# Kapitel 12

# Topologische Grundbegriffe

## 12.1 Topologische Grundbegriffe

Wir wollen in diesem und in den nächsten Abschnitten unter anderem die Konvergenztheorie, wie sie für metrische Räume entwickelt wurde, verallgemeinern. Dabei werden wir Räume betrachten, die gerade noch soviel Struktur tragen, dass man von stetigen Funktionen, Grenzwerten, Kompaktheit und so weiter sprechen kann.

**12.1.1 Beispiel.** Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum; vgl. Definition 3.1.1. Weiters sei $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von $X$, wobei eine Teilmenge $O$ von $X$ offen ist, wenn es zu jedem $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass die $\epsilon$-Kugel

$$U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$$

ganz in $O$ enthalten ist; siehe Definition 5.1.4. Die Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die Eigenschaften, dass $\emptyset, X \in \mathcal{O}$, dass für $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ auch $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$, und dass mit $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$, für eine beliebige Indexmenge $I$ auch $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$; siehe Beispiel 5.1.5 und in Proposition 5.1.6.

Diese Eigenschaften bilden den Ausgangspunkt unserer Verallgemeinerung.

**12.1.2 Definition.** Sei $X$ eine nichtleere Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von $X$ heißt *Topologie* auf $X$, wenn $\mathcal{T}$ folgende Eigenschaften hat.

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Aus $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

(O3) Aus $O_i \in \mathcal{T}, i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge $I$ folgt $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet man als *topologischen Raum*.

**12.1.3 Bemerkung.** Mittels Vollständiger Induktion sieht man sofort, dass (O2) äquivalent ist zu der Tatsache, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ auch $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$ gilt.

**12.1.4 Beispiel.**

(i) Wir haben in Beispiel 12.1.1 daran erinnert, dass die Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Teilmengen eines metrischen Raumes $\langle X, d\rangle$ die Axiome (O1)-(O3) erfüllt. Damit ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Man sagt, $\mathcal{O}$ ist die *von der Metrik $d$ induzierte Topologie* und schreibt meist $\mathcal{T}(d)$ für $\mathcal{O}$.

(ii) Sei $\mathbb{R}^p$ versehen mit der Euklidischen Metrik $d_2$; siehe Beispiel 3.1.3. Die Topologie $\mathcal{T}(d_2)$ auf $\mathbb{R}^p$ bezeichnen wir auch mit $\mathcal{T}^p$ und sprechen von der *Euklidischen Topologie*.

(iii) Für ein nichtleeres $M \subseteq \mathbb{R}^p$ ist $d_2|_{M\times M}$ ebenfalls eine Metrik. Die entsprechende Topologie auf $M$ bezeichnen wir als Euklidische Topologie auf $M$.

(iv) Für einer Menge nichtleere Menge $X$ und für das Mengensystem $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ gelten offenbar (O1)-(O3). Man spricht von der *diskreten Topologie*. Diese Topologie wird von der diskreten Metrik induziert; siehe Beispiel 3.1.5.

(v) Auch für $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ sind (O1)-(O3) erfüllt. Man spricht von der *Klumpentopologie*.

(vi) Wie man leicht nachprüft ist $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T}^< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ ebenfalls ein topologischer Raum.

(vii) Ist eine gegebene Menge $X \neq \emptyset$ mit zwei Metriken $d$ und $\chi$ versehen, die *äquivalent* sind, es also $a, b > 0$ derart gibt, dass für alle $x, y \in X$

$$a\, d(x, y) \leq \chi(x, y) \leq b\, d(x, y)\,, \tag{12.1}$$

so zeigt man unschwer für die entsprechenden offenen Kugeln um ein $x \in X$, dass $U^\chi_{a\epsilon}(x) \subseteq U^d_\epsilon(x)$ und $U^d_\epsilon(x) \subseteq U^\chi_{b\epsilon}(x)$ für $\epsilon > 0$, woraus man leicht $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\chi)$ ableitet; siehe Übungsaufgabe 5.1 und danach.

(viii) Die Metriken $d_1, d_2, d_\infty$ auf $\mathbb{R}^p$ sind paarweise äquivalent; siehe Beispiel 3.1.3, Beispiel 3.1.5 und (3.10). Nach dem vorherigen Beispiel gilt also $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_\infty) = \mathcal{T}(d_2) = \mathcal{T}^p$ auf $\mathbb{R}^p$. Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^p$ sind offenbar auch $d_1|_{M\times M}, d_2|_{M\times M}, d_\infty|_{M\times M}$ paarweise äquivalent, womit $\mathcal{T}(d_1|_{M\times M}) = \mathcal{T}(d_2|_{M\times M}) = \mathcal{T}(d_\infty|_{M\times M})$ auf $M$ gilt.

(ix) Sei $X$ ein Vektorraum versehen mit zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$. Sind diese gemäß Definition 9.2.1 äquivalent, so sind die jeweils induzierten Metriken $d_1(x, y) = \|x-y\|_1$ und $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$ ebenfalls äquivalent. Infolge stimmen die Topologien, die von den zu $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ gehörigen Metriken erzeugt werden, überein.

Eines unserer Ziele wird es sein, Konvergenz gegen einen Punkt oder Stetigkeit in einem Punkt für topologische Räume zu verallgemeinern. Dazu benötigen wir ein Analogon zum Begriff der $\epsilon$-Kugel.

**12.1.5 Definition.** Für einen topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ und $x \in X$ heißt eine Menge $U \subseteq X$ *Umgebung* von $x$, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ gibt, für die $x \in O \subseteq U$ gilt. Mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnen wir die Menge aller Umgebungen von $x$ und nennen $\mathcal{U}(x)$ den *Umgebungsfilter von x*.

Der Begriff *Filter* ist ein allgemeines mengentheoretisches Konzept.

**12.1.6 Definition.** Für eine nichtleere Menge $M$ heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein *Filter* auf $M$, wenn

(F1) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(F2) $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$,

(F3) $F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1 \in \mathfrak{F}$ und $F_1 \subseteq F_2 \subseteq M$.

**12.1.7 Bemerkung.** Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$, so bildet $\mathcal{U}(x)$ tatsächlich einen Filter auf $X$. In der Tat erfüllt $\mathcal{U}(x)$ das Axiom (F1), da $X \in \mathcal{U}(x)$ und da $x \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Aus $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ folgt die Existenz von $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_1 \subseteq U_1$ und $x \in O_2 \subseteq U_2$. Somit gilt $x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U_1 \cap U_2$, wobei $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$ wegen (O2), und daher $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$; also trifft auch (F2) zu. Schließlich gilt (F3), da aus $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq X$ die Inklusion $x \in O \subseteq U_1$ für ein gewisses $O \in \mathcal{T}$ und somit $x \in O \subseteq U_2$ bzw. $U_2 \in \mathcal{U}(x)$ folgt.

Die passende Verallgemeinerung des Systems aller $\epsilon$-Kugeln um einen festen Punkt in einem metrischen Raum für topologische Räume ist der Begriff der Filterbasis des Umgebungsfilters.

**12.1.8 Definition.** Sei $\mathfrak{F}$ ein Filter auf der Menge $M \neq \emptyset$. Ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ heißt *Filterbasis* von $\mathfrak{F}$, wenn man zu jeder Menge $F \in \mathfrak{F}$ ein $B \in \mathfrak{B}$ findet mit $B \subseteq F$.

**12.1.9 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- Für $x \in X$ nennt man eine Filterbasis $\mathcal{V}(x)$ des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ auch *Umgebungsbasis* von $x$.

- Man sagt, ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* (ABI), wenn es für jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis davon gibt.

**12.1.10 Fakta.**

1. Offenbar ist jeder Filter eine Filterbasis von sich selbst.

2. Ein Blick auf Definition 12.1.5 und einer auf Definition 12.1.8 zeigt, dass für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $x \in X$ das System $\{O \in \mathcal{T} : x \in O\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$ abgibt.

3. Für eine metrischer Raum $\langle X, d\rangle$ und ein $x \in X$ bildet die Menge $\{U_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ aller offenen Kugeln um $x$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$, ist also eine Umgebungsbasis von $x$.

   In der Tat ist $U_\epsilon(x)$ eine Umgebung, weil alle offene $\epsilon$-Kugeln offen sind; vgl. Beispiel 5.1.5, (iii). Andererseits gibt es zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ eine offene Menge $O \in \mathcal{T}(d)$ mit $x \in O \subseteq U$. Gemäß der Definition offener Mengen in metrischen Räumen gilt $U_\epsilon(x) \subseteq O \subseteq U$ für ein gewisses $\epsilon > 0$. Damit ist $\{U_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$.

   Aus $U_\epsilon(x) \subseteq K_\epsilon(x)$ und $K_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \subseteq U_\epsilon(x)$ für $\epsilon > 0$ folgert man unschwer, dass auch $\{K_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von $x$ abgibt.

4. Ähnlich wie in 3 zeigt man, dass für eine Nullfolge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(0, +\infty)$ auch die Mengen $\{U_{\epsilon_n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{K_{\epsilon_n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ Umgebungsbasen von $x$ bilden.

   Insbesondere erfüllt jeder metrische Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom.

**12.1.11 Lemma.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Weiters sei*[1] *$\mathcal{V}(x)$ für jeden Punkt $x \in X$ ein Umgebungsbasis von $x$. Eine Teilmenge $O$ von $X$ ist genau dann offen, wenn $O \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in O$ gilt, was wiederum dazu äquivalent ist, dass es zu jedem $x \in O$ ein $W \in \mathcal{V}(x)$ mit $W \subseteq O$ gibt.*

*Beweis.* Für feste $x \in X$ und $O \subseteq X$ bedeutet die Existenz von $W \in \mathcal{V}(x)$ mit $W \subseteq O$ gemäß Definition 12.1.8 nichts anderes als $O \in \mathcal{U}(x)$. Also sind die beiden letzten Aussagen äquivalent.
Für $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ gilt $O \in \mathcal{U}(x)$ nach Fakta 12.1.10, 2. Umgekehrt folgt aus $O \in \mathcal{U}(x)$ die Existenz eines $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subseteq O$ für alle $x \in O$. Wegen

$$O = \bigcup_{x\in O} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in O} O_x \subseteq O$$

ist damit $O$ Vereinigung offener Mengen und nach (O3) selber offen. ❑

Mit Hilfe des Umgebungsfilters können wir den Grenzwert eines Netzes auch für topologische Räume definieren.

**12.1.12 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $X$ heißt *konvergent* bezüglich $\mathcal{T}$ gegen ein $x \in X$, falls

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists i_0 \in I :\ \forall i \geq i_0 \Rightarrow x_i \in U\,,$$

also falls in jeder beliebigen Umgebung ab einem gewissen Index alle Glieder $x_i$ des Netzes enthalten sind. Für diesen Sachverhalt wollen wir auch $x_i \xrightarrow{i\in I} x$ schreiben.

[1] Es ist nicht ausgeschlossen, dass $\mathcal{V}(x) = \mathcal{U}(x)$; siehe Fakta 12.1.10, 1.

Ist $\mathcal{V}(x)$ eine Umgebungsbasis von $x$, so ist die Konvergenzbedingung aus Definition 12.1.12 äquivalent zu

$$\forall W \in \mathcal{V}(x)\ \exists i_0 \in I :\ \forall i \geq i_0 \Rightarrow x_i \in W\,, \tag{12.2}$$

denn einerseits ist wegen $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ diese Bedingung sicherlich eine Konsequenz von Definition 12.1.12. Gilt andererseits diese Bedingung, so gibt es zu $U \in \mathcal{U}(x)$ und einem dazugehörigen $W \in \mathcal{V}(x)$ mit $W \subseteq U$ ein $i_0 \in I$ so, dass $x_i \in W \subseteq U$ für alle $i \geq i_0$.

**12.1.13 Bemerkung.** Ist $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, so geht die Definition 12.1.12 der Konvergenz eines Netzes in $(X, \mathcal{T}(d))$ mit der Definition 5.3.3 der Konvergenz in $\langle X, d\rangle$ konform. In der Tat gilt $x = \lim_{i\in I} x_i$ in $\langle X, d\rangle$ nach Definition 5.3.3 genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists i_0 \in I : \forall i \geq i_0 \Rightarrow x_i \in U_\epsilon(x)\,.$$

Da $\{U_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ eine Umgebungsbasis von $x$ abgibt, stimmt diese Bedingung mit der aus (12.2) überein.
Wir sehen insbesondere, dass die Konvergenz nicht von der konkreten Metrik, sondern nur von der von ihr erzeugten Topologie abhängt; vgl. Beispiel 12.4.11.

**12.1.14 Beispiel.**

(i) Offenbar konvergieren in jedem topologischen Raum ab einem Index konstante Netze $(x_i)_{i\in I}$, also $x_i = x$ für alle $i \in I$ mit $i \geq i_0$, gegen $x$.

(ii) Man betrachte eine Menge $X$ mit mindestens zwei Elementen versehen mit der Klumpentopologie. Für alle $x \in X$ zeigt man unmittelbar, dass $\mathcal{U}(x) = \{X\}$. Damit konvergiert jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ gegen jeden Punkt $x \in X$.

(iii) Sei $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}^< = \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$; vgl. Beispiel 12.1.4, (vi). Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus $[-\infty, +\infty)$ konvergiert gegen ein $x \in [-\infty, +\infty)$ bezüglich $\mathcal{T}^<$ genau dann, wenn $x \geq \limsup_{i\in I} x_i$, wobei

$$\limsup_{i\in I} x_i := \inf_{k\in I} \sup_{I\ni i\geq k} x_i \quad (\in [-\infty, +\infty])\,.$$

Insbesondere sind mit $x$ auch alle $t \geq x$ Grenzwerte von $(x_i)_{i\in I}$. Also sind auch auf diesem Raum Grenzwert nicht eindeutig.

Wie man anhand der letzten beiden Beispiele erkennen kann, sind Grenzwerte konvergenter Netze im Allgemeinen nicht eindeutig. In Definition 12.1.12 wurde daher absichtlich nicht die Schreibweise $x = \lim_{i\in I} x_i$ verwendet. Man muss eine zusätzliche Eigenschaft vom gegebenen topologischen Raum fordern, damit Grenzwerte eindeutig sind.

**12.1.15 Definition.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *(T2)-Raum*, *Hausdorffsch* oder *Hausdorff-Raum*, wenn das folgende Trennungsaxiom erfüllt ist.

(T2) Zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es disjunkte offene Mengen $O_x$ und $O_y$ mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$.

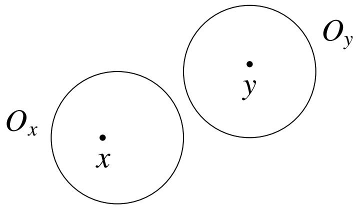


Abbildung 12.1: Zweites Trennungsaxiom (T2)

Wie man leicht anhand von Definition 12.1.5 erkennt, ist (T2) dazu äquivalent, dass es zu zwei verschiedenen Punkten $x, y$ zwei Umgebungen $U \in \mathscr{U}(x)$ und $V \in \mathscr{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

**12.1.16 Beispiel.** Für eine Metrik $d$ auf einer Menge $X$ ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T}(d))$ ein Hausdorff-Raum. Sind nämlich $x, y \in X$ verschieden, so gilt $d(x, y) > 0$. Wir setzen $\epsilon := \frac{1}{3} d(x, y)$ und erhalten Umgebungen $U_\epsilon(x) \in \mathscr{U}(x)$ und $U_\epsilon(y) \in \mathscr{U}(y)$, welche disjunkt sind, denn wäre $z \in U_\epsilon(x) \cap U_\epsilon(y)$, so erhielten wir den Widerspruch

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{1}{3} d(x, y) + \frac{1}{3} d(x, y) = \frac{2}{3} d(x, y) .$$

**12.1.17 Lemma.** *Ein konvergentes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in einem topologischen (T2)-Raum hat einen eindeutigen Grenzwert $x$. In topologischen (T2)-Räumen schreibt man daher $x = \lim_{i \in I} x_i$ für diesen Sachverhalt.*

*Beweis.* Wären $x, y$ zwei verschiedene Grenzwerte, so könnten wir disjunkte Umgebungen $U \in \mathscr{U}(x)$ und $V \in \mathscr{U}(y)$ und infolge $i_1 \in I$ und $i_2 \in I$ derart wählen, dass $x_i \in U$ für alle $i \geq i_1$ und $x_i \in V$ für alle $i \geq i_2$. Da $I$ gerichtet ist, gibt es ein $i \in I$ mit $i \geq i_1, i \geq i_2$ und daher $x_i \in U \cap V$, was aber im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$ steht. ❑

**12.1.18 Lemma.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in $X$. Ist $(x_{i(j)})_{j \in J}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$, also $(J, \leq_J)$ eine gerichtete Menge und $i : J \to I$ eine Abbildung mit*

$$\forall i \in I \; \exists j_0 \in J : \; \forall j \succeq_J j_0 \Rightarrow i(j) \geq i , \tag{12.3}$$

*und konvergiert $(x_i)_{i \in I}$ gegen $x$, so konvergiert auch $(x_{i(j)})_{j \in J}$ gegen $x$.*

*Beweis.* Zu $U \in \mathscr{U}(x)$ und $i_0 \in I$ mit $x_i \in U$ für $i \geq i_0$ gibt es ein $j_0 \in J$ mit $i(j) \geq i_0$ und infolge $x_{i(j)} \in U$ für $j \succeq_J j_0$. ❑

## 12.2 Abgeschlossene Mengen

**12.2.1 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $A^c$ offen ist.

**12.2.2 Lemma.** *Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf einer Menge X, so hat die Menge $\mathfrak{A}$ aller abgeschlossenen Teilmengen von X folgende Eigenschaften.*

*(A1)* $\emptyset \in \mathfrak{A}, X \in \mathfrak{A}$.

*(A2) Aus* $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ *folgt* $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{A}$.

*(A3) Aus* $A_i \in \mathfrak{A}$, $i \in I$, *folgt* $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathfrak{A}$.

*Beweis.* Die Eigenschaften (A1)-(A3) gehen bei Komplementbildung genau in die Axiome (O1)-(O3) über. ❑

Um auf einer Menge $X$ zu einer Topologie $\mathcal{T}$ zu gelangen, kann man ob der Äquivalenz von (O1)-(O3) und (A1)-(A3) auch von einer Menge $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den in Lemma 12.2.2 beschriebenen Eigenschaften ausgehen und dann $\mathcal{T}$ als die Menge aller Komplemente $A^c$ mit $A \in \mathfrak{A}$ definieren.

**12.2.3 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $B \subseteq X$.

- Der Durchschnitt
$$c\ell(B) := \bigcap \Big\{ A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen, } A \supseteq B \Big\} \tag{12.4}$$
aller $B$ enthaltenden abgeschlossenen Mengen heißt der *Abschluss* von $B$. Wenn man explizit klarstellen will, bezüglich welcher Topologie der Abschluss gebildet wird, dann schreiben wir für $c\ell(B)$ auch $c\ell_{\mathcal{T}}(B)$.

- Gilt $C \subseteq B \subseteq X$ und $B \subseteq c\ell(C)$, so heißt $C$ *dicht in* $B$. Ist $C$ dicht in $X$, so nennt man $C$ *dicht*.

- Eine Menge $B \subseteq X$ heißt *separabel*, wenn $B$ eine in $B$ dichte abzählbare Teilmenge hat.

Man beachte, dass die Menge, über die in (12.4) der Durchschnitt gebildet wird, nicht leer ist, da $X$ immer eine abgeschlossene Obermenge von $B$.

**12.2.4 Fakta.** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $B, C \subseteq X$.

1. Gemäß (12.4) gilt $B \subseteq c\ell(B)$, wobei $c\ell(B)$ wegen (A3) abgeschlossen ist. Da jede abgeschlossene Obermenge von $B$ auf der rechten Seite von (12.4) vorkommt, ist $c\ell(B)$ in der Tat die kleinste abgeschlossene Obermenge von $B$.

2. Nach dem vorherigen Punkt ist $B$ genau dann abgeschlossen, wenn $B = c\ell(B)$.

3. Aus $C \subseteq B$ folgt $c\ell(C) \subseteq c\ell(B)$. In der Tat ist $c\ell(B)$ eine abgeschlossene Obermenge von $B$ und folglich auch von $C$. Da $c\ell(C)$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von $C$ ist, gilt eben $c\ell(C) \subseteq c\ell(B)$.

4. Für $C, B \subseteq X$ folgt $c\ell(C \cup B) = c\ell(C) \cup c\ell(B)$, da einerseits $c\ell(C) \cup c\ell(B)$ wegen (A2) eine abgeschlossene Obermenge von $C \cup B$ ist und da andererseits aus $C \subseteq C \cup B$, $B \subseteq C \cup B$ wegen des vorherigen Punktes $c\ell(C) \subseteq c\ell(C \cup B)$, $c\ell(B) \subseteq c\ell(C \cup B)$ und daher $c\ell(C) \cup c\ell(B) \subseteq c\ell(C \cup B)$ folgt.

**12.2.5 Lemma.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $B \subseteq X$ und $x \in X$ derart, dass $U \cap B \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$. Die Menge*

$$I = \{(y, U) : U \in \mathfrak{U}(x),\ y \in U \cap B\},$$

*versehen mit der Relation $(y_1, U_1) \preceq (y_2, U_2) :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$ ist dann eine gerichtete Menge, und das Netz $(x_i)_{i \in I}$ durch $x_i := y$, wenn $i = (y, U)$, konvergiert gegen $x$.*

*Beweis.* Die Relation $\preceq$ ist offensichtlich reflexiv und transitiv. Sind $(z, V), (y, U) \in I$, so folgt $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$. Voraussetzungsgemäß gibt es ein $b \in U \cap V \cap B$, und daher $(z, V), (y, U) \preceq (b, U \cap V)$. Somit ist $(I, \preceq)$ gerichtet.
Definitionsgemäß gilt immer $x_i \in B$. Da zu $U \in \mathfrak{U}(x)$ und beliebigem $y \in U \cap B$ aus $i = (z, V) \succeq (y, U)$ folgt, dass $x_i = z \in V \subseteq U$, erhalten wir die Konvergenz von $(x_i)_{i \in I}$ gegen $x$. ❑

**12.2.6 Proposition.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $B \subseteq X$, $x \in X$ und $\mathcal{V}(x)$ eine beliebige Umgebungsbasis von $x$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

*(i)* $x \in c\ell(B)$.

*(ii) Für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $B \cap U \neq \emptyset$.*

*(iii) Für alle $W \in \mathcal{V}(x)$ gilt $B \cap W \neq \emptyset$.*

*(iv) Es gibt ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in B$ derart, dass $x$ ein Grenzwert davon ist.*

*Beweis.* Laut Definition ist $x \notin c\ell(B)$ zur Existenz einer abgeschlossenen Menge $A$ mit $x \notin A$ und $A \supseteq B$ äquivalent. Da die offenen Mengen genau die Komplemente der abgeschlossenen sind, ist das äquivalent zur Existenz einer Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ und $O \cap B = \emptyset$. Geht man zu den Negationen über, so erhalten wir

$$(x \in c\ell(B)) \Leftrightarrow (\forall O \in \mathcal{T}, x \in O : B \cap O \neq \emptyset).$$

Man erkennt sofort, dass die rechte Seite zu (ii) äquivalent ist. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $\mathcal{V}(x)$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$ ist, und (ii) $\Rightarrow$ (iv) erhalten wir aus Lemma 12.2.5.
Gilt schließlich (iv) und ist $U \in \mathfrak{U}(x)$, so folgt $x_i \in U \cap B$ für alle $i \succeq i_0$ mit einem $i_0 \in I$. Insbesondere gilt $U \cap B \neq \emptyset$. ❑

**12.2.7 Korollar.** *Eine Menge $B \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in B$, $i \in I$, welches gegen ein $x \in X$ konvergiert, $x \in B$ folgt.*

*Beweis.* Ist $B$ abgeschlossen und $x \in B^c$, so kann kein Netz $(x_i)_{i \in I}$ aus $B$ gegen $x$ konvergieren, da $B^c$ eine Umgebung von $x$ ist, die kein $x_i$ enthält. Ist $B$ nicht abgeschlossen, so folgt für $x \in c\ell(B) \setminus B$ aus Proposition 12.2.6 die Existenz eines Netzes aus $B$, welches gegen $x \in B^c$ konvergiert. ❑

**12.2.8 Bemerkung.** In einem metrischen Raum $\langle X, d \rangle$ wird der Abschluss einer Menge $B \subseteq X$ meist als Vereinigung von $B$ mit ihren ihren Häufungspunkten definiert; siehe Definition 5.1.9. Nimmt man als $\mathcal{V}(x)$ die Menge aller offenen $\epsilon$-Kugeln um $x$, so erkennt man durch einen Vergleich von Proposition 12.2.6 und (5.1), dass $x \in c\ell(B)$ genau dann, wenn $x \in c(B)$. Also stimmt der Abschluss in metrischen Räumen mit dem topologischen Abschluss überein.
Es sei auch bemerkt, dass die Aussage (iv) in Proposition 12.2.6 jener in Lemma 5.1.12 ähnelt. Für allgemeine topologische Räume findet man aber nicht das Auslangen mit Folgen allein. Der Grund dafür liegt darin, dass das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht immer gilt. Unter der Voraussetzung (ABI) lässt sich die Konstruktion in Lemma 12.2.5 folgendermaßen abändern:
Ist $\mathcal{V}(x) = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$, und wählen wir $x_n \in B \cap W_1 \cap \cdots \cap W_n$, so erhält man eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $B$ derart, dass zu vorgegebenem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $W_N \subseteq U$ existiert, und daher

$$x_n \in W_1 \cap \cdots \cap W_N \cap \cdots \cap W_n \subseteq U \quad \text{für alle} \quad n \geq N \,.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen $x$.
Somit gilt für topologische Räume mit (ABI) genauso wie für metrische Räume, dass $x \in c\ell(B)$ genau dann, wenn $x = \lim_{n \to \infty} x_n$ für eine Folge aus $B$.

Wir wollen wie für metrische Räume in Definition 5.1.7 die Begriffen Häufungspunkt und isolierten Punkt einführen.

**12.2.9 Definition** (*)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $B \subseteq X$. Ein $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $B$, wenn

$$(B \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad U \in \mathcal{U}(x) \,.$$

Ein $x \in B$ heißt *isolierter Punkt* von $B$, wenn es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap B = \{x\}$ gibt.

Man erkennt leicht, dass $x \in X$ genau dann isolierter Punkt von $X$ ist, wenn $\{x\} \in \mathcal{T}$.

**12.2.10 Bemerkung** (*)**.** Nach Proposition 12.2.6 ist $x$ genau dann Häufungspunkt von $B$ ist, wenn $x \in c\ell(B \setminus \{x\})$, bzw. wenn $(x_i)_{i \in I} \to x$ für ein Netz aus $B \setminus \{x\}$; für das entsprechende Resultat in metrischen Räumen siehe Lemma 5.1.12.
Als weitere Folge von Proposition 12.2.6 identifiziert man $c\ell(B)$ als Vereinigung von $B$ und der Menge aller Häufungspunkte von $B$.

In Analogie zu der Tatsache, dass die abgeschlossenen Mengen via Komplementbildung aus den offenen Mengen hervorgehen, können wir aus dem Abschluss das sogenannte Innere einführen.

**12.2.11 Definition.** Das *Innere* $B^\circ$ einer Teilmenge $B$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch
$$B^\circ = \bigcup \{O \in \mathcal{T} : O \subseteq B\}.$$

**12.2.12 Fakta.**

1. Offenbar gilt $x \in B^\circ$ genau dann, wenn $B \in \mathfrak{U}(x)$.

2. Da die Komplemente offener Mengen genau die abgeschlossenen Mengen sind, besteht folgender Zusammenhang mit dem Abschluss von Mengen.
$$\begin{aligned}(c\ell(B^c))^c &= \Big(\bigcap \Big\{ A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen}, \ A \supseteq B^c \Big\}\Big)^c \\ &= \Big(\bigcap \Big\{ O^c \subseteq X : O \text{ offen}, \ O \subseteq B \Big\}\Big)^c = B^\circ .\end{aligned}$$

3. Ähnlich wie beim Abschluss sieht man direkt oder mit Hilfe der entsprechenden Eigenschaft des Abschlusses zusammen mit dem vorherigen Punkt, dass $B^\circ$ die größte in $B$ enthaltene offene Menge ist, womit $B \in \mathcal{T}$ genau dann, wenn $B = B^\circ$.

## 12.3 Häufungspunkte von Netzen*

**12.3.1 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in $X$. Ein $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $(x_i)_{i\in I}$, falls
$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \forall i \in I \ \exists j \in I : \ i \preceq j \wedge x_j \in U .$$

Man beachte, dass im Allgemeinen die Menge der Häufungspunkte eines Netzes $(x_i)_{i\in I}$ nicht mit der Menge der Häufungspunkte der Bildmenge $\{x_i : i \in I\}$ übereinstimmt; vgl. Definition 12.2.9. Als Beispiel dafür betrachte man konstante Netze.

**12.3.2 Bemerkung.** Ein Vergleich von Definition 12.3.1 mit Proposition 12.2.6 weist $x$ genau dann als Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ aus, wenn $x$ für alle $i \in I$ in $c\ell(\{x_j : j \in I, \ i \preceq j\})$, also in
$$\bigcap_{i\in I} c\ell(\{x_j : j \in I, \ i \preceq j\}) \tag{12.5}$$
enthalten ist.
Hat ein Netz einen Grenzwert, so ist dieser offenbar auch ein Häufungspunkt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie sich schon bei Folgen in $\mathbb{R}$ schon erkennen lässt.

