsilon_1(z) = 0$. Hier wurde verwendet, dass F in der ersten Variablen bei (a, b) differenzierbar ist; siehe (10.5).

Weiter ist für $\|z\|_\infty < \delta$ ($\leq \rho$) wegen $g(a + z) \in V = U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(g(a))$ der Ausdruck $\eta_z := \max(\|z\|_\infty, \|g(a + z) - g(a)\|_\infty)$ kleiner als ρ und konvergiert für $z \rightarrow 0$ gegen Null. Mit (13.7) erhalten wir aus (13.15)

$$\|g(a + z) - g(a)\|_\infty \leq \psi(\eta_z) \|g(a + z) - g(a)\|_\infty + \|B^{-1}(\|dF_1(a, g(a))\| + \|\epsilon_1(z)\|_\infty)\|z\|_\infty$$

bzw.

$$\|g(a + z) - g(a)\|_\infty \leq \frac{\|B^{-1}(\|dF_1(a, g(a))\| + \|\epsilon_1(z)\|_\infty)\|z\|_\infty}{1 - \psi(\eta_z)}.$$

Addieren wir zu (13.15) den Ausdruck $B^{-1}dF_1(a, g(a))z$, so folgt

$$g(a + z) - g(a) + B^{-1}dF_1(a, g(a))z = \Phi_{a+z}(g(a + z)) - \Phi_{a+z}(g(a)) - \|z\|_\infty B^{-1}\epsilon_1(z).$$

Für $\epsilon(z) := \frac{1}{\|z\|_\infty} (\Phi_{a+z}(g(a+z)) - \Phi_{a+z}(g(a))) - B^{-1}\epsilon_1(z)$ gilt wieder wegen (13.7)

$$\begin{aligned} \|\epsilon(z)\|_\infty &\leq \frac{\psi(\eta_z)}{\|z\|_\infty} \|g(a+z) - g(a)\|_\infty + \|B^{-1}\| \|\epsilon_1(z)\|_\infty \\ &\leq \psi(\eta_z) \frac{\|B^{-1}\|(\|dF_1(a, g(a))\| + \|\epsilon_1(z)\|_\infty)}{1 - \psi(\eta_z)} + \|B^{-1}\| \|\epsilon_1(z)\|_\infty. \end{aligned}$$

Da für $z \rightarrow 0$ wegen (13.8) der Ausdruck rechts gegen Null strebt, erhalten wir die Differenzierbarkeit von g bei a mit der Ableitung $dg(a) = -B^{-1}dF_1(a, b) = dF_2(a, b)^{-1}dF_1(a, b)$.

\rightsquigarrow Für $a' \in U$ und $b' = g(a')$ wissen wir aus (i), dass $dF_2(a', b')$ invertierbar ist. Also können wir das schon Bewiesene auf $(a', b') \in U \times V$ anwenden, und erhalten eine Kugel $U' \subseteq U$ um a' und eine Kugel $V' \subseteq V$ um b' , sowie eine Funktion $g' : U' \rightarrow V'$ mit $g'(a') = b'$ und $F(x, g'(x)) = 0$ für alle $x \in U'$.

Nach (ii) erhalten wir $g'(x) = g(x)$ für alle $x \in U'$, und gemäß (13.14) gilt

$$dg(a') = dg'(a') = -dF_2(a', g(a'))^{-1}dF_1(a', g(a')).$$

Die rechte Seite ist nach Korollar 9.3.7 aber stetig in a' . Also ist g stetig differenzierbar und die Ableitung lässt sich wie behauptet berechnen. □

13.2.4 Beispiel. Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, welche definiert ist durch

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T := c_1\zeta_1^2 + c_2\zeta_2^2 + c_3\zeta_3^2 - 1,$$

wobei $c_1, c_2, c_3 > 0$ vorgegeben sind, und untersuchen die Lösungen der Gleichung $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T = 0$. Die Nullstellenmenge $M := \{z \in \mathbb{R}^3 : F(z) = 0\}$ von F bildet in diesem Beispiel ein Ellipsoid.

Sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ eine Lösung von $F(z) = 0$. Wir wollen $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T = 0$ lokal bei α nach ζ_3 auflösen. Anders ausgedrückt, fragen wir, ob man die durch die implizite Gleichung $F(z) = 0$ gegebene Fläche M lokal um den Punkt α , welcher auf ihr liegt, explizit in der Form $\zeta_3 = g(\zeta_1, \zeta_2)^T$ darstellen kann. Dazu wenden wir den Satz über implizite Funktionen an, und zwar mit der folgenden Rollenverteilung: $m = 1$, $n = 2$, $y = \zeta_3$, $x = (\zeta_1, \zeta_2)^T$, $b = \alpha_3$, $a = (\alpha_1, \alpha_2)^T$. Da F ein Polynom in drei Variablen ist, gilt $F \in C^1$. Die entscheidende Funktionaldeterminante ist die Determinante der 1×1 -Matrix $\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_3}(\alpha)\right)$, wobei

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_3}(\alpha) = 2c_3\alpha_3.$$

Liegt der Punkt α nicht am Äquator des Ellipsoids, gilt also $\alpha_3 \neq 0$, so existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(\alpha_1, \alpha_2)^T$ und eine C^1 -Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(\alpha_1, \alpha_2)^T = \alpha_3$ und $F(\zeta_1, \zeta_2, g(\zeta_1, \zeta_2)^T)^T = 0$ für alle $(\zeta_1, \zeta_2)^T \in U$. Liegt α dagegen am Äquator, so können

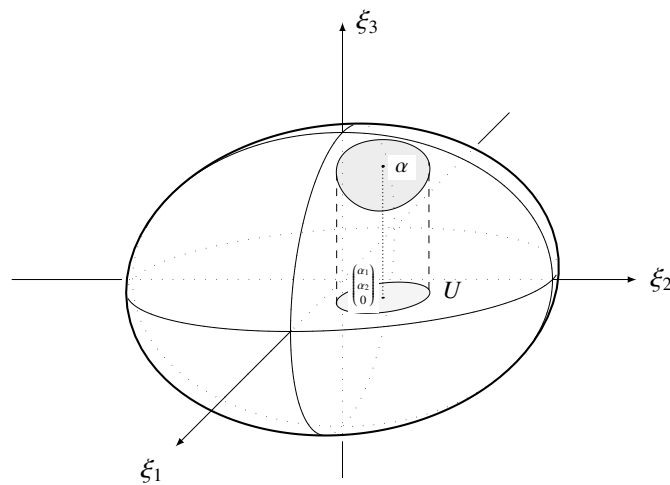


Abbildung 13.2: Darstellung eines Teils von M als Graph einer Funktion $g(\zeta_1, \zeta_2)^T$

wir den Satz über implizite Funktionen nicht anwenden. Tatsächlich ist in solchen Punkten ein Auflösen nach ζ_3 auch nicht möglich. Wir bemerken einen Unterschied zwischen der impliziten und expliziten Darstellung der Fläche M . Die implizite Gleichung $F(z) = 0$ definiert die Fläche global, also in ihrer Gesamtheit. Eine explizite Darstellung, zum Beispiel in der Form $\zeta_3 = g(\zeta_1, \zeta_2)^T$, ist nur lokal, also für gewisse Teilstücke der Fläche, möglich.

In unserem Beispiel kann man für jeden Punkt $\alpha \in M$ lokal nach zumindest einer Variablen ζ_1 , ζ_2 oder ζ_3 auflösen. In der Tat ist einer der Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sicher nicht Null. Löst man etwa nach ζ_2 auf, so erhält man eine Funktion \hat{g} mit $F(\zeta_1, \hat{g}(\zeta_1, \zeta_3)^T, \zeta_3)^T = 0$ für (ζ_1, ζ_3) lokal um (α_1, α_3) .

Man kann das gesamte Ellipsoid M durch die sechs Teilstücke obere Hälfte, untere Hälfte, rechte/linke/vordere/hintere Hälfte beschreiben. Auf diesen Teilstücken hat man

$$g(\zeta_1, \zeta_2)^T = \pm \sqrt{1 - a\zeta_1^2 - b\zeta_2^2}, \quad \hat{g}(\zeta_1, \zeta_3)^T = \pm \sqrt{1 - a\zeta_1^2 - c\zeta_3^2}, \quad \tilde{g}(\zeta_2, \zeta_3)^T = \pm \sqrt{1 - b\zeta_2^2 - c\zeta_3^2}.$$

Wir werden später mit Hilfe von Satz 13.5.4 erkennen, dass M eine sogenannte Mannigfaltigkeit der Dimension 2 im Dreiraum ist. Dieser Begriff der Mannigfaltigkeit ist der eleganteste und zielführendste, um mit Objekten ähnlich unserem Ellipsoid zu arbeiten.

13.3 Der Umkehrsatz

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung der Form

$$f \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Die affine Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\det(c_{ij})_{i,j=1}^n \neq 0$. In diesem Fall ist f aus Dimensionsgründen sogar bijektiv. Also existiert die Inverse f^{-1} von f oder, anders ausgedrückt, die Gleichung $f(u) = v$ lässt sich immer eindeutig nach u auflösen.

Die affine Abbildung f ist in jedem Fall stetig differenzierbar mit $df(u) = (c_{ij})_{i,j=1}^n$. Ausschlaggebend für die Invertierbarkeit in unserer speziellen Situation ist also die Invertierbarkeit von $df(u)$.

Der folgende Umkehrsatz besagt, dass für jede \mathbb{R}^n -wertige stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n die Invertierbarkeit der Ableitung an einem Punkt zumindest lokal um diesen Punkt das gleiche Verhalten wie bei affinen Funktionen vorliegt.

13.3.1 Satz (Umkehrsatz). Sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiters sei $c \in C$ mit

$$\det df(c) \neq 0$$

und $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $f(c) \in E$. Dann existieren offene Mengen $O \subseteq C$ und $U \subseteq E$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $c \in O$ und $f(c) \in U$.
- (ii) $f|_O$ ist eine Bijektion von O auf U .
- (iii) Die inverse Abbildung $g : U \rightarrow O$ von $f|_O : O \rightarrow U$ ist stetig differenzierbar mit $dg(f(t)) = df(t)^{-1}$ für alle $t \in O$.

13.3.2 Bemerkung. Für affine Funktionen ist dieser Satz sogar richtig für $O = \mathbb{R}^n = U$. Im Allgemeinen muss man sich jedoch auf gewisse offene Umgebungen O und U von c bzw. $f(c)$ einschränken, um die Existenz einer Inversen zu erhalten.

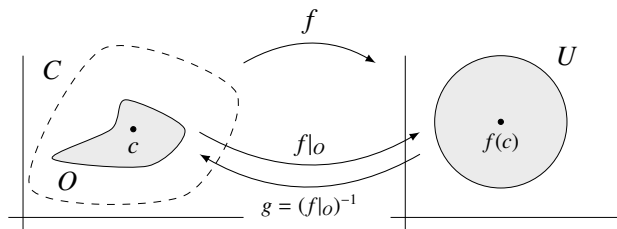


Abbildung 13.3: Umkehrfunktion g von $f|_O$

Beweis von Satz 13.3.1: Wir wenden Satz 13.2.3 mit $a = f(c)$, $b = c$ auf die stetig differenzierbare Funktion

$$F : \underbrace{E \times C}_{=: D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+n}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x, y) = f(y) - x,$$

an. Wegen $dF(x, y) = (-I | df(y))$ gilt mit der Notation von Satz 13.2.3

$$dF_2(x, y) = df(y), \quad dF_1(x, y) = -I.$$

Bei $(a, b) = (f(c), c)$ ist $dF_2(a, b) = df(c)$ voraussetzungsgemäß invertierbar. Nach Satz 13.2.3 gibt es offene Mengen $U \ni a$ und $V \ni b$ mit $U \times V \subseteq E \times C$, also $U \subseteq E$, $V \subseteq C$, sowie eine C^1 -Funktion $g : U \rightarrow V$ mit

$$F(x, g(x)) = 0, \quad dg(x) = -dF_2(x, g(x))^{-1} dF_1(x, g(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Wegen der speziellen Form von F gilt

$$x = f(g(x)), \quad dg(x) = df(g(x))^{-1} \quad \text{für alle } x \in U. \quad (13.16)$$

Als Schnitt zweier offener Mengen ist

$$O := V \cap f^{-1}(U) = \{t \in V : f(t) \in U\}$$

eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n ; $f^{-1}(U)$ ist ja als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion offen. Für $x \in U$ erhalten wir $g(x) \in V$ und $f(g(x)) = x \in U$, also $g(x) \in O$, und daher $g(U) \subseteq O$. Definitionsgemäß gilt auch $f(O) \subseteq U$.

Da $t \in O (\subseteq V)$ immer $f(t) \in U$ und $F(f(t), t) = 0$ nach sich zieht, folgt aus Satz 13.2.3, (ii), $t = g(f(t))$. Also gilt $g \circ f|_O = \text{id}_O$ und nach (13.16) auch $f|_O \circ g = \text{id}_U$. Somit ist das stetig differenzierbare g die Inverse von $f|_O : O \rightarrow V$. \square

13.3.3 Korollar. Sei $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge C und $D \subseteq C$ ebenfalls offen. Gilt $\det df(c) \neq 0$ für alle $c \in D$, so ist $f(D)$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n .

Ist zusätzlich f injektiv auf D , so ist $f^{-1} : f(D) \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, wobei $d(f^{-1})(f(t)) = (df(t))^{-1}$ für $t \in D$.

Beweis. Nach Satz 13.3.1, angewandt auf $f|_D$, gibt es zu jedem $c \in D$ offene Mengen $O_c \subseteq D$ und $U_c \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $c \in O_c$ derart, dass $f|_{O_c} : O_c \rightarrow U_c$ bijektiv ist. Somit ist

$$f(D) = f\left(\bigcup_{c \in D} O_c\right) = \bigcup_{c \in D} f(O_c) = \bigcup_{c \in D} U_c$$

als Vereinigung offener Mengen wieder offen; vgl. Beispiel 12.1.1. Der zweite Teil der zu beweisenden Aussage folgt aus Satz 13.3.1, (iii). \square

Gilt $\det df(c) \neq 0$ für alle $c \in C$, so besagt Korollar 13.3.3, dass f eine *offene Abbildung* ist, also offene Mengen auf offenen Mengen abbildet.

13.3.4 Definition. Sind $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ist $f : C \rightarrow D$ bijektiv und derart, dass f und f^{-1} stetig differenzierbar sind, so nennt man f einen *Diffeomorphismus*, oder genauer, einen *C^1 -Diffeomorphismus*. Sind dabei f und f^{-1} sogar k -mal stetig differenzierbar, dann sprechen wir von einem *C^k -Diffeomorphismus*.

13.3.5 Bemerkung. Ist $f : C \rightarrow D$ so ein Diffeomorphismus, so folgt aus der Kettenregel, Proposition 10.1.18,

$$I = dI(x) = d(f^{-1} \circ f)(x) = df^{-1}(f(x)) df(x) \quad \text{für alle } x \in C.$$

Also ist $df(x)$ für alle $x \in C$ invertierbar, wobei

$$(df(x))^{-1} = df^{-1}(f(x)) \quad (13.17)$$

Ist umgekehrt $f : C \rightarrow D$ bijektiv und stetig differenzierbar mit offenem $C \subseteq \mathbb{R}^d$ und mit ad hoc beliebigem $D \subseteq \mathbb{R}^d$ derart, dass $df(x)$ für alle $x \in C$ invertierbar ist, so folgt aus Korollar 13.3.3, dass D offen und $f^{-1} : D \rightarrow C$ ebenfalls stetig differenzierbar ist. Also ist $f : C \rightarrow D$ ein C^1 -Diffeomorphismus.

13.3.6 Beispiel. Wir betrachten die Polarkoordinatenfunktion $T : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$T \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix}.$$

mit $C = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$. In (10.4) aus Beispiel 10.1.10 haben wir $dT((r, t)^T)$ berechnet. Die Determinante davon ist $r(\cos t)^2 + r(\sin t)^2 = r > 0$ und infolge $dT((r, t)^T)$ für alle $(r, t)^T \in C$ regulär.

Nach Korollar 13.3.3 ist $T(C)$ offen in \mathbb{R}^2 , wobei gemäß Bemerkung 6.9.12

$$T(C) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}.$$

Wir halten $(\rho, \tau)^T \in C$ fest. Nach Satz 13.3.1 gibt es offene Teilmengen O und U von \mathbb{R}^2 derart, dass $(\rho, \tau)^T \in O$, $T((\rho, \tau)^T) \in U$ und dass $T|_O : O \rightarrow U$ bijektiv und in beide Richtungen stetig differenzierbar ist. Die Ableitung von T^{-1} im Punkt $(\xi, \eta) = T((r, t)^T) \in U$ ist dabei

$$\begin{aligned} dT^{-1}((\xi, \eta)^T) &= (dT((r, t)^T))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos t & r \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} & \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} & \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit O ist auch $O' := O \cap (\mathbb{R}^+ \times (\tau - \pi, \tau + \pi))$ offen in \mathbb{R}^2 . Schränkt man T auf diese Menge ein, so folgt aus Korollar 13.3.3, dass $T(O') =: U' \subseteq U$ offen in \mathbb{R}^2 ist. Klarerweise ist auch $T|_{O'} : O' \rightarrow U'$ bijektiv und in beide Richtungen stetig differenzierbar. Somit können wir für die ursprünglichen Mengen O und U die Inklusion $O \subseteq \mathbb{R}^+ \times (\tau - \pi, \tau + \pi)$ annehmen.