Eine alternative Charakterisierung von Häufungspunkten verwendet das Konzept von Teilnetzen.

**12.3.3 Lemma.** *Der Punkt $x$ ist Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn $x$ Grenzwert eines Teilnetzes $(x_{i(k)})_{k\in K}$ ist.*

*Beweis.* Ist $(x_{i(k)})_{k\in K}$ ein Teilnetz mit Grenzwert $x$, so gibt es zu $i_0 \in I$ ein $k_0 \in K$ mit $i_0 \preceq i(k)$ für alle $k \succeq k_0$. Insbesondere gilt

$$\{x_i : i \in I,\ i_0 \preceq i\} \supseteq \{x_{i(k)} : k \in K,\ k_0 \preceq k\},$$

und damit

$$\bigcap_{i_0\in I} c\ell(\{x_i : i \in I,\ i_0 \preceq i\}) \supseteq \bigcap_{k_0\in K} c\ell(\{x_{i(k)} : k \in K,\ k_0 \preceq k\}). \tag{12.6}$$

Als Grenzwert ist $x$ auch Häufungspunkt von $(x_{i(k)})_{k\in K}$, infolge in der rechten Seite von (12.6) enthalten und dadurch auch Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$; siehe Bemerkung 12.3.2.
Ist umgekehrt $x$ Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$, so betrachten wir die Menge

$$K = \{(j, U) : j \in I, U \in \mathcal{U}(x), x_j \in U\}$$

versehen mit der offenbar reflexiven und transitiven Relation

$$(j_1, U_1) \preceq (j_2, U_2) :\Leftrightarrow j_1 \preceq j_2 \text{ und } U_1 \supseteq U_2 .$$

Sind $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \in K$, und ist $j' \in I$ mit $j_1, j_2 \preceq j'$, so gibt es wegen der Voraussetzung zu der Umgebung $U_3 = U_1 \cap U_2$ von $x$ ein $j_3 \in I$ mit $j' \preceq j_3$ und $x_{j_3} \in U_3$. Also gilt $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \preceq (i_3, U_3)$, womit sich $(K, \preceq)$ als gerichtete Menge herausstellt.
Setzen wir $i(j, U) = j$, so ist $(x_{i(j,U)})_{(j,U)\in K}$ ein gegen $x$ konvergentes Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$. ❑

**12.3.4 Lemma.** *Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ konvergiert genau dann gegen $x$, wenn $x$ Häufungspunkt eines jeden Teilnetzes von $(x_i)_{i\in I}$ ist.*

*Beweis.* Konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ gegen $x$, so auch jedes Teilnetz, womit $x$ auch Häufungspunkt dieses Teilnetzes ist.
Konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ nicht gegen $x$, so gibt es eine Umgebung $U$ von $x$ mit

$$\forall i \in I\ \exists j \in I, i \preceq j : x_j \notin U .$$

Dieses Faktum stellt sicher, dass $K = \{i \in I : x_i \notin U\}$ versehen mit $\preceq|_{K\times K}$ eine gerichtete Menge ist, wobei das Teilnetz $(x_i)_{i\in K}$ den Punkt $x$ offenbar nicht als Häufungspunkt hat. ❑

## 12.4 Stetige Abbildungen

**12.4.1 Definition.** Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ist $x \in X$, so heißt $f$ *stetig im Punkt $x$*, wenn

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x))\ \exists U \in \mathcal{U}(x) :\ f(U) \subseteq V .$$

Die Abbildung $f$ heißt *stetig* oder stetig auf $X$, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist. In dem Fall sprechen wir auch von der Stetigkeit der Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$.

**12.4.2 Beispiel.**

(i) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ ist stetig, denn für $x \in X$ und $V \in \mathscr{U}(\mathrm{id}_X(x)) = \mathscr{U}(x)$ erfüllt $U = V \in \mathscr{U}(x)$ die Bedingung $\mathrm{id}_X(U) = V \subseteq V$.

(ii) Für topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ sowie $a \in Y$ ist die konstante Abbildung $f : X \to Y$ definiert durch $f(x) = a$, $x \in X$, stetig. In der Tat erfüllt für $x \in X$ und $V \in \mathscr{U}(f(x)) = \mathscr{U}(a)$ die Umgebung $U = X \in \mathscr{U}(x)$ die Bedingung $f(U) = \{a\} \subseteq V$.

(iii) Ist $X$ versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ und $(Y, \mathcal{O})$ irgendein topologischer Raum, so ist jede Abbildung $f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig, denn für $x \in X$ und $V \in \mathscr{U}(f(x))$ erfüllt $U = \{x\} \in \mathscr{U}(x)$ die geforderte Inklusion $f(U) = \{f(x)\} \subseteq V$.

Da in einem metrischen Raum die $\epsilon$-Kugeln eine Umgebungsbasis von einem Punkt bilden, ist im Falle von Funktionen auf metrischen Räumen das im folgenden Lemma auftretende Kriterium (ii) für die Stetigkeit nichts anderes als das wohlbekannten $\epsilon$ - $\delta$ Kriteriums; siehe Definition 6.1.1. Bei Funktionen auf metrischen Räumen lässt sich die Stetigkeit in einem Punkt $x$ dadurch charakterisiert, dass für Folgen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ immer $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ nach sich zieht. Das im folgenden Lemma auftretende Kriterium (iii) stellt eine Verallgemeinerung davon für allgemeine topologische Räume dar.

**12.4.3 Lemma.** *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Bezeichnen $\mathscr{V}(x)$ und $\mathscr{V}(f(x))$ beliebige Umgebungsbasen von $x$ in $(X, \mathcal{T})$ und von $f(x)$ in $(Y, \mathcal{O})$, so sind folgende Aussagen äquivalent.*

*(i) $f$ ist im Punkt $x$ stetig.*

*(ii) Für jedes $V \in \mathscr{V}(f(x))$ existiert ein $U \in \mathscr{V}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$.*

*(iii) Für jedes gegen $x$ konvergente Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $X$ konvergiert $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$.*

*Beweis.*

$(i) \Rightarrow (ii)$ : Für $V \in \mathscr{V}(f(x))$ gibt es wegen $V \in \mathscr{U}(f(x))$ ein $U' \in \mathscr{U}(x)$ mit $f(U') \subseteq V$; vgl. Definition 12.4.1. Da $\mathscr{V}(x)$ eine Umgebungsbasis von $x$ ist, gibt es gemäß Definition 12.1.8 ein $U \in \mathscr{V}(x)$ mit $U \subseteq U'$ und infolge $f(U) \subseteq V$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ : Ist $V \in \mathscr{U}(f(x))$ und wählt man $W \in \mathscr{V}(f(x))$ mit $W \subseteq V$, so gibt es ein $U \in \mathscr{V}(x) \subseteq \mathscr{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq W \subseteq V$, weshalb $f$ in $x$ gemäß Definition 12.4.1 stetig ist.

$(i) \Rightarrow (iii)$ : Konvergiere $(x_i)_{i\in I}$ gegen $x$ und sei $V \in \mathscr{U}(f(x))$. Stetigkeitsbedingt gibt es ein $U \in \mathscr{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$ und konvergenzbedingt ein $i_0 \in I$ mit $x_i \in U$ und infolge $f(x_i) \in V$ für $i \geq i_0$. Also konvergiert $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ : Wäre $f$ nicht in $x$ stetig, so gäbe es eine Umgebung $V$ von $f(x)$ mit $f(U) \cap V^c \neq \emptyset$, oder äquivalent dazu $U \cap f^{-1}(V^c) \neq \emptyset$, für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$. Gemäß Lemma 12.2.5 gibt es ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $f^{-1}(V^c)$, welches gegen $x$ konvergiert. Als Folge gilt $f(x_i) \in V^c$ für alle $i \in I$, womit $(f(x_i))_{i\in I}$ nicht gegen $f(x)$ konvergieren kann. ❑

**12.4.4 Bemerkung.** Mit einer Konstruktion ähnlich wie in Bemerkung 12.2.8 sieht man, dass die Stetigkeit bei $x$ im Fall der Gültigkeit des erste Abzählbarkeitsaxioms, also insbesondere im Fall von metrischen Räumen, mit Hilfe von Folgen durch den Schluss von $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ auf $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ charakterisiert werden kann.

**12.4.5 Beispiel.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to [-\infty, +\infty)$ heißt in einem Punkt $x \in X$ *halbstetig von oben* oder *oberhalbstetig*, falls $f$ im Punkt $x$ stetig ist, wenn man $[-\infty, +\infty)$ mit der Topologie $\mathcal{T}^< = \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ versieht; vgl. Beispiel 12.1.4, (vi). Entsprechend heißt $f$ halbstetig von oben oder oberhalbstetig auf $X$, wenn $f$ bei allen $x \in X$ halbstetig von oben ist, also wenn $f : X \to [-\infty, +\infty)$ stetig ist, wobei $[-\infty, +\infty)$ die Topologie $\mathcal{T}^<$ trägt.
In Beispiel 12.1.14, (iii), haben wir gesehen, dass ein Netz $(\xi_i)_{i\in I}$ in $[-\infty, +\infty)$ gegen ein $\xi \in [-\infty, +\infty)$ bezüglich $\mathcal{T}^<$ genau dann konvergiert, wenn $\xi \geq \limsup_{i\in I} \xi_i$. Deshalb und wegen Lemma 12.4.3 ist $f$ in $x$ genau dann von oben halbstetig, wenn

$$f(x) \geq \limsup_{i\in I} f(x_i)$$

für alle gegen $x$ konvergente Netze $(x_i)_{i\in I}$ aus $X$.
Eine Funktion $f : X \to (-\infty, +\infty]$ heißt in einem Punkt $x \in X$ *halbstetig von unten* oder *unterhalbstetig*, falls $f$ im Punkt $x$ stetig ist, wobei $(-\infty, +\infty]$ mit der Topologie $\mathcal{T}^> = \{(a, +\infty] : a \in [-\infty, +\infty]\}$ versehen ist.
Man erkennt schließlich leicht, dass die Halbstetigkeit von unten der Funktion $f$ bei $x$ zur Halbstetigkeit von oben der Funktion $-f$ bei $x$ und somit auch zur Ungleichung $f(x) \leq \liminf_{i\in I} f(x_i)$ für alle gegen $x$ konvergente Netze $(x_i)_{i\in I}$ aus $X$ äquivalent ist.

**12.4.6 Lemma.** *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$, $(Z, \mathcal{R})$ topologische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ zwei Funktionen. Ist $f$ stetig im Punkt $x \in X$ und $g$ stetig im Punkt $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig im Punkt $x$. Insbesondere zieht die Stetigkeit der Funktionen $f$ und $g$ jene von $g \circ f$ nach sich.*

*Beweis.* Zu $W \in \mathfrak{U}((g \circ f)(x))$ gibt es wegen der Stetigkeit von $g$ im Punkt $f(x)$ ein $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ mit $g(V) \subseteq W$. Da auch $f$ stetig im Punkt $x$ ist, gibt es in weiterer Folge ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$, womit insgesamt

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W\,.$$

❑

**12.4.7 Satz.** *Für topologische Räume $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ und eine Funktion $f : X \to Y$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

*(i) $f$ ist stetig.*

*(ii)* $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ *für alle* $O \in \mathcal{O}$*; also sind die Urbilder offener Mengen offen.*

*(iii) Die Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

*(iv) Für jede Teilmenge* $B \subseteq X$ *gilt* $f(c\ell(B)) \subseteq c\ell(f(B))$*.*

*Beweis.*

$(i) \Rightarrow (ii):$ Für $O \in \mathcal{O}$ sowie $x \in f^{-1}(O)$ gilt $f(x) \in O$ und daher $O \in \mathcal{U}(f(x))$. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq O$, bzw. äquivalent dazu $U \subseteq f^{-1}(O)$. Aus Lemma 12.1.11 erhalten wir $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$.

$(ii) \Rightarrow (iii):$ Ist $A$ abgeschlossene Teilmenge von $Y$, so folgt $A^c \in \mathcal{O}$, weshalb voraussetzungsgemäß

$$\left(f^{-1}(A)\right)^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{T}\,.$$

Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

$(iii) \Rightarrow (iv):$ Aus $c\ell(f(B)) \supseteq f(B)$ folgt $f^{-1}(\,c\ell(f(B))) \supseteq B$, womit nach Voraussetzung $f^{-1}(\,c\ell(f(B)))$ abgeschlossene Obermenge von $B$ ist. Insbesondere gilt $f^{-1}(\,c\ell(f(B))) \supseteq c\ell(B)$ und daher $c\ell(f(B)) \supseteq f(c\ell(B))$.

$(iv) \Rightarrow (i):$ Sei $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Für $W := f^{-1}(V)$ erhalten wir aus $f(W^c) = f(f^{-1}(V^c)) \subseteq V^c$ und der Voraussetzung

$$f(c\ell(W^c)) \subseteq c\ell(f(W^c)) \subseteq c\ell(V^c)\,.$$

Wegen $V \in \mathcal{U}(f(x))$ und $V \cap V^c = \emptyset$ folgt aus Proposition 12.2.6, dass $f(x) \notin c\ell(V^c)$ und nach obiger Inklusion $f(x) \notin f(c\ell(W^c))$, womit $x \notin c\ell(W^c)$. Also gilt

$$x \in (c\ell(W^c))^c = W^\circ =: U \in \mathcal{U}(x)\,,$$

wobei $U \subseteq W = f^{-1}(V)$ und daher $f(U) \subseteq f(W) \subseteq V$. ❑

Bedingung (ii) in Satz 12.4.7 lässt sich kurz durch $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$ beschreiben, wobei wir für eine Abbildung $f : X \to Y$ die Schreibweise

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \left\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\right\} \quad (\subseteq \mathcal{P}(X))$$

und später auch

$$f(\mathcal{B}) := \left\{f(B) : B \in \mathcal{B}\right\} \quad (\subseteq \mathcal{P}(Y))$$

für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bzw. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ verwenden.

**12.4.8 Lemma.** *Seien* $(X, \mathcal{T})$ *und* $(Y, \mathcal{O})$ *topologische Räume, wobei* $(Y, \mathcal{O})$ *das Axiom (T2) erfüllt. Sind* $f : X \to Y$ *und* $g : X \to Y$ *zwei stetige Funktionen derart, dass* $f|_D = g|_D$ *für eine dichte Teilmenge* $D \subseteq X$*, dann gilt sogar* $f = g$*.*

*Beweis.* Wir nehmen $f(x) \neq g(x)$ für ein $x \in X \setminus D$ an. Wegen (T2) gibt es $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $f(x) \in O_1,\ g(x) \in O_2$. Da $f$ und $g$ stetig sind, gibt es $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U_1) \subseteq O_1, g(U_2) \subseteq O_2$. Aus $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$ folgt $U_1 \cap U_2 \cap D \neq \emptyset$ und damit der Widerspruch

$$\emptyset \neq f(U_1 \cap U_2 \cap D) = g(U_1 \cap U_2 \cap D) \subseteq O_1 \cap O_2 = \emptyset\,. \qquad \square$$

Alternativ kann man argumentieren, dass es zu $x \in X \setminus D$ wegen Proposition 12.2.6 ein gegen $x$ konvergentes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $D$ gibt. Die Netze $(f(x_i))_{i\in I}$ und $(g(x_i))_{i\in I}$ konvergieren wegen Lemma 12.4.3 gegen $f(x)$ bzw. $g(x)$. Andererseits sind $(f(x_i))_{i\in I}$ und $(g(x_i))_{i\in I}$ identisch und haben wegen Lemma 12.1.17 denselben Grenzwert; also $f(x) = g(x)$.

**12.4.9 Definition.** Für topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ nennt man eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ einen *Homöomorphismus* von $(X, \mathcal{T})$ auf $(Y, \mathcal{O})$, wenn sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ stetig sind. Zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ auf $(Y, \mathcal{O})$ gibt.

**12.4.10 Fakta.** Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$, $(Z, \mathcal{R})$ topologische Räume.

1. Wegen Satz 12.4.7 ist eine Bijektion $f : X \to Y$ genau dann ein Homöomorphismus, wenn $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$ und $f(\mathcal{T}) = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{O}$, was auch zu $\mathcal{O} \subseteq f(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{O}$ bzw. zu $f(\mathcal{T}) = \mathcal{O}$ äquivalent ist.

2. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Homöomorphismen, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ ein Homöomorphismus; vgl. Lemma 12.4.6.

3. Für $X = Y$ ist die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{O})$ genau dann stetig wenn $\mathcal{O} = \mathrm{id}_X^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$; sie ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{O} = \mathrm{id}_X(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

**12.4.11 Beispiel.**

(i) Die Abbildung $\tan : (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, wenn man $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ mit der Euklidischen Topologie auf $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ und $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ versieht; siehe Beispiel 12.1.4.

(ii) Man betrachte $\mathbb{C}$ versehen mit der Euklidischen Metrik $d_2$ und mit der chordalen Metrik $\chi$, wobei für $z, w \in \mathbb{C}$

$$\chi(z, w) = \frac{2 \cdot |z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \cdot \sqrt{1 + |w|^2}}\,.$$

Man zeigt unschwer, dass $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$ bezüglich $d_2$ genau dann, wenn $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$ bezüglich $\chi$; siehe Übungsaufgabe 6.39 und die anschließende Übungsaufgabe. Also ist die Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ als Abbildung von $\langle \mathbb{C}, d_2 \rangle$ nach $\langle \mathbb{C}, \chi \rangle$ und auch als Abbildung von $\langle \mathbb{C}, \chi \rangle$ nach $\langle \mathbb{C}, d_2 \rangle$ stetig. Nach Fakta 12.4.10 gilt $\mathcal{T}(\chi) = \mathcal{T}(d_2) = \mathcal{T}^2$, obwohl die beiden Metriken nicht äquivalent im Sinne von (12.1) sind.

(iii) Sei $S^2$ die Oberfläche der Kugel $K_1^{d_2}(0)$ mit Radius 1 im $\mathbb{R}^3$. Die chordale Metrik kann man auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ derart erweitert, dass die durch $\sigma(N) = \infty$ und $\sigma((\xi, \eta, \zeta)^T) = \frac{\xi}{1-\zeta} + i\frac{\eta}{1-\zeta}$ definierte bijektive Stereographische Projektion $\sigma : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ isometrisch wird, wobei $S^2$ mit $d_2|_{S\times S}$ versehen ist; siehe Übungsaufgabe 6.39. Es gilt also $\chi(\sigma(x), \sigma(y)) = d_2(x, y)$ für $x, y \in S^2$. Somit sind $\sigma$ und $\sigma^{-1}$ stetig und folglich $\sigma$ ein Homöomorphismus.

## 12.5 Basis, Subbasis

Wir betrachten für eine feste Menge $X$ die Menge $\mathbb{T}(X)$ aller möglichen Topologien auf $X$. Die Elemente $\mathcal{T}$ von $\mathbb{T}(X)$ sind also Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$, wodurch $\mathbb{T}(X) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
Wir sagen, eine Topologie $\mathcal{T}_1$ ist *gröber* als eine Topologie $\mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_2$ ist *feiner* als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Gemäß Fakta 12.4.10 ist $\mathcal{T}_1$ genau dann gröber als $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ stetig ist.

**12.5.1 Lemma.** *Für eine Familie $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, von Topologien ist auch $\cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ eine Topologie. In der Tat ist dieser Schnitt die feinste Topologie, die gröber als alle $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, ist.*
*Für ein Mengensystem $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist*

$$\mathcal{T}(C) = \bigcap \{\mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) : C \subseteq \mathcal{T}\} \tag{12.7}$$

*die gröbste Topologie, die $C$ enthält.*

*Beweis.* Wir müssen nachweisen, dass $\cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ die Axiome (O1)-(O3) erfüllt. Die Mengen $\emptyset, X$ sind in allen $\mathcal{T}_i$ enthalten, da diese ja Topologien sind. Also sind diese Mengen auch im Schnitt enthalten, weshalb (O1) zutrifft. Aus $O_1, O_2 \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ folgt $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_i$ und somit $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$. Also gilt $O_1 \cap O_2 \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$, womit (O2) zutrifft. Sind $O_j \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$, $j \in J$, so folgt für jedes $i \in I$, dass $O_j \in \mathcal{T}_i$, $j \in J$, und weiter $\bigcup_{j\in J} O_j \in \mathcal{T}_i$. Nun gilt das wieder für alle $i \in I$, also $\bigcup_{j\in J} O_j \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ und daher (O3).
Klarerweise ist $\cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ in allen $\mathcal{T}_i$ enthalten. Gilt andererseits $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$, so auch $\mathcal{T} \subseteq \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$. Also ist der Schnitt die feinste in allen $\mathcal{T}_i$ enthaltene Topologie.
Als Schnitt von Mengensystemen, die alle $C$ enthalten, enthält auch $\mathcal{T}(C)$ das Mengensystem $C$. Enthält andererseits eine Topologie $\mathcal{T}$ das Mengensystem $C$, so gehört $\mathcal{T}$ zur Menge auf der rechten Seite von (12.7), womit $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}(C)$. Also ist $\mathcal{T}(C)$ die gröbste Topologie, die $C$ enthält. ❑

**12.5.2 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}, C \subseteq \mathcal{P}(X)$.

- $\mathcal{B}$ heißt *Basis* von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ und wenn es für alle $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq O$ gibt.
- $C$ heißt *Subbasis* von $\mathcal{T}$, wenn $C \subseteq \mathcal{T}$ und wenn es für alle $O \in \mathcal{T}, O \neq X$, und $x \in O$ endlich viele $C_1, \dots, C_n \in C$ mit $x \in C_1 \cap \dots \cap C_n \subseteq O$ gibt.
- Man sagt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* (ABII), wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

**12.5.3 Fakta.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Die Tatsache, dass es für $O \subseteq X$ zu jedem $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subseteq O$, ist offenbar äquivalent zu
$$O = \bigcup_{B \in \mathcal{B},\, B \subseteq O} B\,.$$

2. $\mathcal{C}$ ist genau dann eine Subbasis von $\mathcal{T}$, wenn das Mengensystem $\mathcal{E}$ aller endlichen Schnitte von $\mathcal{C}$ samt $X$, also
$$\mathcal{E} := \{X\} \cup \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i : n \in \mathbb{N},\ C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C} \Big\}$$
eine Basis von $\mathcal{T}$ abgibt. Klarerweise enthält $\mathcal{E}$ das Mengensystem $\mathcal{C}$. Der Grund, warum man $X$ extra zu $\mathcal{E}$ gegeben muss, ist der, dass wir in Definition 12.5.2 für Subbasis nur verlangen, dass es zu jedem offenen $O$ ungleich $X$ und $x \in O$ Mengen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ mit $x \in C_1 \cap \dots \cap C_n \subseteq O$ gibt.

**12.5.4 Beispiel.**

(i) Ist $\langle Y, d \rangle$ ein metrischer Raum, so folgt aus der Definition der von $d$ induzierten Topologie $\mathcal{T}(d)$ unmittelbar, dass $\{U_\epsilon(x) : x \in Y,\ \epsilon > 0\}$ eine Basis von $\mathcal{T}(d)$ ist.

(ii) Nach dem vorherigen Beispiel hat die Euklidische Topologie $\mathcal{T}^1$ auf $\mathbb{R}$ die Menge aller offenen Intervalle
$$\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$
als Basis. Zu $a, b, x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ findet man wegen der Dichteeigenschaft von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ sicherlich $s, t \in \mathbb{Q}$ mit $a < s < x < t < b$. Also ist auch
$$\{(s, t) \subseteq \mathbb{R} : s, t \in \mathbb{Q}, s < t\}$$
eine Basis von $\mathcal{T}^1$. Insbesondere erfüllt $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^1)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(iii) Dass $\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}^< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ auf $[-\infty, +\infty)$ ist, zeigt man ganz ähnlich; vgl. Beispiel 12.1.4, (vi). Somit gilt auch hier das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(iv) Nach Beispiel (ii) und wegen $(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b)$ ist
$$\{(a, +\infty) \subseteq \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \subseteq \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\}$$
eine Subbasis von $\mathcal{T}^1$ auf $\mathbb{R}$.

(v) Wir betrachte $\mathbb{R}^p$ versehen mit der Metrik $d_\infty$; siehe Beispiel 3.1.5. Für die $\epsilon$-Kugeln in diesem metrischen Raum gilt

$$U_\epsilon((\xi_j)_{j=1}^p) = (\xi_1 - \epsilon, \xi_1 + \epsilon) \times \cdots \times (\xi_p - \epsilon, \xi_p + \epsilon)\,.$$

Folglich ist die Menge

$$\{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_p, b_p) : a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j,\ j = 1, \ldots, p\}$$

aller $p$-dimensionalen Quader eine Basis von $\mathcal{T}(d_\infty) = \mathcal{T}(d_2) = \mathcal{T}^p$; siehe Beispiel 12.1.4.

Ähnlich wie für $\mathbb{R}$ sieht man, dass

$$\{(s_1, t_1) \times \cdots \times (s_p, t_p) : s_j, t_j \in \mathbb{Q}, s_j < t_j,\ j = 1, \ldots, p\}$$

eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}^p$ ist, weshalb auch $(\mathbb{R}^p, \mathcal{T}^p)$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

**12.5.5 Satz.** *Jede Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ einer gegebenen Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$ hat folgende beiden Eigenschaften.*

*(B1) Zu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$ existiert $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

*(B2) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.*

*Zudem ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, die $\mathcal{B}$ enthält, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$.*
*Ist $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ Subbasis einer gegebenen Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$, so ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, die $C$ enthält, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(C)$.*

*Beweis.* Aus der Tatsache, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist, zusammen mit Fakta 12.5.3, 1, folgt

$$O = \bigcup_{B \in \mathcal{B},\ B \subseteq O} B \quad \text{für alle} \quad O \in \mathcal{T}\,. \tag{12.8}$$

Wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B})$ und wegen (O3) ist damit jede dieser Mengen $O \in \mathcal{T}$ auch in $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, also $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B})$. Wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ muss auch $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{T}$ und infolge $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}$ gelten.
Aus (12.8), angewandt auf $O = X$, erkennt man, dass (B2) erfüllt ist. Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ gilt $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$, womit wegen der Basiseigenschaft zu jedem $x \in B_1 \cap B_2$ ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ existiert; also gilt auch (B1).
Für eine Subbasis $C$ von $\mathcal{T}$ ist das gemäß Fakta 12.5.3, 2, definierte $\mathcal{E}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, wodurch $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Wegen $C \subseteq \mathcal{E}$ gilt $\mathcal{T}(C) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Ist andererseits $E \in \mathcal{E}$, so gilt $E = X$ oder $E = C_1 \cap \cdots \cap C_n$ für $C_1, \ldots, C_n \in C \subseteq \mathcal{T}(C)$. Aus (O1) bzw. (O2) in Kombination mit Bemerkung 12.1.3 folgt dann $E \in \mathcal{T}(C)$, also $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}(C)$ und damit $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{T}(C)$. Insgesamt haben wir $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(C)$. ❑

**12.5.6 Lemma.** *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, O)$ topologische Räume und $C \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Subbasis von $O$. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(C) \subseteq \mathcal{T}$.*

*Beweis.* Man prüft leicht nach, dass $\mathcal{O}' := \{O' \subseteq Y : f^{-1}(O') \in \mathcal{T}\}$ die Axiome (O1)-(O3) erfüllt, also eine Topologie ist. Aus $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}$ folgt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}'$ und weiter $\mathcal{O} = \mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{O}'$, was $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$, also die Stetigkeit von $f$, impliziert.
Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$. ❑

Wir wollen nun den umgekehrten Weg wie in Satz 12.5.5 gehen.

**12.5.7 Satz.** *Erfüllt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Axiome (B1) und (B2), so ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Außerdem stimmt $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ mit dem System $\mathcal{T}$ aller Mengen $O \subseteq X$ der Bauart*

$$O = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B$$

*mit einem von $O$ abhängigen Teilsystem $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$ überein; also $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}$, wobei*

$$\mathcal{T} = \Big\{ O \subseteq X : \exists \mathcal{V} \subseteq \mathcal{B},\ O = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B \Big\}. \tag{12.9}$$

*Für $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist $\mathcal{C}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{C})$. Außerdem stimmt $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ mit dem System*

$$\Big\{ O \subseteq X : \exists \mathcal{V} \subseteq \mathcal{E},\ O = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B \Big\} \tag{12.10}$$

*überein, wobei*

$$\mathcal{E} := \{X\} \cup \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i : n \in \mathbb{N},\ C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C} \Big\}$$

*die Axiome (B1) und (B2) erfüllt.*

*Beweis.*

⇝ Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{T}$ aus (12.9) eine Topologie auf $X$ ist. Mit (B2) folgt

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{T} \quad \text{und} \quad \emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B \in \mathcal{T},$$

weshalb (O1) erfüllt ist. Die Bedingung (O3) folgt aus

$$\bigcup_{i \in I} \Big( \bigcup_{B \in \mathcal{V}_i} B \Big) = \bigcup_{B \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i} B .$$

Es bleibt (O2) zu zeigen. Dazu seien $O_1 = \bigcup_{B \in \mathcal{V}_1} B$ und $O_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{V}_2} B$ aus $\mathcal{T}$ gegeben. Jedes $x \in O_1 \cap O_2$ liegt dann in einem $B_1 \in \mathcal{V}_1$ und einem $B_2 \in \mathcal{V}_2$. Nach (B1) gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq O_1 \cap O_2$. Mit Fakta 12.5.3, 1, folgt

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B,$$

wobei $\mathcal{V} := \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq O_1 \cap O_2\}$; also $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

⇝ Offensichtlich gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Für $x \in O \in \mathcal{T}$ folgt aus (12.9) die Existenz eines $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq O$, wodurch $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist. Nach Satz 12.5.5 ist damit $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, die $\mathcal{B}$ umfasst.

⇝ Für $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ prüft man leicht nach, dass $X \in \mathcal{E}$ und dass mit $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ auch $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$. Insbesondere erfüllt $\mathcal{E}$ die Eigenschaften (B1) und (B2). Nach dem oben Gezeigten ist $\mathcal{E}$ Basis von $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, wobei $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ mit der Topologie in (12.10) übereinstimmt. Wegen Fakta 12.5.3, 2, bedeutet das, dass $C$ eine Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ ist, und aus Satz 12.5.5 folgt damit schließlich $\mathcal{T}(C) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. ❑

**12.5.8 Proposition.** *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$, welcher (ABII) erfüllt, also eine abzählbare Basis besitzt, hat eine abzählbare dichte Teilmenge, ist also separabel.*

*Beweis.* Ist $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$, so wähle man für jede nichtleere Teilmenge $B \in \mathcal{B}$ irgendeinen Punkt $x_B$ aus $B$, womit $D := \{x_B : \emptyset \neq B \in \mathcal{B}\}$ abzählbar ist. Zu beliebigem $y \in X$ und offenem $O \ni y$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $y \in B \subseteq O$. Insbesondere gilt $x_B \in O \cap D$, und infolge $y \in c\ell(D)$. ❑

Für metrische Topologien gilt auch die Umkehrung.

**12.5.9 Proposition.** *Ein metrischer Raum $\langle X, d\rangle$ ist genau dann separabel, wenn er (ABII) erfüllt.*

*Beweis.* Ist $D \subseteq X$ abzählbar und dicht, so besteht $\mathcal{B} := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N},\ x \in D\}$ aus abzählbar vielen Mengen. Für ein offenes $O \subseteq X$ wählen wir zu jedem $y \in O$ eine Zahl $n(y) \in \mathbb{N}$ so groß, dass $U_{\frac{2}{n(y)}}(y) \subseteq O$. Können wir

$$O = \bigcup_{\substack{x \in D \cap O,\, n \in \mathbb{N} \\ U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq O}} U_{\frac{1}{n}}(x)\,, \tag{12.11}$$

zeigen, so stellt sich $\mathcal{B}$ als abzählbare Basis von $\mathcal{T}(d)$ heraus.
Klarerweise ist die rechte Seite von (12.11) in $O$ enthalten. Für $y \in O$ gibt es wegen der Dichtheit von $D$ ein $x \in D \cap U_{\frac{1}{n(y)}}(y) \subseteq D \cap O$, womit auch $y \in U_{\frac{1}{n(y)}}(x)$. Für jedes $t \in U_{\frac{1}{n(y)}}(x)$ gilt zudem

$$d(t, y) \leq d(t, x) + d(x, y) < \frac{1}{n(y)} + \frac{1}{n(y)} = \frac{2}{n(y)}\,,$$

also $t \in U_{\frac{2}{n(y)}}(y)$, wodurch $U_{\frac{1}{n(y)}}(x) \subseteq U_{\frac{2}{n(y)}}(y) \subseteq O$. Also liegt jedes $y \in O$ in der Vereinigung auf der rechten Seite von (12.11). ❑

## 12.6 Initiale Topologie

Mit dem Konzept Basis und Subbasis können wir auf einer gegebenen Menge ausgezeichnete Topologien definieren, die gewisse Eigenschaften haben.

**12.6.1 Satz.** *Seien $X$ eine Menge, $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen.*

$$\begin{tikzcd}
 & (X_i, \mathcal{T}_i) \arrow[d, dotted, no head] \\
X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "f_k"'] & (X_j, \mathcal{T}_j) \arrow[d, dotted, no head] \\
 & (X_k, \mathcal{T}_k)
\end{tikzcd}$$

- *Unter allen Topologien $\mathcal{T}'$ auf $X$ so, dass $f_i : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist, ist $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$, also die Topologie mit $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ als Subbasis, die gröbste. Man bezeichnet $\mathcal{T}$ als* initiale Topologie *bezüglich der Abbildungen $f_i$, $i \in I$.*

- *Für diese initial Topologie $\mathcal{T}$ und einen weiteren topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ ist eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$ genau dann stetig, wenn $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist.*

*Beweis.*

- Für eine beliebige Topologie $\mathcal{T}'$ auf $X$ ist $f_i : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ genau dann stetig, wenn $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'$. Also sind alle $f_i$ genau dann stetig, wenn

$$\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}' . \tag{12.12}$$

  Nach Lemma 12.5.1 ist $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$ die gröbste Topologie, welche (12.12) erfüllt, womit $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$ auch die gröbste Topologie derart ist, dass alle $f_i$ stetig sind. Wegen Satz 12.5.7 ist $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ Subbasis von $\mathcal{T}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$.

- Ist $(Y, \mathcal{O})$ ein weiterer topologischer Raum, so folgt aus der Stetigkeit einer Funktion $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$ zusammen mit Lemma 12.4.6 auch jene der Abbildungen $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$.

  Nehmen wir umgekehrt die Stetigkeit aller $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, also $f^{-1}(f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) = (f_i \circ f)^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, an, so folgt

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)\Big) \subseteq \mathcal{O} .$$

  Da $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist, erhalten wir aus Lemma 12.5.6 die Stetigkeit der Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$. ❑

**12.6.2 Bemerkung** (*)**.** Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ ist in der Tat die einzige Topologie mit der Eigenschaft, dass für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$ genau dann stetig ist, wenn alle $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, stetig sind.
Um das einzusehen, sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf $X$ mit dieser Eigenschaft. Da die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ stetig ist, folgt die Stetigkeit aller $f_i = f_i \circ \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$. Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie mit dieser Eigenschaft, wodurch $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Für $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ sind andererseits alle $f_i \circ \mathrm{id}_X = f_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig. Aus der angenommenen Eigenschaft von $\mathcal{T}'$ folgt die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$, womit auch $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

**12.6.3 Lemma.** *Mit der Notation aus Satz 12.6.1 sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in $X$. Dieses konvergiert bezüglich $\mathcal{T}$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn für alle $i \in I$ das Netz $\big(f_i(x_j)\big)_{j\in J}$ bezüglich $\mathcal{T}_i$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

*Beweis.* Konvergiert $(x_j)_{j\in J}$ gegen $x$, so folgt aus der Stetigkeit der $f_i$ mit Lemma 12.4.3 die Konvergenz von $\big(f_i(x_j)\big)_{j\in J}$ gegen $f_i(x)$.
Konvergiere umgekehrt $\big(f_i(x_j)\big)_{j\in J}$ gegen $f_i(x)$ für alle $i \in I$. Für ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \neq X$ und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$ erhalten wir aus der Tatsache, dass $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist, zusammen mit Definition 12.5.2

$$x \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O$$

für gewisse $i_1, \dots, i_m \in I$ und $O_1 \in \mathcal{T}_{i_1}, \dots, O_m \in \mathcal{T}_{i_m}$, womit $f_{i_k}(x) \in O_k$ für $k = 1, \dots, m$. Laut Voraussetzung gibt es zu jedem $k = 1, \dots, m$ einen Index $j_k \in J$ derart, dass $j \succeq j_k$ immer $f_{i_k}(x_j) \in O_k$ nach sich zieht. Wählen wir $j_0 \in J$ derart, dass $j_0 \succeq j_k$ für $k = 1, \dots, m$, so folgt aus $j \succeq j_0$ immer $f_{i_k}(x_j) \in O_k$, $k = 1, \dots, m$, und daher

$$x_j \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O \subseteq U\,.$$

❑

Die Konstruktion der Initialen Topologie ist assoziativ.

**12.6.4 Lemma.** *Seien $X$, $X_i$, $i \in I$, Mengen und $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen. Weiters seien zu jedem $i \in I$ eine Indexmenge $J_i$ und zu jedem $j \in J_i$ topologische Räume $(X_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j})$ und Abbildungen $g_{i,j} : X_i \to X_{i,j}$ gegeben. Für jedes $i \in I$ versehen wir $X_i$ mit der initialen Topologie $\mathcal{T}_i$ bezüglich der Abbildungen $g_{i,j}$, $j \in J_i$.*
*Unter diesen Voraussetzungen stimmt die initiale Topologie $\mathcal{T}_1$ auf $X$ bezüglich der Abbildungen $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, mit der initialen Topologie $\mathcal{T}_2$ auf $X$ bezüglich der Abbildungen $g_{i,j} \circ f_i : X \to X_{i,j}$, $i \in I$, $j \in J_i$, überein.*

*Beweis.* Ist $\mathcal{T}'$ irgendeine Topologie auf $X$, so ist gemäß Satz 12.6.1 die Tatsache, dass alle Abbildungen $f_i : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, stetig sind, zur Stetigkeit aller Abbildungen $g_{i,j} \circ f_i : (X, \mathcal{T}') \to (X_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j})$, $i \in I$, $j \in J_i$, äquivalent.
Also stimmt die gröbste aller Topologien, welche die erste Bedingung erfüllen, – gemäß Satz 12.6.1 ist das $\mathcal{T}_1$ – mit der gröbsten aller Topologien, welche die zweite Bedingung erfüllen, – gemäß Satz 12.6.1 ist das $\mathcal{T}_2$ – überein. ❑

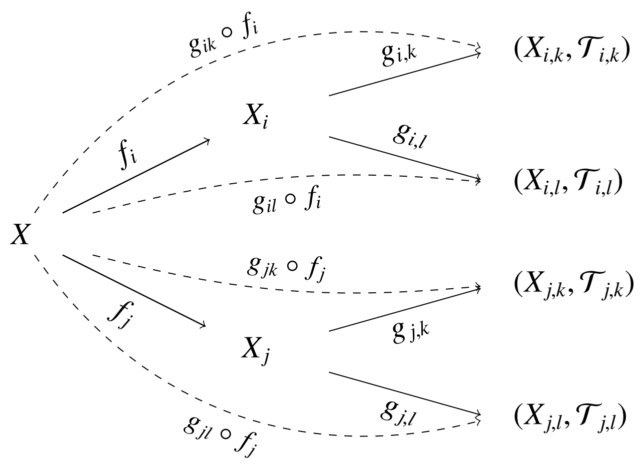


Abbildung 12.2: Veranschaulichung der Assoziativität der Initialtopologiebildung

## 12.7 Spur- und Produkttopologie

**12.7.1 Definition.** Sei $(Z, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X \subseteq Z$. Weiters bezeichne $\iota : X \to Z$ die durch $\iota(x) = x,\ x \in X$, definierte Einbettung. Die initiale Topologie auf $X$ bezüglich der Abbildung $\iota$ heißt *Spurtopologie* von $\mathcal{T}$ auf $X$ und wird als $\mathcal{T}_X$ bezeichnet. Man spricht von $(X, \mathcal{T}_X)$ als einem *Teilraum* von $(Z, \mathcal{T})$.

**12.7.2 Fakta.** Mit der Notation aus Definition 12.7.1 gelten folgende Aussagen.

1. Wegen Satz 12.6.1 ist $\iota^{-1}(\mathcal{T}) = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Subbasis für $\mathcal{T}_X$. Nun erfüllt diese Menge selbst schon (O1) - (O3), wodurch
$$\mathcal{T}_X = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\}. \tag{12.13}$$

2. Aus dem vorherigen Punkt erhält man, dass der Umgebungsfilter $\mathcal{U}_X(x)$ eines Elementes $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}_X$ übereinstimmt mit
$$\mathcal{U}_X(x) = \{U \cap X : U \in \mathcal{U}(x)\}. \tag{12.14}$$

3. Wenn $\mathcal{B}$ eine Basis (Subbasis) von $\mathcal{T}$ ist, so folgt unmittelbar aus (12.13), dass $\{B \cap X : B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis (Subbasis) von $\mathcal{T}_X$ ist. Insbesondere erfüllt $(X, \mathcal{T}_X)$ das Axiom (ABII), wenn $(Z, \mathcal{T})$ dieses erfüllt.

4. Aus (12.13) erhält man auch, dass das System $\mathfrak{A}_X$ der in $(X, \mathcal{T}_X)$ abgeschlossenen Mengen gegeben ist durch $\mathfrak{A}_X = \{A \cap X : A \in \mathfrak{A}\}$. Infolge gilt für $B \subseteq X$
$$c\ell_{\mathcal{T}_X}(B) = c\ell_{\mathcal{T}}(B) \cap X. \tag{12.15}$$

5. Gilt für $(Z, \mathcal{T})$ das Axiom (T2), so folgt aus (12.13), dass auch $(X, \mathcal{T}_X)$ dieses Axiom erfüllt.

6. Sei $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $f : Y \to Z$ eine Abbildung mit $f(Y) \subseteq X$. Gemäß Satz 12.6.1 ist dann die Stetigkeit von $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T}_X)$ zu der von $f : (Y, \mathcal{O}) \to (Z, \mathcal{T})$ äquivalent.

7. Ist $(Y, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so impliziert die Stetigkeit einer Abbildung $g : (Z, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ wegen $g|_X = g \circ \iota$ auch die Stetigkeit der Einschränkung $g|_X : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{O})$.

8. Ist $(x_j)_{j \in J}$ ein Netz in $X$ und $x \in X$, so folgt aus Lemma 12.6.3, dass $(x_j)_{j \in J}$ genau dann gegen $x$ bezüglich $\mathcal{T}$ konvergiert, wenn $(x_j)_{j \in J}$ bezüglich $\mathcal{T}_X$ gegen $x$ konvergiert.

9. Für $X \subseteq Y \subseteq Z$ folgt $\mathcal{T}_X = (\mathcal{T}_Y)_X$ aus Lemma 12.6.4.

**12.7.3 Lemma.** *Sei $\langle Z, d \rangle$ ein metrischer Raum. Ein nichtleeres $X \subseteq Z$ versehen mit der Einschränkung $d|_{X \times X}$ von $d$ stellt einen metrischen Raum $\langle X, d|_{X \times X} \rangle$ dar. Dabei stimmt die von $d|_{X \times X}$ auf $X$ erzeugte Topologie mit der Spurtopologie, die von $\mathcal{T}(d)$ auf $X$ induziert wird, überein, also $\mathcal{T}(d)_X = \mathcal{T}(d|_{X \times X})$.*

*Beweis.* Dass $d|_{X \times X}$ eine Metrik auf $X$ ist, liegt auf der Hand. Zu $O \in \mathcal{T}(d)$ und $x \in O \cap X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon^Z(x) \subseteq O$. Daraus folgt, dass die $\epsilon$-Kugel $U_\epsilon^X(x) = U_\epsilon^Z(x) \cap X$ um $x$ bezüglich $d|_{X \times X}$ in $O \cap X$ enthalten ist. Somit ist jede Menge aus $\mathcal{T}(d)_X$ offen bezüglich $d|_{X \times X}$. Ist umgekehrt $P \in \mathcal{T}(d|_{X \times X})$, so wähle man für jedes $x \in P$ ein $\epsilon_x > 0$ derart, dass die $\epsilon_x$-Kugel $U_{\epsilon_x}^X(x) = U_{\epsilon_x}^Z(x) \cap X$ in $P$ enthalten ist, womit

$$P = \bigcup_{x \in P} (U_{\epsilon_x}^Z(x) \cap X) = X \cap \bigcup_{x \in P} U_{\epsilon_x}^Z(x) .$$

Als Schnitt der in $Z$ offenen Menge $\bigcup_{x \in P} U_{\epsilon_x}^Z(x)$ und $X$ liegt $P$ in $\mathcal{T}(d)_X$. ❑

**12.7.4 Lemma.** *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ endlich viele Teilmengen mit $A_1 \cup \dots \cup A_m = X$, wobei entweder alle $A_k$, $k = 1, \dots, m$, abgeschlossen oder alle diese Teilmengen offen sind.*
*Sind die $A_k$ mit der Spurtopologie versehen und sind alle $f_k : A_k \to Y$, $k = 1, \dots, m$ bezüglich dieser stetige Funktionen derart, dass $f_j$ und $f_k$ auf $A_j \cap A_k$ für alle $j, k \in \{1, \dots, m\}$ übereinstimmen, dann ist auch die Funktion[2] $f_1 \cup \dots \cup f_m : X \to Y$ stetig.*

*Beweis.* Seien $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ alle abgeschlossen. Der Fall offener Teilmengen ist ähnlich zu beweisen. Für ein abgeschlossenes $F \subseteq Y$ gilt

$$(f_1 \cup \dots \cup f_m)^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \cup \dots \cup f_m^{-1}(F) .$$

[2] Das ist die wohldefinierte Funktion, die für $k = 1, \dots, m$ auf $A_k$ mit $f_k$ übereinstimmt.

Wegen der Stetigkeit von $f_k : A_k \to Y$ ist $f_k^{-1}(F)$ abgeschlossen bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{T}_{A_k}$ und infolge von der Bauart $C \cap A_k$ für eine in $X$ abgeschlossene Menge $C$. Als Schnitt zweier in $X$ abgeschlossener Mengen ist $f_k^{-1}(F)$ in $X$ abgeschlossen.
Als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist dann auch $(f_1 \cup \dots \cup f_m)^{-1}(F)$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$. Da $F$ beliebig war, erweist sich $f_1 \cup \dots \cup f_m$ als stetig. ❑

Eine überraschende Anwendung der Spurtopologie steckt im Beweis folgender Aussage.

**12.7.5 Proposition** (*). *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Mit $C \subseteq X$ ist auch jede Teilmenge von $C$ separabel.*

*Beweis.* Ist $C$ separabel, so erfüllt $(C, \mathcal{T}(d|_{C\times C}))$ gemäß Proposition 12.5.9 das Axiom (ABII). Für $D \subseteq C$ erfüllt auch $(D, \mathcal{T}(d|_{C\times C})_D)$ dieses Axiom; vgl. Fakta 12.7.2, 3. Nach Lemma 12.7.3 gilt $\mathcal{T}(d|_{C\times C})_D = \mathcal{T}(d|_{D\times D})$, womit aus Proposition 12.5.9 die Separabilität von $D$ folgt. ❑

**12.7.6 Definition.** Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Die initiale Topologie auf $X := \prod_{i\in I} X_i$ bezüglich der Funktionen $\pi_i : X \to X_i$, $i \in I$, wobei

$$\pi_i\big((x_k)_{k\in I}\big) = x_i\,,$$

nennt man *Produkttopologie* der $\mathcal{T}_i$ auf $X$ und wird bezeichnet mit $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ .

**12.7.7 Fakta.**

1. Für ein $O \subseteq X_i$ gilt $\pi_i^{-1}(O) = \prod_{k\in I} O_k$, wobei $O_i = O$ und $O_k = X_k$ für $k \neq i$. Gemäß Satz 12.6.1 und Fakta 12.5.3, 2, bilden dann die Mengen der Gestalt
$$\prod_{k\in I} O_k\,, \tag{12.16}$$
wobei $O_k \in \mathcal{T}_k, k \in I$, und für alle $k \in I$ bis auf endlich viele $O_k = X_k$ gilt, eine Basis von $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

2. Die Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ bilden offene Mengen bezüglich $\prod_{k\in I} \mathcal{T}_k$ auf offene Mengen bezüglich $\mathcal{T}_i$ ab, also sind sie *offene Abbildungen*.
In der Tat gilt für Basismengen der Gestalt (12.16) offenbar $\pi_i(\prod_{k\in I} O_k) = O_i$. Also ist das Bild unter $\pi_i$ einer jeden Menge aus dieser Basis offen in $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Da jede offene Menge in $\prod_{k\in I} \mathcal{T}_k$ Vereinigung von Basismengen ist, folgt die Behauptung.

3. Weiters sieht man leicht mit Hilfe der Basis bestehend aus Mengen der Form (12.16), dass für einen Punkt $(x_i)_{i\in I} \in X$ die Mengen der Bauart
$$\prod_{i\in I} U_i\,,$$
wobei $U_i \in \mathcal{U}(x_i), i \in I$, und $U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele $i$, eine Umgebungsbasis von $(x_i)_{i\in I}$ bezüglich $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

4. Gemäß Lemma 12.6.3 gilt für ein Netz $(x_j)_{j\in J}$ und einen Punkt $x$ aus $\prod_{i\in I} X_i$, also $x_j = (\xi_{j,i})_{i\in I}$ und $x = (\xi_i)_{i\in I}$ mit $\xi_{j,i}, \xi_i \in X_i$,
$$x_j \overset{j\in J}{\longrightarrow} x \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{j,i} \overset{j\in J}{\longrightarrow} \xi_i \text{ für alle } i \in I\,. \tag{12.17}$$
5. Für abgeschlossene $A_i \subseteq X_i,\ i \in I$, folgt aus (12.17) die Abgeschlossenheit von $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$. Alternativ kann man das auch daraus folgern, dass
$$\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i)$$
als Durchschnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen selber wieder abgeschlossen ist.

**12.7.8 Bemerkung.** Wendet man die Konstruktion der Produkttopologie auf die zwei Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ und $I = \{1, 2\}$ an, so bilden alle Mengen der Bauart $O_1 \times O_2$ mit $O_1 \in \mathcal{T}_1, O_2 \in \mathcal{T}_2$ eine Basis der Produkttopologie $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Zudem sind alle Mengen $A_1 \times A_2$ für abgeschlossene $A_1 \subseteq X_1$ und $A_2 \subseteq X_2$ abgeschlossen.

**12.7.9 Lemma.** *Für zwei metrische Räume $\langle X_1, d_1\rangle$ und $\langle X_2, d_2\rangle$ bildet die durch*
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\left( d_1(x_1, y_1),\ d_2(x_2, y_2)\right)$$
*definierte Abbildung $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf $X_1 \times X_2$. Die von dieser Metrik auf $X_1 \times X_2$ erzeugte Topologie stimmt mit der Produkttopologie von $\mathcal{T}(d_1)$ und $\mathcal{T}(d_2)$ überein, also $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$.*

*Beweis.* Dass $d$ eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ abgibt, zeigt man auf elementare Weise; vgl. Fakta 8.7.8. Dabei gilt $U_\epsilon((x_1, x_2)) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2)$. Ein $O \subseteq X_1 \times X_2$ liegt genau dann in $\mathcal{T}(d)$, wenn
$$\forall (x_1, x_2) \in O\, \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon((x_1, x_2)) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2) \subseteq O\,,$$
was aber äquivalent zu
$$\forall (x_1, x_2) \in O\, \exists O_1 \in \mathcal{T}(d_1), O_2 \in \mathcal{T}(d_2) : (x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subseteq O$$
ist. Da die Mengen der Form $O_1 \times O_2$ eine Basis von $\mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$ abgeben, bedeutet das genau $O \in \mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$. ❑

Das folgende Resultat weißt insbesondere den Raum $C(X, \mathbb{R})$ aller reellwertigen stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum als Vektorraum über $\mathbb{R}$ aus. Entsprechendes gilt für $C(X, \mathbb{C})$ sowie für $C(X, Z)$ mit einem normierten Raum $Z$.

**12.7.10 Lemma.** *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Sind $f$ und $g$ stetig, so sind es auch $\lambda f + \mu g$ und $fg$. Die Stetigkeit von $f$ samt der Voraussetzung $0 \notin f(X)$ impliziert zudem die Stetigkeit von $\frac{1}{f}$.*
*Dieselben Aussagen gelten für komplexwertige Funktionen und komplexe Skalare. Für Funktionen $f, g$ auf $X$ mit Werten in einem normierten Raum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ impliziert die Stetigkeit von $f$ und $g$ jene von $\lambda f + \mu g$, wobei $\lambda, \mu$ aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ sind.*

*Beweis.* Die Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto \lambda x + \mu y \in \mathbb{R}$ ist bekannterweise stetig. Gemäß Satz 12.6.1 ist $a \mapsto (f(a), g(a))$ als Abbildung von $X$ nach $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ebenfalls stetig. $\lambda f + \mu g$ ist somit als Zusammensetzung dieser Funktionen stetig.
Wegen der Stetigkeit der Addition und skalaren Multiplikation auf allen normierten Räumen gemäß Lemma 9.1.2 sowie der Multiplikation und von $s \mapsto \frac{1}{s}$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gemäß Beispiel 6.1.7 verlaufen die Beweise für $fg$, $\frac{1}{f}$, jene im komplexwertigen Fall und jene für den Fall von Funktionen mit Werten in einem normierten Raum ganz analog. ❑

Wir wollen an die Banachräume $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ und $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ aller beschränkten, reell- bzw. komplexwertigen Funktionen auf einer Menge $X$ versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ erinnern; siehe Beispiel 9.1.9. Im Falle, dass $X$ eine Topologie $\mathcal{T}$ trägt, bilden die Mengen $C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_b(X, \mathbb{C})$ aller beschränkten, auf $(X, \mathcal{T})$ stetigen und reell- bzw. komplexwertigen Funktionen offenbar Teilmengen von $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.

**12.7.11 Lemma.** *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bilden $C_b(X, \mathbb{R})$ und $C_b(X, \mathbb{C})$ abgeschlossene Teilräume der Banachräume $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Insbesondere sind $(C_b(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ und $(C_b(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ Banachräume.*

*Beweis.* Wir betrachten nur den reellwertige Fall, da der komplexwertige genauso zu behandeln ist. Wegen Lemma 12.7.10 bildet $C_b(X, \mathbb{R}) = \mathcal{B}(X, \mathbb{R}) \cap C(X, \mathbb{R})$ einen linearen Teilraum vom Vektorraum $\mathbb{R}^X$ aller reellwertigen Funktionen auf $X$ und daher von $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, konvergiere eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $C_b(X, \mathbb{R})$ gegen ein $f$ aus $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig. Für $x \in X$ und ein gegen $x$ konvergentes Netz $(x_j)_{j \in J}$ existiert $\lim_{j \in J} f(x_j) = \lim_{j \in J} \lim_{n \to \infty} f_n(x_j)$ nach Lemma 8.7.1, wobei

$$\lim_{j \in J} f(x_j) = \lim_{j \in J} \lim_{n \to \infty} f_n(x_j) = \lim_{n \to \infty} \lim_{j \in J} f_n(x_j) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) .$$

Da das Netz beliebig war, ist $f$ nach Lemma 12.4.3 stetig, also $f \in C_b(X, \mathbb{R})$.
Schließlich ist $(C_b(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ nach Lemma 9.1.8 selber ein Banachraum. ❑

## 12.8 Finale Topologie*

**12.8.1 Satz.** *Seien $X$ eine Menge, $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$, topologische Räume und $f_i : X_i \to X$, $i \in I$, Abbildungen.*

$$\begin{tikzcd}
(X_i, \mathcal{T}_i) \arrow[dr, "f_i"] \arrow[d, dotted, no head] & \\
(X_j, \mathcal{T}_j) \arrow[r, "f_j"] & X \\
(X_k, \mathcal{T}_k) \arrow[ur, "f_k"'] \arrow[u, dotted, no head] &
\end{tikzcd}$$

- *Unter allen Topologien $\mathcal{T}'$ auf $X$ mit der Eigenschaft, dass alle $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}')$, $i \in I$, stetig sind, ist*

$$\mathcal{T} := \{ O \subseteq X : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i \text{ für alle } i \in I \} \tag{12.18}$$

*die feinste. $\mathcal{T}$ nennt man* finale Topologie *bezüglich der Abbildungen $f_i$, $i \in I$.*

- *Für diese finale Topologie $\mathcal{T}$ und einen weiteren topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ ist eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ genau dann stetig, wenn $f \circ f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{O})$ für alle $i \in I$ stetig ist.*

*Beweis.*

⇝ Wegen $f_i^{-1}(X) = X_i$, $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, wegen $f_i^{-1}(O_1 \cap \ldots \cap O_n) = f_i^{-1}(O_1) \cap \ldots \cap f_i^{-1}(O_n)$ und wegen $f_i^{-1}\big(\bigcup_{j \in J} O_j\big) = \bigcup_{j \in J} f_i^{-1}(O_j)$ für alle $i \in I$ erfüllt $\mathcal{T}$ die Axiome (O1)-(O3) und bildet daher eine Topologie.

Definitionsgemäß gilt $f_i^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}_i$, womit alle $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$ stetig sind. Ist $\mathcal{T}'$ eine beliebige Topologie auf $X$ derart, dass alle $f_i$ stetig sind, so folgt $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ für alle $O \in \mathcal{T}'$, also $O \in \mathcal{T}$. Somit gilt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, wodurch sich $\mathcal{T}$ als feinste derartige Topologie herausstellt.

⇝ Ist $(Y, \mathcal{O})$ ein weiterer topologischer Raum, so folgt aus der Stetigkeit einer Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ wegen Lemma 12.4.6 auch die Stetigkeit aller Funktionen $f \circ f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{O})$, $i \in I$.