In Fall $O \subseteq \mathbb{R}^+ \times (\tau - \pi, \tau + \pi)$ haben wir bereits in Bemerkung 6.9.12 die Injektivität von $T|_O$ festgestellt. In der Tat bildet T die ganze Menge $\mathbb{R}^+ \times (\tau - \pi, \tau + \pi)$ bijektiv auf

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ s \begin{pmatrix} \cos(\tau + \pi) \\ \sin(\tau + \pi) \end{pmatrix} : s \in [0, +\infty) \right\}$$

ab; siehe Proposition 6.9.13. Als Funktion von C nach \mathbb{R}^2 ist T dagegen nicht injektiv.

13.3.7 Bemerkung. Satz 13.2.3 gilt auch in der allgemeineren Situation, dass D offene Teilmenge von $X \times Y$ mit Banachräumen X und Y ist. Die vorausgesetzte stetige Differenzierbarkeit von $F : D \rightarrow Z$ mit einem weiteren Banachraum Z ist dann im Sinne der Fréchet-Differenzierbarkeit zu verstehen; siehe den Begriff Fréchet-Differenzierbarkeit in Kapitel 10 von [K]. Die Voraussetzung $\det dF_2(a, b) \neq 0$ muss durch die Forderung ersetzt werden, dass $dF_2(a, b)$ als beschränkte lineare Abbildung von Y nach Z bijektiv ist. Der hier angegebene Beweis funktioniert im wesentlichen auch in diesem allgemeineren Fall. Auch Satz 13.3.1 lässt sich verallgemeinern auf Funktionen $f : C \rightarrow Y$ mit offenem $C \subseteq X$ und Banachräumen X und Y . Die Voraussetzung $\det df(c) \neq 0$ muss durch die Forderung ersetzt werden, dass $df(c)$ als beschränkte lineare Abbildung von X nach Y bijektiv ist.

13.4 Höhere Ableitbarkeit von impliziten Funktionen*

Wir wollen uns den Satz über implizite Funktionen und den Umkehrsatz unter der Voraussetzung, dass die Ausgangsfunktionen mehrmalig ableitbar sind, nochmals ansehen.

13.4.1 Lemma. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, X und Y Banachräume und $h : I \rightarrow L_b(X, Y)$ derart, dass $h(t)$ für alle $t \in I$ invertierbar ist, wobei $(h(t))^{-1} \in L_b(Y, X)$. Ist dann h in einem Punkt $x \in I$ differenzierbar, so auch $t \mapsto (h(t))^{-1}$, wobei

$$\left((h(x))^{-1} \right)' = -h(x)^{-1} h'(x) h(x)^{-1}.$$

Beweis. Für $t \in I \setminus \{x\}$ gilt

$$\frac{1}{t-x} \left((h(t))^{-1} - (h(x))^{-1} \right) = -(h(t))^{-1} \frac{1}{t-x} (h(t) - h(x)) (h(x))^{-1}.$$

Aus der Differenzierbarkeit von h bei x folgt dessen Stetigkeit an dieser Stelle. Wegen Korollar 9.3.7 ist auch die Zusammensetzung $t \mapsto (h(t))^{-1}$ von h und Invertieren bei x stetig. Gemäß Lemma 9.2.8 konvergiert obiger Ausdruck für $t \rightarrow x$ gegen $-h(x)^{-1} h'(x) h(x)^{-1}$. \square

13.4.2 Lemma. Sei X ein Banachraum und seien $D \subseteq \mathbb{R}^m$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen. Weiters seien $H : I \times D \rightarrow X$ – wir schreiben $H(x, y_1, \dots, y_m)$ dafür – sowie $h : I \rightarrow D (\subseteq \mathbb{R}^m)$ stetig differenzierbar. Dann ist auch $t \mapsto H(t, h(t))$ stetig differenzierbar auf I mit der Ableitung

$$\frac{d}{dt} H(t, h(t)) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, h(t)) + \sum_{l=1}^m h_l(t)' \frac{\partial H}{\partial y_l}(t, h(t)),$$

wobei $h = (h_1, \dots, h_m)^T$.

Beweis. Wir erhalten aus der Kettenregel, Proposition 10.1.18, angewandt auf die Hintereinanderausführung $\phi(t) := H(t, h(t))$ von $t \mapsto (t, h(t))$ und H ,

$$\frac{d}{dt} H(t, h(t)) = d\phi(t)1 = dH(t, h(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ h'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial H}{\partial x}(t, h(t)) + \sum_{l=1}^m h_l(t)' \frac{\partial H}{\partial y_l}(t, h(t)).$$

\square

13.4.3 Proposition. *Mit denselben Voraussetzungen und derselben Notation wie im Satz über implizite Funktionen, Satz 13.2.3, und mit $k \in \mathbb{N}$ ist im Fall $F \in C^k(D)$ die Funktion $g : U \rightarrow V$ auch k -mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Gemäß Satz 13.2.3 gilt $g \in C^1(D)$, wobei

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(u) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = dg(u) = -dF_2(u, g(u))^{-1} dF_1(u, g(u)) \quad \text{für } u \in U.$$

Für $k \geq 2$ sind nach Voraussetzung $(x, y) \mapsto dF_1(x, y)$ und $(x, y) \mapsto dF_2(x, y)$ stetig partiell differenzierbar. Wegen (9.11) in Abschnitt 9.3 in [K], Lemma 13.4.1 und Lemma 13.4.2 ist $u \mapsto dg(u)$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_j} dg(u) &= dF_2(u, g(u))^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} dF_2(u, g(u)) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} g_l(u) \frac{\partial}{\partial y_l} dF_2(u, g(u)) \right) \\ &\quad \cdot dF_2(u, g(u))^{-1} dF_1(u, g(u)) \\ &\quad - dF_2(u, g(u))^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} dF_1(u, g(u)) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial u_j} g_l(u) \frac{\partial}{\partial y_l} dF_1(u, g(u)) \right), \end{aligned}$$

wobei $g = (g_1, \dots, g_m)^T$. Also gilt $g \in C^2(U)$. Dabei ist $\frac{\partial}{\partial u_j} dg(u)$ endliche Summe von endlichen Produkten von $dF_2(u, g(u))^{-1}$, $dF_1(u, g(u))$ und von gewissen ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} dF_1(u, g(u)), \quad \frac{\partial}{\partial y_l} dF_1(u, g(u)), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} dF_2(u, g(u)), \quad \frac{\partial}{\partial y_l} dF_2(u, g(u)), \quad \frac{\partial}{\partial u_j} g_l(u).$$

Für $k \geq 3$ sind alle diese Funktionen nochmals stetig partiell differenzierbar, und man zeigt wie oben, dass $\frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} dg(u)$ existiert und stetig ist. Außerdem ist diese Funktion wieder eine endliche Summe von endlichen Produkten von obigen Funktionen und dazu von zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dF_1(u, g(u)), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_l} dF_1(u, g(u)), \quad \frac{\partial^2}{\partial y_r \partial y_l} dF_1(u, g(u)), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dF_2(u, g(u)), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_l} dF_2(u, g(u)), \quad \frac{\partial^2}{\partial y_r \partial y_l} dF_2(u, g(u)), \quad \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} g_l(u). \end{aligned}$$

Damit gilt $g \in C^3(U)$. Fährt man induktiv fort, so erhalten wir schließlich $g \in C^k(U)$. \square

13.4.4 Korollar. *Mit denselben Voraussetzungen und derselben Notation wie im Umkehrsatz, Satz 13.3.1, und mit $k \in \mathbb{N}$ ist im Fall $f \in C^k(D)$ die Funktion $g : U \rightarrow O$ auch k -mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Im Beweis von Satz 13.3.1 haben wir Satz 13.2.3 auf $F(x, y) = f(y) - x$ angewandt, um die Funktion g als Lösung von $F(x, f(x)) = 0$ zu erhalten. Aus Proposition 13.4.3 folgt $g \in C^k(D)$. \square

13.5 Mannigfaltigkeiten

Wir wollen in diesem Kapitel Teilmengen von \mathbb{R}^p studieren, die von ihrer Natur her dem anschaulichen Begriff der Flächen im Dreiraum entsprechen, wie etwa die Oberfläche der Einheitskugel. Formal lässt sich das folgendermaßen greifen.

13.5.1 Definition. Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, heißt *Untermannigfaltigkeit* von \mathbb{R}^p , oder kurz *Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p* , der Dimension $d \in \{1, \dots, p\}$, falls es zu jedem $x \in M$ eine Karte $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ der Menge M mit $x \in U_\varphi$ gibt.

Dabei heißt $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ *Karte der Menge M* , wenn $U_\varphi, D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$ offen sind, wenn φ ein C^1 -Diffeomorphismus ist und wenn

$$\varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}),$$

wobei hier $\mathbb{R}^d \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^p : x_j = 0, d < j \leq p\}$.

Man kann sich d -dimensionale Mannigfaltigkeiten als glatte Verzerrungen linearer Unterräume vorstellen. Wenn man verlangt, dass diese Verzerrungen öfter stetig differenzierbar sind, also die Karten etwa C^k -Diffeomorphismen mit einem $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sind, so spricht man von C^k -Mannigfaltigkeiten.

Die einfachsten Beispiele von Mannigfaltigkeiten sind diejenigen, die durch eine einzige Karte beschrieben werden: Sei $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ ein Diffeomorphismus mit offenen $U_\varphi, D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$, wobei $D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \neq \emptyset$. Dann ist $M := \varphi^{-1}(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}))$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $d = 1$ spricht man von einer *Kurve* und für $d = 2$ von einer *Fläche*.

13.5.2 Beispiel. Für $p = 3$ und $d = 2$ sei $D_\varphi = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \mathbb{R}$ und $T : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$T \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $dT(x)$ für alle $x \in D_\varphi$ regulär und T injektiv ist. Gemäß Korollar 13.3.3 ist dann $U_\varphi := T(D_\varphi)$ offen und $\varphi := T^{-1} : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ ein Diffeomorphismus. Also ist $M := T((-1, 1) \times (-1, 1) \times \{0\})$ eine Fläche und daher eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 .

13.5.3 Beispiel. Sei M ein linearer Unterraum des \mathbb{R}^p mit $\dim M = d > 0$ und x_1, \dots, x_d eine Basis von M . Wählen wir $x_{d+1}, \dots, x_p \in \mathbb{R}^p$ derart, dass x_1, \dots, x_p eine Basis von \mathbb{R}^p bildet, dann definiert $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\varphi(\sum_{j=1}^p \xi_j x_j) = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$ eine lineare Bijektion, die $M = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ erfüllt. Da lineare Bijektionen auf \mathbb{R}^p sicherlich Diffeomorphismen sind, ist M eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p .

Die meisten Standardbeispiele von Mannigfaltigkeiten sind *implizit definierte Mannigfaltigkeiten*, welche Nullstellenmengen gewisser stetig differenzierbarer Funktionen sind.

13.5.4 Satz. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ stetig differenzierbar, wobei $0 < d < p$. Hat $dF(x) \in \mathbb{R}^{(p-d) \times p}$ für alle $x \in O$ mit $F(x) = 0$ vollen Rang, also Rang $p - d$, so ist

$$M := \{x \in O : F(x) = 0\}$$

eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit, falls $M \neq \emptyset$.

Beweis. Unsere Voraussetzung an den Rang von $dF(y)$ für festes $y \in M$ bedingt die Existenz einer Bijektion $\sigma : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$ derart, dass

$$\left(\frac{\partial F_l(y)}{\partial x_{\sigma(k+d)}} \right)_{k,l=1}^{p-d} \quad (13.18)$$

regulär ist. Wir definieren $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{p-d} \cong \mathbb{R}^p$ durch

$$\varphi(x) := \begin{pmatrix} (x_{\sigma(k)})_{k \in \{1, \dots, d\}} \\ F(x) \end{pmatrix} \quad \text{für } x = (x_j)_{j=1}^p \in O.$$

Die Funktion φ ist stetig differenzierbar, wobei²

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial x_{\sigma(k)}} = \begin{pmatrix} e_k \\ \frac{\partial F(y)}{\partial x_{\sigma(k)}} \end{pmatrix} \quad \text{für } k \in \{1, \dots, d\},$$

und

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial x_{\sigma(k)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial F(y)}{\partial x_{\sigma(k)}} \end{pmatrix} \quad \text{für } k \in \{d+1, \dots, p\}.$$

Somit ist die durch σ induzierte Spaltenpermutation von $d\varphi(y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ eine untere 2×2 -Blockdreiecksmatrix mit der Einheitsmatrix und (13.18) in der Diagonale und daher invertierbar. Folglich ist auch $d\varphi(y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ invertierbar. Nach dem Umkehrsatz, Satz 13.3.1, ist die Einschränkung $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ für gewisse offene $U_\varphi \subseteq O \subseteq \mathbb{R}^p$ und $D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$ mit $y \in U_\varphi$ ein Diffeomorphismus. Für $x \in U_\varphi$ gilt nach unserer Definition von φ , dass $x \in M$ zu $\varphi(x) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}$ äquivalent ist; also $\varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$. \square

13.5.5 Bemerkung. Es gilt auch eine Art Umkehrung von Satz 13.5.4. Man kann nämlich jede d -dimensionale Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^p lokal bei jedem Punkt aus M als implizit definierte Mannigfaltigkeit darstellen. Es gibt also zu jedem $x \in M$ ein in \mathbb{R}^p offenes $O \ni x$ und eine stetig differenzierbare Funktion $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ derart, dass $dF(y)$ für alle $y \in O$ vollen Rang hat und dass $M \cap O = \{x \in O : F(x) = 0\}$.

Um das einzusehen, sei φ eine Karte von M mit $x \in U_\varphi$. Wegen $\varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ gehört ein $y \in O := U_\varphi$ genau dann zu M , wenn die $F(y) := \pi_{d+1,p} \circ \varphi(y)$ verschwindet. Hier bezeichnet $\pi_{d+1,p} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ die Projektion auf die hinteren $p - d$ Einträge. Das so definierte $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ ist stetig differenzierbar, und $dF(y) = \pi_{d+1,p} d\varphi(y) \in \mathbb{R}^{(p-d) \times p}$ hat Rang $p - d$, da seine Zeilen mit den unteren $p - d$ Zeilen von dem invertierbaren $d\varphi(y) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ übereinstimmen.

²Hier und auch später bezeichnet e_j den j -ten kanonischen Basisvektor in \mathbb{R}^p .

13.5.6 Beispiel. Ein Paradebeispiel einer implizit definierten Mannigfaltigkeit ist die Kugeloberfläche $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = 1\}$. Sie ist eine 2-dimensionale, implizit durch

$$0 = F(x) := \|x\|_2^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

definierte Mannigfaltigkeit. Um Karten von S^2 zu finden, deren Definitionsbereiche die ganze Kugeloberfläche überdecken, betrachten wir die sechs Abbildungen $\varphi_{+,x}$, $\varphi_{-,x}$, $\varphi_{+,y}$, $\varphi_{-,y}$, $\varphi_{+,z}$, $\varphi_{-,z}$, welche auf den offenen Mengen $U_{\varphi_{\pm,x}} := \{(\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \pm\xi > 0\}$, $U_{\varphi_{\pm,y}} := \{(\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \pm\eta > 0\}$, $U_{\varphi_{\pm,z}} := \{(\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \pm\zeta > 0\}$ definiert sind und nach \mathbb{R}^3 hinein abbilden:

$$\varphi_{\pm,z} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\pm,y} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \\ 1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{\pm,x} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ 1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 \end{pmatrix}.$$

Man überprüft leicht, dass φ_{\cdot} auf $U_{\varphi_{\cdot}}$ injektiv und stetig differenzierbar ist. Zudem ist $d\varphi_{\cdot}(x)$ für alle $x \in U_{\varphi_{\cdot}}$ regulär. Gemäß Korollar 13.3.3 ist dann $D_{\varphi_{\cdot}} := \varphi_{\cdot}(U_{\varphi_{\cdot}})$ offen und $\varphi_{\cdot} : U_{\varphi_{\cdot}} \rightarrow D_{\varphi_{\cdot}}$ ein Diffeomorphismus, wobei offenbar alle $D_{\varphi_{\cdot}}$ miteinander übereinstimmen. Schließlich gilt $\varphi_{\cdot}(S^2 \cap U_{\varphi_{\cdot}}) = D_{\varphi_{\cdot}} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$.

Offensichtlich ist S^2 in der Vereinigung aller $U_{\varphi_{\cdot}}$ enthalten, womit S^2 durch diese sechs Karten vollständig beschrieben wird. Es sei erwähnt, dass etwa die beiden Karten $\varphi_{+,z}$ und $\varphi_{-,z}$ die ganze Kugeloberfläche bis auf die in der xy -Ebene liegende Einheitskreislinie beschreiben.

Für eine andere Art von Karten von S^2 betrachte man die stetig differenzierbare Abbildung $T_3 : \mathbb{R}^2 \times (0 + \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \\ r \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \theta \\ r \sin \alpha \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Man zeigt unschwer, dass $T_3(\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = S^2$ sowie, dass $dT_3(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \times (0 + \infty)$ regulär ist. Die Einschränkung

$$T_3|_{D_\varphi} : D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$$

von T_3 auf $D_\varphi := (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0 + \infty)$ ist bijektiv. Wir setzen $U_\varphi := \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ und bezeichnen mit $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ die Inverse obiger Funktion. Wegen $\varphi(S^2 \cap U_\varphi) = \varphi(S^2 \setminus \{x \in S^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) =$ und weil $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ in Definition 13.5.1 offenbar durch $\mathbb{R}^d \times \{a\}$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}^{p-d}$ ersetzt werden kann, ist φ eine Karte, die S^2 bis auf die verhältnismäßig kleine Menge $\{x \in S^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ beschreibt. Für $x \in U_\varphi$ nennt man $(\alpha, \theta, r)^T = \varphi(x)$ die *Kugelkoordinaten* von x .

13.5.7 Beispiel. Wie in Beispiel 13.5.3 sei M ein d -dimensionaler Unterraum von \mathbb{R}^p mit $0 < d$. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, gilt $M = (M^\perp)^\perp$, wobei³

$$M^\perp = \{y \in \mathbb{R}^p : (x, y) = 0 \text{ für alle } x \in M\}$$

Dimension $p - d$ hat. Ist y_1, \dots, y_{p-d} eine Basis von M^\perp , so bedeutet die Beziehung $M = (M^\perp)^\perp$ nichts anderes, als dass $M = \{x \in \mathbb{R}^p : F(x) = 0\}$, wobei $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ definiert ist durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} (x, y_1) \\ \vdots \\ (x, y_{p-d}) \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass

$$dF(x) = \begin{pmatrix} y_1^T \\ \vdots \\ y_{p-d}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p-d) \times p}.$$

Da die y_1, \dots, y_{p-d} linear unabhängig sind, hat $dF(x)$ immer vollen Rang $p - d$. Wir sehen abermals, und dieses mal mit Hilfe von Satz 13.5.4, dass M eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

13.5.8 Beispiel. Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ aller reellen 2×2 -Matrizen, welcher offensichtlich als \mathbb{R}^4 betrachtet werden kann, indem man eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit dem Vier-Vektor $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in \mathbb{R}^4$ identifiziert. Die Teilmenge

$$\text{SL}(2) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 1\}$$

von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ stimmt überein mit $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : F(A) = 0\}$, wobei $F : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(A) = \det A - 1 = a_1 a_4 - a_2 a_3 - 1.$$

Dieses F ist stetig differenzierbar mit⁴

$$dF(A) = (a_4, -a_3, -a_2, a_1).$$

Für $A \in \text{SL}(2)$ kann A nicht die Nullmatrix sein, wodurch $dF(A)$ auf $\text{SL}(2)$ immer vollen Rang 1. Aus Satz 13.5.4 folgt daher, dass $\text{SL}(2)$ eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$ ist.

Ähnlich kann man zeigen, dass die Menge aller orthogonalen 2×2 -Matrizen eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$ ist. Derartige Mannigfaltigkeiten, die gleichzeitig eine Gruppenstruktur tragen, nennt man *Lie Gruppen*.

³Für $x = (x_1, \dots, x_p)^T, y = (y_1, \dots, y_p)^T$ gilt $(x, y) = \sum_{j=1}^p x_j y_j$.

⁴In dieser Beziehung betrachten wir F als Abbildung von \mathbb{R}^4 nach \mathbb{R} .

Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension d , und $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ eine Karte von M . Die Menge $C_\varphi \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $C_\varphi \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ ist dann offen; siehe Übungsaufgabe 12.32. Die Abbildung

$$\phi_\varphi : C_\varphi \rightarrow M, \quad \text{definiert durch} \quad \phi_\varphi(t) = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13.19)$$

hat $\varphi^{-1}(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = M \cap U_\varphi$ als Bild. Da die Einschränkung $\varphi^{-1}|_{C_\varphi \times \{0\}} : C_\varphi \times \{0\} \rightarrow M \cap U_\varphi$ ein Homöomorphismus ist, hat auch $\phi_\varphi : C_\varphi \rightarrow M \cap U_\varphi$ diese Eigenschaft; vgl. Übungsaufgabe 12.33. Wir nennen ϕ_φ die zur Karte φ gehörige *Einbettung*.

13.5.9 Satz. *Eine nichtleere Teilmenge M von \mathbb{R}^p ist genau dann eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x \in M$ eine d -dimensionale Einbettung $\phi : C \rightarrow M$ mit $x \in \phi(C)$ gibt, wobei $\phi : C \rightarrow M$ Einbettung heißt, wenn*

- (i) $C \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\phi(C) \subseteq M$ offen sind, wobei M mit der Spurtopologie versehen ist,
- (ii) $\phi : C \rightarrow \phi(C)$ ein Homöomorphismus⁵ ist,
- (iii) ϕ als Abbildung von C nach \mathbb{R}^p hinein stetig differenzierbar ist, wobei $d\phi(t)$ für alle $t \in C$ injektiv ist.

Beweis. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension d , $x \in M$, und $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ eine Karte von M mit $x \in U_\varphi$. Für die Abbildung ϕ_φ aus (13.19) ist C_φ in \mathbb{R}^d sowie $\phi_\varphi(C_\varphi) = M \cap U_\varphi$ in M offen, und $\phi_\varphi : C_\varphi \rightarrow \phi_\varphi(C_\varphi)$ ist ein Homöomorphismus. Schließlich ist ϕ_φ als Zusammensetzung von $C_\varphi \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^p$ und φ^{-1} eine C^1 -Funktion, wobei

$$d\phi_\varphi(t) = d\varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} (e_1 | \dots | e_d) \quad (13.20)$$

als Produkt zweier injektiver linearer Abbildungen selber injektiv ist.

Sei umgekehrt $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^p$ so, dass es zu jedem $x \in M$ eine Einbettung $\phi : C \rightarrow M$ gibt mit $x = \phi(s) \in \phi(C)$. Da $d\phi(s) \mathbb{R}^d$ ein d -dimensionaler Teilraum von \mathbb{R}^p ist, gibt es $w_1, \dots, w_{p-d} \in \mathbb{R}^p$ derart, dass diese Vektoren zusammen mit $d\phi(s) \mathbb{R}^d$ den ganzen \mathbb{R}^p aufspannen. Wir definieren die Funktion

$$\Phi : \begin{cases} C \times \mathbb{R}^{p-d} & \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ \begin{pmatrix} t \\ (\xi_j)_{j=1}^{p-d} \end{pmatrix} & \mapsto \sum_{j=1}^{p-d} \xi_j w_j + \phi(t). \end{cases}$$

Offenbar gilt $\Phi \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \phi(t)$ für alle $t \in C$. Außerdem ist Φ stetig differenzierbar, wobei

$$d\Phi \begin{pmatrix} t \\ (\xi_j)_{j=1}^{p-d} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \phi(t) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_d} \phi(t) \mid w_1 \quad \dots \quad w_{p-d} \right) \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (13.21)$$

⁵Also ist ϕ eine in beide Richtungen bijektive und stetige Abbildung, wobei $\phi(C)$ mit der Spurtopologie versehen ist; siehe Definition 12.7.1. Es sei daran erinnert, dass die Spurtopologie auf $\phi(C)$, welche die Euklidischen Topologie \mathcal{T}^p von \mathbb{R}^p auf $\phi(C)$ induziert, mit der Spurtopologie auf $\phi(C)$ übereinstimmt, welche die Spurtopologie $(\mathcal{T}^p)_M$ von M auf $\phi(C)$ induziert; siehe (9).

Wegen unserer Wahl der w_j ist $d\Phi\left(\begin{smallmatrix} s \\ (\xi_j)_{j=1}^{p-d} \end{smallmatrix}\right)$ regulär. Nach dem Umkehrsatz Satz 13.3.1 gibt es offene Umgebungen $O \subseteq C \times \mathbb{R}^{p-d}$ von $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ und P von x derart, dass $\Phi|_O : O \rightarrow P$ ein Diffeomorphismus und somit auch ein Homöomorphismus ist.

Die Menge $O \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \subseteq C \times \{0\}$ ist von der Form $C_1 \times \{0\}$ mit einer offenen Teilmenge $C_1 \subseteq C$, $s \in C_1$. Also ist $\phi(C_1)$ offen in M bezüglich der Spurtopologie. Infolge gilt $x = \phi(s) \in \phi(C_1) = M \cap W$ für ein in \mathbb{R}^p offenes W . Die Mengen

$$U_\varphi := W \cap P \quad \text{und} \quad D_\varphi := (\Phi|_O)^{-1}(W \cap P) (\subseteq O)$$

sind dann beide offen in \mathbb{R}^p , und enthalten x bzw. $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$. Als Einschränkung eines Diffeomorphismus ist $\Phi|_{D_\varphi} : D_\varphi \rightarrow U_\varphi$ auch ein solcher, wobei

$$\begin{aligned} U_\varphi \cap M &= U_\varphi \cap W \cap M = U_\varphi \cap \phi(C_1) = \Phi|_O(D_\varphi) \cap \Phi|_O(O \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) \\ &= \Phi|_O(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist eine Folge der Injektivität von $\Phi|_O$. Bezeichnen wir schließlich die Inverse von $\Phi|_{D_\varphi} : D_\varphi \rightarrow U_\varphi$ als φ , so haben wir eine Karte von M mit x in ihrem Definitionsbereich gefunden. \square

Wegen (13.21) und da im obigen Beweis $D_\varphi \subseteq O \subseteq C \times \mathbb{R}^{p-d}$ gilt, haben wir in der Tat folgendes Resultat gezeigt.

13.5.10 Proposition. *Ist $\phi : C \rightarrow M$ eine Einbettung in eine Menge M , $x \in \phi(C)$ und $w_1, \dots, w_{p-d} \in \mathbb{R}^p$, welche zusammen mit dem Bildraum von $d\phi(\phi^{-1}(x))$ ganz \mathbb{R}^p aufspannen, so gibt es eine Karte $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ der Menge M mit $x \in U_\varphi$, $D_\varphi \subseteq C \times \mathbb{R}^{p-d}$ und infolge $C_\varphi \subseteq C$, sowie $\phi_\varphi = \phi|_{C_\varphi}$; vgl. (13.19). Für diese Karte und für alle $y \in D_\varphi$ gilt*

$$d\varphi^{-1}(y)(e_1 | \dots | e_d) = d\phi(\pi(y)) \quad \text{und} \quad d\varphi^{-1}(y)(e_{d+1} | \dots | e_p) = (w_1 | \dots | w_{p-d}),$$

wobei $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Projektion auf die ersten d Koordinaten bezeichnet.

13.5.11 Korollar. *Sind $\phi_1 : C_1 \rightarrow M$ und $\phi_2 : C_2 \rightarrow M$ Einbettungen in die d -dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit $\phi_1(C_1) \cap \phi_2(C_2) \neq \emptyset$, dann bildet für $j = 1, 2$*

$$B_j := \phi_j^{-1}(\phi_1(C_1) \cap \phi_2(C_2)) \quad (\subseteq C_j)$$

eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^d . Zudem ist die Abbildung

$$\omega : B_1 \rightarrow B_2 \quad \text{definiert durch} \quad \omega = \phi_2|_{B_2}^{-1} \circ \phi_1|_{B_1}$$

ein Diffeomorphismus.

Beweis. Nach den an Einbettungen gestellten Forderungen ist $\phi_1(C_1) \cap \phi_2(C_2)$ bezüglich der Spurtopologie auf M offen. Da $\phi_j : C_j \rightarrow \phi_j(C_j)$ für $j = 1, 2$ einen Homöomorphismus darstellt, ist B_j offen bezüglich der Spurtopologie auf C_j und daher auch als Teilmenge von \mathbb{R}^d . Als Einschränkung von Homöomorphismen sind $\phi_j|_{B_j} : B_j \rightarrow \phi_1(C_1) \cap \phi_2(C_2)$ und

infolge auch die Zusammensetzung $\omega : B_1 \rightarrow B_2$ Homöomorphismen. Insbesondere sind $\phi_j|_{B_j} : B_j \rightarrow M$ Einbettungen.

Für festes $s \in B_1$ betrachten wir $x := \phi_1(s) \in M$. Wegen Proposition 13.5.10 angewandt auf $\phi_2|_{B_2}$ gibt es eine Karte φ mit $C_\varphi \subseteq B_2$, $x \in U_\varphi$ und $\phi_\varphi = \phi_2|_{C_\varphi}$. Es folgt $x \in U_\varphi \cap M = \phi_\varphi(C_\varphi) = \phi_2|_{B_2}(C_\varphi)$, womit $(\phi_1|_{B_1})^{-1}(\phi_2|_{B_2}(C_\varphi)) = \omega^{-1}(C_\varphi)$ eine offene Teilmenge von B_1 ist und s enthält. Für $t \in \omega^{-1}(C_\varphi)$ gilt $\phi_1|_{B_1}(t) \in \phi_\varphi(C_\varphi) = U_\varphi \cap M$ und als Folge von (13.19)

$$\varphi(\phi_1|_{B_1}(t)) = \begin{pmatrix} \phi_2|_{B_2}^{-1}(\phi_1|_{B_1}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Projektion auf die ersten d Einträge, so erhalten wir $\omega|_{\omega^{-1}(C_\varphi)} = \pi \circ \varphi \circ \phi_1|_{\omega^{-1}(C_\varphi)}$, womit diese Abbildung stetig differenzierbar ist. Also ist ω auf der offenen Umgebung $\omega^{-1}(C_\varphi)$ eines beliebig vorgegebenen $s \in B_1$ stetig differenzierbar und infolge auf ganz B_1 stetig differenzierbar. Da wir die Rollen von ϕ_1 und ϕ_2 vertauschen können, ist auch ω^{-1} stetig differenzierbar. \square

13.5.12 Beispiel. Wir betrachten wieder die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit S^2 im \mathbb{R}^3 wie in Beispiel 13.5.6. Dort hatten wir Karten $\varphi_{+,x}, \varphi_{-,x}, \varphi_{+,y}, \varphi_{-,y}, \varphi_{+,z}, \varphi_{-,z}$ betrachtet. Die zu diesen Karten gehörigen Einbettungen $\phi_{\varphi_{\cdot,\cdot}} : C_{\varphi_{\cdot,\cdot}} \rightarrow S^2$ sind wegen

$$C_{\varphi_{\cdot,\cdot}} \times \{0\} = D_{\varphi_{\cdot,\cdot}} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \varphi_{\cdot,\cdot}(U_{\varphi_{\cdot,\cdot}} \cap S^2) = U_1^{\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2}(0) \times \{0\}$$

auf $C_{\varphi_{\cdot,\cdot}} = U_1^{\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2}(0)$ definiert. Dabei gilt etwa

$$\phi_{\varphi_{\pm,z}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \varphi_{\pm,z}^{-1}((\xi, \eta, 0)^T) = \left(\xi, \eta, \pm \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \right)^T,$$

wobei ihr $\phi_{\varphi_{\pm,z}}(C_{\varphi_{\pm,z}}) = \phi_{\varphi_{\pm,z}}(U_1^{\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2}(0))$ genau mit der offenen oberen bzw. unteren Halbkugel $H_\pm = \{(\xi, \eta, \zeta)^T \in S^2 : \pm \zeta > 0\}$ übereinstimmt.

13.5.13 Beispiel. Betrachte die offene Teilmenge $O := \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R})$ des Dreiraumes und die darauf definierte Funktion $F : O \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 - 1.$$

Wir haben den Definitionsbereich O so gewählt, dass immer $x^2 + y^2 \neq 0$. Somit ist F darauf stetig differenzierbar, wobei

$$dF \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(2x \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad 2y \frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad 2z \right).$$

Wir setzen $M = \{(x, y, z)^T \in O : F((x, y, z)^T) = 0\}$. Für $(x, y, z)^T \in M$ ist im Falle $z \neq 0$ der letzte Eintrag von $dF((x, y, z)^T)$ ungleich Null. Für $z = 0$ gilt $(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 - 1 =$

$F((x, y, z)^T) = 0$ und infolge $\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = \pm 1$. Wegen $(x, y, z)^T \in O$ gilt $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$, und die erste oder zweite Spalte von $dF((x, y, z)^T)$ verschwindet nicht.

In jedem Fall gilt $dF((x, y, z)^T) \neq (0, 0, 0)$. Also ist M gemäß Satz 13.5.4 eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 , die man auch als 2-dimensionalen *Torus* bezeichnet. Die Funktion $\phi : [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi) \rightarrow O \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \cos \theta) \cos \alpha \\ (2 + \cos \theta) \sin \alpha \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich stetig, und man rechnet leicht nach, dass $F \circ \phi = 0$, also dass ϕ nach M hinein abbildet. Außerdem gilt im Falle $\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = (x, y, z)^T$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (13.22)$$

woraus wir sofort die Injektivität von ϕ ableiten.