Umgekehrt bedingt die Stetigkeit aller $f \circ f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{O})$, $i \in I$,

$$f_i^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O})) = (f \circ f_i)^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}_i, \ i \in I .$$

Gemäß der Definition von $\mathcal{T}$ bedeutet das $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$, womit $f$ stetig ist. ❑

**12.8.2 Bemerkung.** Die Finale Topologie ist die einzige Topologie auf $X$ mit der Eigenschaft, dass für jeden topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ eine Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ genau dann stetig ist, wenn alle $f \circ f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{O})$, $i \in I$, stetig sind.
Um das einzusehen, sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf $X$ mit dieser Eigenschaft. Da die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ stetig ist, folgt die Stetigkeit aller Funktionen $f_i = \mathrm{id}_X \circ f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}')$, $i \in I$. Die finale Topologie $\mathcal{T}$ ist die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft, wodurch $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ gilt. Für $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ sind andererseits alle $\mathrm{id}_X \circ f_i = f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$ stetig. Aus der angenommenen Eigenschaft von $\mathcal{T}'$ folgt die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$, womit auch $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

**12.8.3 Bemerkung.** Das Bilden Finaler Topologien ist assoziativ; es gilt also ein dem Lemma 12.6.4 entsprechendes Resultat, wobei der Beweis ähnlich verläuft.

**12.8.4 Beispiel.** Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $Y$. Weiters sei $\pi : Y \to Y/_\sim$ die *Faktorisierungsabbildung* $\pi(x) = [x]_\sim$. Die finale Topologie auf $Y/_\sim$ bezüglich $\pi$ heißt *Quotiententopologie* und wird bezeichnet als $\mathcal{T}/_\sim$.

**12.8.5 Bemerkung.** Sei $(Y, \mathcal{T})$ und $\sim$ wie in Beispiel 12.8.4. Ein $A \subseteq Y$ heißt *gesättigt* bezüglich $\sim$, wenn $x \in A$ die Inklusion $[x]_\sim \subseteq A$ nach sich zieht. Also ist $A$ genau dann gesättigt, wenn aus $x \in A, y \in Y$ mit $\pi(x) = \pi(y)$ immer $y \in A$ folgt, was offenbar nichts anderes als $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$ bedeutet.
Als Folge sind alle Mengen der Bauart $\pi^{-1}(B)$ mit $B \subseteq Y/\sim$ gesättigt, und $A \mapsto \pi(A)$ stellt eine bijektive Abbildung von allen gesättigten Teilmengen von $Y$ auf alle Teilmengen von $Y/\sim$ dar, wobei $B \mapsto \pi^{-1}(B)$ ihre Umkehrung ist.
Eine Menge $P \subseteq Y/\sim$ liegt gemäß (12.18) genau dann in $\mathcal{T}/\sim$, wenn $\pi^{-1}(P)$ offen in $(Y, \mathcal{T})$ ist. Folglich ist $O \mapsto \pi(O)$ eine Bijektion von allen gesättigten offenen Teilmengen von $Y$ auf $\mathcal{T}/\sim$. Entsprechendes gilt für abgeschlossene Mengen.

Für zwei Mengen $X, Y$ und eine Abbildung $f : X \to Y$ identifiziert man

$$\sim \;:=\; \{ (x, z) \in X \times X : f(x) = f(z) \}$$

leicht als Äquivalenzrelation. Infolge ist durch $g([x]_\sim) = f(x)$ eine Funktion $g : X/\sim \to f(X)$ wohldefiniert. Diese ist bijektiv und erfüllt $\iota \circ g \circ \pi = f$, wobei $\pi : X \to X/\sim$ die entsprechende Faktorisierungsabbildung und $\iota : f(X) \to Y$ die Einbettung $f(X) \ni y \mapsto y \in Y$ bezeichnet.

**12.8.6 Proposition.** *Für eine stetige Abbildung $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ ist die durch $g([x]_\sim) = f(x)$ definierte Funktion $g : (X/\sim, \mathcal{T}/\sim) \to (f(X), \mathcal{V}_{f(X)})$ stetig. Zudem sind folgende Aussagen äquivalent.*

*(i)* *$g : (X/\sim, \mathcal{T}/\sim) \to (f(X), \mathcal{V}_{f(X)})$ ist sogar ein Homöomorphismus.*

*(ii)* *Für jede bezüglich $\sim$ gesättigte offene Menge $O \subseteq X$ ist $f(O)$ offen in $(f(X), \mathcal{V}_{f(X)})$.*

*(iii)* *Für jede bezüglich $\sim$ gesättigte abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist $f(A)$ abgeschlossen in $(f(X), \mathcal{V}_{f(X)})$.*

*Beweis.* Nach Satz 12.6.1 bzw. Fakta 12.7.2 ist auch $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{V}_{f(X)})$ stetig. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y = f(X)$ und $\iota = \mathrm{id}_Y$ annehmen. Die Stetigkeit von $g$ folgt unmittelbar aus Satz 12.8.1, da $X/\sim$ die finale Topologie $\mathcal{T}/\sim$ bzgl. $\pi$ trägt und $g \circ \pi = f$ stetig ist.
Die Funktion $g$ ist genau dann Homöomorphismus, wenn auch $g^{-1}$ stetig ist, also wenn $g(P) \in \mathcal{V}$ für alle $P \in \mathcal{T}/\sim$. Wie in Bemerkung 12.8.5 festgestellt, durchläuft $\pi^{-1}(P)$ für $P \in \mathcal{T}/\sim$ alle offenen und gesättigten Teilmengen von $X$. Zudem gilt

$$g(P) = g \circ \pi(\pi^{-1}(P)) = f(\pi^{-1}(P)),$$

woraus man sofort die Äquivalenz von (i) und (ii) erkennt. Die Äquivalenz von (i) und (iii) zeigt man entsprechend. ❑

## 12.9 Zusammenhang und Trennungseigenschaft (T1)

Der Begriff der Getrenntheit zweier Teilmengen eines topologischen Raumes, welchen wir in diesem Abschnitt einführen wollen, entspricht ungefähr dem der Disjunktheit zweier Mengen aus der Mengenlehre. Dabei gibt es eine schwächere und eine stärkere Version.

**12.9.1 Definition.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $A, B$ Teilmengen von $X$.

- $A$ und $B$ heißen in $(X, \mathcal{T})$ *getrennt*, wenn $c\ell(A) \cap B = A \cap c\ell(B) = \emptyset$.
- $A$ und $B$ heißen in $(X, \mathcal{T})$ *getrennt durch offene Mengen*, wenn es disjunkte offene Mengen $O_A, O_B$ gibt mit $A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B$. Dazu sagen wir auch, dass sich $A$ und $B$ durch offene Mengen trennen lassen.

**12.9.2 Fakta.**

1. Offenbar sind getrennte Mengen und auch durch offene Mengen getrennte Mengen disjunkt.
2. $c\ell(A) \cap B = A \cap c\ell(B) = \emptyset$ ist äquivalent zu $B \subseteq c\ell(A)^c$ und $A \subseteq c\ell(B)^c$, und daher auch zur Existenz offener Mengen $O_A$ und $O_B$ mit $B \subseteq O_B,\ A \cap O_B = \emptyset$ und $A \subseteq O_A,\ B \cap O_A = \emptyset$.
3. Insbesondere sind $A$ und $B$ sicher dann getrennt, wenn sie durch offene Mengen getrennt sind. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
4. Gilt $A, B \subseteq X$ und setzen wir $C := A \cup B$, so gilt für den Abschluss in $C$ bezüglich der Spurtopologie $\mathcal{T}_C$ bekannterweise

   $$c\ell_{\mathcal{T}_C}(A) = c\ell(A) \cap C = A \cup (B \cap c\ell(A) \setminus A), \quad c\ell_{\mathcal{T}_C}(B) = c\ell(B) \cap C = B \cup (A \cap c\ell(B) \setminus B).$$

   Somit sind disjunkte Mengen $A$ und $B$ genau dann in $(X, \mathcal{T})$ getrennt, wenn $A$ und $B$ beide in $A \cup B$ bezüglich der Spurtopologie abgeschlossen sind. Durch Komplementbildung in $A \cup B$ erkennt man auch, dass disjunkte Mengen $A$ und $B$ genau dann in $(X, \mathcal{T})$ getrennt sind, wenn $A$ und $B$ beide in $A \cup B$ bezüglich der Spurtopologie offen sind.
5. Aus 4 erkennen wir, dass Teilmengen $A, B \subseteq X$ genau dann in $(X, \mathcal{T})$ getrennt sind, wenn sie in $(A \cup B, \mathcal{T}_{A \cup B})$ durch offene Mengen getrennt sind.

   Nach Fakta 12.7.2, 9, gilt $\mathcal{T}_{A \cup B} = (\mathcal{T}_Y)_{A \cup B}$ für $A, B \subseteq Y \subseteq X$, wodurch $A$ und $B$ genau dann in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ getrennt sind, wenn sie es in $(X, \mathcal{T})$ sind.

   Die Eigenschaft, getrennt durch offene Mengen zu sein, hängt dagegen ganz wesentlich von dem betrachteten topologischen Raum ab.

Für eine weitere Charakterisierung der Eigenschaft, durch offene Mengen getrennt zu sein, siehe Fakta 12.10.2, 3.

**12.9.3 Definition.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das erste *Trennungsaxiom (T1)*, wenn gilt:

(T1) Je zwei verschiedene einpunktige Mengen sind getrennt.

Das schon bekannte Trennungsaxiom (T2) bedeutet im Gegensatz dazu, dass sich je zwei verschiedene einpunktige Mengen durch offene Mengen trennen lassen. (T2) ist somit stärker als (T1).

**12.9.4 Lemma.** *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt genau dann (T1), wenn einpunktige Mengen abgeschlossen sind.*

*Beweis.* Sei (T1) erfüllt und $x \in X$. Nach Fakta 12.9.2, 2, gibt es zu jedem $y \in \{x\}^c$ eine offene Umgebung von $y$, die $x$ nicht enthält, also ganz in $\{x\}^c$ enthalten ist. Gemäß Lemma 12.1.11 ist $\{x\}^c$ dann offen.
Sind umgekehrt einpunktige Mengen abgeschlossen, so gilt für verschiedene $x, y \in X$, dass auch $\{x\}$ und $\{y\}$ in $\{x, y\}$ abgeschlossen sind. Gemäß Fakta 12.9.2, 4, sind diese Mengen dann getrennt. ❑

Eins zu eins kann man den Begriff einer zusammenhängenden Menge auf metrischen Räumen auch für topologische Räume einführen; vgl. Definition 6.2.2.

**12.9.5 Definition.** Eine Teilmenge $E$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt *zusammenhängend*, wenn man $E$ nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen schreiben kann.

Aus Fakta 12.9.2, 5, erhalten wir

**12.9.6 Lemma.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raume und $E \subseteq X$. Die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein, hängt nur von der Spurtopologie auf $E$ ab. Insbesondere gilt für $E \subseteq Y \subseteq X$, dass $E$ genau dann in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zusammenhängend ist, wenn $E$ es in $(X, \mathcal{T})$ ist.*

Das für metrische Räume wichtige Resultat in Proposition 6.2.4, dass Bilder von zusammenhängenden Mengen unter stetigen Funktionen wieder zusammenhängend sind, lässt sich unmittelbar auf topologische Räume übertragen. Indem man nur Folgen durch Netze ersetzt, kann man auch fast denselben Beweis hernehmen. Wir wollen den Beweis aber etwas anders führen.

**12.9.7 Proposition.** *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Für ein zusammenhängendes $E \subseteq X$ ist auch $f(E)$ zusammenhängend.*

*Beweis.* Mit $f : X \to Y$ ist auch $f|_E : E \to f(E)$ stetig, wobei $E$ und $f(E)$ jeweils mit der Spurtopologie versehen sind. Wäre $f(E)$ nicht zusammenhängend, also $f(E) = A \cup B$ mit in $f(E)$ abgeschlossenen und disjunkten $A, B \neq \emptyset$, dann erhielten wir im Widerspruch zur Voraussetzung

$$E = f|_E^{-1}(A) \cup f|_E^{-1}(B)$$

mit nichtleeren, in $E$ abgeschlossenen und disjunkten $f|_E^{-1}(A)$, $f|_E^{-1}(B)$. ❑

**12.9.8 Lemma.** *Sei $E$ eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Sind $A, B \subseteq X$ getrennt mit $E \subseteq A \cup B$, so gilt $E \subseteq A$ oder $E \subseteq B$.*

*Beweis.* Offensichtlich sind $A \cap E$ und $B \cap E$ als Teilmengen zweier getrennter Mengen getrennt. Wegen $E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$ und da $E$ zusammenhängend ist, folgt $A \cap E = \emptyset$ oder $B \cap E = \emptyset$, also $E \subseteq B$ oder $E \subseteq A$. ❑

**12.9.9 Korollar.** *Sind $E_i$, $i \in I$, zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raumes derart, dass für ein gewisses $k \in I$ und allen $i \in I$ die Mengen $E_k$ und $E_i$ nicht getrennt[3] sind, so ist auch $E := \bigcup_{i \in I} E_i$ zusammenhängend.*

*Beweis.* Gilt $E = A \cup B$ mit getrennten $A$ und $B$, so erhalten wir $E_i \subseteq A$ oder $E_i \subseteq B$ für jedes $i \in I$ wegen Lemma 12.9.8. Für $i = k$ gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E_k \subseteq A$. Im Fall $E_i \subseteq B$ für nur ein $i \in I$ wären $E_k$ und $E_i$ im Widerspruch zur Voraussetzung getrennt. Somit muss $E$ ganz in $A$ enthalten sein, und daher $B = \emptyset$. ❑

**12.9.10 Korollar.** *Mit $E$ ist auch jede Teilmenge $C$ eines topologischen Raumes, welche die Inklusionskette $E \subseteq C \subseteq c\ell(E)$ erfüllt, zusammenhängend.*

*Beweis.* Gilt $C = A \cup B$ mit getrennten $A$ und $B$, so erhalten wir $E \subseteq A$ oder $E \subseteq B$ wegen Lemma 12.9.8. Im ersten Fall folgt $B = C \cap B \subseteq c\ell(E) \cap B \subseteq c\ell(A) \cap B = \emptyset$. Im zweiten Fall schließt man entsprechend auf $A = \emptyset$. ❑

**12.9.11 Korollar.** *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist die durch*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, E \subseteq X \;\; \textit{zusammenhängend mit} \;\; x, y \in E\,,$$

*auf $X$ definierte Relation eine Äquivalenzrelation. Für jedes $x \in X$ ist dabei die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ die größte zusammenhängende Menge, welche $x$ enthält. Zudem ist $[x]_\sim$ abgeschlossen. Man nennt $[x]_\sim$ die $x$ enthaltende* Zusammenhangskomponente *von $X$.*

*Beweis.* Die Relation ist reflexiv, da einpunktige Mengen immer zusammenhängend sind. Die Symmetrie von $\sim$ ist offensichtlich. Aus $x \sim y, y \sim z$ folgt $x, y \in E$ und $y, z \in F$ für zusammenhängende $E$ und $F$. Gemäß Korollar 12.9.9 ist dann $E \cup F$ zusammenhängend, wobei $x, z \in E \cup F$. Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Schließlich ist für $x \in X$ die Menge

$$[x]_\sim = \bigcup_{\substack{x \in E \\ E \text{ ist zusammenhängend}}} E\,,$$

wegen Korollar 12.9.9 zusammenhängend. Klarerweise ist diese Menge dann auch die größte zusammenhängende Menge, die $x$ enthält, wodurch $[x]_\sim$ gemäß Korollar 12.9.10 auch abgeschlossen sein muss. ❑

**12.9.12 Proposition.** *Für topologische Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T} := \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$. Ist $R_i$ für jedes $i \in I$ eine Teilmengen von $X_i$, so stellt $R := \prod_{i \in I} R_i$ genau dann eine zusammenhängende Teilmenge von $X$ dar, wenn für alle $i \in I$ die Menge $R_i$ zusammenhängend in $X_i$ ist.*

[3] Diese Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn $E_k$ mit allen $E_i$ einen nichtleeren Schnitt hat.

*Beweis.* Gemäß Lemma 12.6.4 gilt $\mathcal{T}_R = \prod_{i\in I}(\mathcal{T}_i)_{R_i}$, weshalb wir nach Lemma 12.9.6 $R_i = X_i$ und daher $R = X$ annehmen können.
Wegen der Stetigkeit der Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ ist mit $X$ auch $X_i = \pi_i(X)$ zusammenhängend; vgl. Proposition 12.9.7.
Seien umgekehrt alle $X_i$ zusammenhängend. Setzen wir für $y = (y_i)_{i\in I} \in X$ und $j \in I$

$$X_j(y) = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : x_i = y_i \text{ für alle } i \neq j\},$$

so ist diese Menge das Bild der durch $x_j \mapsto (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i = y_i$ für alle $i \neq j$ definierten Abbildung $\iota_{j,y} : X_j \to X$. Mit Satz 12.6.1 folgt aus $\pi_j \circ \iota_{j,y} = \mathrm{id}_{X_j}$ und $\pi_i \circ \iota_{j,y} \equiv y_j$ für $i \neq j$ die Stetigkeit von $\iota_{j,y}$. Nach Proposition 12.9.7 ist $X_j(y)$ daher zusammenhängend.
Wäre $X$ nicht zusammenhängend, so hätten wir $X = A \cup B$ für zwei nichtleere offene und disjunkte Teilmengen $A$ und $B$ von $X$; siehe Fakta 12.9.2, 4. Zu $(a_i)_{i\in I} \in A$ und $(b_i)_{i\in I} \in B$ gibt es nach (12.16) in Fakta 12.7.7 ein endliches $J \subseteq I$ und offene $P_i \in \mathcal{T}_i$ mit $(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} P_i \subseteq B$, wobei $P_i = X_i$ für alle $i \in I \setminus J$. Insbesondere gilt auch $(b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} P_i \subseteq B$, wenn wir für $i \in I \setminus J$ die $b_i$ abändern zu $b_i := a_i$.
Da $X_j(b)$ für das derart abgeänderte $b = (b_i)_{i\in I}$ zusammenhängend ist, gilt gemäß Lemma 12.9.8 die Inklusion $(b_i)_{i\in I} \in X_j(b) \subseteq B$. Somit liegt auch $(b_i)_{i\in I}$ in $B$, wenn wir $(b_i)_{i\in I}$ an einer Stelle $j \in J$ zu $b_j := a_j$ abändern. Führen wir das für alle $j$ aus der endlichen Menge $J$ durch, so erhalten wir den Widerspruch $(a_i)_{i\in I} \in A \cap B = \emptyset$. ❑

## 12.10 Trennungseigenschaften (T3) und (T4)

Wir wollen dieses Kapitel mit der einfachen Bemerkung starten, dass in (T2)-Räumen einpunktige Mengen $\{x\}$ abgeschlossen sind. Das folgt aus der Beobachtung, dass es zu $y \in \{x\}^c$ wegen (T2) eine Umgebung gibt, die $x$ nicht enthält, also ganz in $\{x\}^c$ enthalten ist. Wegen Lemma 12.1.11 ist $\{x\}^c$ dann offen.
Nach Definition 12.9.1 sind zwei disjunkte Mengen $A$ und $B$ getrennt durch offenen Mengen, wenn es disjunkte offene Mengen $O_A, O_B$ gibt mit $A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B$.

**12.10.1 Definition.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *regulär*, falls er neben dem Axiom (T2) noch das *Trennungsaxiom (T3)* erfüllt:

(T3) Abgeschlossene Mengen $A$ und einpunktige Mengen $\{x\}$ mit $x \notin A$ lassen sich durch offene Mengen trennen, also gibt es $O_x, O_A \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x, A \subseteq O_A$ und $O_x \cap O_A = \emptyset$.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *normal*, falls er neben dem Axiom (T2) noch das *Trennungsaxiom (T4)* erfüllt:

(T4) Disjunkte abgeschlossene Mengen $A$ und $B$ lassen sich durch offene Mengen trennen, also gibt es $O_A, O_B \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq O_A, B \subseteq O_B$ und $O_A \cap O_B = \emptyset$.

**12.10.2 Fakta.**

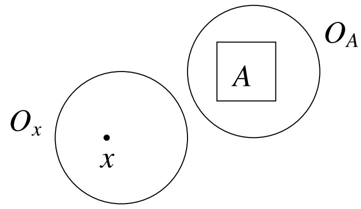


Abbildung 12.3: Drittes Trennungsaxiom ($T_3$)

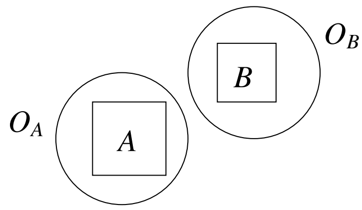


Abbildung 12.4: Viertes Trennungsaxiom (T4)

1. Das Axiom (T2) besagt, dass sich je zwei verschiedene einpunktige Mengen durch offene Mengen trennen lassen, und ist somit in gewisser Weise vom gleichen Typ wie (T3) und (T4).

2. Da einpunktige Mengen in (T2)-Räumen abgeschlossen sind, folgt aus normal auch regulär. Im Allgemeinen gilt die Umkehrung nicht.

3. Zwei disjunkte Mengen $A$ und $B$ – die Disjunktheit ist äquivalent zu $A \subseteq B^c$ – lassen sich genau dann durch offene Mengen trennen, wenn es ein offenes $O$ gibt mit

$$A \subseteq O \subseteq c\ell(O) \subseteq B^c\,. \tag{12.19}$$

   In der Tat folgt aus $A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B,\ O_A \cap O_B = \emptyset$, dass $A \subseteq O_A \subseteq O_B^c \subseteq B^c$ und daraus $A \subseteq O_A \subseteq c\ell(O_A) \subseteq O_B^c \subseteq B^c$. Andererseits folgt aus (12.19) unmittelbar $A \subseteq O,\ B \subseteq c\ell(O)^c,\ O \cap c\ell(O)^c = \emptyset$.

4. Wegen 3 ist (T3) äquivalent zur der Tatsache, dass man zu jedem Punkt $x$ und jedem offenen $O \ni x$ ein offenes $P$ mit $x \in P \subseteq c\ell(P) \subseteq O$ finden kann.

   Das ist nach Fakta 12.1.10, 2, wiederum äquivalent zu der Tatsache, dass man zu einer beliebigen Umgebung $U \in \mathscr{U}(x)$ eines beliebigen Punktes $x$ eine Umgebung $V \in \mathscr{U}(x)$ mit $c\ell(V) \subseteq U$ finden kann. Dieses Faktum lässt sich auch durch die Existenz einer Umgebungsbasis von jedem Punkt bestehend aus abgeschlossenen Mengen ausdrücken.

5. Im Gegensatz zu (T4) vererben sich die Axiome (T2) und (T3) auf Teilräume. Gilt also $Y \subseteq X$ für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, der (T2) bzw. (T3) erfüllt, so erfüllt $(Y, \mathcal{T}_Y)$ auch (T2) bzw. (T3).

Um das einzusehen, erfülle $(X, \mathcal{T})$ zunächst (T2). Sind dann $x \neq y \in Y$ und $O_x, O_y \in \mathcal{T}$ disjunkt mit $x \in O_x$ bzw. $y \in O_y$, so folgt $x \in O_x \cap Y \in \mathcal{T}_Y, y \in O_y \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, womit auch $(Y, \mathcal{T}_Y)$ das Axiom (T2) erfüllt.

Gilt (T3) auf $(X, \mathcal{T})$, ist $x \in Y$ und $W$ eine Umgebung von $x$ in $Y$, so haben wir in Fakta 12.7.2 gesehen, dass $W = U \cap Y$ für eine Umgebung $U$ von $x$ in $X$. Wegen (T3) gibt es eine Umgebung $V$ von $x$ in $X$ mit $c\ell(V) \subseteq U$. Infolge ist $V \cap Y$ eine Umgebung von $x$ in $Y$ mit

$$x \in c\ell_{\mathcal{T}_Y}(V \cap Y) = c\ell_{\mathcal{T}}(V \cap Y) \cap Y \subseteq c\ell(V) \cap Y \subseteq U \cap Y = W\,.$$

Also gilt (T3) auch auf $(Y, \mathcal{T}_Y)$.

6. Ähnlich zeigt man, dass sich die Axiome (T2) und (T3) von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)$ auf den Produktraum $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ vererben.

**12.10.3 Lemma.** *Metrische Räume sind normal.*

*Beweis.* Wie wir in Beispiel 12.1.16 festgestellt haben, sind alle metrischen Räume Hausdorffsch. Um (T4) zu zeigen, seien $A$ und $B$ zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes. Weil $B^c$ offen ist, gibt es zu $a \in A$ ein $\epsilon_a > 0$ mit $U_{2\epsilon_a}(a) \subseteq B^c$. Für $b \in B$ gibt es entsprechend ein $\epsilon_b > 0$ mit $U_{2\epsilon_b}(b) \subseteq A^c$. Setzen wir

$$O_A := \bigcup_{a \in A} U_{\epsilon_a}(a) \quad \text{und} \quad O_B := \bigcup_{b \in B} U_{\epsilon_b}(b)\,,$$

dann gibt es zu $c \in O_A \cap O_B$ Punkte $a \in A$, $b \in B$ mit $c \in U_{\epsilon_a}(a) \cap U_{\epsilon_b}(b)$. Aus $\epsilon_a \geq \epsilon_b$ folgt $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < 2\epsilon_a$, womit wir der Widerspruch $b \in U_{2\epsilon_a}(a)$ erhalten. Entsprechend folgt aus $\epsilon_b \geq \epsilon_a$ der Widerspruch $a \in U_{2\epsilon_b}(b)$. Also gilt $A \subseteq O_A$, $B \subseteq O_B$ und $O_A \cap O_B = \emptyset$. ❑

## 12.11 Das Lemma von Urysohn

In den folgenden beiden Resultaten bezeichnet $M_k$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Teilmenge $M_k = \{\frac{l}{2^k} : l = 0, \dots, 2^k\}$ von $[0,1]$. Die Menge $M := \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} M_k$ ist dann dicht in $[0,1]$.

**12.11.1 Lemma.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Weiters sei jedem $r \in M$ eine offene Menge $O_r \in \mathcal{T}$ derart zugeordnet, dass aus $r, s \in M, r < s$ die Inklusion $c\ell(O_r) \subseteq O_s$ folgt sowie $O_0 = \emptyset, O_1 = X$ gilt. Die durch*

$$f(x) := \inf\{r \in M : \; x \in O_r\}\,,$$

*definierte Abbildung $f : X \to [0,1]$ ist dann stetig. Auf $\bigcap_{r \in M, r > 0} O_r$ hat $f$ den Wert Null und auf $X \setminus \bigcup_{r \in M, r < 1} O_r$ den Wert Eins.*

*Beweis.* Wegen $O_1 = X$ ist $\{r \in M :\ x \in O_r\}$ für jedes $x \in X$ eine nichtleere Teilmenge von $[0,1]$, wodurch $f(x)$ ein Element von $[0,1]$ ist. Wegen $O_0 = \emptyset$ ist $\{r \in M :\ x \in c\ell(O_r)^c\}$ für jedes $x \in X$ ebenfalls eine nichtleere Teilmenge von $[0,1]$, womit

$$g(x) := \sup\{r \in M :\ x \in c\ell(O_r)^c\} \in [0,1]\,.$$

Aus $s \in \{r \in M :\ x \in c\ell(O_r)^c\}$ und $t \in \{r \in M :\ x \in O_r\}$ folgt $s < t$, da $s \geq t$ die Beziehung $x \in c\ell(O_s)^c \cap O_t \subseteq c\ell(O_s)^c \cap O_s = \emptyset$ nach sich ziehen würde. Also gilt $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$. Wäre aber $g(x) < f(x)$ für ein $x \in X$, so folgte aus der Dichtheit von $M$ in $[0,1]$

$$g(x) < r < s < f(x) \quad \text{für} \quad s, r \in M\,.$$

Wegen $c\ell(O_r) \subseteq O_s$ gilt $x \in O_s$ oder $x \in O_s^c \subseteq c\ell(O_r)^c$, wodurch $f(x) \leq s$ oder $g(x) \geq r$. Das ergibt in jedem Fall einen Widerspruch. Also gilt $f = g$.
Die Stetigkeit von $f : X \to [0,1]$ ist äquivalent zur Stetigkeit von $f$ als Funktion nach $\mathbb{R}$ hinein; vgl. Fakta 12.7.2. Da die Mengen der Bauart $(t, +\infty)$ und $(-\infty, t)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Subbasis der Topologie auf $\mathbb{R}$ sind, reicht es gemäß Lemma 12.5.6 nachzuweisen, dass $f^{-1}(t, +\infty) \in \mathcal{T}$ und $f^{-1}(-\infty, t) \in \mathcal{T}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dafür zeigen wir

$$f^{-1}(-\infty, t) = \bigcup_{r \in M,\, r<t} O_r \;\; (\in \mathcal{T}) \quad \text{und} \quad f^{-1}(t, +\infty) = \bigcup_{r \in M,\, r>t} c\ell(O_r)^c \;\; (\in \mathcal{T})\,.$$

In der Tat gilt $f(x) = g(x)$ und

$$f(x) = \inf\{r \in M :\ x \in O_r\} < t \Leftrightarrow \exists\, r \in M, r < t, x \in O_r \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in M, r<t} O_r\,,$$

$$g(x) = \sup\{r \in M :\ x \in c\ell(O_r)^c\} > t \Leftrightarrow \exists\, r \in M, r > t, x \in c\ell(O_r)^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in M, r>t} c\ell(O_r)^c\,.$$

Schließlich folgt $f(\bigcap_{r \in M, r>0} O_r) \subseteq \{0\}$ und $f(X \setminus \bigcup_{r \in M, r<1} O_r) \subseteq \{1\}$ unmittelbar aus der Definition von $f$. ❑

Aus Lemma 12.11.1 erhalten wir das in der Literatur als *Lemma von Urysohn* bezeichnete Ergebnis für topologische Räume, die das Axiom (T4) aus Definition 12.10.1 erfüllen.