Für gegebenes $(x, y, z)^T \in O$ mit $F((x, y, z)^T) = 0$ liegen die beiden rechten Seiten in (13.22) auf der Einheitskreislinie $S^1 = \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$. Infolge gibt es eindeutige $\alpha, \theta \in [-\pi, \pi)$, so dass (13.22) und damit $\phi((\alpha, \theta)^T) = (x, y, z)^T$ gilt; vgl. Definition 6.9.11 und Bemerkung 6.9.12.

Also ist $\phi : [-\pi, \pi) \times [-\pi, \pi) \rightarrow M$ eine Bijektion, wobei

$$\begin{aligned} \phi(\{-\pi\} \times [-\pi, \pi)) &= \{(x, y, z)^T \in M : y = 0, x < 0\} \\ &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x + 2)^2 + z^2 = 1, y = 0\} =: K_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \phi([-\pi, \pi) \times \{-\pi\}) &= \{(x, y, z)^T \in M : z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} - 2 = -1\} \\ &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\} =: K_2. \end{aligned}$$

Die Einschränkung $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}$ ist somit eine Bijektion mit Definitionsbereich $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ und Bild $M \setminus (K_1 \cup K_2)$. Man beachte, dass die Kreise K_1 und K_2 eindimensionale Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^3 sind, die beide in M enthalten sind. Da K_1 und K_2 sogar abgeschlossene Teilmengen von M sind, ist $M \setminus (K_1 \cup K_2)$ offen in M .

Offenbar ist $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}$ stetig differenzierbar. Da die Bijektion $\beta \mapsto (\cos \beta, \sin \beta)^T$ als Abbildung von $(-\pi, \pi)$ auf $S^1 \setminus \{(-1, 0)^T\}$ in beide Richtungen stetig⁶ ist, folgt aus (13.22) die Stetigkeit von $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)}^{-1} : M \setminus (K_1 \cup K_2) \rightarrow (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Schließlich hat für $(\alpha, \theta)^T \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ die Matrix

$$d\phi \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2 + \cos \theta) \sin \alpha & -\sin \theta \cos \alpha \\ (2 + \cos \theta) \cos \alpha & -\sin \theta \sin \alpha \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

immer vollen Rang. Also ist $\phi|_{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)} : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow M$ eine Einbettung.

⁶Siehe Proposition 6.9.13.

13.5.14 Fakta.

1. p -dimensionale Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^p sind genau die offenen Teilmengen von \mathbb{R}^p . In der Tat folgt wegen $\mathbb{R}^p \times \{0\} = \mathbb{R}^p$, dass für $x \in M$ und für den Diffeomorphismus $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ aus Definition 13.5.1 dann $\varphi(U_\varphi \cap M) = D_\varphi = \varphi(U_\varphi)$ und daher $x \in U_\varphi \subseteq M$ gilt. Also ist eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit M Vereinigung von offenen Mengen und somit selber offen. Umgekehrt ist für ein offenes $M \subseteq \mathbb{R}^p$ die Abbildung $\text{id}_M : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus wie in Definition 13.5.1 gefordert.
2. Mit der Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten in Satz 13.5.9 erkennt man leicht, dass für $n + m = p$ und für eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^p mit $M \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$ auch $\pi(M)$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n ist, wobei $\pi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten bezeichnet.
3. Da es zu jedem affinen und d -dimensionalen Unterraum X von \mathbb{R}^p eine affine Bijektion $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit $T(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = X$ gibt, kann man bei der Definition von Karten in Definition 13.5.1 den Raum $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ durch irgendeinen affinen Unterraum von \mathbb{R}^p der Dimension d ersetzen und erhält dasselbe Konzept von Mannigfaltigkeiten.
4. Jede Einschränkung $\varphi|_{U'_\varphi} : U'_\varphi \rightarrow D'_\varphi$ einer Karte $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ einer Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^p mit $D'_\varphi = \varphi(U'_\varphi)$ ist wieder eine Karte von M .
Analog dazu ist die Einschränkung einer Einbettung $\phi : C \rightarrow M$ auf eine offene Teilmenge von C wieder eine Einbettung.
5. Wegen des vorherigen Punktes ist jede bezüglich der Spurtopologie offene Teilmenge $P \neq \emptyset$ einer Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^p , also $P = M \cap O$ für eine in \mathbb{R}^p offene Teilmenge $O \neq \emptyset$, eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit.
6. Mit 4 und Definition 13.5.1 erkennen wir, dass eine Teilmenge M von \mathbb{R}^p genau dann eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es zu jedem $x \in M$ eine bezüglich der Spurtopologie offene, x enthaltende Teilmenge P von M gibt, welche eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^p ist.
7. Sind M_1, M_2 zwei d -dimensionale Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^p , welche getrennt sind, also $M_1 \cap \text{cl}(M_2) = \emptyset = \text{cl}(M_1) \cap M_2$ erfüllen, so ist auch $M_1 \cup M_2$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^p .
Allgemeiner gilt, dass für eine Familie $M_i, i \in I$, von d -dimensionalen Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^p mit $M_j \cap \text{cl}(\bigcup_{i \neq j} M_i) = \emptyset$ für alle $j \in I$ folgt, dass auch $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^p ist.
8. Ist $T : O \rightarrow P$ ein Diffeomorphismus mit offenen $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$ und $M \subseteq \mathbb{R}^p$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $M \subseteq O$, so bildet auch $T(M)$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p .

Wir bringen einige Beispiele für die Anwendung der Sachverhalte aus Fakta 13.5.14.

13.5.15 Beispiel.

- (i) Die obere Halbkugel $M = \{x \in S^2 : x_3 > 0\}$ ist als bezüglich der Spurtopologie offene Teilmenge von S^2 selber eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 .
- (ii) Da die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T((x, y, z)^T) = 2(x, y, z)^T$, einen Diffeomorphismus abgibt, ist mit der Oberfläche S^2 der Einheitskugel auch die Oberfläche $2 \cdot S^2$ der Kugel mit Radius 2 eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 .
- (iii) Betrachtet man den Diffeomorphismus $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T((x, y)^T) = (2x, y)^T$, so erkennen wir, dass mit der Einheitskreislinie S^1 auch die Ellipse

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \right\}$$

eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^2 ist.

- (iv) Auch die Vereinigung von S^2 und $2 \cdot S^2$ stellt eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 dar.
- (v) Die Teilmenge

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \times \{n\}$$

bildet eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^2 .

Nicht alle implizit definierten Objekte sind Mannigfaltigkeiten, wie am folgenden Beispiel zu erkennen ist.

13.5.16 Beispiel. Die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$, die durch

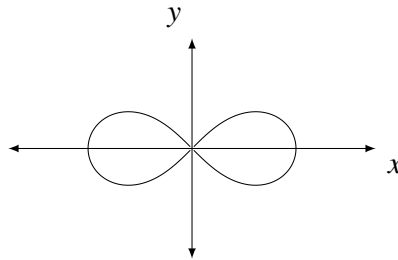
$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

mit festem $a > 0$ beschrieben wird, heißt Lemniskate und stellt einen liegenden Achter dar. Auf diese implizit beschriebene Teilmenge der Ebene lässt sich Satz 13.5.4 nicht anwenden, da $dF((0, 0)^T) = (0, 0)$ nicht vollen Rang hat.

In der Tat ist M keine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Um das einzusehen, betrachtet man den Schnittpunkt $(0, 0)^T$ der zwei Schleifen. Wenn M eine Mannigfaltigkeit wäre, so gibt es eine Karte $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ mit $(0, 0)^T \in U_\varphi$. Mit dem offenen $C \subseteq \mathbb{R}$, so dass $C \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$, wäre auch $\phi : C \rightarrow M \cap U_\varphi$ definiert durch

$$\phi(s) = \varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus. Setzen wir $a := \phi^{-1}((0, 0)^T)$, so wäre $V := \phi((a - \epsilon, a + \epsilon))$ für jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung von $(0, 0)^T$ in M derart, dass $V \setminus \{(0, 0)^T\}$ Vereinigung der beiden zusammenhängenden Mengen $\phi((a - \epsilon, a))$ und $\phi((a, a + \epsilon))$ ist, denn stetige Bilder von zusammenhängenden Mengen sind zusammenhängend; siehe Proposition 6.2.4. Im Widerspruch dazu zerfällt $V \setminus \{(0, 0)^T\}$ für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ in mindestens vier disjunkte zusammenhängende und untereinander getrennte Mengen.

Abbildung 13.4: Lemniskate: $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$

13.6 Tangentialräume

13.6.1 Definition. Sei M eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p und $x \in M$. Weiters sei $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ eine Karte von M wie in Definition 13.5.1 mit $x \in U_\varphi$. Der d -dimensionalen Unterraum⁷

$$(d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$$

von \mathbb{R}^p bezeichnen wir als *Tangentialraum* T_x von M im Punkt x .

Diese Definition von T_x hat den Schönheitsfehler, dass sie ad hoc von der gewählten Karte abhängt. In Korollar 13.6.3 werden zeigen, dass diese Definition tatsächlich unabhängig von der gewählten Karte ist. Zunächst sei nur bemerkt, dass wegen (13.17) und (13.20), wobei $t \in C_\varphi$ mit $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(x)$,

$$(d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = d\varphi^{-1}(\varphi(x))(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = d\phi_\varphi(\phi_\varphi^{-1}(x))\mathbb{R}^d.$$

13.6.2 Lemma. Sei M eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p , $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $x \in M \cap O$. Weiters sei $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ eine Karte von M mit $x \in U_\varphi$ wie in Definition 13.5.1, $s \in \mathbb{R}^d$ mit $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(x)$ und $C \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $C \times \{0\} = \varphi(O \cap U_\varphi) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.

(i) Sei $f : O \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für die durch

$$g(t) = f \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

definierte Abbildung $g : C \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist

$$dg(s) = 0 \quad \text{äquivalent zu} \quad (df(x))^T \mathbb{R}^k \perp (d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}). \quad (13.23)$$

(ii) Falls die Mannigfaltigkeit $M \cap O$ implizit durch $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ wie in Satz 13.5.4 definiert ist, also $M \cap O = \{y \in O : F(y) = 0\}$, dann gilt

$$(dF(x))^T \mathbb{R}^{p-d} = \left((d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \right)^\perp. \quad (13.24)$$

⁷Als Bild eines d -dimensionalen Unterraumes unter einer bijektiven linearen Abbildung ist T_x sicherlich d -dimensional.

Beweis.

(i) Für die stetig differenzierbare Funktion $g : C \rightarrow \mathbb{R}^k$ gilt nach der Kettenregel

$$dg(s) = df(x) d\varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} (e_1 | \dots | e_d),$$

womit $dg(s) = 0$ bedeutet, dass die Spalten von $(df(x))^T$ normal auf die ersten d Spalten von $d\varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen. Da die lineare Hülle der Spalten von $(df(x))^T$ genau $(df(x))^T \mathbb{R}^k$ und die lineare Hülle der ersten d Spalten von $(d\varphi(x))^{-1}$ nichts anderes als $(d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\})$ ist, folgt (13.23).

(ii) Für F wie in unserer Aussage ist die Abbildung

$$C \ni s \mapsto F \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p-d}$$

und infolge auch ihre Ableitung identisch gleich Null, weshalb gemäß (13.23)

$$(dF(x))^T \mathbb{R}^{p-d} \subseteq \left((d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \right)^\perp.$$

Da die $p - d$ Spalten von $(dF(x))^T$ gemäß Satz 13.5.4 linear unabhängig sind, haben die Räume links und rechts vom Gleichheitszeichen dieselbe Dimension $p - d$, womit (13.24) folgt.

□

13.6.3 Korollar. Sind $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ und $\chi : U_\chi \rightarrow D_\chi$ zwei Karten einer d -dimensionalen Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^p , so gilt für $x \in M \cap U_\chi \cap U_\varphi$

$$(d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = \left((d\chi(x))^T (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}) \right)^\perp = (d\chi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}).$$

Insbesondere ist die Definition 13.6.1 des Tangentialraumes T_x unabhängig von der gewählten Karte.

Beweis. Wir betrachten $O := U_\chi \cap U_\varphi$ und $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ definiert durch $F = \pi_{d+1,p} \circ \chi$, wobei $\pi_{d+1,p} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ die Projektion auf die hinteren $p - d$ Koordinaten bezeichnet. Gemäß Bemerkung 13.5.5 ist $M \cap O$ eine durch $M \cap O = \{x \in O : F(x) = 0\}$ implizit definierte Mannigfaltigkeit. Wegen (13.24) in Lemma 13.6.2 gilt für $x \in x \in M \cap O$

$$\left((d\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \right)^\perp = (dF(x))^T \mathbb{R}^{p-d} = (d\chi(x))^T \pi_{d+1,p}^T \mathbb{R}^{p-d} = (d\chi(x))^T (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d}).$$

Wenden wir diesen Sachverhalt auf χ anstelle von φ an, so folgt $\left((d\chi(x))^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0\}) \right)^\perp = (d\chi(x))^T (\{0\} \times \mathbb{R}^{p-d})$. Die Behauptung erhalten wir schließlich durch Übergang zu den orthogonalen Komplementen. □

Im Falle $d = p - 1$ ist das orthogonale Komplement

$$T_x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^p : (y, z) = 0 \text{ für alle } z \in T_x\}$$

eindimensional. Also gibt es genau zwei normal auf T_x stehende Vektoren der Länge eins v_1, v_2 , wobei $v_1 = -v_2$. Diese nennt man *Normalvektoren* auf T_x . Ist φ eine Karte von M , so erhalten wir aus Korollar 13.6.3, dass für $x \in M \cap U_\varphi$

$$v_\varphi(x) := \frac{1}{\|d\varphi(x)^T e_p\|_2} (d\varphi(x))^T e_p \quad (13.25)$$

und $-v_\varphi(x)$ die Normalvektoren auf T_x sind. Da $v_\varphi(x)$ in (13.25) stetig von $x \in M \cap U_\varphi$ abhängt, erhalten wir folgende Aussage.

13.6.4 Korollar. *Um jeden Punkt y einer $(p - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung $U(y)$ und eine stetige Funktion $v : U(y) \cap M \rightarrow \mathbb{R}^p$ derart, dass $v(x)$ ein Normalvektor auf T_x für alle $x \in U(y) \cap M$ ist.*

Also können wir zumindest lokal um y eine stetige Normale finden.

13.6.5 Bemerkung.

- (i) Wie man etwa an Beispiel 13.6.6, (ii), erkennt, kann es sogar eine stetige Abbildung $v(x)$ geben, die auf ganz M definiert ist, wobei $v(x)$ für alle $x \in M$ ein Normalvektor auf T_x ist.

Wir werden später sehen, dass eine Mannigfaltigkeit, die im Rand einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^p enthalten ist, immer eine überall auf M stetige Normale hat.

- (ii) Es gibt aber etwa 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^3 derart, dass man keine global definierte, stetige Normale findet. Ein Beispiel dafür ist das *Möbiusband*.
- (iii) Ist $M \cap O$ für ein offenes $O \subseteq \mathbb{R}^p$ mit $x \in O$ implizit durch $F : O \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, so folgt aus Lemma 13.6.2, dass

$$\pm \frac{1}{\|dF(x)^T\|_2} (dF(x))^T$$

die Normalvektoren auf T_x sind.

13.6.6 Beispiel.

- (i) Als ganz einfaches Beispiel sei M die Gerade $\{(a, b)^T : b = ka + d\}$ in \mathbb{R}^2 . Diese ist durch $b - ka - d = 0$ implizit definiert, und hat daher im Punkt $(a, b)^T$ eine Normale $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}$. Die zweite Normale ist $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (ii) Für $x = (a, b, c) \in S^2$, wobei S^2 die Einheitskugeloberfläche im \mathbb{R}^3 bezeichnet, welche durch $F((\xi, \eta, \zeta)^T) := \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0$ beschrieben wird, ist

$$\frac{1}{\|dF(x)^T\|} dF(x)^T = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x$$

ein Normalvektor auf T_x .

- (iii) Die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit M , die durch $F((\xi, \eta, \zeta)^T) = \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$, im \mathbb{R}^3 implizit definiert ist, stellt einen Zylinder dar. Für $x = (a, b, c)^T \in M$ gilt

$$\frac{1}{\|dF(x)^T\|} dF(x)^T = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (iv) Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch

$$F((x, y, z)^T) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 - 1 = 0$$

definiert ist, haben wir in Beispiel 13.5.13 als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit identifiziert. Für $x^2 + y^2 \neq 0$ ist die Länge zum Quadrat von

$$dF((x, y, z)^T) = \begin{pmatrix} 2x \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2y \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2z \end{pmatrix}$$

gleich

$$4x^2 \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}{x^2 + y^2} + 4y^2 \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2}{x^2 + y^2} + 4z^2 = 4((\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2) = 4,$$

wodurch sich

$$\begin{pmatrix} x \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z \end{pmatrix}$$

als Normalvektor auf $T_{(x,y,z)^T}$ herausstellt.

Satz 13.5.4 gestattet eine Verfeinerung.

13.6.7 Satz (Rangsatz*). Für $p, n, m \in \mathbb{N}$ sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : O \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar derart, dass $dF(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ für alle $x \in O$ vom Rang kleiner oder gleich m . Falls $\text{rang } dF(x) = m$ für alle $x \in M$ gilt, wobei

$$M = \{x \in O : F(x) = 0\},$$

so bildet diese Menge im Falle $M \neq \emptyset$ eine $(p - m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beweis. Für $x \in M \neq \emptyset$ gilt $m = \text{rang } dF(x) \leq \min(n, p)$, wodurch $dF(x)$ genau m linear unabhängige Zeilen hat. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die ersten m Zeilen linear unabhängig sind. Die Stetigkeit der Determinantenfunktion, angewandt auf geeignete m Spalten der ersten m Zeilen von $dF(y)$, impliziert die Existenz einer in \mathbb{R}^p offenen Umgebung $V \subseteq O$ von x derart, dass die ersten m Zeilen von $dF(y)$ für alle $y \in V$ linear unabhängig sind. Laut Voraussetzung gilt $\text{rang } dF(y) = m$ für alle $y \in V$. Bezeichnet $F_1(y)$ für $y \in V$ die ersten m Einträge von $F(y)$, so erhalten wir eine stetig differenzierbare Funktion $F_1 : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, welche die Voraussetzungen von Satz 13.5.4 erfüllt, womit

$$L := \{z \in V : F_1(z) = 0\}$$

eine x enthaltende, $(p - m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit abgibt. Sei φ eine Karte von L mit $x \in L \cap U_\varphi$, wobei wir $U_\varphi \subseteq V$ und D_φ als konvex annehmen; vgl. Fakta 13.5.14, 4. Die offene Menge $C \subseteq \mathbb{R}^{p-m}$ mit $C \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-m} \times \{0\})$ ist dann auch konvex, wobei $\varphi(x) \in C \times \{0\}$.

Für $j \in \{m + 1, \dots, n\}$ stellt $f_j(y) := e_j^T F(y)$, $y \in V$, eine stetig differenzierbare Funktion $f_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ dar. Dabei ist $df_j(y)$ genau die j -te Zeile von $dF(y)$ und wegen $\text{rang } dF(y) = \text{rang } dF_1(y)$ Linearkombination der Zeilen von $dF_1(y)$. Aus (13.24) folgt

$$df_j(y)^T \perp d\varphi(y)^{-1}(\mathbb{R}^{p-m} \times \{0\}) \quad \text{für alle } y \in L \cap U_\varphi. \quad (13.26)$$

Wegen (13.23) verschwindet daher die Ableitung der Funktion

$$C \ni s \mapsto f_j \circ \varphi^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

auf C . Infolge ist diese Funktion konstant gleich einem $c \in \mathbb{R}$; siehe das Resultat am Ende von Abschnitt 10.1 in [K]. Wegen $\varphi(x) \in C \times \{0\}$ gilt $c = f_j(x) = 0$ und somit $f_j \equiv 0$ auf $L \cap U_\varphi$. Also sind die Einträge $m + 1$ bis n von $F(y)$ gleich Null für $y \in L \cap U_\varphi$, wodurch

$$L \cap U_\varphi = \{z \in U_\varphi : F(z) = 0\}.$$

Mit Fakta 13.5.14, 5 und 6, identifizieren wir also M als $(p - m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. \square

Wir wollen uns in diesem Abschnitt noch der Suche von lokalen Extrema von reellwertigen Funktionen auf implizit definierten Mannigfaltigkeiten widmen. Um diese lokalen Extrema mit Nebenbedingung zu finden, ist folgender Satz behilflich.

13.6.8 Satz (Lagrangesche Multiplikatorenregel). Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $F : O \rightarrow \mathbb{R}^{p-d}$ stetig differenzierbar. Ist $y \in O$ eine lokales Minimum (lokales Maximum) von f unter der Nebenbedingung $F(y) = 0$, gilt also $F(y) = 0$ und

$$x \in U_\delta(y), F(x) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y) \quad (f(x) \leq f(y)) \quad \text{für ein } \delta > 0, \quad (13.27)$$

und hat $dF(y)$ vollen Rang $p - d$, so gibt es⁸ ein $\mu \in \mathbb{R}^{p-d}$ so, dass für die Funktion $H : O \times \mathbb{R}^{p-d} \subseteq \mathbb{R}^{p+(p-d)} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x, \lambda) := f(x) + (\lambda, F(x)) = f(x) + \sum_{j=1}^{p-d} \lambda_j F_j(x)$$

(y, μ) ein stationärer Punkt ist, also $dH(y, \mu) = 0$ gilt. Die Gleichungen $dH(y, \mu) = 0$ ist dabei äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) + \sum_{j=1}^{p-d} \mu_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(y) &= 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ F_j(y) &= 0, \quad j = 1, \dots, p-d. \end{aligned}$$

Beweis. Da wir ohnehin nur $y \in O$ behandeln, für die $dF(y)$ vollen Rang hat, können wir O nötigenfalls durch das kleinere $\{x \in O : \text{rang } dF(x) = p - d\}$ ⁹ ersetzen. Also können wir annehmen, dass $dF(x)$ für alle $x \in O$ vollen Rang hat. Gemäß Satz 13.5.4 ist $M = \{x \in O : F(x) = 0\}$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Sei nun $y \in M$ ein lokales Extremum, und $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ eine Karte mit $y \in U_\varphi \cap M$ wie in Definition 13.5.1, wobei wir $U_\varphi \subseteq O$ annehmen. Für das offene $C_\varphi \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $C_\varphi \times \{0\} = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ hat die stetig differenzierbare Funktion $g : C_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(t) = f \circ \varphi^{-1} \left(\begin{smallmatrix} t \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$, bei dem $s \in C_\varphi$, für das $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(y)$ gilt, ein lokales Extremum. Wegen Satz 10.3.1 und (13.23) folgt $df(y)^T \perp T_y$. Mit Lemma 13.6.2 erhalten wir daraus $df(y)^T \in dF(y)^T \mathbb{R}^{p-d}$. Also gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}^{p-d}$ mit

$$df(y)^T = dF(y)^T (-\mu). \quad \square$$

13.6.9 Beispiel. Als einfaches Beispiel betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \xi^2 \eta^2.$$

Wir wollen alle Extrema dieser Funktion auf $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ finden. Offensichtlich entspricht das dem Aufsuchen aller Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung $F(x) = 0$, wobei

$$F \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = \xi^2 + \eta^2 - 1.$$

Wegen $dF((\xi, \eta)^T) = (2\xi \ 2\eta) \neq (0 \ 0)$ für $(\xi, \eta)^T \in \mathbb{T}$, ist die Regularitätsbedingung von Satz 13.6.8 erfüllt. Für $x = (\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$H(\xi, \eta, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot F(x) = \xi^2 \eta^2 + \lambda \xi^2 + \lambda \eta^2 - \lambda$$

⁸Man spricht vom *Lagrangeschen Multiplikator*.

⁹Man beachte, dass diese Menge wegen der Stetigkeit der Determinantenfunktion tatsächlich offen ist.

sind alle Lösungen von $dH(\xi, \eta, \lambda) = 0$ gemäß Satz 13.6.8 Kandidaten für lokale Extrema sind. Äquivalent dazu lösen wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \xi}(\xi, \eta, \lambda) &= 2\xi\eta^2 + 2\lambda\xi = 2\xi(\eta^2 + \lambda) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \eta}(\xi, \eta, \lambda) &= 2\xi^2\eta + 2\lambda\eta = 2\eta(\xi^2 + \lambda) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\xi, \eta, \lambda) &= F\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0.\end{aligned}$$

- (i) Ist $\xi = 0$, so muss $\eta = \pm 1$ und daher $\lambda = 0$ gelten.
- (ii) Ist $\eta = 0$, so muss $\xi = \pm 1$ und daher $\lambda = 0$ gelten.
- (iii) Sind beide $\xi, \eta \neq 0$, so folgt aus den ersten beiden Gleichungen $\xi^2 + \eta^2 = -2\lambda$ und aus der letzten $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Also $\lambda = -\frac{1}{2}$ sowie $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aus $f((\xi, \eta)^T) = \xi^2\eta^2$ folgt sofort, dass $f((\xi, \eta)^T) > 0$, wenn beide ξ, η ungleich Null sind. Somit sind die vier Punkte $(\pm 1, 0)^T, (0, \pm 1)^T$ Minima auf \mathbb{T} .

An jedem der vier Punkte $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ nimmt f den Wert $\frac{1}{4}$ an. Da \mathbb{T} kompakt ist, muss f darauf ein oder mehrere Maxima haben, welche in unserer Kandidatenmenge enthalten sein müssen. Also sind die vier Punkte $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ alle Maxima von f auf \mathbb{T} .

13.6.10 Beispiel. Sei $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, also gelte $A^T = A$. Wir suchen das Maximum und das Minimum von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^T A x$ auf der Kugeloberfläche $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$. Also suchen wir Extrema von f unter der Nebenbedingung

$$F(x) := 1 - x^T x = 1 - \sum_{j=1}^n x_j^2 = 0.$$

Zunächst ist $dF(x) = -2x^T$ vom Rang eins für alle x auf der Kugeloberfläche. Also liefert uns Satz 13.6.8 ein notwendiges Kriterium für die gesuchten Extrema. Für

$$H(x, \lambda) = x^T A x + \lambda(1 - x^T x) = x^T (A - \lambda I)x + \lambda = ((A - \lambda I)x, x) + \lambda.$$

folgt mit der Produktregel für Skalarprodukte und wegen der Symmetrie von A

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x, \lambda) = ((A - \lambda I)e_i, x) + ((A - \lambda I)x, e_i) = 2(Ax - \lambda x)^T e_i,$$

$$dH(x, \lambda) = (2(Ax - \lambda x)^T \mid 1 - x^T x).$$

Die stationären Punkte müssen also $(Ax - \lambda x) = (A - \lambda I)x = 0$ und $1 - x^T x = 0$ erfüllen. Somit kommen nur Eigenvektoren für die Extrema in Frage. Ist x ein Eigenvektor der Länge eins zum Eigenwert λ , so folgt $f(x) = x^T A x = x^T \lambda x = \lambda$.

Da die Kugeloberfläche kompakt ist, existieren Minimum und Maximum. Wir erhalten also für $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = 1$

$$\lambda_{\min} \leq x^T A x \leq \lambda_{\max},$$

wobei λ_{\min} der kleinste und λ_{\max} der größte Eigenwert von A ist.

Mit den üblichen Überlegungen, wobei man komplexe n -Vektoren und $n \times n$ -Matrizen mit reellen $(2n)$ -Vektoren bzw. $(2n) \times (2n)$ -Matrizen identifiziert, ergibt sich für komplexe, symmetrische $n \times n$ -Matrizen A , dass $\lambda_{\min} \leq z^* A z \leq \lambda_{\max}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\|z\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 = 1$.

13.7 Gebiete mit orientierbarem Rand

In diesem Abschnitt wollen wir der leichteren Lesbarkeit wegen mit $A \dot{\cup} B$ die Vereinigung zweier Mengen bezeichnen, falls diese disjunkt sind. Entsprechend wird die Vereinigung mehrerer paarweise disjunkter Mengen angeschrieben.

13.7.1 Definition. Für eine offene Teilmenge G von \mathbb{R}^p ist der *topologische Rand* definiert durch $\partial G := \bar{G} \setminus G^\circ$.

Ist $x \in \partial G$, dann heißt der Rand bei x durch eine $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit darstellbar, wenn es eine offene Umgebung W von x in \mathbb{R}^p derart gibt, dass $\partial G \cap W$ eine $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit abgibt. Die Menge¹⁰ $\partial^s G$ aller solchen x bezeichnen wir als *glatten Rand* von G .

13.7.2 Bemerkung. Mit x gehört offenbar ganz $\partial G \cap W$ zu $\partial^s G$. Wir schließen, dass $\partial^s G$ als Teilmenge von ∂G bezüglich der Spurtopologie offen ist, und aus Fakta 13.5.14, 6, dass $\partial^s G$ als Ganzes eine $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Unser erstes Ziel ist es, durch einen Punkt $x \in \partial^s G$ eine Normale auf die Tangentialebene zu legen, die anschaulich ins Äußere, also nach $\mathcal{C}l(G)^c$ zeigt. Das geht sicher nicht immer, wie man anhand des folgenden Beispiels erkennt.

13.7.3 Beispiel. Für die offenen Einheitskreis im \mathbb{R}^2 ohne die x - Achse, also

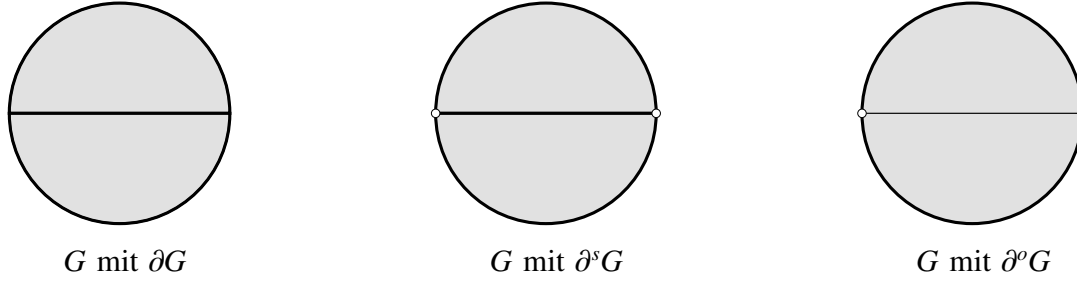
$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1, x_2 \neq 0\},$$

identifiziert man unschwer $\partial G = \{x : \|x\|_2 = 1\} \cup \{x : x_2 = 0, -1 \leq x_1 \leq 1\}$ als topologischen Rand. Zudem gilt $\partial^s G = \{x : \|x\|_2 = 1, x_2 \neq 0\} \dot{\cup} \{x : x_2 = 0, -1 < x_1 < 1\}$, wobei sich nur durch die Punkte von $\{x : \|x\|_2 = 1, x_2 \neq 0\}$ eine Normale, die ins Äußere zeigt, legen lässt. Letztere Menge werden wir in Definition 13.7.6 als $\partial^o G$ bezeichnen.

Um zu erkennen, wann man durch $x \in \partial^s G$ eine Normale auf die Tangentialebene legen kann, die ins Äußere zeigt, sei wieder $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ eine Karte von $\partial^s G$ mit $x \in \partial^s G \cap U_\varphi$, wobei wir nach einer etwaigen Verkleinerung von U_φ annehmen können, dass $\partial^s G \cap U_\varphi = \partial G \cap U_\varphi$; vgl. Bemerkung 13.7.2. Dann gilt

$$\varphi(x) \in \varphi(\partial^s G \cap U_\varphi) = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}).$$

¹⁰Der Buchstabe s in ∂^s steht für das englische Wort 'smooth'.

Abbildung 13.5: Die Menge G mit den unterschiedlichen Rändern

Indem wir etwa von D_φ zu $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x))$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$ übergehen, und $\varphi^{-1}(U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(\varphi(x)))$ anstatt U_φ betrachten, können wir annehmen, dass

$$D_\varphi^+ := D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times (0, +\infty)) \quad \text{sowie} \quad D_\varphi^- := D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times (-\infty, 0)) \quad (13.28)$$

zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R}^p sind. In der Tat sind konvexe Teilmengen von \mathbb{R}^p nach Korollar 12.9.9 und Proposition 12.9.7 zusammenhängend. Als stetiges Bild zusammenhängender Mengen sind auch

$$U_\varphi^+ := \varphi^{-1}(D_\varphi^+) \quad \text{und} \quad U_\varphi^- := \varphi^{-1}(D_\varphi^-) \quad (13.29)$$

zusammenhängend, wobei

$$U_\varphi = U_\varphi^- \dot{\cup} (\partial G \cap U_\varphi) \dot{\cup} U_\varphi^+. \quad (13.30)$$

13.7.4 Lemma. Für ein offenes $G \subseteq \mathbb{R}^p$ sei $x \in \partial^s G$, und sei $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ eine Karte von $\partial^s G$ mit $x \in \partial^s G \cap U_\varphi$ derart, dass $\partial^s G \cap U_\varphi = \partial G \cap U_\varphi$ und dass D_φ^\pm zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R}^p sind. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen

- (i) $U_\varphi \cap G = U_\varphi^+ \cup U_\varphi^-$ und $U_\varphi \cap \text{cl}(G)^c = \emptyset$,
- (ii) $U_\varphi \cap G = U_\varphi^+$ und $U_\varphi \cap \text{cl}(G)^c = U_\varphi^-$,
- (iii) $U_\varphi \cap G = U_\varphi^-$ und $U_\varphi \cap \text{cl}(G)^c = U_\varphi^+$.

Ersetzt man φ durch die Karte $S \circ \varphi : U_\varphi \rightarrow S(D_\varphi)$, wobei $S \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ durch $S(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p)^T = (x_1, \dots, x_{p-1}, -x_p)^T$ definiert ist, dann tritt für $S \circ \varphi$ Fall (iii) ((ii), (i)) ein, wenn für φ der Fall (ii) ((iii), (i)) zutrifft.