**12.11.2 Korollar.** *Gilt für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ das vierte Trennungsaxiom (T4), so sind je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $A, B$ durch eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ getrennt, also $f(A) \subseteq \{0\}, f(B) \subseteq \{1\}$.*

*Beweis.* Sind $A, B$ zwei abgeschlossene und disjunkte Teilmengen von $X$, so bedingt (T4) die Existenz zweier disjunkter offener Mengen $O \supseteq A, P \supseteq B$, womit $P^c$ abgeschlossen ist und daher $A \subseteq O \subseteq c\ell(O) \subseteq P^c \subseteq B^c$ gilt; siehe Fakta 12.10.2, 3. Für $k = 0$ setzen wir $O_0 := O$, $O_1 := B^c$ und erhalten $c\ell(O_r) \subseteq O_s$ für alle $r, s \in M_0 = \{0, 1\}$ mit $r < s$.
Angenommen, wir haben für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $r \in M_k$ offene $O_r$ mit $c\ell(O_r) \subseteq O_s$, falls $r, s \in M_k$, $r < s$. Dann wählen wir für $t = \frac{l}{2^{k+1}} \in M_{k+1} \setminus M_k$, also $l \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ mit $l < 2^{k+1}$, die Menge $O_t$ auf folgende Art und Weise.

Wegen $r := \frac{l-1}{2^{k+1}} \in M_k$, $s := \frac{l+1}{2^{k+1}} \in M_k$ und damit $c\ell(O_r) \subseteq O_s$ sind die abgeschlossenen Mengen $c\ell(O_r), O_s^c$ disjunkt. Mit Fakta 12.10.2, 3, leiten wir die Existenz einer offenen Menge $O_t$ mit $c\ell(O_r) \subseteq O_t \subseteq c\ell(O_t) \subseteq O_s$ her.
Diese induktive Konstruktion liefert für alle $r \in M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ offene Mengen mit $c\ell(O_r) \subseteq O_s$, falls $r, s \in M$, $r < s$. Definieren wir schließlich $O_0$ und $O_1$ so um, dass $O_0 = \emptyset$ und $O_1 = X$, dann sind alle Voraussetzungen von Lemma 12.11.1 erfüllt.
Wegen $A \subseteq \bigcap_{r\in M, r>0} O_r$ erfüllt die stetige Funktion aus diesem Lemma $f(A) \subseteq \{0\}$ und wegen $O_r \subseteq B^c$ für $r \in M$ mit $r < 1$, also $B \subseteq X \setminus \bigcup_{r\in M, r<1} O_r$, auch $f(B) \subseteq \{1\}$. ❑

Als Folgerung des Lemmas von Urysohn erhalten wir den *Fortsetzungssatz von Tietze*.

**12.11.3 Satz** (Fortsetzungssatz von Tietze)**.** *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfülle (T4). Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine stetige Fortsetzung $g$ von $f$ auf $X$, also ein stetiges $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g|_A = f$, wobei* $\sup_{t\in A} |f(t)| = \sup_{t\in X} |g(t)|$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.

Der Beweis beruht auf folgendem Lemma.

**12.11.4 Lemma.** *Erfülle $(X, \mathcal{T})$ das Axiom (T4) und sei $u : A \to [-1, +1]$ stetig mit einem abgeschlossenen $A \subseteq X$. Dann existiert eine stetige Funktion $v : X \to [-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}]$ mit $|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$.*

*Beweis.* Die in $A$ bezüglich der Spurtopologie abgeschlossenen Mengen

$$H := \Big\{x \in A : -1 \leq u(x) \leq -\frac{1}{3}\Big\} \quad \text{und} \quad K := \Big\{x \in A : \frac{1}{3} \leq u(x) \leq 1\Big\}$$

sind disjunkt und wegen der Abgeschlossenheit von $A$ auch in $X$ abgeschlossen. Nach Korollar 12.11.2 gibt es eine stetige Funktion $v : X \to [-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}]$ mit $v(H) \subseteq \{-\frac{1}{3}\}$ und $v(K) \subseteq \{+\frac{1}{3}\}$, welche die gewünschte Eigenschaft hat. ❑

*Beweis. (Satz 12.11.3)*

⇝ Habe $f$ zunächst Werte in $[-1, +1]$ mit $\|f\|_\infty := \sup_{t\in A} |f(t)| = 1$. Wir konstruieren eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ stetiger Funktionen $h_n : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, +\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$.

Wendet man Lemma 12.11.4 auf die Funktion $f$ an, so erhält man $h_0 : X \to [-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}]$ mit $|f(x) - h_0(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$.

Haben wir für $j = 0, \dots, n$ stetige $h_j : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^j, +\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^j]$ mit

$$\Big|f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_n(x)\Big| \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \quad \text{für alle} \quad x \in A\,,$$

so wende man Lemma 12.11.4 auf $u(x) := (\frac{3}{2})^{n+1}(f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_n(x))$ an. Multiplizieren wir die resultierende Funktion mit $(\frac{2}{3})^{n+1}$, so erhalten wir eine Abbildung $h_{n+1} : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}, +\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}]$ derart, dass für $x \in A$

$$\Big|f(x) - \sum_{j=0}^{n+1} h_n(x)\Big| = \Big|\Big(f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_n(x)\Big) - h_{n+1}(x)\Big| \leq \frac{2}{3} \cdot \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1}.$$

⇝ Gemäß Lemma 12.7.11 ist der Raum $C_b(X, \mathbb{R})$ aller reellwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen auf $X$ versehen mit $\|.\|_\infty$ ein Banachraum. Wegen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|h_j\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^j = 1 \tag{12.20}$$

konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} h_j$ dort absolut; vgl. Definition 9.3.1. Gemäß Fakta 9.3.2 angewandt auf $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ konvergiert sie auch bezüglich $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig, gegen ein $g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, wobei wegen Lemma 12.7.11 sogar $g \in C_b(X, \mathbb{R})$. Gemäß (12.20) gilt $\|g\|_\infty \leq 1$. Wegen

$$\Big|f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_n(x)\Big| \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für} \quad x \in A$$

ist $g$ eine Fortsetzung von $f$, womit auch $1 = \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \leq 1$.

⇝ Ist allgemeiner $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f \neq 0$, so wenden wir das Gezeigte auf $\frac{f}{\|f\|_\infty}$ an. Nach Multiplikation der resultierenden Funktion auf $X$ mit $\|f\|_\infty$ erhalten wir die gewünschte Fortsetzung von $f$. Im Falle $f = 0$ setzen wir einfach $g = 0$.

⇝ Schließlich sei $f : A \to \mathbb{R}$ unbeschränkt. Da $\mathbb{R}$ vermöge $\phi : \mathbb{R} \to (-1, +1)$ homöomorph zu $(-1, +1)$ ist, können wir das Bewiesene auf $\phi \circ f : A \to (-1, +1)$ anwenden und erhalten eine Fortsetzung $r : X \to [-1, +1]$ davon.

Wegen $A \subseteq r^{-1}(-1, +1)$ sind die abgeschlossenen Mengen $A$ und $r^{-1}\{-1, +1\}$ disjunkt. Eine Anwendung von Korollar 12.11.2 ergibt eine stetige Funktion $s : X \to [0, 1]$ mit $s(A) \subseteq \{1\}$ und $s(r^{-1}\{-1, +1\}) = \{0\}$.

Die ebenfalls stetige Funktion $r \cdot s : X \to [-1, 1]$ nimmt offenbar die Werte $\pm 1$ nicht an, also $r \cdot s : X \to (-1, +1)$, und stimmt auf $A$ mit $\phi \circ f$ überein. Die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $g = \phi^{-1} \circ (r \cdot s) : X \to \mathbb{R}$ ist die gesuchte Funktion. ❑

**12.11.5 Bemerkung.** Aus der Gültigkeit des Fortsetzungssatz von Tietze auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ folgt sofort das Lemma von Urysohn, Korollar 12.11.2, da für disjunkte und abgeschlossene Mengen $A, B$ die Funktion $f : A \cup B \to [-1, 1]$ definiert durch $f = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$ wegen Lemma 12.7.4 stetig ist, und daher eine stetige Fortsetzung $g : X \to [-1, 1]$ hat. Die Funktion $\frac{1}{2}(g + 1)$ hat dann die in Korollar 12.11.2 verlangten Eigenschaften.

Andererseits folgt aus der Gültigkeit des Lemma von Urysohn, Korollar 12.11.2, auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, dass dieser das Axiom (T4) erfüllt. Sind nämlich $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, und ist $f : X \to [0, 1]$ wie in Korollar 12.11.2, so folgt für die offenen Menge $f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$ und $f^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty)$, dass $A \subseteq f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$, $B \subseteq f^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty)$, $f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2}) \cap f^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty) = \emptyset$.

## 12.12 Kompaktheit

In metrischen Räumen wird der Begriff der Kompaktheit meist mit Hilfe von Folgen eingeführt; siehe Definition 5.2.6. Für allgemeine topologische Räume wollen wir anders starten. Wir werden weiter unten sehen, dass für die spezielleren metrischen Räume der topologische Zugang zur Kompaktheit äquivalent zu dem Zugang über Folgen ist.

**12.12.1 Definition.** Eine Teilmenge $K$ eines topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von $K$, also $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ mit

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq K\,,$$

eine endliche Teilüberdeckung besitzt, es also $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ gibt mit

$$V_1 \cup \ldots \cup V_n \supseteq K\,.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *relativ kompakt*, wenn $c\ell(A) \subseteq X$ kompakt ist.

Sei $C$ eine Familie von Teilmengen einer Mengen $X$, also $C \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir sagen, dass $C$ die *endliche Durchschnittseigenschaft* hat, wenn für je endlich viele $C_1, \dots, C_n \in C$ stets $C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$ gilt.

**12.12.2 Satz.** *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $K \subseteq X$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

*(i) $K$ ist kompakt.*

*(ii) $K$ betrachtet als Teilmenge von $(K, \mathcal{T}_K)$ ist kompakt.*

*(iii) Jede Menge bezüglich $\mathcal{T}_K$ abgeschlossener Teilmengen von $K$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt.*

*(iv) Jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in $K$ hat ein gegen ein $x \in K$ konvergentes Teilnetz.*

*Beweis.*

$(i) \Rightarrow (ii)$**:** Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_K$ eine offene Überdeckung von $K$ in $(K, \mathcal{T}_K)$. Zu $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U_V \in \mathcal{T}$ mit $U_V \cap K = V$, womit $\mathcal{U} := \{U_V : V \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von $K$ in $(X, \mathcal{T})$ ist. Voraussetzungsgemäß gibt es $U_{V_1}, \dots, U_{V_n} \in \mathcal{U}$ derart, dass $U_{V_1} \cup \ldots \cup U_{V_n} \supseteq K$ und folglich

$$V_1 \cup \ldots \cup V_n = (U_{V_1} \cap K) \cup \ldots \cup (U_{V_n} \cap K) = (U_{V_1} \cup \ldots \cup U_{V_n}) \cap K = K\,.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$**:** Für eine Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ von $K$ ist

$$\mathcal{V} := \{U \cap K : U \in \mathcal{U}\}$$

eine offene Überdeckung von $K$ in $(K, \mathcal{T}_K)$. Voraussetzungsgemäß existiert eine endliche Teilüberdeckung $U_1 \cap K, \dots, U_n \cap K$, womit auch $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq K$.

*(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei $\mathcal{C}$ eine Menge in $(K, \mathcal{T}_K)$ abgeschlossener Teilmengen von $K$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Aus der Annahme $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$ erhielten wir

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} (K \setminus C) = K$$

mit in $(K, \mathcal{T}_K)$ offenen $K \setminus C$. Voraussetzungsgemäß gäbe es eine endliche Teilüberdeckung, $(K \setminus C_1) \cup \ldots \cup (K \setminus C_n) = K$, wodurch $C_1 \cap \ldots \cap C_n = \emptyset$, was aber der endlichen Durchschnittseigenschaft widerspricht.

*(iii)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Für eine offene Überdeckung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_K$ von $K$ ohne endlicher Teilüberdeckung würde $(K \setminus V_1) \cap \ldots \cap (K \setminus V_n) \neq \emptyset$ für jede endliche Auswahl $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ gelten, wodurch $\mathcal{C} = \{K \setminus V : V \in \mathcal{V}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hätte. Nach Voraussetzung wäre der Schnitt aller Mengen $K \setminus V,\ V \in \mathcal{V}$, nichtleer, womit $\mathcal{V}$ aber keine Überdeckung wäre.

*(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*: Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in $K$. Für $i \in I$ ist $C_i = c\ell(\{x_k : k \succeq i\}) \cap K$ abgeschlossen in $(K, \mathcal{T}_K)$. Dabei hat $\{C_i : i \in I\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, denn für $i_1, \ldots, i_n \in I$ und $i \in I$ mit $i \succeq i_1, \ldots, i_n$ gilt

$$\emptyset \neq c\ell(\{x_k : k \succeq i\}) \subseteq c\ell(\{x_k : k \succeq i_1\}) \cap \cdots \cap c\ell(\{x_k : k \succeq i_n\}) .$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in \cap_{i \in I} C_i$.

Wir versehen $J = \{(j, U) : j \in I, U \in \mathfrak{U}(x), x_j \in U\}$ mit der offensichtlich reflexiven und transitiven Relation

$$(j, U) \preceq (k, V) \quad \Leftrightarrow \quad j \preceq k \ \text{ und } \ U \supseteq V .$$

Für $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \in J$ sei $k \in I$ mit $k \succeq j_1, j_2$. Wegen $x \in c\ell(\{x_j : j \succeq k\})$ gibt es ein $x_j \in U_1 \cap U_2$ mit $j \succeq k$, und infolge $(j, U_1 \cap U_2) \succeq (j_1, U_1), (j_2, U_2)$. Also wird $J$ mit $\preceq$ zur gerichteten Menge.

Mit $x_{i(j,U)} := x_j$ erhalten wir ein Teilnetz $(x_{i(j,U)})_{(j,U) \in J}$ von $(x_i)_{i \in I}$, da für jedes $i_0 \in I$ die Beziehung $(i_0, X) \in J$ gilt und da $(j, U) \succeq (i_0, X)$ immer $i(j, U) = j \succeq i_0 = i(i_0, X)$ nach sich zieht.

Zu $V \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es ein $k \in I$ mit $x_k \in V$. Für $(j, U) \succeq (k, V)$ folgt dann $x_{i(j,U)} = x_j \in U \subseteq V$ und somit die Konvergenz dieses Teilnetzes gegen $x$.

*(iv)* $\Rightarrow$ *(iii)*: Für $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(K)$ ist die Menge $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{C}$ versehen mit $\preceq := \subseteq$ eine gerichtete Menge. Hat $\mathcal{C}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, so können wir für $M \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$ einen Punkt $x_M \in \cap_{C \in M} C$ wählen. Das Netz $(x_M)_{M \in \mathcal{E}(\mathcal{C})}$ hat voraussetzungsgemäß ein gegen ein $x \in X$ konvergentes Teilnetz $(x_{M(j)})_{j \in J}$.

Ist $D \in \mathcal{C}$, so gibt es wegen $\{D\} \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$ ein $j_0 \in J$ mit $M(j) \supseteq \{D\}$ für alle $j \succeq j_0$ und daher $x_{M(j)} \in \cap_{C \in M(j)} C \subseteq D$. Also liegt das ebenfalls gegen $x$ konvergente Netz $(x_{M(j)})_{j \in J_{\succeq j_0}}$ ganz in $D$. Sind die Mengen in $\mathcal{C}$ zusätzlich abgeschlossen in $(K, \mathcal{T}_K)$, so folgt $x \in D$ wegen Proposition 12.2.6. Da $D \in \mathcal{C}$ beliebig war, gilt $x \in \bigcap_{D \in \mathcal{C}} D$. ❑

**12.12.3 Bemerkung.** Die Tatsache, dass (i) und (ii) in Satz 12.12.2 äquivalent sind, zeigt auch, dass die Kompaktheit unabhängig vom Grundraum ist. Also gilt für topologische Räume $(Y, \mathcal{O})$ und $(X, \mathcal{T})$ mit $X \subseteq Y$ und $\mathcal{T} = \mathcal{O}_X$, dass eine Teilmenge $K$ von $X$ genau dann in $X$ kompakt ist, wenn sie in $Y$ kompakt ist. In der Tat ist die Kompaktheit von $K$ in $(X, \mathcal{T})$ bzw. in $(Y, \mathcal{O})$ gemäß Satz 12.12.2 äquivalent zur Kompaktheit von $K$ in $(K, \mathcal{T}_K)$ bzw. in $(K, \mathcal{O}_K)$. Wegen Fakta 12.7.2, 9, stimmen dabei die Topologien $\mathcal{T}_K = (\mathcal{O}_X)_K$ und $\mathcal{O}_K$ überein.

**12.12.4 Bemerkung.** Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer kompakten Teilmenge $K$ eines topologischen Raumes, so hat diese gemäß (iv) in Satz 12.12.2 ein gegen ein $x \in K$ konvergentes Teilnetz $(x_{n(j)})_{j\in J}$. In allgemeinen topologischen Räumen hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht immer eine konvergente Teilfolge im Sinne von Definition 3.2.8. Für kompakte Teilmengen $K$ eines metrischen Raumes werden in wir in Satz 12.15.3 sehen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer auch eine konvergente Teilfolge hat.

**12.12.5 Bemerkung** (*). Wegen Lemma 12.3.3 ist die Bedingung (iv) in Satz 12.12.2 zu der Tatsache äquivalent, dass jedes Netz einen Häufungspunkt in $K$ hat.

**12.12.6 Satz** (*). *Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in einer kompakten Menge $K \subseteq X$ konvergiert sicher dann gegen ein $x \in X$, wenn $x$ der einzige Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ ist.*

*Beweis.* Nach Lemma 12.3.4 gilt $x_i \to x$ genau dann, wenn $x$ Häufungspunkt eines jeden Teilnetzes von $(x_i)_{i\in I}$ ist. Aus Lemma 12.3.3 schließen wir, dass jeder Häufungspunkt eines Teilnetzes von $(x_i)_{i\in I}$ auch Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ ist. Ist also $x$ der einzige Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$, so hat ein Teilnetz gemäß Bemerkung 12.12.5 immer $x$ als Häufungspunkt. ❑

**12.12.7 Lemma.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A, A_1, \dots, A_m \subseteq X$.*

*(i) Ist $A$ kompakt und $B \subseteq A$ abgeschlossen in $(A, \mathcal{T}_A)$, dann ist $B$ kompakt.*

*(ii) Sind $A_1, \dots, A_m$ kompakt, so auch $A_1 \cup \ldots \cup A_m$.*

*(iii) Ist $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch und $A$ kompakt, so ist $A$ abgeschlossen.*

*Beweis.*

(i) Die Menge $A \setminus B$ ist offen in $(A, \mathcal{T}_A)$, also $O \cap A = A \setminus B$ mit $O \in \mathcal{T}$. Für eine offene Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ von $B$ überdeckt $\mathcal{U} \cup \{O\} \subseteq \mathcal{T}$ ganz $A$. Infolge gibt es $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup O \supseteq A$, wodurch wegen $O \cap B = \emptyset$

$$B = A \cap B \subseteq (U_1 \cap B) \cup \ldots \cup (U_n \cap B) \cup (O \cap B) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n .$$

(ii) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ und infolge auch eine solche von jedem $A_i$, $i = 1, \dots, m$. Also existieren $U_1^i, \dots, U_{n_i}^i \in \mathcal{U}$ mit $U_1^i \cup \ldots \cup U_{n_i}^i \supseteq A_i$, wodurch

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{n_i} U_k^i \supseteq A_1 \cup \ldots \cup A_m .$$

(iii) Sei $A$ kompakt und $x \notin A$. Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch ist, gibt es zu jedem Punkt $y \in A$ offene Umgebungen $U_y \in \mathfrak{U}(y)$, $V_y \in \mathfrak{U}(x)$, mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Klarerweise ist $\{U_y : y \in A\}$ eine offene Überdeckung von $A$, wodurch $U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n} \supseteq A$ für endliche viele $y_1, \ldots, y_n \in A$. Die Menge $V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}$ ist als endlicher Durchschnitt von Umgebungen von $x$ ebenfalls eine Umgebung von $x$, wobei

$$A \cap (V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}) \subseteq (U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}) \cap (V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}) = \emptyset .$$

Also ist $x$ ein innerer Punkt von $A^c$. Nach Lemma 12.1.11 ist $A^c$ offen und infolge $A$ abgeschlossen. ❑

**12.12.8 Lemma.** *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig. Für ein kompaktes $A \subseteq X$ ist das Bild $f(A) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt.*

*Beweis.* Für eine Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ von $f(A)$ ist $f^{-1}(\mathcal{U})$ eine Überdeckung von $A$, die wegen der Stetigkeit von $f$ aus offenen Mengen besteht. Es gibt also $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit

$$f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n) \supseteq A .$$

Wendet man darauf $f$ an, dann folgt $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq f(A)$. ❑

Unter Verwendung der Charakterisierung (iv) aus Satz 12.12.2 kann man Lemma 12.12.8 auch ganz ähnlich wie in Proposition 6.1.13 beweisen. Ist nämlich $(y_i)_{i \in I}$ ein Netz in $f(A)$, und wählt man zu jedem $i \in I$ ein $x_i \in A$ mit $f(x_i) = y_i$, so hat das Netz $(x_i)_{i \in I}$ ein gegen ein $x \in A$ konvergentes Teilnetz $(x_{i(j)})_{j \in J}$. Wegen Lemma 12.4.3 konvergiert $(y_{i(j)})_{j \in J} = \big(f(x_{i(j)})\big)_{j \in J}$ gegen $f(x) =: y$. Also hat jedes Netz aus $f(A)$ ein gegen ein $y \in f(A)$ konvergentes Teilnetz, weshalb $f(A)$ kompakt ist.

**12.12.9 Beispiel.** Wir betrachten $[-\infty, +\infty)$ versehen mit

$$\mathcal{T}^< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$$

wie in Beispiel 12.1.4, (vi). Sei $K \subseteq [-\infty, +\infty)$ nichtleer und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $K$ mit Grenzwert $\sup K$ $(\in [-\infty, +\infty])$; vgl. Beispiel 3.3.4. Im Fall $\sup K \notin K$ ergibt $\{[-\infty, x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von $K$, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Infolge muss eine kompakte Teilmenge $K$ nach oben beschränkt sein und sogar ein Maximum haben.
Hat umgekehrt $K$ ein Maximum $s$, so gilt für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ aus $K$

$$\limsup_{i \in I} x_i = \inf_{k \in I} \sup_{I \ni i \geq k} x_i \leq s .$$

Gemäß Beispiel 12.1.14, (iii), konvergiert $(x_i)_{i \in I}$ gegen $s \in K$ in $([-\infty, +\infty), \mathcal{T}^<)$. Wegen Satz 12.12.2 ist $K$ dann kompakt.
Also sind die kompakten Teilmengen von $[-\infty, +\infty)$ genau diejenigen, welche ein Maximum haben. Da die abgeschlossenen Teilmengen alle von der Gestalt $[-\infty, +\infty) \setminus [-\infty, a) = [a, +\infty)$ sind, sehen wir auch, dass im Allgemeinen die Voraussetzung Hausdorffsch in Lemma 12.12.7, (iii), nicht weggelassen werden kann.

Ist schließlich $(X,\mathcal{T})$ ein weiterer topologischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt, und $f : X \to [-\infty,+\infty)$ halbstetig von oben wie in Beispiel 12.4.5, so erhalten wir aus Lemma 12.12.8 die Kompaktheit von $f(K)$ in $([-\infty,+\infty),\mathcal{T}^<)$. Also hat $f(K)$ ein Maximum, womit $f(x) \geq f(t)$ für alle $t \in K$ und ein $x \in K$.

**12.12.10 Korollar.**

*(i)* *Sei $(X,\mathcal{T})$ kompakt und $(Y,\mathcal{O})$ Hausdorffsch. Ist $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{O})$ bijektiv und stetig, dann ist $f$ sogar ein Homöomorphismus.*

*(ii)* *Sei die Menge $X$ versehen mit den Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{O}$ derart, dass $X$ bezüglich $\mathcal{T}$ kompakt und $(X,\mathcal{O})$ Hausdorffsch ist. Aus $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ folgt dann $\mathcal{O} = \mathcal{T}$.*

*Beweis.*

(i) Wir zeigen, dass das Urbild unter $f^{-1} : (Y,\mathcal{O}) \to (X,\mathcal{T})$ einer in $(X,\mathcal{T})$ abgeschlossenen Menge in $(Y,\mathcal{O})$ abgeschlossen ist; siehe Satz 12.4.7. In der Tat ist gemäß Lemma 12.12.7, (i), jedes abgeschlossene $A \subseteq X$ auch kompakt. Nach Lemma 12.12.8 ist dann auch $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ als Teilmenge von $Y$ kompakt. Wegen Lemma 12.12.7, (iii), ist $(f^{-1})^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(ii) Wegen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ ist $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{O})$ stetig. Nach (i) ist dann $\mathrm{id}_X$ sogar ein Homöomorphismus, wodurch $\mathcal{T} = \mathcal{O}$. ❑

**12.12.11 Lemma.** *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

*(i)* *Ist $(X,\mathcal{T})$ Hausdorffsch, $A \subseteq X$ kompakt und $x \in X \setminus A$, so lassen sich $x$ und $A$ durch offene Mengen trennen, also gibt es disjunkte offene Mengen $O_x \ni x$ und $O_A \supseteq A$.*

*(ii)* *Erfüllt $X$ das Axiom (T3), und sind $A \subseteq X$ kompakt und $B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so lassen sich $A$ und $B$ durch offene Mengen trennen.*

*(iii)* *Ist $(X,\mathcal{T})$ kompakt und Hausdorffsch, so ist $(X,\mathcal{T})$ sogar normal.*

*Beweis.*

(i) Zu jedem $y \in A$ gibt es zwei disjunkte offene Mengen $Q_y \ni y$ und $P_y \ni x$. Klarerweise ist dann $\{Q_y : y \in A\}$ eine Überdeckung von $A$. Wegen der Kompaktheit gibt es $y_1,\dots,y_n \in A$ mit $A \subseteq Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n} := O_A \in \mathcal{T}$. Für $P_{y_1} \cap \dots \cap P_{y_n} =: O_x \in \mathcal{T}$ gilt

$$O_x \cap O_A = O_x \cap (Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n}) \subseteq (P_{y_1} \cap Q_{y_1}) \cup \dots \cup (P_{y_n} \cap Q_{y_n}) = \emptyset\,.$$

(ii) Zu jedem $y \in A$ gibt es wegen (T3) zwei disjunkte offene Mengen $Q_y \ni y$ und $P_y \supseteq B$, womit $\{Q_y : y \in A\}$ eine Überdeckung von $A$ ist. Wegen der Kompaktheit gibt es $y_1,\dots,y_n \in A$ mit $A \subseteq Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n} := O_A \in \mathcal{T}$. Für $P_{y_1} \cap \dots \cap P_{y_n} =: O_B \in \mathcal{T}$ gilt

$$O_B \cap O_A = O_B \cap (Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n}) \subseteq (P_{y_1} \cap Q_{y_1}) \cup \dots \cup (P_{y_n} \cap Q_{y_n}) = \emptyset\,.$$

Also lassen sich $A$ und $B$ durch offene Mengen trennen.

(iii) Da jede abgeschlossene Teilmenge von $X$ nach Lemma 12.12.7 kompakt ist, folgt aus (i), dass $X$ regulär ist, also gilt (T2) und (T3). Nach (ii) ist $X$ dann normal. ❑

## 12.13 Satz von Tychonoff*

Der Übersicht halber schreiben wir in diesem Abschnitt die Elemente von $X = \prod_{i\in I} X_i$ als Funktionen $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$.