Beweis. Als disjunkte und offene Mengen sind G und $\text{cl}(G)^c$ getrennt; siehe Definition 6.2.2. Außerdem gilt

$$\partial G \cap U_\varphi^+ = \partial^s G \cap U_\varphi \cap U_\varphi^+ = \varphi(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times \{0\}) \cap D_\varphi \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times (0, +\infty))) = \emptyset.$$

Entsprechend sehen wir $\partial G \cap U_\varphi^- = \emptyset$. Offenbar gilt

$$U_\varphi^\pm = (U_\varphi^\pm \cap G) \dot{\cup} (U_\varphi^\pm \cap \text{cl}(G)^c).$$

Also ist die zusammenhängende Menge U_φ^\pm Vereinigung getrennter Mengen, wodurch wir auf $U_\varphi^+ \subseteq G$ oder $U_\varphi^+ \subseteq \text{cl}(G)^c$ und auch auf $U_\varphi^- \subseteq G$ oder $U_\varphi^- \subseteq \text{cl}(G)^c$ schließen.

Im Falle $U_\varphi^+ \subseteq G$, $U_\varphi^- \subseteq G$ erhalten wir wegen (13.30) genau (i). Ähnlich erhalten wir im Falle $U_\varphi^+ \subseteq G$, $U_\varphi^- \subseteq \text{cl}(G)^c$ genau (ii) und im Falle $U_\varphi^+ \subseteq \text{cl}(G)^c$, $U_\varphi^- \subseteq G$ genau (iii). Im Falle $U_\varphi^+ \subseteq \text{cl}(G)^c$, $U_\varphi^- \subseteq \text{cl}(G)^c$ erhalten wir

$$U_\varphi = U_\varphi^+ \cup (U_\varphi \cap \partial^s G) \cup U_\varphi^- \subseteq \partial G \cup \text{cl}(G)^c = G^c,$$

was aber im Widerspruch zu $x \in \partial G \subseteq \text{cl}(G)$ steht.

Wegen $U_{S \circ \varphi} = U_\varphi$ und $U_{S \circ \varphi}^\pm = U_\varphi^\mp$ ist die letzte Aussage klar. \square

13.7.5 Korollar. *Treten in Lemma 13.7.4 die Fälle (ii) oder (iii) ein, so gilt für alle $y \in \partial^s G \cap U_\varphi$*

$$V \setminus \partial G \neq V \cap G \quad \text{für alle in } \mathbb{R}^p \text{ offenen Umgebungen } V \text{ von } y. \quad (13.31)$$

Gilt umgekehrt (13.31) für nur ein $y \in \partial^s G \cap U_\varphi$, so muss Fall (ii) oder (iii) eintreten.

Beweis. Angenommen, es gilt (ii) in Lemma 13.7.4. Ist V eine beliebige offene Umgebung von irgendeinem $y \in \partial^s G \cap U_\varphi = \partial G \cap U_\varphi$, so bildet $\varphi(V \cap U_\varphi)$ eine offene Umgebung von $\binom{t}{0} := \varphi(y)$ und enthält damit Punkte $\binom{t}{\xi} \in D_\varphi^-$, woraus

$$\varphi^{-1}\left(\binom{t}{\xi}\right) \in V \cap U_\varphi^- \subseteq V \setminus \partial G$$

folgt. Der Punkt $\varphi^{-1}\left(\binom{t}{\xi}\right)$ liegt aber sicher nicht in G , da er sonst voraussetzungsgemäß auch in $U_\varphi^+ = G \cap U_\varphi$ wäre. Also gilt $V \setminus \partial G \neq V \cap G$. Im Fall (iii) von Lemma 13.7.4 zeigt man entsprechend $V \setminus \partial G \neq V \cap G$.

Gilt umgekehrt $V \setminus \partial G \neq V \cap G$ für alle offenen Umgebungen von einem einzigen $y \in \partial^s G \cap U_\varphi$, so kann nicht Fall (i) von Lemma 13.7.4 eintreten, da im Fall (i) für die offene Umgebung $V = U_\varphi$ von y nämlich $V \setminus \partial G = U_\varphi \setminus \partial G = U_\varphi \cap G = V \cap G$ zutrifft. \square

13.7.6 Definition. Wir sagen, dass G bei einem Punkt $y \in \partial^s G$ auf einer Seite von G liegt, falls (13.31) gilt. Die Menge $\partial^o G$ aller solchen $y \in \partial^s G$ bezeichnen wir als *orientierbaren Rand* von G .

13.7.7 Bemerkung. Aus Korollar 13.7.5 erkennt man, dass x genau dann auf einer Seite von G liegt, wenn Punkt (ii) oder (iii) in Lemma 13.7.4 zutrifft. Daraus und aus Korollar 13.7.5 wiederum folgt, dass mit x auch die ganze Menge $\partial^s G \cap U_\varphi$ in $\partial^o G$ enthalten ist. Also ist die Menge $\partial^o G$ eine in $\partial^s G$ bezüglich der Spurtopologie offene Teilmenge und infolge eine $(p-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; vgl. Fakta 13.5.14, 5.

Genauso sieht man, dass $\partial^s G \setminus \partial^o G$, also die Menge aller $x \in \partial^s G$, die nicht auf einer Seite von G liegen, offen in $\partial^s G$ bezüglich der Spurtopologie ist.

13.7.8 Definition. Für $x \in \partial^o G$ sagen wir, dass $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ bei x ins Äußere (Innere) zeigt, wenn $x + \xi u \in \text{cl}(G)^c$ ($x + \xi u \in G$) für alle hinreichend kleinen $\xi > 0$.

Falls v einer der beiden Normalvektoren auf den Tangentialraum T_y von $\partial^o G$ in x ist und v bei x ins äußere zeigt, so nennen wir v *äußere Normale* auf T_x .

Mit den Voraussetzungen von Lemma 13.7.4 betrachten wir $y \in \partial^\circ G \cap U_\varphi$ und für $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ sowie $\rho > 0$ mit $y + (-\rho, +\rho)u \subseteq U_\varphi$ die Abbildung

$$g : (-\rho, +\rho) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\xi) := e_p^T \varphi(y + \xi u).$$

Nach (13.28) und (13.29) gilt $y + \xi u \in U_\varphi^\pm$ genau dann, wenn $\pm g(\xi) > 0$. Weiters ist g stetig differenzierbar, wobei $g'(\xi) = e_p^T d\varphi(y + \xi u)u$. Mit (13.25) erkennen wir

$$g'(0) = e_p^T d\varphi(y)u = \|(e_p^T d\varphi(y))\|_2 v_\varphi(y)^T u.$$

Aus $\pm g'(0) > 0$ folgt wegen $g(0) = 0$ auch $\pm g(\xi) > 0$, also $y + \xi u \in U_\varphi^\pm$ für hinreichend kleine $0 < \xi < \rho$. Somit haben wir folgendes Korollar von Lemma 13.7.4 bewiesen.

13.7.9 Korollar. *Mit den Voraussetzungen von Lemma 13.7.4 sei $y \in \partial^\circ G \cap U_\varphi$ und $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. Je nach dem in Lemma 13.7.4 eintretenden Fall (ii) oder (iii) gilt für $\xi \in \mathbb{R}$ mit hinreichend kleinem $\xi > 0$ erhalten wir folgende Aussage:*

- (ii) *Gilt $v_\varphi(y)^T u > 0$, so zeigt u bei y ins Innere.
Gilt $v_\varphi(y)^T u < 0$, so zeigt u bei y ins Äußere.*
- (iii) *Gilt $v_\varphi(y)^T u < 0$, so zeigt u bei y ins Innere.
Gilt $v_\varphi(y)^T u > 0$, so zeigt u bei y ins Äußere.*

Setzen wir $v(y) := -v_\varphi(y)$ im Fall (ii) und $v(y) := v_\varphi(y)$ im Fall (iii), so gilt

$$y - \xi v(y) \in G \quad \text{und} \quad y + \xi v(y) \in \text{cl}(G)^c$$

für alle hinreichend kleinen $\xi > 0$, womit in jedem Fall $v(y)$ äußere Normale auf T_y und $-v(y)$ keine äußere Normale auf T_y ist.

13.7.10 Bemerkung. Die Abbildung $y \mapsto v(y)$ von $\partial^\circ G$ nach \mathbb{R}^p ist auf jeder Menge der Form $U_\varphi \cap \partial^\circ G$ stetig. Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt die Stetigkeit von $y \mapsto v(y)$ auf ganz $\partial^\circ G$. Insbesondere hat die Mannigfaltigkeit $\partial^\circ G$ eine stetige Normalenfunktion.

13.7.11 Beispiel. Wir betrachten die Kugeloberfläche S^2 im \mathbb{R}^3 als Rand ∂G der offenen Kugel $G = U_1^{\|\cdot\|_2}(0)$ um den Ursprung mit dem Radius eins. Klarerweise ist der ganze Rand von G eine Mannigfaltigkeit, also $\partial^s G = S^2$; siehe Beispiel 13.5.6. Man erkennt auch unschwer, dass G bei allen $x \in \partial^s G$ auf einer Seite von ∂G liegt, also $\partial^\circ G = S^2$ gilt.

Die Tangentialebene T_x an einen Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \partial G$ wird dabei durch die Gleichung $T_x = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = 0\}$ beschrieben und die äußere Normale auf T_x ist $v(x) = x$.

13.7.12 Beispiel. Für den offenen Würfel

$$G = (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

erkennt man leicht, dass $\text{cl}(G) = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Somit ist ∂G die Vereinigung der sechs Seitenflächen

$S_{x,\pm} = \{\pm 1\} \times (-1, 1) \times (-1, 1)$, $S_{y,\pm} = (-1, 1) \times \{\pm 1\} \times (-1, 1)$, $S_{z,\pm} = (-1, 1) \times (-1, 1) \times \{\pm 1\}$,
und der zwölf Kanten

$$\{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times [-1, 1], \{\pm 1\} \times [-1, 1] \times \{\pm 1\}, [-1, 1] \times \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}.$$

Wir wollen

$$\partial^s G = S_{x,+} \cup S_{x,-} \cup S_{y,+} \cup S_{y,-} \cup S_{z,+} \cup S_{z,-} \quad (13.32)$$

exakt nachprüfen. Zunächst sind die Seitenflächen als bezüglich der Spurtopologie offene Teilmengen von affinen Ebenen selbst 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Jeder Punkt $(1, b, c)^T$ aus $S_{x,+}$ liegt wegen

$$\partial G \cap U_\epsilon((1, b, c)^T) = S_{x,+} \cap U_\epsilon((1, b, c)^T)$$

mit $0 < \epsilon < \min(1 - |b|, 1 - |c|)$ in $\partial^s G$. Entsprechend zeigt man $S_{x,-}, S_{y,\pm}, S_{z,\pm} \subseteq \partial^s G$.

Da $S_{x,+}$ in der affinen Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 1 = 0\}$ enthalten ist, sind $\pm(1, 0, 0)$ die Normalen auf den Tangentialraum von $S_{x,+}$ in jedem Punkt $(1, b, c)^T \in S_{x,+}$. Die Normalen durch jeden Punkt von $S_{x,-}$ auf die Tangentialebenen sind auch $\pm(1, 0, 0)$. Entsprechend sind $\pm(0, 1, 0)$ ($\pm(0, 0, 1)$) die Normalen auf den Tangentialraum von $S_{y,\pm}$ ($S_{z,\pm}$) in jedem Punkt $(a, \pm 1, c)^T \in S_{y,\pm}$ ($(a, b, \pm 1)^T \in S_{z,\pm}$).

Im Falle $S_{x,+} \cup S_{x,-} \cup S_{y,+} \cup S_{y,-} \cup S_{z,+} \cup S_{z,-} \subsetneq \partial^s G$ würde es einen Punkt y aus $\partial^s G$ geben, der nicht in einer dieser sechs Seitenflächen enthalten ist, also etwa $y = (1, 1, c)^T \in \{1\} \times \{1\} \times [-1, 1]$. Nach Korollar 13.6.4 gäbe es eine Umgebung $U(1, 1, c)^T$ und eine stetige Normalenfunktion

$$U(1, 1, c)^T \cap \partial^o G \ni x \mapsto v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))^T.$$

Da beliebig nahe bei $(1, 1, c)^T$ Punkte aus $S_{x,+}$ liegen, gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $S_{x,+} \cap U(1, 1, c)^T$, welche gegen $(1, 1, c)^T$ konvergiert. Also folgte

$$v(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v((1, 1, c)^T).$$

Von unserer Diskussion weiter oben wissen wir $0 = v_2(x_n) = v_3(x_n)$, womit $0 = v_2((1, 1, c)^T) = v_3((1, 1, c)^T)$. Andererseits gibt es beliebig nahe bei $(1, 1, c)^T$ Punkte x aus $S_{y,+}$, und wir erhielten auf analoge Weise $0 = v_1((1, 1, c)^T) = v_3((1, 1, c)^T)$. Da ein Normalenvektor immer Länge eins hat, kommen wir zu einem Widerspruch, und $(1, 1, c)^T$ kann nicht in $\partial^s G$ liegen. Wir haben also (13.32) nachgewiesen.

Ist nun wieder $(1, b, c)^T \in S_{x,+}$, so folgt für alle $\eta \in (0, 1]$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \eta \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{cl}(G)^c \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \eta \\ b \\ c \end{pmatrix} \in G.$$

Infolge ist die Bedingung aus Definition 13.7.6 erfüllt sein, und $(1, b, c)^T$ liegt auf einer Seite von ∂G . Argumentieren wir entsprechend für die anderen Seitenflächen, so erkennen wir schließlich $\partial^o G = \partial^s G$.

13.8 Abstrakte Mannigfaltigkeiten*

Wir haben Mannigfaltigkeiten als Teilmengen eines euklidischen Raumes \mathbb{R}^p eingeführt. Für tiefere Betrachtungen reicht das nicht aus. Wir werden hier einen kurzen Einblick in die weitreichende Theorie abstrakter Mannigfaltigkeiten geben. Für eine umfassendere Abhandlung siehe etwa [C] oder [J].

13.8.1 Definition.

- Sei M ein topologischer Raum und $d \in \mathbb{N}$. Eine bijektive Abbildung $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ heißt *Karte* auf M mit Werten in \mathbb{R}^d , falls $\emptyset \neq U_\varphi \subseteq M$ und $\emptyset \neq D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^d$ offen sind und φ einen Homöomorphismus abgibt, wobei U_φ und D_φ mit der jeweiligen Spurtopologie versehen sind.
- Für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ und ein $d \in \mathbb{N}$ ist ein d -dimensionaler C^r -Atlas auf M eine Menge \mathcal{A} von Karten $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ auf M mit Werten in \mathbb{R}^d derart, dass die Definitionsbereiche der Karten ganz M überdecken, also

$$M = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi,$$

und dass für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \underbrace{\varphi(U_\varphi \cap U_\psi)}_{\subseteq D_\varphi \subseteq \mathbb{R}^d} \rightarrow \underbrace{\psi(U_\varphi \cap U_\psi)}_{\subseteq D_\psi \subseteq \mathbb{R}^d} \quad (13.33)$$

eine C^r -Abbildung¹¹ ist.

- Ist \mathcal{A} ein d -dimensionaler C^r -Atlas auf M und ist φ eine d -dimensionale Karte, so nennen wir φ mit \mathcal{A} *verträglich*, wenn auch $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ ein C^r -Atlas auf M ist. Einen zweiten Atlas \mathcal{A}' auf M nennen wir *äquivalent* zu \mathcal{A} , wenn auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ einen C^r -Atlas abgibt.
- Ist M ein topologischer Raum, der das Hausdorffsche Trennungsaxiom und das zweite Abzählbarkeitsaxiom¹² erfüllt, gilt $r \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $d \in \mathbb{N}$ und ist \mathcal{A} ein d -dimensionaler C^r -Atlas auf M , so nennt man das Paar (M, \mathcal{A}) eine d -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit.

Wenn klar ist, mit welchem Atlas \mathcal{A} der Raum M versehen ist, dann spricht man meist nur von der C^r -Mannigfaltigkeit M . Unter einer Karte auf M versteht man dabei eine mit \mathcal{A} verträgliche Karte.

13.8.2 Bemerkung. Da man in (13.33) die Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ vertauschen kann, bedeutet diese Forderung, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ im Fall $r = 0$ ein Homöomorphismus und im Fall $r > 0$ ein r -mal stetig differenzierbarer Diffeomorphismus ist.

¹¹Für $r = 0$ bedeutet C^r -Abbildung, dass die betroffene Funktion stetig ist.

¹²Es gibt also eine abzählbare topologische Basis; siehe Definition 12.5.2.

13.8.3 Bemerkung. Ist (M, \mathcal{A}) eine C^r -Mannigfaltigkeit, so bildet die Menge \mathcal{B} aller mit \mathcal{A} verträglichen Karten wieder einen C^r -Atlas; siehe Übungsaufgabe 13.39. Offenbar $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt. Für fast alle Ergebnisse im Zusammenhang mit Mannigfaltigkeiten, insbesondere für alle folgenden Aussagen, könne wir (M, \mathcal{A}) durch (M, \mathcal{B}) ersetzen, und damit annehmen, dass der gegebene Atlas auf M schon alle mit ihm verträglichen Karten enthält.