**12.13.1 Lemma.** *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ versehen. Ein Netz $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ hat $f \in X$ genau dann als Häufungspunkt, wenn für alle endlichen $J \subseteq I$ das Element $f|_J$ Häufungspunkt von $(f_\lambda|_J)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\prod_{i\in J} X_i$ ist.*

*Beweis.* Da die Mengen der Bauart $\bigcap_{i\in J} \pi_i^{-1}(O_i)$ mit offenen Umgebungen $O_i$ von $f(i)$ und endlichem $J \subseteq I$ eine Umgebungsbasis von $f$ abgeben, ist $f$ gemäß Definition 12.3.1 genau dann ein Häufungspunkt, wenn es zu jedem $\lambda \in \Lambda$, jedem endlichen $J \subseteq I$ und jeder Wahl von offenen Umgebungen $O_i$ von $f(i)$ für $i \in J$ immer ein $\alpha \in \Lambda$ gibt mit $\alpha \geq \lambda$ und

$$f_\alpha \in \bigcap_{i\in J} \pi_i^{-1}(O_i), \quad \text{oder äquivalent dazu} \quad f_\alpha(i) \in O_i \quad \text{für alle} \quad i \in J\,.$$

Ähnlich sieht man, dass $f|_J$ genau dann Häufungspunkt von $(f_\lambda|_J)_{\lambda\in\Lambda}$ ist, wenn es zu jedem $\lambda \in \Lambda$ und allen offenen Umgebungen $O_i$ von $f(i)$ für $i \in J$ immer ein $\alpha \in \Lambda$ derart gibt, dass $\alpha \geq \lambda$ und $f_\alpha(i) \in O_i$ für alle $i \in J$.
Da Allquantoren vertauschen, ergibt sich die behauptete Äquivalenz. ❑

**12.13.2 Satz** (Tychonoff). *Für eine Familie $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologischer Räume ist $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ genau dann kompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, kompakt sind.*

*Beweis.* Setzt man voraus, dass $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist, so ist $\pi_i(X) = X_i$ versehen mit $\mathcal{T}_i$ als stetiges Bild eines kompakten Raumes ebenfalls kompakt; vgl. Lemma 12.12.8.
Sei umgekehrt vorausgesetzt, dass $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für jedes $i \in I$ kompakt ist. Gemäß Satz 12.12.2 reicht es für die Kompaktheit von $\prod_{i\in I} X_i$ zu zeigen, dass jedes Netz $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aus $\prod_{i\in I} X_i$ einen Häufungspunkt hat. Wir betrachten dafür die Menge $\mathcal{M} := \bigcup_{D\subseteq I} \prod_{i\in D} X_i$ aller $g : D_g \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $D_g \subseteq I$ und $g(i) \in X_i$ für $i \in D_g$. Insbesondere ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i\in I} X_i)$ geordnet durch $\subseteq$. Wir setzen

$$\mathcal{H} := \{g \in \mathcal{M} : g \ \text{ ist Häufungspunkt von } \ (f_\lambda|_{D_g})_{\lambda\in\Lambda} \ \text{ in } \ \prod_{i\in D_g} X_i\}\,.$$

Da $X_i$ kompakt ist, hat $(f_\lambda(i))_{\lambda\in\Lambda}$ für jedes $i \in I$ mindestens einen Häufungspunkt $y_i$ in $X_i$, womit $\{(i, y_i)\} \in \mathcal{H}$. Insbesondere ist $\mathcal{H}$ nichtleer. Für eine bezüglich $\subseteq$ totalgeordnete und nichtleere Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$, sieht man leicht, dass

$$h := \bigcup_{g\in\mathcal{N}} g$$

eine Funktion von $D_h = \bigcup_{g\in\mathcal{N}} D_g$ nach $\bigcup_{i\in I} X_i$ ist, wobei $h(i) \in X_i$ für alle $i \in D_h$ erfüllt. Da jedes endliche $J \subseteq D_h$ schon in einem $D_g$ mit $g \in \mathcal{N}$ enthalten ist, folgt aus Lemma 12.13.1, dass $h$ ein Häufungspunkt von $(f_\lambda|_{D_h})_{\lambda\in\Lambda}$ ist, womit $h \in \mathcal{H}$.

Wir können das Lemma von Zorn anwenden und erhalten ein maximales $f \in \mathcal{H}$. Wegen Lemma 12.3.3 konvergiert ein gewisses Teilnetz $(f_{\lambda(\beta)}|_{D_f})_{\beta \in B}$ gegen $f$. Wäre dabei $I \setminus D_f$ nichtleer und $i \in I \setminus D_f$, so impliziert die Kompaktheit von $X_i$ die Existenz eines gegen ein $x_i \in X_i$ konvergenten Teilnetzes $(f_{\lambda(\beta(\gamma))}(i))_{\gamma \in C}$ von $(f_{\lambda(\beta)}(i))_{\beta \in B}$.
Für die Fortsetzung $h := f \cup \{(i, x_i)\}$ mit $D_h = D_f \cup \{i\}$ gilt $h \in \mathcal{M}$. Weiters konvergiert $(f_{\lambda(\beta(\gamma))}|_{D_h})_{\gamma \in C}$ gemäß Lemma 12.6.3 gegen $h$. Also ist $h$ ist Häufungspunkt von $(f_\lambda|_{D_h})_{\lambda \in \Lambda}$ in $\prod_{i \in D_h} X_i$, und infolge $h \in \mathcal{H}$. Da das der Maximalität von $f$ widerspricht, gilt $D_f = I$, womit $f \in X$ Häufungspunkt von $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist. ❑

## 12.14 Abstand und Durchmesser von Mengen

**12.14.1 Definition.** Sei $\langle Y, d \rangle$ ein metrischer Raum. Wir definieren den *Abstand* von einem Element $x \in Y$ und einer Teilmenge $A \subseteq Y$ durch

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, y) : y \in A \} \tag{12.21}$$

und den *Abstand* zweier Teilmengen $A$ und $B$ von $Y$ durch

$$d(A, B) = \inf \{ d(x, y) : x \in A, y \in B \}, \tag{12.22}$$

wobei das Infimum über die leere Menge als $+\infty$ zu verstehen ist.
Weiters setzen wir für $A \subseteq Y$ und $\delta > 0$

$$K_\delta(A) := \{x \in Y : d(x, A) \le \delta\}, \quad U_\delta(A) := \{x \in Y : d(x, A) < \delta\}. \tag{12.23}$$

Schließlich definieren wir den *Durchmesser einer Teilmenge* $A$ von $Y$ durch

$$d(A) = \sup \{ d(x, y) : x, y \in A \},$$

wobei das Supremum über die leere Menge als $-\infty$ anzusetzen ist.

**12.14.2 Fakta.** Sei $\langle Y, d \rangle$ ein metrischer Raum $\langle Y, d \rangle$, $M, A, B \subseteq Y$ Teilmengen und $\delta > 0$.

1. $A \subseteq B$ bedingt offenbar $d(A) \le d(B)$.

2. Es gilt $d(c\ell(M)) = d(M)$, denn für $x, y \in c\ell(M)$ gibt es wegen Lemma 5.1.12 gegen $x$ bzw. $y$ konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $M$, woraus $d(x, y) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) \le d(M)$ folgt.

3. $M$ ist genau dann beschränkt, wenn $d(M) < +\infty$.

   In der Tat folgt aus $d(M) < +\infty$, dass $d(x, y) \le d(M) < +\infty$ für ein festes $x \in M$ und beliebige $y \in M$. Ist umgekehrt $M$ beschränkt, also $d(z, y) \le C$ für alle $y \in M$ mit einem $C < +\infty$ und einem $z \in M$, dann erhalten wir $d(x, y) \le d(z, x) + d(z, y) \le 2C$ und infolge $d(M) \le 2C < +\infty$.

4. Für $x, y \in K_\delta(M)$, also $d(x, M) \leq \delta$, $d(y, M) \leq \delta$, gibt es zu beliebigem $\epsilon > 0$ Punkte $u, v \in M$ mit $d(x, u) < \delta + \epsilon$ und $d(y, v) < \delta + \epsilon$, woraus wir

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(y, v) \leq 2\delta + 2\epsilon + d(M)$$

ableiten. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $d(x, y) \leq 2\delta + d(M)$, wodurch schlussendlich

$$d(U_\delta(M)) \leq d(K_\delta(M)) \leq 2\delta + d(M)\,, \tag{12.24}$$

Wegen des vorherigen Punktes sind folglich $K_\delta(M)$ und $U_\delta(M)$ beschränkt, wenn $M$ beschränkt ist.

5. Sind $x_1, x_2 \in Y$, so folgt leicht aus (12.21), dass $d(x_1, M) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, M)$ und aus Symmetriegründen auch $d(x_2, M) \leq d(x_1, x_2) + d(x_1, M)$. Also gilt

$$\Big| d(x_1, M) - d(x_2, M) \Big| \leq d(x_1, x_2)\,,$$

wodurch sich die durch $d_M(x) := d(x, M)$ definierte Funktion $d_M : Y \to [0, +\infty)$ als stetig herausstellt.

6. Wegen des vorherigen Punktes ist $K_\delta(M) = d_M^{-1}([0, \delta])$ abgeschlossen und $U_\delta(M) = d_M^{-1}([0, \delta)) = d_M^{-1}((-\delta, +\delta) \cap [0, +\infty))$ offen in $Y$.

7. $y \in c\ell(M)$ ist äquivalent zur Existenz einer Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $M$ mit $d(y, y_n) \to 0$, was wiederum gleichbedeutend mit $d(y, M) = 0$ ist. Also gilt

$$y \in c\ell(M) \quad \Leftrightarrow \quad d(y, M) = 0\,,$$

womit auch $c\ell(M) \subseteq U_\delta(M) \subseteq K_\delta(M)$.

8. Für $\emptyset \neq A, B \subseteq Y$ mit einem kompakten $A$ hat nach Proposition 6.1.13 die stetige Funktion $z \mapsto d(z, B)$ auf der kompakten Menge $A$ ein Minimum bei einem Punkt $x \in A$. Also gilt $d(x, B) \leq d(z, B)$ für alle $z \in A$, und wir erhalten zusammen mit dem Lemma vom iterierten Supremum

$$d(A, B) = \inf\{d(z, B) : z \in A\} = d(x, B)\,.$$

9. Ist $A$ kompakt und $B$ abgeschlossen, so folgt aus 7 sowie 8 stets $d(A, B) > 0$.

## 12.15 Kompaktheit in metrischen Räumen

In diesem Abschnitt wollen wir speziell kompakte metrische Räume behandeln. In Definition 5.2.6 wurde die Kompaktheit einer Teilmenge $K$ eines metrischen Raumes $\langle X, d\rangle$ so definiert, dass jede Folge eine gegen einen Punkt aus $K$ konvergente Teilfolge hat. Wir werden hier unter anderem sehen, dass diese Definition äquivalent zu der aus Definition 12.12.1 ist. Außerdem werden wir die Kompaktheit auch mit Hilfe des folgenden Begriffes charakterisieren.

**12.15.1 Definition.** Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $M$ von $X$ heißt *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $M_1, \dots, M_n \subseteq M$ mit $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ und $d(M_j) < \epsilon$ für $j = 1, \dots, n$ gibt.

**12.15.2 Fakta.**

1. Offenbar sind Teilmengen von total beschränkten Mengen wieder total beschränkt.

2. Da einerseits Kugeln mit Radius $\epsilon$ einen Durchmesser kleiner oder gleich $2\epsilon$ haben und da andererseits jede Teilmenge $M_j \subseteq M$ mit $d(M_j) < \epsilon$ für ein beliebiges $\eta_j \in M_j$ in $U_\epsilon(\eta_j)$ enthalten ist, lässt sich totale Beschränktheit auch folgendermaßen charakterisieren:

   Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $y_1, \dots, y_n \in X$ mit $M \subseteq U_\epsilon(y_1) \cup \dots \cup U_\epsilon(y_n)$.

3. Ist $M$ total beschränkt und gilt $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ mit $d(M_j) < \epsilon$, $j = 1, \dots, n$, für ein gegebenes $\epsilon > 0$, so folgt $c\ell(M) = c\ell(M_1) \cup \dots \cup c\ell(M_n)$, wobei auch $d(c\ell(M_j)) = d(M_j) < \epsilon$ für $j = 1, \dots, n$. Infolge ist auch $c\ell(M)$ total beschränkt. Insbesondere kann man für abgeschlossenes $M$ die Mengen $M_j$ mit $d(M_j) < \epsilon$ immer abgeschlossen wählen.

**12.15.3 Satz.** *Für eine Teilmenge $K$ eines metrischen Raumes $\langle X, d\rangle$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

*(i) $K$ ist kompakt im Sinne von Definition 12.12.1.*

*(ii) Jede unendliche Teilmenge von $K$ hat einen Häufungspunkt in $K$ im Sinne von Definition 5.1.7; siehe auch Definition 12.2.9.*

*(iii) Jede Folge in $K$ hat eine gegen einen Punkt in $K$ konvergente Teilfolge.*

*(iv) $K$ ist total beschränkt, und $\langle K, d|_{K\times K}\rangle$ ist ein vollständig metrischer Raum.*

*Beweis.*

$(i) \Rightarrow (ii)$**:** Hätte ein unendliches $M \subseteq K$ keinen Häufungspunkt in $K$, so gäbe es zu jedem $y \in K$ ein $\epsilon(y) > 0$ mit

$$M \cap U_{\epsilon(y)}(y) \subseteq \{y\};$$

siehe Definition 5.1.7. Da $y \in K$ beliebig war, ist $\{U_{\epsilon(y)}(y) : y \in K\}$ eine offene Überdeckung von $K$, die voraussetzungsgemäß eine endliche Teilüberdeckung hat. Also gibt es $y_1, \dots, y_k \in K$ mit $K \subseteq U_{\epsilon(y_1)}(y_1) \cup \dots \cup U_{\epsilon(y_k)}(y_k)$. Wegen

$$M = M \cap K \subseteq M \cap (U_{\epsilon(y_1)}(y_1) \cup \dots \cup U_{\epsilon(y_k)}(y_k)) \subseteq \{y_1, \dots, y_n\},$$

wäre $M$ dann endlich.

*(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*: Habe jede unendliche Teilmenge von $K$ einen Häufungspunkt in $K$, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $K$. Ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich, so gilt sicherlich $x_n = x$ für ein $x \in K$ und für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Somit hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die konstant gleich $x$ ist. Also ist $x$ ein Häufungspunkt unserer Folge.

Anderenfalls ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ unendlich. Laut Voraussetzung hat diese Menge einen Häufungspunkt $x$ in $K$, wodurch jede $\epsilon$-Kugel um $x$ unendlich viele Punkte aus $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ enthält; siehe Fakta 5.1.10. Also muss für $N \in \mathbb{N}$ jede $\epsilon$-Kugel auch unendlich viele Punkte aus $\{x_n : n \in \mathbb{N}, n \geq N\}$ enthalten.

Insbesondere gibt es ein $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n(1)}, x) < 1$. Hat man natürliche Zahlen $n(1) < \cdots < n(k)$ mit $d(x_{n(j)}, x) < \frac{1}{j}$ für $j = 1, \ldots, k$, so wähle man $n(k+1) \in \mathbb{N}$ mit $n(k+1) > n(k)$ derart, dass $x_{n(k+1)} \in \{x_n : n \in \mathbb{N}, n \geq n(k)+1\} \cap U_{\frac{1}{k+1}}(x)$. Die somit rekursiv definierte Teilfolge erfüllt $\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} = x$.

*(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*: Angenommen $K$ wäre nicht total beschränkt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass, wann immer $M_1, \ldots, M_n$ endlich viele Teilmengen von $K$ mit Durchmesser kleiner $\epsilon$ sind, niemals $M_1 \cup \cdots \cup M_n = K$ gilt. Aus dieser Tatsache werden wir auf die Existenz einer Folge ohne Häufungspunkt schließen.

Dazu wählen wir $x_1 \in K$ beliebig. Sind $x_1, \ldots, x_k \in K$ definiert, dann gilt wegen unserer Annahme $(U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_k)) \cap K \subsetneq K$, da nach (12.24) die Ungleichung $d(U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_j)) \leq \frac{2\epsilon}{3}$ zutrifft. Also können wir

$$x_{k+1} \in K \setminus \left(U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_k)\right)$$

wählen. Diese induktiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat offensichtlich die Eigenschaft, dass für $k \in \mathbb{N}$ der Punkt $x_k$ nicht in $U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_1) \cup \cdots \cup U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_{k-1})$ liegt, und somit

$$d(x_k, x_l) \geq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für} \quad l < k\,.$$

Insbesondere kann keine Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit auch nicht konvergent sein. Das widerspricht aber der Voraussetzung (iii).

Es bleibt die Vollständigkeit von $\langle K, d|_{K\times K}\rangle$ zu zeigen. Dazu sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $K$. Diese hat voraussetzungsgemäß eine in $K$ konvergente Teilfolge. Gemäß Lemma 3.5.7 ist dann auch $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $K$ konvergent.

*(iv)* $\Rightarrow$ *(i)*: Zunächst folgt wegen Lemma 9.1.6 aus der Vollständigkeit auch die Abgeschlossenheit von $K$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ohne endlicher Teilüberdeckung von $K$ ist.

Wegen der totalen Beschränktheit und nach Fakta 12.15.2, 3, können wir $K$ als Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen mit Durchmesser kleiner als $\epsilon = 1$ schreiben. Mindestens eine dieser Mengen, wir nennen sie $K_1$, kann nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden, weil anderenfalls auch $K$ eine endliche Teilüberdeckung hätte.

Die Menge $K_1$ können wir als Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen mit Durchmesser kleiner als $\frac{1}{2}$ schreiben. Mindestens eine dieser, wir nennen sie $K_2$, kann wieder nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden. Fahren wir induktiv fort, so erhalten wir eine Folge

$$K \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

von abgeschlossenen Mengen derart, dass $K_n$ einen Durchmesser kleiner als $\frac{1}{n}$ hat, und kein $K_n$ durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden kann.

Wählt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in K_n$, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $x_m, x_n \in K_{\min(m,n)}$ mit $d(K_{\min(m,n)}) < \frac{1}{\min(m,n)}$ eine Cauchy-Folge. Die Vollständigkeit von $K$ sichert die Existenz eines Grenzwertes $x \in K$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Als Überdeckung enthält $\mathcal{U}$ ein $V \in \mathcal{U}$ mit $x \in V$. Da $V$ offen ist, gibt es eine Kugel $U_\epsilon(x) \subseteq V$. Wählen wir $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$, so folgt wegen $d(K_n) < \frac{1}{n}$ für alle $y \in K_n$

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon .$$

Also gilt $K_n \subseteq U_\epsilon(x) \subseteq V$ im Widerspruch zur Tatsache, dass $K_n$ nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden kann. ❑

**12.15.4 Bemerkung.** Eine häufige Situation, in der obiger Satz Anwendung findet, ist die, dass $\langle X, d\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum und $G$ eine total beschränkte Teilmenge von $X$ ist. Der Abschluss von $G$ ist dann total beschränkt und vollständig, also kompakt.

**12.15.5 Lemma.** *Für einen metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ ist jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ separabel, hat also eine abzählbare dichte Teilmenge.*

*Beweis.* Nach Satz 12.15.3 gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Punkte $x_1^n, \dots, x_{m(n)}^n \in K$ mit

$$U_{\frac{1}{n}}(x_1^n) \cup \dots \cup U_{\frac{1}{n}}(x_{m(n)}^n) \supseteq K . \tag{12.25}$$

Die Teilmenge $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_1^n, \dots, x_{m(n)}^n\}$ von $K$ ist abzählbar. Sind $y \in K$, $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{n} \leq \epsilon$, dann gibt es wegen (12.25) ein $j \in \{1, \dots, m(n)\}$ mit $d(y, x_j^n) < \frac{1}{n} \leq \epsilon$, also $x_j^n \in U_\epsilon(y)$. Folglich gilt $y \in c\ell(D)$. ❑

Für die folgenden Resultate sei angemerkt, dass im Falle eines kompakten Raumes $(X, \mathcal{T})$ jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ bzw. $f : X \to \mathbb{C}$ automatisch beschränkt ist, da nach Lemma 12.12.8 das Bild $f(X)$ kompakt und gemäß Proposition 5.2.8 oder als Folge von Satz 12.15.3 beschränkt ist.

**12.15.6 Satz** (*). *Für einen kompakten topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

*(i)* $(X, \mathcal{T})$ *ist* metrisierbar, *also gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ für eine Metrik auf $X$.*

*(ii)* $(X, \mathcal{T})$ *erfüllt (T2) und (ABII), hat also eine abzählbare Basis.*

*(iii) Es gibt eine abzählbare Menge $\mathcal{G}$ bestehend aus stetigen reellwertigen Funktionen auf $(X, \mathcal{T})$, welche* punktetrennend *ist, es also zu $x \neq y$ aus $X$ immer ein $f \in \mathcal{G}$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt.*

*Beweis.*

$(i) \Rightarrow (ii)$**:** Nach Lemma 12.15.5 ist $X$ separabel und nach Proposition 12.5.9 erfüllt $X$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Für (T2) siehe Beispiel 12.1.16.

$(ii) \Rightarrow (iii)$**:** Zunächst ist $(X, \mathcal{T})$ gemäß Lemma 12.12.11 normal. Für eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$ können wir nach Korollar 12.11.2 zu $B, C \in \mathcal{B}$ mit $c\ell(B) \subseteq C$ ein stetiges $f_{B,C} : X \to \mathbb{R}$ mit $f_{B,C}(c\ell(B)) \subseteq \{0\}$ und $f_{B,C}(X \setminus C) \subseteq \{1\}$ wählen. Die Menge

$$\mathcal{G} := \{f_{B,C} : B, C \in \mathcal{B},\ c\ell(B) \subseteq C\}$$

ist dann abzählbar. Für $x \neq y$ aus $X$ gibt es wegen (T2) ein $C \in \mathcal{B}$ mit $x \in C$ und $y \notin C$. Nach Fakta 12.10.2, 2 und 4, finden wir auch ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ und $c\ell(B) \subseteq C$. Die Funktion $f_{B,C}$ erfüllt dann $f_{B,C}(x) = 0$ und $f_{B,C}(y) = 1$. Also erweist sich $\mathcal{G}$ als punktetrennend.

$(iii) \Rightarrow (i)$**:** Sei $\mathcal{G} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ punktetrennend. Die durch $d_n(x, y) := |f_n(x) - f_n(y)|$ definierten Funktionen $d_n : X \times X \to \mathbb{R}$ sind stetig und infolge beschränkt, wobei $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen ist. Die Funktionenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot \|f_n\|_\infty} \cdot d_n$$

konvergiert dann absolut; vgl. Definition 9.3.1. Gemäß Fakta 9.3.2 angewandt auf $\mathcal{B}(X \times X, \mathbb{R})$ konvergiert sie auch bezüglich $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig, gegen ein $d \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, wobei wegen Lemma 12.7.11 sogar $d \in C_b(X \times X, \mathbb{R})$. Mit der Voraussetzung, dass $\mathcal{G}$ punktetrennend ist, identifiziert man $d$ unschwer als Metrik auf $X$.

Für festes $x \in X$ und festes $\epsilon > 0$ ist wegen der Stetigkeit von $X \ni y \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}$ die Menge $U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ offen bezüglich $\mathcal{T}$, woraus $\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{T}$ folgt. Mit Korollar 12.12.10 erhalten wir schließlich $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$. ❑

Ein wichtiges Beispiel von kompakten Teilmengen eines vollständig metrischen Raumes liefert der folgende Satz von Ascoli.

**12.15.7 Satz** (Ascoli)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{G} \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{G} \subseteq C_b(X, \mathbb{C})$ ist genau dann bezüglich der von $\|.\|_\infty$ auf $C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_b(X, \mathbb{C})$ induzierten Metrik total beschränkt, wenn $\mathcal{G}$ punktweise beschränkt und* gleichgradig stetig *ist, also folgende beiden Eigenschaften gelten:*

*(i) Für jedes $x \in X$ ist $\{\, |f(x)| : f \in \mathcal{G} \,\}$ beschränkt.*

*(ii) Für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$ derart, dass $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ für alle $y \in V$ und alle $f \in \mathcal{G}$.*

*Beweis.* Erfülle $\mathcal{G}$ die Bedingungen (i) und (ii). Wir zeigen, dass $\mathcal{G}$ total beschränkt ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in X$ können wir eine Umgebung $V_x$ von $x$ so wählen, dass (ii) für $V = V_x$ erfüllt ist. Da jede Umgebung von $x$ eine $x$ enthaltende offene Menge umfasst, können wir die $V_x$ offen wählen. Offensichtlich ist $\{V_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von $X$. Wegen der Kompaktheit von $X$ existieren $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Dabei gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\left| f(x) - f(x_i) \right| < \epsilon \quad \text{falls} \;\; x \in V_{x_i} \;\; \text{und} \;\; f \in \mathcal{G} \,. \tag{12.26}$$

Wegen (i) gilt $c := \sup\{\, |f(x_i)| : \; i = 1, \dots, n, f \in \mathcal{G} \,\} < +\infty$.
Wir bezeichnen mit $K$ die abgeschlossene Kugel $K_c^{\mathbb{R}^n}(0)$ bzw. $K_c^{\mathbb{C}^n}(0)$ mit Radius $c$ in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ um 0 bezüglich der $\|.\|_\infty$ Norm, und definieren die Abbildung

$$p : \mathcal{G} \to K \quad \text{durch} \quad p(f) := \big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big)^T \,.$$

Als kompakte Menge ist $K$ total beschränkt; siehe Korollar 5.2.9 und Satz 12.15.3. Mit $K$ ist auch seine Teilmenge $p(\mathcal{G})$ total beschränkt; vgl. Fakta 12.15.2. Also existieren endlich viele $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{G}$ derart, dass es für jedes $f \in \mathcal{G}$ ein $k \in \{1, \dots, m\}$ gibt mit $\|p(f) - p(f_k)\|_\infty < \epsilon$, was

$$\left| f(x_i) - f_k(x_i) \right| < \epsilon \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \tag{12.27}$$

impliziert. Für $f \in \mathcal{G}$ sei $k \in \{1, \dots, m\}$ so gewählt, dass (12.27) zutrifft. Jedes $x \in X$ liegt in einer Menge $V_{x_i}$, und für dieses $i$ erhalten wir aus (12.26)

$$\left| f(x) - f_k(x) \right| \leq \left| f(x) - f(x_i) \right| + \left| f(x_i) - f_k(x_i) \right| + \left| f_k(x) - f_k(x_i) \right| < 3\epsilon \,.$$

Also gilt $\|f - f_k\|_\infty \leq 3\epsilon$, womit die offenen Kugeln mit Radius $4\epsilon$ und Mittelpunkt $f_k$, $k = 1, \dots, m$, ganz $\mathcal{G}$ überdecken.

Zur Umkehrung sei zunächst bemerkt, dass total beschränkte Teilmengen von $(C_b(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ bzw. $(C_b(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ beschränkt und somit auch punktweise beschränkt sind; also gilt (i).
Wegen der totalen Beschränktheit gibt es zu $\epsilon > 0$ endlich viele $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{G}$ so, dass es zu jedem $f \in \mathcal{G}$ ein $f_k$ mit $\|f - f_k\|_\infty < \epsilon$ gibt.
Zu einem $x \in X$ gibt es wegen der Stetigkeit der $f_k$'s für $k = 1, \dots, m$ Umgebungen $V_k \in \mathcal{U}(x)$ mit $|f_k(y) - f_k(x)| < \epsilon$ für alle $y \in V_k$. Für $f \in \mathcal{G}$, ein $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $\|f - f_k\|_\infty < \epsilon$ und $y \in V := V_1 \cap \dots \cap V_m \in \mathcal{U}(x)$ folgt

$$\left| f(y) - f(x) \right| < \left| f(y) - f_k(y) \right| + \left| f_k(y) - f_k(x) \right| + \left| f(x) - f_k(x) \right| < 3\epsilon \,,$$

wodurch auch (ii) zutrifft. ❑

Zusammen mit Bemerkung 12.15.4 folgt aus Satz 12.15.7

**12.15.8 Korollar.** *Für $\mathcal{G} \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{G} \subseteq C_b(X, \mathbb{C})$ ist $c\ell(\mathcal{G})$ genau dann kompakt, wenn $\mathcal{G}$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist. Also hat in diesem Fall jede Folge in $\mathcal{G}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Eine wichtige Anwendung von Korollar 12.15.8 stellt der *Satz von Peano* in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen dar. Dieser liefert die Existenz von Lösungen von einer großen Klasse von Differentialgleichungen. Siehe dazu Übungsaufgabe 12.64.

**12.15.9 Bemerkung** (*)**.** Mit fast denselben Beweisen kann man Satz 12.15.7 und Korollar 12.15.8 allgemeiner für Teilmengen $\mathcal{G}$ von $C_b(X, \mathbb{R}^p)$ zeigen, wobei $\mathbb{R}^p$ mit irgendeiner der Normen $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ versehen ist.

## 12.16 Abzählbar kompakt und folgenkompakt*

**12.16.1 Definition.** Sei $A$ Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$.

- $A$ heißt *abzählbar kompakt*, wenn jede Folge in $A$ einen Häufungspunkt in $A$ im Sinne von Definition 12.3.1 hat.

- $A$ heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in $A$ eine gegen ein $x \in A$ konvergente Teilfolge im Sinne von Definition 3.2.8 hat.

**12.16.2 Bemerkung.** Wegen der Charakterisierung von Häufungspunkten von Netzen in Lemma 12.3.3 ist gemäß Satz 12.12.2 eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raumes immer auch abzählbar kompakt.
Folgenkompakte Teilmengen eines topologischen Raumes sind ebenfalls abzählbar kompakt, denn eine Teilfolge einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $A$ mit Grenzwert $x \in A$ ist auch ein Teilnetz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Sinne von (12.3) mit Grenzwert $x$, wodurch sich $x$ gemäß Lemma 12.3.3 als Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ herausstellt.
Im Allgemeinen folgt aber weder die Folgenkompaktheit aus der Kompaktheit noch die Kompaktheit aus der Folgenkompaktheit.