13.8.4 Beispiel.

- (i) Für $M = \mathbb{R}^d$ ist $\text{id}_{\mathbb{R}^d} : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ offensichtlich eine Karte und $\mathcal{A} = \{\text{id}_{\mathbb{R}^d}\}$ ist ein d -dimensionaler C^∞ -Atlas. Also ist (M, \mathcal{A}) eine d -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit.
- (ii) Nimmt man $M = \mathbb{R}^d$ und irgendeinen Homöomorphismus $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, der nicht differenzierbar ist, so ist auch $(M, \{\phi\})$ eine d -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit, da Bedingung (13.33) trivialerweise erfüllt ist. Nun ist aber die Karte $\text{id}_{\mathbb{R}^d}$ nicht verträglich mit dem Atlas $\{\phi\}$. Also sind die Atlanten $\{\phi\}$ und $\{\text{id}_{\mathbb{R}^d}\}$ nicht äquivalent.
- (iii) Für einen d -dimensionalen affinen Teilraum M von \mathbb{R}^p und eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ der Bauart $x \mapsto y + Ax$ mit einer injektiven linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$ und einem festen $y \in M$ ist $\mathcal{A} = \{f^{-1}\}$ ein d -dimensionaler C^∞ -Atlas.
- (iv) Ist allgemeiner $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine injektive und stetige Abbildung von einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ nach \mathbb{R}^p derart, dass $f^{-1} : f(D) (\subseteq \mathbb{R}^p) \rightarrow D$ ebenfalls stetig ist, so bildet $M = f(D)$ versehen mit dem Atlas $\{f^{-1}\}$ eine d -dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Als Beispiel für eine derartige Mannigfaltigkeit betrachte $D = (-1, 1) \times (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $M = f(D) \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei

$$f \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv. Sie ist stetig, da alle Komponentenfunktionen stetig sind. schließen ist $f^{-1} : M \rightarrow D$ nichts anderes als die Projektion auf die ersten beiden Koordinaten und somit auch stetig.

13.8.5 Definition. Sei (M, \mathcal{A}) eine d -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $k \in \{1, \dots, d\}$. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt k -dimensionale *Untermannigfaltigkeit* oder *Teilmannigfaltigkeit* von M , falls es zu jedem $x \in N$ eine mit \mathcal{A} verträgliche Karte φ auf M mit $x \in U_\varphi$ derart gibt, dass $D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varphi(N \cap U_\varphi)$.

13.8.6 Fakta.

1. Die in Definition 13.5.1 eingeführten Mannigfaltigkeiten identifizieren wir als Untermannigfaltigkeiten der C^1 -Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^p, \{\text{id}_{\mathbb{R}^p}\})$.
2. Man sieht unschwer, dass Teilmannigfaltigkeiten N der Dimension $k = d$ genau die offenen Teilmengen von M sind; siehe Übungsaufgabe 13.40.

3. Nimmt man zwei Karten φ, ψ wie in Definition 13.8.5 mit $N \cap U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$, so gilt $\varphi(N \cap U_\varphi \cap U_\psi) =: C \times \{0\}$ mit einem offenen $C \subseteq \mathbb{R}^k$ und

$$(\pi \circ \psi|_{N \cap U_\varphi \cap U_\psi}) \circ (\pi \circ \varphi|_{N \cap U_\varphi \cap U_\psi})^{-1} = (\pi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \iota)|_C,$$

wobei $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten und $\iota : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Einbettungsabbildung $u \mapsto \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Da wir $(\pi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \iota)|_C$ leicht als C^r -Abbildung identifizieren, folgt, dass N versehen mit der Spurtopologie und mit dem Atlas aller Abbildungen $\varphi_N := \pi \circ \varphi|_{N \cap U_\varphi}$, wobei die φ alle Karten wie in Definition 13.8.5 durchlaufen, eine k -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit bildet.

4. Mit ganz ähnlichen Überlegungen wie in Fakta 13.5.14 überzeugt man sich unschwer davon, dass eine Teilmenge N einer d -dimensionalen C^1 -Mannigfaltigkeit genau dann eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von M ist, wenn $\varphi^{-1}(N)$ für alle Karten φ aus dem auf M gegebenen Atlas eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^d im Sinne von Definition 13.5.1 ist; siehe Übungsaufgabe 13.41.

13.8.7 Lemma. Sei (M_1, \mathcal{A}_1) eine d_1 -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit und (M_2, \mathcal{A}_2) eine d_2 -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit. Versieht man $M := M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie und mit dem Atlas

$$\mathcal{A} := \{\varphi_1 \times \varphi_2 : \varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2\},$$

so ist (M, \mathcal{A}) eine $d_1 + d_2$ -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit, die sogenannte Produktmannigfaltigkeit von M_1 und M_2 . Dabei bezeichnet

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2} (\subseteq M) \rightarrow D_{\varphi_1} \times D_{\varphi_2} (\subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \cong \mathbb{R}^{d_1+d_2})$$

die Abbildung $(x, y) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$.

Beweis. Bekannterweise ist M versehen mit der Produkttopologie Hausdorffsch. Da das mengenweise Produkt zweier topologischer Basen wieder eine solche ist, erfüllt M das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Für $\varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2$ sind zudem $U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2}$ und $D_{\varphi_1} \times D_{\varphi_2}$ offen in M bzw. $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \cong \mathbb{R}^{d_1+d_2}$, und $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2} \rightarrow D_{\varphi_1} \times D_{\varphi_2}$ ist ein Homöomorphismus.

Für $\varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2, \psi_2 \in \mathcal{A}_2$ mit $U_{\varphi_1} \cap U_{\psi_1} \neq \emptyset, U_{\varphi_2} \cap U_{\psi_2} \neq \emptyset$ stellt $(\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}$ eine Abbildung von $(\varphi_1 \times \varphi_2)((U_{\varphi_1} \cap U_{\psi_1}) \times (U_{\varphi_2} \cap U_{\psi_2}))$ auf $(\psi_1 \times \psi_2)((U_{\varphi_1} \cap U_{\psi_1}) \times (U_{\varphi_2} \cap U_{\psi_2}))$ dar und ist wegen

$$(\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \varphi_2^{-1})$$

eine C^r -Abbildung. Schließlich gilt

$$M = M_1 \times M_2 = \left(\bigcup_{\varphi_1 \in \mathcal{A}_1} U_{\varphi_1} \right) \times \left(\bigcup_{\varphi_2 \in \mathcal{A}_2} U_{\varphi_2} \right) = \bigcup_{\varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2} U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2}.$$

□

Wie überall in der Mathematik sind strukturerhaltende Funktionen von besonderem Interesse. Für Mannigfaltigkeiten sind das differenzierbare Abbildungen.

13.8.8 Definition. Für $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) zwei C^r -Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt m -mal stetig differenzierbar mit einem $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m \leq r$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine mit \mathcal{A} verträgliche Karte φ und eine mit \mathcal{B} verträgliche Karte ψ derart gibt, dass $x \in U_\varphi$, $f(x) \in U_\psi$, $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ und dass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : D_\varphi \rightarrow D_\psi$$

m -mal stetig differenzierbar ist. Die Menge aller m -mal stetig differenzierbaren Abbildungen von M nach N bezeichnen wir mit $C^m(M, N)$. Ein bijektives $f : M \rightarrow N$ heißt C^m -Diffeomorphismus, wenn $f \in C^m(M, N)$ und $f^{-1} \in C^m(N, M)$.

13.8.9 Fakta.

1. Seien $f \in C^m(M, N)$ und φ sowie ψ Karten wie in Definition 13.8.8 zu einem gegebenen $x \in M$. Da U_φ offen ist und da

$$f|_{U_\varphi} = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U_\varphi \rightarrow N$$

als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist, folgt die Stetigkeit von f bei x . Da x beliebig war, ist $f : M \rightarrow N$ auf ganz M stetig.

2. Ist $f : M \rightarrow N$ ein C^m -Diffeomorphismus, so ist f wegen des letzten Punktes auch ein Homöomorphismus.
3. Ist $f : M \rightarrow N$ in $C^m(M, N)$, und sind φ_1 bzw. ψ_1 zwei beliebige, mit \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} verträgliche Karten auf M bzw. N derart, dass $f(U_{\varphi_1}) \subseteq U_{\psi_1}$, so ist auch

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : D_{\varphi_1} \rightarrow D_{\psi_1}$$

m -mal stetig differenzierbar. Insbesondere bleibt die m -malige Differenzierbarkeit von f erhalten, wenn man auf M und N jeweils zu äquivalenten Atlanten übergeht.

Um das einzusehen sei $x \in U_{\varphi_1}$, und seien φ und ψ Karten wie in Definition 13.8.8. Also gilt $f(U_\varphi \cap U_{\varphi_1}) \subseteq U_\psi \cap U_{\psi_1}$ und gemäß (13.33) auch

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U_\varphi \cap U_{\varphi_1})} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_\varphi \cap U_{\varphi_1})}$$

wobei $\varphi_1(U_\varphi \cap U_{\varphi_1})$ eine offene, $\varphi_1(x)$ enthaltende Teilmenge von D_{φ_1} bildet. Also ist $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : D_{\varphi_1} \rightarrow D_{\psi_1}$ lokal um jeden Punkt von D_{φ_1} – und daher überall – als Zusammensetzung von C^m -Abbildungen auch m -mal stetig differenzierbar.

4. Für C^r -Mannigfaltigkeiten M und N sowie $m \leq r$ folgert man leicht aus 3 und 1, dass $f : M \rightarrow N$ genau dann m -mal stetig differenzierbar ist, wenn $f : M \rightarrow N$ stetig ist und wenn für alle Karten φ auf M und ψ auf N die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$ im klassischen Sinne m -mal stetig differenzierbar ist; siehe Übungsaufgabe 13.42.

5. Sind die offenen $M \subseteq \mathbb{R}^p$ und $N \subseteq \mathbb{R}^q$ versehen mit den Atlanten $\{\text{id}_M\}$ bzw. $\{\text{id}_N\}$, so liegt ein $f : M \rightarrow N$ genau dann in $C^m(M, N)$, wenn f als Abbildung von M nach \mathbb{R}^q im klassischen Sinne m -mal stetig differenzierbar ist.
6. Jede Karte φ auf einer C^r -Mannigfaltigkeit M ist als Abbildung $\varphi : U_\varphi \rightarrow D_\varphi$ ein C^r -Diffeomorphismus, wobei U_φ für sich eine Mannigfaltigkeit wie in Fakta 13.8.6, 2, ist und D_φ mit dem Atlas $\{\text{id}_{D_\varphi}\}$ versehen ist.
7. Die Hintereinanderausführung von m -mal stetig differenzierbaren Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten ist wieder m -mal stetig differenzierbar. Insbesondere ist die Hintereinanderausführung von C^m -Diffeomorphismen zwischen Mannigfaltigkeiten wieder ein C^m -Diffeomorphismus.

Dazu seien $f : M \rightarrow N$ und $h : N \rightarrow L$ in $C^m(M, N)$ bzw. $C^m(N, L)$. Für $x \in M$ gibt es Karten ψ auf N und ϕ auf L derart, dass $f(x) \in U_\psi$, $h(f(x)) \in U_\phi$, $h(U_\psi) \subseteq U_\phi$ und dass $\phi \circ h \circ \psi^{-1} : D_\psi \rightarrow D_\phi$ m -mal stetig differenzierbar ist.

Für eine Karte φ auf M mit $x \in U_\varphi$ ist wegen der Stetigkeit von f die Menge $U' := f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi$ eine offene Teilmenge von U_φ mit $x \in U'$. Nach Fakta 13.8.6, 2, ist auch $\varphi' := \varphi|_{U'} : U' \rightarrow \varphi(U')$ eine Karte, die zudem $x \in U_{\varphi'} = U'$, $f(U_{\varphi'}) \subseteq U_\psi$ und $h \circ f(U_{\varphi'}) \subseteq h(U_\psi) \subseteq U_\phi$ erfüllt.

Nach 3 ist $\psi \circ f \circ (\varphi')^{-1} : D_{\varphi'} \rightarrow D_\psi$ und daher auch

$$(\phi \circ h \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ (\varphi')^{-1}) = \phi \circ h \circ f \circ (\varphi')^{-1} : D_{\varphi'} \rightarrow D_\phi$$

m -mal stetig differenzierbar.

8. Mit der Notation von Lemma 13.8.7 ist die Projektion $\pi_j : M_1 \times M_2 \rightarrow M_j$ für $j = 1, 2$ eine r -mal stetig differenzierbare Abbildung.

Für eine C^m -Abbildung $f : L \rightarrow M_1 \times M_2$ mit einer C^r -Mannigfaltigkeit L folgt damit aus 7 die m -malige stetige Differenzierbarkeit von $\pi_j \circ f : L \rightarrow M_j$.

Man zeigt unschwer, dass auch die Umkehrung gilt. Also ist $f : L \rightarrow M_1 \times M_2$ genau dann m -mal stetig differenzierbar, wenn beide Abbildungen $\pi_1 \circ f : L \rightarrow M_1$ und $\pi_2 \circ f : L \rightarrow M_2$ es sind; siehe Übungsaufgabe 13.43.

13.9 Übungsaufgaben

- 13.1 Für $\epsilon > 0$, $0 < a \leq 1 - \epsilon$ und $M = [0, 1 - \epsilon]$ zeige man dass die Abbildung $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $T(x) = \frac{a+x^2}{2}$ eine strikte Kontraktion ist, wobei $T(M) \subseteq M$. Was erhält man für eine Aussage mit dem Banachschen Fixpunktsatz angewandt auf diese Abbildung T ?
- 13.2 Zeigen Sie $\cos(1) \geq \frac{1}{2}$ und damit, dass $\cos|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ das Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ in sich hinein abbildet und eine strikte Kontraktion darstellt. Schließlich zeige man, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\cos \circ \dots \circ \cos}_{n \text{ mal}}(\alpha)$ existiert und für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ denselben Grenzwert ergibt.

Hinweis: Für $\cos(1) \geq \frac{1}{2}$ betrachte man die Reihendarstellung von \cos und fasse immer zwei Summanden zusammen.

13.3 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) = x \sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{4} \sin(x)$$

das Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ in sich abbildet, und dass $g : I \rightarrow I$ genau einen Fixpunkt in I hat.

Hinweis: $g(x) - g(y) = \int_y^x g'(t) dt$.

13.4 Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$, $y \in \mathbb{R}^p$ und $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ eine stetige Abbildung mit $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 13.1.2, dass es eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ gibt, so dass $f(a) = y$ und $f'(t) = A(t)f(t)$ für alle $t \in I$.

13.5 Man betrachte die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Psi(b_0, \dots, b_{n-1}, x)^T = b_0 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

Man wende den Hauptsatz über implizite Funktionen an, um folgendes zu zeigen:

Hat das Polynom $a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ genau n verschiedene Nullstellen, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass wenn $|a_0 - b_0| < \delta, \dots, |a_{n-1} - b_{n-1}| < \delta$ das Polynom $b_0 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n$ auch n verschiedene Nullstellen hat, wobei diese Nullstellen stetig differenzierbar von $(b_0, \dots, b_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ abhängen.

13.6 Für $F(x, y, z)^T = x^4 + 2x \cos y + \sin z$ mit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ zeige man mit Hilfe des Hauptsatzes über implizit definierte Funktionen, dass für hinreichend kleines ϵ auf $\{(x, y, z)^T : |x|, |y|, |z| < \epsilon\}$ die Gleichung $F(x, y, z)^T = 0$ nach z aufgelöst werden kann. Man berechne die Lösungsfunktion $z(x, y)^T$ und die Ableitung $dz(x, y)^T$ auf direkte Weise und mit Hilfe des Hauptsatzes.

13.7 Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z)^T = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + z^2 - 5 \\ xy - 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche $(x, y, z)^T$ ist $F(x, y, z)^T = 0$ eindeutig nach (y, z) auflösbar, sind also die dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen entsprechenden Bedingungen erfüllt?

13.8 Mit der Notation aus dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen sei $T : U \rightarrow D$ definiert durch $T(x) = (x, g(x))^T$. Man zeige mithilfe der Kettenregel, dass für jedes $x \in U$ die n Spalten von $dT(x)$ orthogonal auf die m Spalten von $[dF(x, g(x))^T]^T$ stehen und

$$\mathbb{R}^{m+n} = R \oplus N$$

gilt, wobei R die lineare Hülle aller m Spalten von $[dF(x, g(x))^T]^T$ und N die lineare Hülle aller n Spalten von $dT(x)$ ist.

Sei zusätzlich $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $u \in U$ ein lokales Extremum von $h(x) := f(x, g(x))^T$ als Abbildung von U nach \mathbb{R} .

Zeigen Sie ebenfalls mit der Kettenregel, dass dann alle n Spalten von $dT(u)$ orthogonal auf den Vektor $[df(u, g(u))^T]^T \in \mathbb{R}^{m+n}$ stehen und dieser Vektor damit in R liegt, wodurch $[df(u, g(u))^T]^T = [dF(u, g(u))^T]^T (-\mu)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}^m$.