**12.16.3 Proposition.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $A \subseteq X$ abzählbar kompakt, dann hat jede unendliche Teilmenge von $A$ einen Häufungspunkt in $A$ im Sinne von Definition 12.2.9. Hat umgekehrt jede unendliche Teilmenge von $A$ einen Häufungspunkt in $A$ und sind zusätzlich alle einpunktigen Mengen abgeschlossen*[4]*, dann ist ist $A$ abzählbar kompakt.*

*Beweis.* Ist $H$ eine unendliche Teilmenge einer abzählbar kompakten Teilmenge $A$, so gibt es sicherlich eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H$ mit $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$. Ein Häufungspunkt $x \in A$ dieser Folge kann infolge höchstens mit einem $x_n$ übereinstimmen, wodurch $x \notin \{x_n : n \geq m\}$ für ein hinreichend großes $m$. Wie in Bemerkung 12.3.2 festgestellt, gilt $x \in c\ell(\{x_n : n \geq m\}) = c\ell(\{x_n : n \geq m\} \setminus \{x\}) \subseteq c\ell(H \setminus \{x\})$, womit $x$ Häufungspunkt von $H$ ist.
Für die Umkehrung sei $A$ nicht abzählbar kompakt, was die Existenz eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A$ ohne Häufungspunkt bedeutet; also gibt es zu jedem $a \in A$ ein $U_a \in \mathfrak{U}(a)$ und

[4]Nach Lemma 12.9.4 bedeutet das genau die Gültigkeit des Trennungsaxioms (T1). Insbesondere haben alle Räume mit (T2) diese Eigenschaft.

ein $m_a \in \mathbb{N}$ mit $U_a \cap \{a_n : n \geq m_a\} = \emptyset$; siehe Definition 12.3.1. Als Folge wird jedes $a \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nur endlich oft angenommen, womit $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich ist.
Sind zusätzlich alle einpunktigen Mengen abgeschlossen, so ist für jedes $a \in A$ die Menge $\{a_n : 1 \leq n < m_a\} \setminus \{a\}$ abgeschlossen und daher ihr Komplement $V_a$ eine Umgebung von $a$. Wir schließen auf $U_a \cap V_a \cap \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{a\} = \emptyset$. Also hat die unendliche Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ keinen Häufungspunkt in $A$. ❑

**12.16.4 Bemerkung.** Wegen Proposition 12.16.3 besagt Satz 12.15.3 insbesondere, dass in metrischen Räumen die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt zusammenfallen; vgl. Definition 12.16.1.

## 12.17 Alexandroff-Kompaktifizierung

**12.17.1 Definition.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt $x$ eine kompakte Umgebung besitzt.

Ein einfaches Beispiel für einen lokalkompakten Raum liefert Korollar 5.2.9. Dieses besagt, dass im $\mathbb{R}^n$ genau die abgeschlossenen und beschränkten Mengen kompakt sind. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist folglich die abgeschlossene Kugel $K_r(x)$ kompakt. Da diese Mengen eine Umgebungsbasis von $x$ bilden, ist $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt.

**12.17.2 Satz.** *Ein topologischer Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann lokalkompakt, wenn er offene Teilmenge eines kompakten Hausdorff-Raumes ist, also wenn es einen kompakten Hausdorff-Raum $(Y, \mathcal{O})$ derart gibt, dass $X$ eine offene Teilmenge von $Y$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{O}_X$ ist.*
*Für einen gegebenen lokalkompakten Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist $Y := X \cup \{\infty\}$ mit einem Element $\infty \notin X$ versehen mit der Topologie*

$$\mathcal{O} = \mathcal{T} \cup \Big\{ \{\infty\} \cup (X \setminus K) : X \supseteq K \text{ kompakt} \Big\} \tag{12.28}$$

*ein derartiger kompakter Hausdorff-Raum. Dieser Raum $(X \cup \{\infty\}, \mathcal{O})$ wird als* Alexandroff-Kompaktifizierung *oder auch als* Einpunkt-Kompaktifizierung *bezeichnet.*

*Beweis.* Sei $X$ eine offene Teilmenge des kompakten Hausdorff-Raumes $Y$ versehen mit $\mathcal{T} := \mathcal{O}_X$. Nach Lemma 12.12.11 ist $Y$ regulär. Also gibt es zu der Umgebung $X$ von $x$ eine Umgebung $V$ von $x$ in $Y$ mit $c\ell(V) \subseteq X$. Aus Lemma 12.12.7 folgt die Kompaktheit von $c\ell(V)$ in $Y$. Wegen Satz 12.12.2, (ii), zusammen mit $\mathcal{O}_{c\ell(V)} = (\mathcal{O}_X)_{c\ell(V)}$ ist $c\ell(V)$ auch kompakt in $X$, was $X$ als lokalkompakt ausweist.
Sei umgekehrt $(X, \mathcal{T})$ lokalkompakt und Hausdorffsch, $Y := X \cup \{\infty\}$ mit $\infty \notin X$ und $\mathcal{O}$ wie in (12.28). Mit Hilfe von Lemma 12.12.7 überprüft man leicht, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $Y$ ist, wobei $X \in \mathcal{O}$. Um zu zeigen, dass diese auch Hausdorffsch ist, seien zunächst $x \neq y$ aus $X$. Da $(X, \mathcal{T})$ voraussetzungsgemäß Hausdorffsch ist, gibt es disjunkte $O_x, O_y \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$ mit $x \in O_x, y \in O_y$. Für $x \in X$ und $y = \infty$ gibt es wegen der Lokalkompaktheit eine kompakte Umgebung $V$ von $x$ in $(X, \mathcal{T})$. Für eine $x$ enthaltende Teilmenge $O_x \in \mathcal{T}$ von $V$ und $O_y := \{\infty\} \cup (X \setminus V)$ gilt $O_x, O_y \in \mathcal{O}$ sowie $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Wir müssen noch zeigen, dass $Y$ kompakt ist. Dazu sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von $Y$, womit $\infty \in O_j$ für ein $j \in I$. Nach Konstruktion der Topologie gilt $O_j = \{\infty\} \cup (X \setminus K)$ für eine kompakte Teilmenge $K$ von $X$. Sicherlich ist $\{O_i \cap X : i \in I\}$ eine in $(X, \mathcal{T})$ offene Überdeckung von $K$. Also gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $(O_{i_1} \cap X) \cup \dots \cup (O_{i_n} \cap X) \supseteq K$, und daher $Y = O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \cup O_j$. ❑

**12.17.3 Bemerkung.** In Satz 12.17.2 ist offenbar $X$ dicht in $Y$ genau dann, wenn $X$ nicht kompakt ist.
Man kann auch unschwer nachweisen, dass jeder kompakte Hausdorff-Raum $(Y, \mathcal{O})$, der $X$ als offene Teilmenge mit einem einpunktigen $Y \setminus X$ enthält und $\mathcal{O}_X = \mathcal{T}$ erfüllt, eine homöomorphe Kopie von dem in Satz 12.17.2 konstruierten Raum ist.
Allgemeiner gilt, dass, falls $(Z, \mathcal{V})$ ein weiterer kompakter Hausdorff-Raum ist, der $X$ als offene Teilmenge mit $\mathcal{V}_X = \mathcal{T}$ enthält, sich dann die Einbettungsabbildung $\iota : X \to Y$ durch $\phi(Z \setminus X) = \{\infty\}$ zu einer stetigen Abbildung $\phi : Z \to Y$ fortsetzen lässt.

**12.17.4 Korollar.** *Lokalkompakte Hausdorff-Räume $(X, \mathcal{T})$ sind regulär. Zudem gibt es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein offenes $P \subseteq X$ mit $x \in P \subseteq c\ell(P) \subseteq U$ derart, dass $c\ell(P)$ kompakt ist.*

*Beweis.* Wegen Satz 12.17.2 können wir $X$ als offene Teilmenge eines kompakten Hausdorff-Raumes $(Y, \mathcal{O})$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{O}_X$ betrachten. Nach Lemma 12.12.11 ist $(Y, \mathcal{O})$ regulär und wegen Fakta 12.10.2, 5, infolge auch $(X, \mathcal{T})$.
Wegen $X \in \mathcal{O}$ ist jede Umgebung $U \subseteq X$ von $x$ in $X$ auch Umgebung von $x$ betrachtet als Teilmenge von $Y$. Nach Fakta 12.10.2, 4, gibt es ein $P \in \mathcal{O}$ mit $x \in P \subseteq c\ell(P) \subseteq U$, wobei $c\ell(P)$ wegen $c\ell(P) \subseteq U \subseteq X$ der Abschluss von $P$ in $Y$ und auch in $X$ ist; siehe (12.15). Nach Lemma 12.12.7 ist $c\ell(P)$ kompakt in $Y$ und daher auch in $X$; siehe Bemerkung 12.12.3. Wegen $P \subseteq X$ gilt $P \in \mathcal{O}_X = \mathcal{T}$. ❑

**12.17.5 Beispiel.** Man betrachte $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versehen mit der chordalen Metrik $\chi$; siehe Beispiel 12.4.11. Für $\mathcal{O} := \mathcal{T}(\chi)$ gilt $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{T}^2$; siehe Beispiel 12.4.11, (ii). Zudem sind die Komplemente von offenen Kugeln um $\infty$ immer abgeschlossene Kugeln bezüglich $d_2$ um 0 und infolge Komplemente von $\infty$ enthaltenden $O \in \mathcal{O}$ genau von der Bauart $\{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus K)$ mit einem kompakten $K \subseteq \mathbb{C}$. Also ist $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}, \mathcal{O})$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ versehen mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^2$.

**12.17.6 Definition.** Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet $C_0(X, \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen $g : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists K \text{ kompakt } \; \forall x \in X \setminus K : \; |g(x)| < \epsilon . \tag{12.29}$$

Entsprechend definieren wir $C_0(X, \mathbb{C})$ . Man spricht von der Menge aller stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.
Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ bzw. $f : X \to \mathbb{C}$ bezeichnet man den Abschluss von $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ bzw. $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ als *Träger von $f$* und schreibt $\operatorname{supp}(f)$ dafür, also

$$\operatorname{supp}(f) := c\ell(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) .$$

Schließlich wollen wir mit $C_{00}(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_{00}(X, \mathbb{C})$ die Menge aller stetigen reell- bzw. komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger bezeichnen.

**12.17.7 Fakta.** Sei $(Z,\mathcal{R})$ ein beliebiger topologischer Raum, $(X,\mathcal{T})$ lokalkompakter Hausdorff-Raum und $(Y,\mathcal{O})$ die Alexandroff-Kompaktifizierung davon wie in Satz 12.17.2.

1. Weil für $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und stetige $f : Z \to \mathbb{R}$, $g : Z \to \mathbb{R}$ nach Lemma 12.7.10 auch $\alpha f + \beta g$ stetig ist und weil $\operatorname{supp}(\alpha f + \beta g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$ gilt, folgt aus Lemma 12.12.7, (ii), dass $C_{00}(Z,\mathbb{R})$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet. Entsprechend ist $C_{00}(Z,\mathbb{C})$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Offenbar gilt auch $C_{00}(Z,\mathbb{R}) \subseteq C_0(Z,\mathbb{R})$ sowie $C_{00}(Z,\mathbb{C}) \subseteq C_0(Z,\mathbb{C})$.

2. Wählt man $\epsilon = 1$ und $K$ wie in Definition 12.17.6, so ist $x \mapsto |g(x)|$ auf der Menge $K$ wegen ihrer Kompaktheit beschränkt. Für $x \in Z\backslash K$ gilt ohnehin $|g(x)| < 1$. Somit sind alle Funktionen aus $C_0(Z,\mathbb{R})$ bzw. $C_0(Z,\mathbb{C})$ beschränkt; also gilt $C_0(Z,\mathbb{R}) \subseteq C_b(Z,\mathbb{R})$ und $C_0(Z,\mathbb{C}) \subseteq C_b(Z,\mathbb{C})$.

3. Für $f \in C(Y,\mathbb{R})$ mit $f(\infty) = 0$ ist klarerweise $f|_X$ auf $X$ bezüglich $\mathcal{O}_X = \mathcal{T}$ stetig. Außerdem gibt es wegen der Stetigkeit von $f$ bei $\infty$ zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung von $\infty$, also eine kompakte Menge $K$ in $X$, mit $|f(x)| = |f(x) - f(\infty)| < \epsilon$ für alle $x \in X \setminus K$, wodurch $f|_X \in C_0(X,\mathbb{R})$. Entsprechendes gilt für $f \in C(Y,\mathbb{C})$.

4. Definieren wir für $g \in C_0(X,\mathbb{R})$ die Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = g(x)$ für $x \in X$ und durch $f(\infty) = 0$, so ist $f$ stetig auf $Y$, also $f \in C(Y,\mathbb{R})$. In der Tat bedeutet die Bedingung aus Definition 12.17.6 für $g$ genau die Stetigkeit von $f$ bei $\infty$. Zudem überträgt sich die Stetigkeit von $g$ bei jedem $x \in X$ auf $f$, da $X$ offen in $Y$ ist. Entsprechendes gilt für $g \in C_0(X,\mathbb{C})$

5. Gemäß der letzten beiden Punkte stellt die Zuordnung $f \mapsto f|_X$ eine Bijektion von $\mathcal{N} := \{f \in C(Y,\mathbb{R}) : f(\infty) = 0\}$ auf $C_0(X,\mathbb{R})$ dar. Wegen $Y = X \cup \{\infty\}$ und $f(\infty) = 0$ gilt dabei[5]
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in Y} |f(x)| = \sup_{x\in X} |f(x)| = \|f|_X\|_\infty .$$
Als Abbildung von der Hyperebene $\mathcal{N} \subseteq C(Y,\mathbb{R})$ nach $C_b(X,\mathbb{R})$ ist $f \mapsto f|_X$ offenbar linear, womit $C_0(X,\mathbb{R})$ einen linearen Teilraum von $C_b(X,\mathbb{R})$ bildet und $f \mapsto f|_X$ eine lineare Bijektion von $\mathcal{N}$ auf $C_0(X,\mathbb{R})$ abgibt. Entsprechendes gilt im komplexwertigen Fall.

6. Da das Punktauswertungsfunktional $\varphi(f) = f(\infty)$ auf $(C(Y,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ linear, beschränkt und somit stetig ist, stellt sich $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{0\})$ als abgeschlossen heraus. Gemäß Lemma 9.1.6 ist $(\mathcal{N}, \|.\|_\infty)$ dann ein Banachraum und wegen $\|f\|_\infty = \|f|_X\|_\infty$ infolge auch $(C_0(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. Entsprechend ist $C_0(X,\mathbb{C})$ ein Banachraum.

   Man kann auch für allgemeine topologische Räume $(Z,\mathcal{R})$ zeigen, dass $C_0(Z,\mathbb{R})$ und $C_0(Z,\mathbb{C})$ Banachräume bilden; vgl. auch Übungsaufgabe 12.70.

**12.17.8 Lemma.** *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Ist $K \subseteq X$ kompakt und $O \supseteq K$ offen, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ derart, dass $f(K) \subseteq \{1\}$ und*

[5] Wegen der Kompaktheit von $(Y,\mathcal{O})$ gilt $C(Y,\mathbb{R}) = C_b(Y,\mathbb{R})$.

*dass Träger* $\operatorname{supp}(f) = c\ell(\{x \in X : f(x) \neq 0\})$ *von* $f$ *kompakt und in* $O$ *enthalten ist, also* $f \in C_{00}(X, \mathbb{R})$.

*Beweis.* Wegen der Lokalkompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ folgt aus Korollar 12.17.4, dass es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung $O_x$ gibt mit $x \in O_x \subseteq c\ell(O_x) \subseteq O$, wobei $c\ell(O_x)$ ebenfalls kompakt ist. Da $\{O_x : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von $K$ abgibt, folgt aufgrund der Kompaktheit von $K$ die Existenz endlich vieler $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_{x_j} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} c\ell(O_{x_j}) \subseteq O\,.$$

Für $R := \bigcup_{j=1}^{n} O_{x_j}$ ist $c\ell(R) = \bigcup_{j=1}^{n} c\ell(O_{x_j})$ als Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt; siehe Lemma 12.12.7.
Somit ist $(c\ell(R), \mathcal{T}_{c\ell(R)})$ ein kompakter Hausdorff-Raum und gemäß Lemma 12.12.11 normal. Die Mengen $K$ und $c\ell(R) \setminus R$ sind darin zwei disjunkte abgeschlossene Mengen. Also gibt es wegen des Lemmas von Urysohn, Korollar 12.11.2, ein stetiges $g : c\ell(R) \to [0,1]$ mit

$$g(K) \subseteq \{1\} \quad \text{und} \quad g(\, c\ell(R) \setminus R) \subseteq \{0\}\,.$$

Ist $h : X \setminus R \to [0,1]$ die konstante Nullfunktion, so stimmen $g$ und $h$ am Schnitt ihrer Definitionsbereiche $c\ell(R) \cap X \setminus R = c\ell(R) \setminus R$ überein. Nach Lemma 12.7.4 ist $f := g \cup h$ dann stetig und erfüllt offensichtlich $f(K) \subseteq \{1\}$. Wegen $\{x : f(x) \neq 0\} \subseteq c\ell(R) \subseteq O$ ist der Träger von $f$ kompakt und in $O$ enthalten. ❑

**12.17.9 Bemerkung.** Von dem Beweis von Lemma 12.17.8 wollen wir für lokalkompakte Hausdorff-Räume $(X, \mathcal{T})$ noch herausstellen, dass es zu jedem kompakten $K \subseteq X$ eine offene Obermenge $R$ gibt, die kompakten Abschluss hat.

## 12.18 Der Satz von Stone-Weierstraß

**12.18.1 Definition.** Für eine nichtleere Menge $E$ heißt eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^E$, $(\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^E)$ von Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ eine *Algebra von Funktionen*, falls $\mathcal{A}$ einen linearen Teilraum bildet, der abgeschlossen unter der Multiplikation ist, für den also mit $f, g \in \mathcal{A}$ auch $f \cdot g \in \mathcal{A}$.

**12.18.2 Beispiel.** Offenbar ist $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ $(\mathcal{B}(E, \mathbb{C}))$ eine Algebra von Funktionen; siehe Definition 6.6.3 sowie Definition 6.8.1 samt der danach gelisteten Tatsachen.
Ist $E$ mit einer Topologie versehen, so stellt der Raum aller reellwertigen (komplexwertigen) beschränkten und stetigen Funktionen $C_b(E, \mathbb{R})$ $(C_b(E, \mathbb{C}))$ eine in $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ $(\mathcal{B}(E, \mathbb{C}))$ enthaltene Algebra dar; siehe Lemma 12.7.10.

**12.18.3 Lemma.** *Für eine Algebra* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ *ist auch der Abschluss* $B$ *von* $\mathcal{A}$ *in* $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ *bezüglich* $\|.\|_\infty$ *eine Algebra. Entsprechendes gilt für Algebren* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(E, \mathbb{C})$.

*Beweis.* Nach Lemma 9.1.8 ist $B$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(E,\mathbb{C})$. Für $f, g, f_n, g_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \to f, g_n \to g$ folgt aus der Beschränktheit von $\|f_n\|_\infty$

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty \to 0\,.$$

Also gilt mit $f, g \in B$ auch $fg \in B$. ❑

**12.18.4 Definition.** Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf $E$. Man sagt, $\mathcal{A}$ ist *punktetrennend*, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in E$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$ gibt. Man nennt die Algebra $\mathcal{A}$ *nirgends verschwindend*, falls es zu jedem $x \in E$ ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$ gibt.

Enthält $\mathcal{A}$ eine konstante Funktion ungleich der Nullfunktion, so ist $\mathcal{A}$ offensichtlich nirgends verschwindend.

**12.18.5 Bemerkung.** Für $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2$, bildet $\phi_{x_1,x_2}(f) = \binom{f(x_1)}{f(x_2)}$ eine lineare Abbildung von einer Algebra $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}^2$.
Hat $E$ mindestens zwei Elemente und ist für jedes Paar $x_1, x_2 \in E$ mit $x_1 \neq x_2$ die Abbildung $\phi_{x_1,x_2}$ surjektiv, gibt es also für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bzw. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2$, so ist $\mathcal{A}$ offensichtlich punktetrennend und nirgends verschwindend.
Ist $\mathcal{A}$ umgekehrt nirgends verschwindend und punktetrennend, so enthält $\phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$ für $x_1 \neq x_2$ wegen der Linearität einen Vektor der Form $\binom{1}{\beta}$, einen Vektor der Form $\binom{\alpha}{1}$ und einen der Form $\binom{\gamma}{\delta}$ mit $\gamma \neq \delta$.
Im Fall $\alpha\beta \neq 1$ sind die ersten beiden Vektoren linear unabhängig. Für $\alpha\beta = 1$ mit $\alpha = \beta = 1$ sind die ersten beiden Vektoren gleich und der letzte dazu linear unabhängig. Im Fall $\alpha\beta = 1$ mit $\alpha \neq 1 \neq \beta$ gilt $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{1\cdot\alpha}{\beta\cdot 1} \in \phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$, da $\mathcal{A}$ eine Algebra ist. Folglich sind $\binom{0}{1-\beta} = \binom{\alpha}{1} - \binom{\alpha}{\beta} \in \phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$ und $\binom{1}{\beta}$ linear unabhängig. In jedem Fall ist der Teilraum $\phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$ von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}^2$ mindestens zweidimensional, wodurch $\phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^2$ bzw. $\phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2$.

**12.18.6 Lemma.** *Es gibt eine Folge* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Polynomen aus* $\mathbb{R}[x]$*, die auf* $[-1,+1]$ *gleichmäßig gegen die Betragsfunktion* $[-1,+1] \ni t \mapsto |t| \in \mathbb{R}$ *konvergiert.*

*Beweis.* Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \sqrt{1-x}$. Bekannterweise ist $g$ auf $[0,1)$ unendlich oft differenzierbar. Gemäß Proposition 8.8.2 erhalten wir für die Anschlussstelle $y = 0$ die Taylor-Approximation

$$g(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j}_{=:q_n(x)} + R_n(x) \quad \text{für alle} \quad x \in [0,1)\,.$$

$$R_n(x) = \int_0^x g^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{n!} \int_0^x (1-t)^{-n-\frac{1}{2}} (x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

erfüllt wegen $(1-t)^{-n-\frac{1}{2}}(x-t)^n \leq (1-t)^{-\frac{1}{2}}$ für $0 \leq t \leq x < 1$ die Abschätzung

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{2j}\Big)\cdot \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t}_{=2} = \exp\Big(\sum_{j=1}^{n}\ln\Big(1-\frac{1}{2j}\Big)\Big).$$

Aus der durch elementare Kurvendiskussion nachzuweisenden Ungleichung $\ln s \leq s-1$ für $s > 0$ folgt $\sum_{j=1}^{n}\ln(1-\frac{1}{2j}) \leq -\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}$. Also erhalten wir

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|g(x)-q_n(x)\right| = \sup_{x\in[0,1)}\left|R_n(x)\right| \leq \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Die erste Gleichheit hier gilt, da $g$ und $q_n$ beide sogar auf $[0,1]$ stetig sind. Mit $p_n(x) = q_n(1-x^2)$ erhalten wir schließlich

$$\sup_{x\in[-1,+1]}\left||x|-p_n(x)\right| = \sup_{x\in[-1,+1]}\left|g(1-x^2)-q_n(1-x^2)\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|g(x)-q_n(x)\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

❑

**12.18.7 Satz** (Stone-Weierstraß). *Sei $(K,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, und sei $\mathcal{A} \subseteq C_b(K,\mathbb{R})$ eine punktetrennende, nirgends verschwindende Algebra stetiger Funktionen. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_b(K,\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm.*

*Beweis.* Nach Lemma 12.18.3 ist der Abschluss $B$ von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(K,\mathbb{R})$ eine Algebra. Wegen der Abgeschlossenheit von $C_b(K,\mathbb{R})$ in $\mathcal{B}(K,\mathbb{R})$ gilt $B \subseteq C_b(K,\mathbb{R})$. Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

(i) Ist $f \in B$, so zeigen wir, dass auch $|f| \in B$. Dividieren wir $f \neq 0$ nötigenfalls durch $\|f\|_\infty$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f\|_\infty \leq 1$ annehmen.

Gemäß Lemma 12.18.6 gibt es zu $\epsilon > 0$ ein reelles Polynom $p$ mit

$$\left|p(y)-|y|\right| \leq \epsilon \quad \text{für alle} \quad y \in [-1,+1]\,.$$

Insbesondere gilt $|p(0)| \leq \epsilon$, womit für $\sum_{j=1}^{m} a_j y^j := p(y)-p(0)$

$$\sup_{y\in[-1,+1]}\left|\sum_{j=1}^{m} a_j y^j - |y|\right| \leq 2\epsilon\,.$$

Als Algebra enthält $B$ auch $\sum_{j=1}^{m} a_j f^j$, wobei

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j f^j - \left|f\right|\right\|_\infty \leq 2\epsilon\,.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war und $B$ abgeschlossen ist, folgt $|f| \in B$.

(ii) Sind $f_1, \dots, f_n \in B$, so gilt auch $\max(f_1, \dots, f_n) \in B$ sowie $\min(f_1, \dots, f_n) \in B$, denn für $n = 2$ folgt aus dem vorherigen Punkt

$$\max(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{|f_1 - f_2|}{2} \in B, \quad \min(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{|f_1 - f_2|}{2} \in B,$$

und für $n > 2$ erhalten wir die Behauptung durch vollständige Induktion.

(iii) Für $f \in C_b(K, \mathbb{R})$, $x \in K$ und $\epsilon > 0$ existiert eine Funktion $g_x \in B$ mit $g_x(x) = f(x)$ und $g_x(t) > f(t) - \epsilon$ für alle $t \in K$.

Um das einzusehen, bemerken wir zunächst, dass mit $\mathcal{A}$ auch die größere Algebra $B$ punktetrennend und nirgends verschwindend ist. Wegen Bemerkung 12.18.5 im Fall $x \neq y$ und wegen der Eigenschaft von $B$, nirgends verschwindend zu sein, im Fall $x = y$ existiert für jedes $y \in K$ eine Funktion $h_y \in B$ mit

$$h_y(x) = f(x) \quad \text{und} \quad h_y(y) = f(y).$$

Wegen der Stetigkeit von $f - h_y$ bei $y$ existiert eine offene Umgebung $U_y$ von $y$ mit

$$h_y(t) > f(t) - \epsilon \quad \text{für alle} \quad t \in U_y.$$

Da $K$ kompakt ist, existieren $y_1, \dots, y_n \in K$ mit $K \subseteq U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$. Die Funktion $g_x := \max(h_{y_1}, \dots, h_{y_n})$ liegt dann in $B$ und hat die gewünschten Eigenschaften.

(iv) Für $f \in C_b(K, \mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ existiert $h \in B$ mit $\|h - f\|_\infty \leq \epsilon$, wodurch dann $c\ell(\mathcal{A}) = c\ell(B) = C_b(K, \mathbb{R})$.

Dazu betrachten wir die Funktionen $g_x$, $x \in K$, aus (iii). Da $g_x - f$ bei $x$ stetig ist, existiert eine offene Umgebung $V_x$ von $x$, so dass

$$g_x(t) < f(t) + \epsilon \quad \text{für alle} \quad t \in V_x.$$

Wege der Kompaktheit existieren $x_1, \dots, x_m \in K$ mit $K \subseteq V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_m}$. Die Funktion $h := \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}) \in B$ erfüllt $h(t) < f(t) + \epsilon$ für alle $t \in K$. Schließlich hat mit den Funktionen $g_x$ auch $h$ die Eigenschaft, dass $h(t) > f(t) - \epsilon$ für $t \in K$. ❑

**12.18.8 Beispiel.** Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $\mathcal{A} := \mathbb{R}[x]|_{[a,b]}$ der Raum aller Polynome mit reellen Koeffizienten betrachtet als Funktionen auf $[a, b]$. Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ eine Algebra bestehend aus stetigen Funktionen, die alle linearen Polynome enthält. Folglich ist $\mathcal{A}$ punktetrennend und nirgends verschwindend. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $\mathcal{A}$ dicht in $C([a, b], \mathbb{R})$ bezüglich $\|.\|_\infty$.