- 13.9 Seien $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit einem offenen $D \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$. Wir setzen $M := \{z \in D : F(z) = 0\}$ und nehmen an, dass $dF(z)$ für alle $z \in M$ vollen Rang hat.

Zeigen Sie mithilfe der vorherigen Aufgabe, dass, wenn $M \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{R}$ bei $w \in M$ ein lokales Extremum hat, es ein $\mu \in \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(w) + \sum_{j=1}^m \mu_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i}(w) = 0, \quad i = 1, \dots, m+n.$$

Anmerkung: Um lokale Extrema von $M \ni z \mapsto f(z) \in \mathbb{R}$ zu finden, sucht man $w \in D$ und $\mu \in \mathbb{R}^m$ derart, dass $F_j(w) = 0$ für $j = 1, \dots, m$ und dass obige Gleichung gilt. Die Menge der Vektoren w aus der Menge aller Lösungen w, μ dieser Gleichungen umfasst die Menge aller lokalen Extrema, muss aber nicht mit dieser übereinstimmen.

Hinweis: Sollte $dF_2(z) (\in \mathbb{R}^{m \times m})$ nicht regulär sein, so betrachte eine geeignete Koordinatentransformation $T : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, sodass die hinteren m Spalten von $dF(z) \circ T$ eine reguläre Matrix ergeben. Für $G := F \circ T$ und $g = f \circ T$ als Abbildung von $T^{-1}(D)$ nach \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{R} gilt dann $dG(T^{-1}(z)) = dF(z)T$, $dg(T^{-1}(z)) = df(z)T$ sowie $T^{-1}(M) = \{y \in T^{-1}(D) : G(y) = 0\}$. Zudem hat $T^{-1}(M) \ni y \mapsto g(y) \in \mathbb{R}$ bei $T^{-1}(w) \in T^{-1}(M)$ ein lokales Extremum. Lässt sich die vorherige Aufgabe auf g und G anwenden?

- 13.10 Zeigen Sie, dass $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ offen ist, wenn $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist.

Hinweis: Wie hängen $f'(z) \in \mathbb{C}$ und $df(z) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zusammen?

- 13.11 Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \eta + \zeta \\ \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta \\ \xi\eta\zeta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f im Sinne des Umkehrsatzes bei $(x, y, z)^T$ genau dann lokal umkehrbar ist, wenn $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$. Geben Sie in dem Fall auch die Ableitung der Umkehrfunktion im Punkt $f(x, y, z)^T$ an!

- 13.12 Man gebe für die folgenden zwei Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jeweils eine möglichst große, offene Teilmenge C von \mathbb{R}^2 derart an, dass $f|_C$ und $g|_C$ einen Diffeomorphismus abgeben. Man gebe zu jedem solchen C auch die Bildmenge D an.

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

Weiters gebe man $df(x)$ und $dg(x)$ sowie $\det df(x)$ und $\det dg(x)$ an.

Hinweis: Um welche bekannte Funktionen handelt es sich bei f und g , wenn man \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} identifiziert?

- 13.13 Für ein offenes $D \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und derart, dass $df(x)$ für alle $x \in D$ injektiv ist. Zeigen Sie, dass es für jedes kompakte $K \subseteq D$ Zahlen $C, \delta \in (0, +\infty)$ derart gibt, dass

$$\|x - y\| \leq C \cdot \|f(x) - f(y)\| \quad \text{für alle } x, y \in K \text{ mit } \|x - y\| < \delta,$$

wobei $\|\cdot\|$ irgendeine der Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ist.

Hinweis: Für $y \in K$ gibt es eine Projektion π auf d der p Koordinaten so, dass nach dem Umkehrsatz $\pi \circ f|_{U_\eta(y)}$ für hinreichend kleines $\eta > 0$ ein Diffeomorphismus ist. Verwenden Sie auch das Resultat am Ende von Abschnitt 10.1 in [K].

- 13.14 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $h : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\}$ stetig. Zeigen Sie, dass es dann eine stetige Abbildung $\phi : I \rightarrow (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ derart gibt, dass $g \circ \phi = h$, wobei g wie in Übungsaufgabe 13.12 ist. Zeigen Sie weiters, dass für jede stetige Funktion $\psi : I \rightarrow (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ mit $g \circ \psi = h$ immer $\phi - \psi \equiv (0, \alpha)^T$ mit einem $\alpha \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$ gilt. Schließlich zeige man, dass für nicht einpunktige I die stetige Differenzierbarkeit von ϕ und h äquivalent sind.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Eindeutigkeitsaussage. Für die Existenz von ϕ betrachten Sie mit festem $c \in I$ die Menge A aller $t \in I$, für die es ein stetiges $\chi : [\min(c, t), \max(c, t)] \rightarrow (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ mit $g \circ \chi = h|_{[\min(c, t), \max(c, t)]}$ gibt. Zeigen Sie mit Hilfe des Umkehrsatzes angewandt auf g und der schon abgehandelten Eindeutigkeit, dass A offen und abgeschlossen in I und daher gleich I ist.

- 13.15 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Affensattel, also die Menge aller $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit

$$3z + 3xy^2 - x^3 = 0.$$

Zeigen Sie, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, und bestimmen Sie ihre Dimension!

- 13.16 Sei M eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p , und sei $O \subseteq M$ offen bezüglich der Spurtopologie. Man zeige, dass O ebenfalls eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p ist.

Weiters zeige man, dass $M \subseteq \mathbb{R}^p$ genau dann eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn es für jedes $x \in M$ eine bezüglich der Spurtopologie offenes $O \subseteq M$ mit $x \in O$ derart gibt, dass O eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p ist.

- 13.17 Ist $T : O \rightarrow P$ ein Diffeomorphismus mit offenen Teilmengen $O, P \subseteq \mathbb{R}^p$ und ist M eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p mit $M \cap O \neq \emptyset$, so zeige man, dass auch $T(M \cap O)$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p ist.

- 13.18 Ist $M_i, i \in I$, eine Familie von d -dimensionalen Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^p derart, dass für jedes $j \in I, M_j \cap \text{cl}(\bigcup_{i \neq j} M_i) = \emptyset$, so zeige man, dass auch $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine Mannigfaltigkeit von Dimension d ist.

Schließlich gebe man ein Beispiel im Fall $d = 1, p = 2$ und $I = \{1, 2\}$ an, das zeigt, dass der Abschluss in obiger Voraussetzung notwendig ist. Man finde also zwei 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 im \mathbb{R}^2 , die nur $\text{cl}(M_1) \cap M_2 = \emptyset$ erfüllen, aber derart sind, dass $M_1 \cup M_2$ keine Mannigfaltigkeit abgibt.

- 13.19 Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^p$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn $M \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{p+n}$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

- 13.20 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^p$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\emptyset \neq N \subseteq M$. Zeigen Sie, dass wenn N eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p ist, es zu jedem $x \in N$ eine Karte φ der Menge M gibt, die auch eine Karte der Menge N ist.

13.21 Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ aller reellen 2×2 -Matrizen, der vermöge der Abbildung

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

mit dem \mathbb{R}^4 identifiziert werden kann. Zeigen Sie, dass dann

$$O(2) = \left\{ T \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : T \text{ ist eine orthogonale Matrix} \right\}$$

als Teilmenge von \mathbb{R}^4 eine Mannigfaltigkeit abgibt. Bestimmen Sie die Dimension von $O(2)$!

13.22 Mit der Notation aus dem letzten Beispiel gebe man irgendeine Einbettung nach $O(2)$ hinein an, die $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in ihrem Bild hat. Schließlich gebe an, ob $O(2)$ eine zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^4 ist.

Hinweis: Für das zweite Problem betrachten sie $\det : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche Werte kann \det auf $O(2)$ annehmen?

13.23 Sei $f(x, y)^T = \sqrt{y-x}$ definiert auf $\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ und setze

$$M = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Bestimmen Sie den Tangentialraum und die beiden Normalvektoren an den Punkten $(x, y, z)^T = (2, 6, f(2, 6)^T)^T$, $(x, y, z)^T = (-2, 0, f(-2, 0)^T)^T$ sowie $(x, y, z)^T = (-\frac{1}{2}, 1, f(-\frac{1}{2}, 1)^T)^T$ aus M . Fertigen Sie auch eine Skizze an!

13.24 Für $d \leq p$ und ein offenes $O \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $T : O \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine injektive und stetig differenzierbare Abbildung derart, dass $dT(x)$ immer vollen Rang hat. Man zeige für ein offenes $\emptyset \neq G \subseteq O$ mit $\mathcal{C}l(G) \subseteq O$, dass $M := T(G)$ eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Hinweis: Man zeige zuerst, dass $T : \mathcal{C}l(G) \rightarrow T(\mathcal{C}l(G))$ ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung: Das Bild $T(O)$ ist im Allgemeinen keine Mannigfaltigkeit. Man denke dazu man an das Aussehen der Ziffer 6 als Teilmenge von \mathbb{R}^2 . Diese kann als Bild eines offenen Intervalls (a, b) unter einer Abbildung T wie oben geschrieben werden.

13.25 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $B : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $B'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Man zeige, dass für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$, für die $M := \{z \in D : \operatorname{Re} B(z) = c\}$ nichtleer ist, M eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ abgibt.

13.26 Seien $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{p_1}$ und $M_2 \subseteq \mathbb{R}^{p_2}$ Mannigfaltigkeiten der Dimension d_1 und d_2 . Man zeige, dass $M_1 \times M_2 \subseteq \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \cong \mathbb{R}^{p_1+p_2}$ eine Mannigfaltigkeiten der Dimension $d_1 + d_2$ ist.

Zeigen Sie weiters, dass wenn M_1 und M_2 implizit definierte Mannigfaltigkeiten sind, dann auch $M_1 \times M_2$ implizit definiert ist.

13.27 Wo besitzt die Funktion $f : (\mathbb{R}_+)^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n)^T = (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$$

ein lokales bzw. globales Extremum unter der Nebenbedingung $x_1 \dots x_n = a^n$ mit einem festen $a > 0$. Man verwende die Lagrangesche Multiplikatorenregel.

- 13.28 Konstruieren Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel einen Kegel mit Höhe h und Grundkreisradius r maximalen Volumens einmal bei vorgegebener Oberfläche ohne Boden und einmal bei vorgegebener Gesamtoberfläche. Geben Sie jeweils das Verhältnis von Höhe zu Grundkreisradius an.

Hinweis: Verwenden Sie die bekannte Formel für die Kegeloberfläche aus der Schule und maximieren Sie das Quadrat des Volumens!

- 13.29 Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel alle Punkte der Fläche im \mathbb{R}^3 , die durch die Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$$

definiert ist, welche vom Ursprung kleinsten Abstand haben.

- 13.30 Sei $K = \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ und $A = \{(\xi, \eta)^T : 2\xi + 3\eta = 10\}$. Man bestimme $x \in K, y \in A$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel (!!) so, dass $d(x, y) = d(A, K)$. Man zeige auch, dass x normal auf die Gerade A steht.

- 13.31 Seien $a, b, c > 0$ und $K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie das Maximum der Volumina von in K enthaltenen Quadern mit achsenparallelen Kanten.

- 13.32 Seien x_1, \dots, x_n Winkeln mit $x_j \in (0, 2\pi)$, so dass $x_1 + \dots + x_n = 2\pi$. Setzen wir $P_j = \exp(i \sum_{l=1}^{j-1} x_l)$, $j = 1, \dots, n$, so stellt $\overrightarrow{P_1 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_{n-1} P_n}, \overrightarrow{P_n P_1}$ ein n -Eck in $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dar.

Man bestimme die Winkel x_j derart, dass der Flächeninhalt dieses n -Eckes maximal ist. Man verwende dabei die Lagrangesche Multiplikatorenregel.

- 13.33 Weisen Sie nach, dass für ein offenes $O \subseteq \mathbb{R}^p$ die Menge $\partial^s O$ tatsächlich eine $p - 1$ dimensionale Mannigfaltigkeit ist, falls $\partial^s O \neq \emptyset$.

- 13.34 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ der Schnitt der beiden Zylinder $Z_1 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $Z_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 1\}$. Bestimmen Sie den Rand ∂G , $\partial^s G$ und $\partial^o G$! Skizze!

- 13.35 Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $F : O \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $dF(x) \neq 0$ für alle $x \in M := \{y \in O : F(y) = 0\}$.

Gibt es auf M eine überall definierte, stetige Normalenfunktion? Zeigen Sie anschließend, dass $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ offene Teilmengen von \mathbb{R}^p sind.

Zeigen Sie weiters, dass es für $x \in M$ beliebig nahe an x Punkte aus $G := \{x \in O : F(x) > 0\}$ und Punkte aus $H := \{x \in O : F(x) < 0\}$ gibt, also dass x im Abschluss von G und von H ist.

Schließlich zeige man, dass $\partial G \cap O = M$ und $\partial^s G \cap O = \partial^o G \cap O = M$.

Hinweis: Was würde etwa aus $U_\epsilon^{\mathbb{R}^p}(x) \subseteq \{x \in O : F(x) \leq 0\}$ mit $F(x) = 0$ für $dF(x)$ folgen?

- 13.36 Sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge

$$\left((U_2^{\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2}(0) \cap \{(x, y, z)^T : z \geq 0\}) \cup \{(x, y, z-2)^T : z^2 > x^2 + y^2, z \in (0, 2)\} \right) \setminus K_1^{\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2}(0).$$

Fertigen Sie zunächst eine Skizze an! Zeigen Sie dann, dass O offen ist, und bestimmen Sie den topologischen Rand $\partial O = \text{cl}(O) \setminus O^\circ$ sowie $\partial^s O$ und $\partial^o O$.

Schließlich bestimme man die Normalen von M an den Punkten $(1, 1, \sqrt{2})^T$, $(1, 1, -\sqrt{2})^T$ und $\frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})^T$ sowie an allen $(x, y, z)^T \in M$ mit $z = -1$.

- 13.37 Sei M eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p . Zeigen Sie, dass M genau dann zusammenhängend ist, wenn es zu allen $x, y \in M$ ein Intervall $[a, b]$ und eine stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow M$ gibt mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$.

Hinweis: Wenn M zusammenhängend ist, so betrachte für festes $x \in M$ die Menge A aller $y \in M$, so dass $f(a) = x$ und $f(b) = y$ mit einer stetigen Abbildung $f : [a, b] \rightarrow M$, und die Menge $B = M \setminus A$.

- 13.38 Betrachte die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\phi((t, \alpha)^T) := \left((1 + t \cos \frac{\alpha}{2}) \cos \alpha, (1 + t \cos \frac{\alpha}{2}) \sin \alpha, t \sin \frac{\alpha}{2} \right)^T,$$

und setze $M := \phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für jedes Intervall (a, b) mit $b - a \leq 2\pi$ die Einschränkung $\phi|_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b)}$ eine Einbettung in M abgibt, und dass die Menge M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, welche man *Möbiusband* nennt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $M = \phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi]) \setminus \phi(\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times [0, 2\pi])$ offen in $\phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi])$ ist. Anschließend weise man nach, dass für $|b - a| < 2\pi$ die Abbildung $\phi : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b] \rightarrow \phi([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [a, b])$ ein Homöomorphismus ist, und damit dann dass auch $\phi : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b) \rightarrow \phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b))$ ein Homöomorphismus mit einer in M offenen Menge $\phi((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (a, b))$ ist.

- 13.39 Sei (M, \mathcal{A}) eine C^r -Mannigfaltigkeit wie in Definition 13.8.1. Zeigen Sie, dass die Menge \mathcal{B} aller mit \mathcal{A} verträglichen Karten einen C^r -Atlas bildet.
- 13.40 Zeigen Sie, dass die Teilmannigfaltigkeiten N der Dimension $k = d$ einer d -dimensionalen Mannigfaltigkeit M genau die offenen Teilmengen von M sind.
- 13.41 Zeigen Sie, dass eine Teilmenge N einer d -dimensionalen C^1 -Mannigfaltigkeit genau dann eine k -dimensionale Teilmannigfaltigkeit von M ist, wenn $\varphi^{-1}(N)$ für alle Karten φ aus dem auf M gegebenen Atlas eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^d im Sinne von Definition 13.5.1 ist.
- 13.42 Zeigen Sie für C^r -Mannigfaltigkeiten M und N sowie $m \leq r$, dass $f : M \rightarrow N$ genau dann m -mal stetig differenzierbar ist, wenn $f : M \rightarrow N$ stetig ist und wenn für alle Karten φ auf M und ψ auf N die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$ im klassischen Sinne m -mal stetig differenzierbar ist.
- 13.43 Mit der Notation von Lemma 13.8.7 und mit einer weiteren Mannigfaltigkeit L zeige man, dass $f : L \rightarrow M_1 \times M_2$ genau dann m -mal stetig differenzierbar, wenn beide Abbildungen $\pi_1 \circ f : L \rightarrow M_1$ und $\pi_2 \circ f : L \rightarrow M_2$ es sind. Dabei bezeichnet $\pi_j : M_1 \times M_2 \rightarrow M_j$ für $j = 1, 2$ die Projektion auf die j -te Komponente.