**12.18.9 Korollar.** *Ist $\mathcal{A} \subseteq C_b(K, \mathbb{C})$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende Algebra stetiger Funktionen auf einem kompakten topologischen Raum $(K, \mathcal{T})$ derart, dass mit $f \in \mathcal{A}$ immer auch die punktweise komplex konjugierte Funktion $\bar{f}$ zu $\mathcal{A}$ gehört, so ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_b(K, \mathbb{C})$.*

*Beweis.* Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ aller $h \in \mathcal{A}$, die Werte in $\mathbb{R}$ haben. Voraussetzungsgemäß liegt mit $f$ auch $\mathrm{Re}\, f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ und $\mathrm{Im}\, f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$ in $\mathcal{A}$, und somit $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$. Daraus folgert man leicht, dass $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ auch punktetrennend und nirgends verschwindend ist. Nach Satz 12.18.7 ist $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ dicht in $C_b(K, \mathbb{R})$. Insbesondere gibt es zu jedem $f \in C_b(K, \mathbb{C})$ zwei Folgen $g_n, h_n \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$ mit $g_n \to \mathrm{Re}\, f,\ h_n \to \mathrm{Im}\, f$, woraus sich $g_n + ih_n \to f$ und infolge die Dichtheit von $\mathcal{A}$ in $C_b(K, \mathbb{C})$ ergibt. ❑

**12.18.10 Beispiel.** Sei $\mathcal{A}$ die lineare Hülle von $\{(\zeta \mapsto \zeta^n) : n \in \mathbb{Z}\}$ in $C_b(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Also ist $\mathcal{A}$ der Raum aller Funktionen der Bauart $\mathbb{T} \ni \zeta \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n \zeta^n \in \mathbb{C}$.
Da für $\zeta \in \mathbb{T}$ die Beziehung $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ gilt, ist $\mathcal{A}$ invariant unter der komplexen Konjugation. Weiters ist $\mathcal{A}$ punktetrennend, da für $\zeta_1 \neq \zeta_2 \in \mathbb{T}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$p(\zeta) = c_2 \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} + c_1 \frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}$$

eine Funktion in $\mathcal{A}$ mit $p(\zeta_1) = c_1$ und $p(\zeta_2) = c_2$ ist. Somit liegt nach obigem Satz $\mathcal{A}$ dicht in $C_b(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.
Da $C_b(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ isomorph zu den stetigen, $2\pi$-periodischen Funktionen $\mathcal{P}$ auf $\mathbb{R}$ ist, folgt daraus auch, dass der Raum der *trigonometrischen Polynome*, also die lineare Hülle der Funktionen $t \mapsto \exp(itn),\ n \in \mathbb{Z}$, dicht in $\mathcal{P}$ bezüglich $\|.\|_\infty$ ist; siehe Übungsaufgabe 12.72.

Wir wollen auch eine Version des Satzes von Stone-Weierstraß für lokalkompakte Hausdorff-Räume $(X, \mathcal{T})$ herleiten.

**12.18.11 Korollar.** *Für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum* $(X, \mathcal{T})$ *ist jede punktetrennende und nirgends verschwindende Algebra* $\mathcal{A} \subseteq C_0(X, \mathbb{R})$ *bzw.* $\mathcal{A} \subseteq C_0(X, \mathbb{C})$*, die im komplexen Fall zusätzlich unter der komplexen Konjugation abgeschlossen ist, dicht in* $C_0(X, \mathbb{R})$ *bzw.* $C_0(X, \mathbb{C})$.

*Beweis.* Um den reellwertigen und den komplexwertigen Fall gleichzeitig zu behandeln, schreiben wir $C_0(X)$ für $C_0(X, \mathbb{R})$ oder $C_0(X, \mathbb{C})$ und $C_b(Y)$ für $C_b(Y, \mathbb{R})$ oder $C_b(Y, \mathbb{C})$.
Nach Fakta 12.17.7 ist $C_0(X)$ isometrisch isomorph zu $\mathcal{N} \subseteq C_b(Y)$, wobei $Y = X \cup \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung aus Satz 12.17.2 ist. Also können wir $\mathcal{A}$ auch als Algebra in $C_b(Y)$ betrachten. Als solche ist sie aber nicht mehr nirgends verschwindend, da ja $f(\infty) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}$.
Um diesen Nachteil zu beheben, betrachten wir $\mathcal{B} := \mathcal{A} + \langle \mathbb{1}_Y \rangle$, also die lineare Hülle von $\mathcal{A}$ und der konstanten 1-Funktion auf $Y$. Nun überprüft man leicht, dass $\mathcal{B}$ eine punktetrennende, nirgends verschwindende Algebra auf $Y$ ist. Im komplexwertigen Fall folgt aus $\mathcal{B}$ auch $\bar{f} \in \mathcal{B}$. Nach Satz 12.18.7 bzw. Korollar 12.18.9 ist dann $\mathcal{B}$ dicht in $C_b(Y)$. Für $f \in C_0(X)$ gibt es daher eine Folge $g_n \in \mathcal{B}$ mit $g_n \to f$ bzgl. $\|.\|_\infty$. Insbesondere gilt $g_n(\infty) \to f(\infty) = 0$, und infolge

$$f_n := g_n - g_n(\infty) \cdot \mathbb{1}_Y \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f - 0 \cdot \mathbb{1}_Y = f\,.$$

Wegen $f_n(\infty) = 0$ gilt $f_n \in \mathcal{A}$, und wir sehen, dass $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(X)$ ist. ❑

**12.18.12 Beispiel.** Sei $D$ eine offene und nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Als offene Teilmenge eines lokalkompakten Raumes ist $D$ auch lokalkompakt. Weiters sei $\mathcal{A}$ die Menge $C_{00}^\infty(D,\mathbb{R})$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ mit kompaktem[6] Träger, also $C_{00}^\infty(D,\mathbb{R}) := C^\infty(D,\mathbb{R}) \cap C_{00}(D,\mathbb{R})$, wobei $D$ mit der Spurtopologie $(\mathcal{T}^n)_D$ der Euklidischen Topologie versehen ist.
Da jede Linearkombination und das Produkt von Funktionen $f, g \in C_{00}^\infty(D,\mathbb{R})$ wieder in $C_{00}^\infty(D,\mathbb{R})$ liegt, bildet $\mathcal{A}$ eine Algebra. Um Korollar 12.18.11 anwenden zu können, müssen wir nur noch zeigen, dass $\mathcal{A}$ punktetrennend ist. Dazu betrachte man die durch

$$\psi(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \le 0, \end{cases}$$

definierte Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche bekannterweise beliebig oft differenzierbar ist; vgl. Beispiel 7.2.20. Für ein $x_0 \in D$ und $\delta > 0$ mit $K_\delta(x_0) \subseteq D$ setzen wir

$$f_{x_0,\delta}(x) := \psi\Big(1 - \frac{\|x - x_0\|_2^2}{\delta^2}\Big).$$

Man sieht unmittelbar, dass der Träger von $f_{x_0,\delta}$ in der kompakten Menge $K_\delta(x_0)$ enthalten ist und dass $f_{x_0,\delta}$ auf $D$ als Zusammensetzung von $C^\infty$-Funktionen beliebig oft differenzierbar ist; also $f_{x_0,\delta} \in C_{00}^\infty(D,\mathbb{R})$.
Für $x_1 \neq x_2 \in D$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) und $3\delta \le \|x_1 - x_2\|_2$ hat die Funktion $c_1 f_{x_1,\delta} + c_2 f_{x_2,\delta}$ den Wert $c_1$ bei $x_1$ und den Wert $c_2$ bei $x_2$. Nach Bemerkung 12.18.5 können wir Korollar 12.18.11 anwenden, und erhalten die Dichtheit von $C_{00}^\infty(D,\mathbb{R})$ in $C_0(D,\mathbb{R})$.
Da aus $f \in C_{00}^\infty(D,\mathbb{C})$, also für eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger, offenbar $\bar{f} \in C_{00}^\infty(D,\mathbb{C})$ folgt, ist auch $C_{00}^\infty(D,\mathbb{C})$ dicht in $C_0(D,\mathbb{C})$; siehe Korollar 12.18.11.

## 12.19 Übungsaufgaben

12.1 Sei $X$ eine nichtleere Menge und $d$ die diskrete Metrik, also $d(x,y) = 1, x \neq y$ und $d(x,x) = 0$. Man zeige, dass dann $\mathcal{T}(d) = \mathcal{P}(X)$.

12.2 Man zeige, dass $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T}^< := \{\, [-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty] \,\}$ ein topologischer Raum ist; siehe Beispiel 12.1.4, (vi).

12.3 Man zeige, dass die Mengensysteme aus Fakta 12.1.10, 4, tatsächlich Umgebungsbasen von $x$ sind.

[6] Weil der Abschluss $c\ell_{(\mathcal{T}^n)_D}(\{x \in D : f(x) \neq 0\})$ von $\{x \in D : f(x) \neq 0\}$ in $D$ bezüglich der Spurtopologie mit dem Abschluss $c\ell_{\mathcal{T}^n}(\{x \in D : f(x) \neq 0\})$ von $\{x \in D : f(x) \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^n$ geschnitten mit $D$, also mit $c\ell_{\mathcal{T}^n}(\{x \in D : f(x) \neq 0\}) \cap D$ übereinstimmt, ist gemäß Bemerkung 12.12.3 und Lemma 12.12.7 die Kompaktheit des Trägers von $f$ in $D$ dazu äquivalent, dass $c\ell_{\mathcal{T}^n}(\{x \in D : f(x) \neq 0\})$ in $\mathbb{R}^n$ kompakt und in $D$ enthalten ist; vgl. auch Übungsaufgabe 12.49.

12.4 Man zeige, dass in $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T}^< = \{\, [-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty] \,\}$ ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ gegen ein $x \in [-\infty, +\infty)$ genau dann konvergiert, wenn $x \geq \limsup_{i \in I} x_i$; vgl. Beispiel 12.1.14, (iii).

12.5 Sei $X$ eine nichtleere Menge, und definiere $\mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ als

$$\mathcal{T} := \{\, A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich} \,\} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} := \{\, A \subseteq X : A = X \text{ oder } A \text{ endlich} \,\}.$$

Für welche $X$ sind $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{O}$ Topologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Unterscheide die Fälle, dass $X$ endlich oder unendlich ist.

12.6 Zeigen Sie, dass die chordale Metrik $\chi$ aus Beispiel 12.4.11, (ii), und $d_2$ auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ dieselbe Topologie induzieren, aber dort nicht äquivalent sind! Siehe dazu Übungsaufgabe 6.39!

12.7 Zeigen Sie, dass für eine Menge $M$ und einen Filter $\mathfrak{F}$ auf $M$ ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ genau dann eine Filterbasis von $\mathfrak{F}$ ist, wenn

$$\mathfrak{F} = \{\, F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathfrak{B} : B \subseteq F \,\}.$$

Zeigen Sie auch, dass ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ Filterbasis höchstens eines Filters ist. Schließlich zeige man, dass ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ genau dann Filterbasis eines Filters ist, wenn $\mathfrak{B}$ folgende beiden Eigenschaften erfüllt.

(i) $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{B}$,

(ii) $B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

12.8 Für eine Funktion $f : M \to N$ und einen Filter $\mathfrak{F}$ auf $M$ zeige man, dass $\mathfrak{G} = \{G \subseteq N : f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}\}$ ein Filter auf $N$ ist und dass $f(\mathfrak{F}) = \{f(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{G}$ abgibt. Schließlich gebe man ein Beispiel an, wo $f(\mathfrak{F})$ eine Filterbasis, aber kein Filter ist.

12.9 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man zeige, dass die Umgebungsfilter $\mathscr{U}(x)$ um die Punkte $x \in X$ folgende drei Eigenschaften haben:

(i) Für jedes $x \in X$ ist $\mathscr{U}(x)$ ein Filter.

(ii) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathscr{U}(x)$ gilt $x \in U$.

(iii) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathscr{U}(x)$ gibt es ein $W \in \mathscr{U}(x)$ mit $W \subseteq U$ derart, dass $U \in \mathscr{U}(y)$ für alle $y \in W$ gilt.

Zeigen Sie auch umgekehrt, dass wenn für alle $x \in X$ ein Mengensystem $\mathscr{U}(x)$ mit obigen Eigenschaften gegeben ist, es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf $X$ derart gibt, dass die $\mathscr{U}(x)$ genau die Umgebungsfilter sind.

Hinweis für die Umkehrung: Definieren Sie $\mathcal{T}$ als die Menge aller Mengen $O$ mit $O \in \mathscr{U}(x)$ für alle $x \in O$. Zeigen Sie auch, dass für $U \in \mathscr{U}(x)$ die Menge $\{z \in U : U \in \mathscr{U}(z)\}$ offen ist.

12.10 Für $X := \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$ zeige man, dass $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum ist. Ist er Hausdorffsch? Weiters bestimme man den Umgebungsfilter und eine möglichst kleine Filterbasis davon um jeden Punkt $x \in X$. Schließlich bestimme man den Abschluss einer jeden Teilmenge von $X$!

12.11 Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $x \in X$, so zeige man $\cap_{U \in \mathfrak{U}(x)} U = \{x\}$ für alle $x \in X$. Weiters zeige man, dass $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen ist.

12.12 Für eine topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ zeige man:

(i) $B \subseteq X \Rightarrow B^\circ \subseteq B$.

(ii) $C \subseteq B \Rightarrow C^\circ \subseteq B^\circ$.

(iii) $B \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $B = B^\circ$.

(iv) $C, B \subseteq X \Rightarrow (C \cap B)^\circ = C^\circ \cap B^\circ$.

12.13 Für eine topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $M \subseteq X$ nennt man $\partial M := c\ell(M) \setminus M^\circ$ den *Rand* von $M$. Man zeige:

(i) $\partial M$ ist immer abgeschlossen.

(ii) $\partial M = \{x \in X : \forall U \in \mathfrak{U}(x) : \; U \cap M \neq \emptyset \neq U \setminus M\}$.

(iii) $\partial M = \partial(M^c)$.

(iv) $\partial M = \emptyset \Leftrightarrow M, M^c \in \mathcal{T}$.

12.14 Zeigen Sie, dass in einem topologischen Raum der Durchschnitt von endlich vielen offenen und dichten Mengen wieder offen und dicht ist.

12.15 Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, O)$ topologische Räume, wobei $(X, \mathcal{T})$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $f$ bei $x \in X$ genau dann stetig ist, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $X$ mit Grenzwert $x$ immer $f(x_n) \to f(x)$ folgt!

12.16 Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, O)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $f$ bei jedem isolierten Punkt $x \in X$, also $\{x\} \in \mathcal{T}$, stetig ist. Für nicht isolierte $x \in X$ zeige man, dass die Stetigkeit in $x$ dazu äquivalent ist, dass $\lim_{i \in I} f(x_i) = f(x)$, wobei $(x_i)_{i \in I}$ das Netz aus Lemma 12.2.5 mit $B = X \setminus \{x\}$ ist.

Anmerkung: Diese Äquivalenz entspricht der Charakterisierung $f(x) = \lim_{t \to x} f(t)$ von Stetigkeit im metrischen Fall; vgl. Proposition 6.1.4.

12.17 Sei $G$ eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $G$ derart, dass für alle $g \in G$ die Abbildungen $h \mapsto gh$ und $h \mapsto hg$ stetig sind. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ diese Abbildungen sogar Homöomorphismen sind. Zeigen Sie, auch dass eine Untergruppe $H$ von $G$, welche bzgl. $\mathcal{T}$ offen ist, auch abgeschlossen ist!

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{gH : g \in G\}$ eine Partition abgibt, also dass dieses Mengensystem die Restklassenmenge einer Äquivalenzrelation ist.

12.18 Sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der von $d_2$ induzierten Topologie. Weiters sei $Y = (-1, +1) \times (-1, +1)$ versehen mit der von der Einschränkung $d_2|_{Y \times Y}$ von $d_2$ auf $Y$ induzierten Topologie. Man gebe einen Homöomorphismus von $X$ auf $Y$ an!

12.19 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\lambda \geq 0$ und $f_1, f_2 : X \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig; vgl. Beispiel 12.4.5. Zeigen Sie, dass $\lambda f_1$ und $f_1 + f_2$ ebenfalls von oben halbstetig sind, indem sie zuerst die Stetigkeit von $t \mapsto \lambda t$ als Abbildung von $[-\infty, +\infty)$ in sich und von $(s, t) \to s + t$ als Abbildung von $[-\infty, +\infty) \times [-\infty, +\infty)$ nach $[-\infty, +\infty)$ beweisen! Dabei ist $[-\infty, +\infty)$ mit $\mathcal{T}^< := \{\, [-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty] \,\}$ versehen.

12.20 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer. Man zeige, dass für $C \subseteq X$ die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_C$ im Sinne von Beispiel 12.4.5 genau dann halbstetig von oben (unten) ist, wenn $C$ abgeschlossen (offen) ist.

12.21 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Zeigen Sie zunächst, dass $\limsup_{y \to x} h(y) := \lim_{U \in \mathscr{U}(x)} \sup_{y \in U} h(y)$ und $\liminf_{y \to x} h(y) := \lim_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} h(y)$ für jede Funktion $h : X \to [-\infty, +\infty]$ als Element von $[-\infty, +\infty]$ im Sinne von (5.12) existiert, wobei der Umgebungsfilter $\mathscr{U}(x)$ durch $\subseteq$ gerichtet wird.

Zeigen Sie weiters, dass $h : X \to [-\infty, +\infty)$ ($h : X \to (-\infty, +\infty]$) genau dann in $x$ halbstetig von oben (von unten) ist, wenn $h(x) \geq \limsup_{y \to x} h(y)$ ($h(x) \leq \liminf_{y \to x} h(y)$).

12.22 Sei $I$ eine gerichtete Menge und $\infty \notin I$. Man versehe $I \cup \{\infty\}$ derart mit einer Topologie, dass für jeden topologischen Raum $X$ und jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in $X$ mit der Menge $I$ als Indexmenge und jedes $x \in X$ die Aussagen (i) und (ii) äquivalent sind:

(i) $x_i \to x, \ i \in I$.

(ii) $f : I \cup \{\infty\} \to X$ ist stetig, wobei $f(i) = x_i$ und $f(\infty) = x$.

12.23 Mit der Notation aus der Übungsaufgabe 12.10 zeige man, dass jede Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{T}$ schon mit $\mathcal{T}$ oder mit $\{\{1\}, \{1, 2\}, X\}$ übereinstimmt. Weiters zeige man, dass $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ genau dann ist, wenn $\mathcal{V} \supseteq \{\{1\}, \{1, 2\}\}$.

12.24 Sei $M$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man zeige, dass $\{(-\infty, q) : q \in M\} \cup \{(q, \infty) : q \in M\}$ eine Subbasis der von der Euklidischen Metrik erzeugten Topologie $\mathcal{T}^1$ ist.

12.25 Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, so zeige man, dass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathscr{U}(x)$ von $x$ ist.

12.26 Sei $[-\infty, +\infty]$ mit $\mathcal{T}(C)$ versehen, wobei $C = \{[-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\} \cup \{(c, +\infty] : c \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass die Spurtopologie $\mathcal{T}(C)_{\mathbb{R}}$ von $\mathcal{T}(C)$ auf $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^1$ übereinstimmt. Zeigen weiters Sie, dass ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ aus $(-\infty, +\infty)$ genau dann gegen ein $x \in [-\infty, +\infty]$ bezüglich $\mathcal{T}(C)$ konvergiert, wenn $\lim_{i \in I} x_i = x$ im Sinne von (5.12).

12.27 Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X \subseteq Y$ versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}_X$. Man weise folgende beiden Aussagen nach.

$U \subseteq X$ ist genau dann eine Umgebung eines $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}_X$, falls $U = X \cap V$ für eine Umgebung $V$ von $x$ bezüglich $\mathcal{T}$.

Bezeichnet $c\ell(A)$ für $A \subseteq X$ den Abschluss von $A$ in $(Y, \mathcal{T})$, so stimmt $c\ell(A) \cap X$ mit dem Abschluss von $A$ in $(X, \mathcal{T}_X)$ überein.

12.28 Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, und $Z \subseteq X$ eine Teilmenge. Man zeige, dass dann auch $f|_Z : Z \to f(Z)$ ein Homöomorphismus ist, wobei $Z$ und $f(Z)$ jeweils mit der entsprechenden Spurtopologie versehen sind.

12.29 Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ injektiv. Zeigen Sie, dass $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ genau dann ein Homöomorphismus ist, wenn $\mathcal{T}$ mit der von $f : X \to (Y, \mathcal{O})$ auf $X$ induzierten initialen Topologie übereinstimmt.

12.30 Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass

$$\delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad x,y \in X,$$

eine Metrik auf $X$ mit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\delta)$ ist, und dass stets $0 \leq \delta(x,y) \leq \min(1, d(x,y))$.

Anmerkung: $d$ und $\delta$ erzeugen zwar dieselbe Topologie, sind aber im Allgemeinen nicht äquivalent im Sinne von (12.1).

12.31 Seien $\langle X_n, d_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, metrische Räume. Weiters seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit $\alpha_n \to 0$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty$. Definiere $d, \chi : \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(f,g) := \max_{n\in\mathbb{N}} \Big(\alpha_n \frac{d_n(f_n,g_n)}{1+d_n(f_n,g_n)}\Big), \quad \chi(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{d_n(f_n,g_n)}{1+d_n(f_n,g_n)},$$

wobei $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Zeige, dass diese Ausdrücke in $\mathbb{R}$ existieren, dass $d$ und $\chi$ Metriken sind und dass sowohl $\mathcal{T}(d)$ als auch $\mathcal{T}(\chi)$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(d_n)$ übereinstimmt.

12.32 Zeigen Sie, dass für topologische Räume $X, Y$, für $x \in X$ und für jedes bezüglich der Produkttopologie offene $O \subseteq X \times Y$ gilt, dass $(\{x\} \times Y) \cap O$ in der Form $\{x\} \times P$ mit einem offenen $P \subseteq Y$ dargestellt werden kann.

12.33 Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ und $j \in I$. Zeigen Sie, dass $(X_j, \mathcal{T}_j)$ homöomorph ist zu

$$X_j((y_i)_{i\in I}) = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : x_i = y_i \text{ für alle } i \neq j\}.$$

Dabei ist $X_j((y_i)_{i\in I})$ versehen mit der Spurtopologie als Teilmenge von $\prod_{i\in I} X_i$, und $\prod_{i\in I} X_i$ ist mit der Produkttopologie versehen.

12.34 Für $i \in I$ seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume und $B_i$ Teilmenge von $X_i$. Man zeige, dass der Abschluss von $\prod_{i\in I} B_i$ in $\prod_{i\in I} X_i$ bezüglich der Produkttopologie mit $\prod_{i\in I} c\ell_{\mathcal{T}_i}(B_i)$ übereinstimmt.

12.35 Für jedes $i \in I$ sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$, ein topologischer Raum mit Subbasis $C_i$, sei $X$ eine Menge, und seien $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen. Bezeichnet $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf $X$ bezüglich der Abbildungen $f_i : i \in I$, so zeige man, dass $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(C_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist.

12.36 Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, sei $Y$ eine Menge, und seien $f_i : Y \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen. Bezeichne $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf $Y$ bezüglich der Familie $\{f_i : i \in I\}$ von Abbildungen. Weiters sei vorausgesetzt, dass die Familie $\{f_i : i \in I\}$ punktetrennend operiert, also dass es zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in Y$ ein $j \in I$ gibt mit $f_j(a) \neq f_j(b)$.

Zeigen Sie, dass $f : (Y, \mathcal{T}) \to (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$, definiert durch $f(a) = (f_i(a))_{i\in I}$, stetig und $f : (Y, \mathcal{T}) \to (f(Y), (\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)_{f(Y)})$ sogar ein Homöomorphismus ist.

Hinweis für die Stetigkeit von $f^{-1}$: Womit stimmt $f_j \circ f^{-1}(z)$ für ein $z \in f(Y) \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ überein?

12.37 Sei $X = \mathbb{R}^{[0,1]} = \prod_{x\in[0,1]} \mathbb{R}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $D = [0,1]$ versehen mit der Produkttopologie.

Man zeige, dass für $f \in X$ das Mengensystem

$$\{V_{x_1,\dots,x_n;\epsilon}(f) : n \in \mathbb{N};\ x_1,\dots,x_n \in D;\ \epsilon > 0\},$$

wobei

$$V_{x_1,\dots,x_n;\epsilon}(f) := \{g \in X : |g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon, j = 1,\dots,n\},$$

eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(f)$ von $f$ abgibt. Sind die Mengen $V_{x_1,\dots,x_n;\epsilon}(f)$ offen bzgl. der Produkttopologie? Zeigen Sie auch, dass der Umgebungsfilter von $f$ keine Filterbasis bestehend aus abzählbar vielen Mengen besitzt. Gibt es dann eine Metrik $d$ mit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$?

Hinweis: Falls es eine abzählbare Filterbasis $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}(f)$ gibt, so konstruiere man induktiv $x_1^1,\dots x_{n_1}^1, x_1^2,\dots x_{n_2}^2,\dots \in [0,1]$ und eine Nullfolge $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \dots > 0$ derart, dass $V_{x_1^1,\dots x_{n_1}^1,\dots,x_1^k,\dots x_{n_k}^k;\epsilon_k}(f) \subseteq U_k$ und daher auch $(V_{x_1^1,\dots x_{n_1}^1,\dots,x_1^k,\dots x_{n_k}^k;\epsilon_k}(f))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Filterbasis abgibt. Nun zeige man $g \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} V_{x_1^1,\dots x_{n_1}^1,\dots,x_1^k,\dots x_{n_k}^k;\epsilon_k}(f) \Leftrightarrow g(x_j^k) = f(x_j^k), \forall k \in \mathbb{N}, j \in \{1,\dots,n_k\}$.....

12.38 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel sei $\mathcal{B}(D)$ die Teilmenge aller beschränkten Funktion aus $X$, also $\mathcal{B}(D) = \{f \in X : \sup_{t\in D} |f(t)| < +\infty\}$.

Sei nun $\mathcal{T}_1$ die von der Supremumsmetrik $d_\infty(f,g) := \sup_{t\in D} |f(t) - g(t)|$ erzeugte Topologie auf $\mathcal{B}(D)$, und sei $\mathcal{T}_2$ die Spurtopologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}(D)}$, wobei $\mathcal{T}$ die Produkttopologie aus dem vorherigen Beispiel ist.

Man zeige, dass aus der Konvergenz $f_j \to f$ für ein Netz aus $\mathcal{B}(D)$ bzgl. $\mathcal{T}_1$ auch die Konvergenz $f_j \to f$ bzgl. $\mathcal{T}_2$ folgt, und dass die Umkehrung nicht gilt. Man zeige auch, dass $\mathcal{T}_1$ echt feiner als $\mathcal{T}_2$ ist, bzw. äquivalent dazu, dass $\mathrm{id} : (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_2)$ stetig ist, aber $\mathrm{id} : (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_2) \to (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_1)$ nicht stetig ist.

12.39 Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Zeigen Sie, dass $(\prod X_i, \prod \mathcal{T}_i)$ Hausdorffsch ist, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ Hausdorffsch sind.

12.40 Beweisen die den in Bemerkung 12.8.3 erwähnten Sachverhalt sorgfältig.

12.41 Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\mathbb{R}$, die bezüglich der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^1$ gleichzeitig offen und abgeschlossen sind?

Hinweis: Verwenden Sie den Begriff des Zusammenhangs!

12.42 Zeigen Sie, dass konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ immer zusammenhängend sind.

12.43 Sei $\mathcal{T}$ die Topologie aus Übungsaufgabe 12.5. Man spricht von der *cofiniten Topologie* auf der Menge $X$. Ist die cofinite Topologie Hausdorffsch? Erfüllt sie das Trennungsaxiom (T3)? Erfüllt sie das Trennungsaxiom (T4)? Begründungen!

12.44 Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, sei $Y$ eine Menge, und seien $f_i : Y \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen. Zeigen Sie, dass $Y$ versehen mit der initialen Topologie das Trennungsaxiom (T3) erfüllt, wenn (T3) für alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ gilt.

12.45 Sei $\mathcal{T}$ die cofinite Topologie aus Übungsaufgabe 12.5. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen und den Abschluss einer beliebigen Teilmenge von $X$! Ist $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ kompakt? Für welche $X$ ist $\mathcal{T}$ metrisierbar, gibt es also eine Metrik $d$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$?

12.46 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f$ ein Maximum und ein Minimum auf $X$ hat.

12.47 Indem man eine offene Überdeckung angibt, die keine endliche Teilüberdeckung hat, zeige man, dass $(0, 1]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ versehen mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^1$ nicht kompakt ist, und dass eine unendliche Menge $X$ versehen mit der diskreten Topologie nicht kompakt ist.

12.48 Sei $(-\infty, +\infty]$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}^> = \{(a, +\infty] : a \in [-\infty, +\infty]\}$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $K$ von $(-\infty, +\infty]$ genau dann bezüglich $\mathcal{T}^>$ kompakt ist, wenn $K$ ein Minimum hat.

Sei schließlich $(X, \mathcal{T})$ ein weiterer topologischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt, und $f : X \to (-\infty, +\infty]$ halbstetig von unten wie in Beispiel 12.4.5. Zeigen Sie, dass dann $f(K)$ ein Minimum, also $f(x) \leq f(t)$ für alle $t \in K$ und ein $x \in K$.

12.49 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $Y \subseteq X$. Man zeige, dass für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ die Kompaktheit von $c\ell_{\mathcal{T}_Y}(B)$ dazu äquivalent ist, dass $c\ell_{\mathcal{T}}(B)$ kompakt und in $Y$ enthalten ist. Man zeige schließlich, dass in diesem Fall $c\ell_{\mathcal{T}_Y}(B) = c\ell_{\mathcal{T}}(B)$.

12.50 Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ kompakte topologische Räume. Man zeige ohne dem Satz von Tychonoff, dass $X_1 \times X_2$ versehen mit der Produkttopologie kompakt ist!

Hinweis: Siehe Fakta 8.7.8 für den metrischen Fall!

12.51 Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also eine Gruppe versehen mit einer Topologie derart, dass $(g, h) \mapsto gh$ als Abbildung von $G \times G$, versehen mit der Produkttopologie, nach $G$ und $g \mapsto g^{-1}$ als Abbildung von $G$ nach $G$ stetig sind. Weiters seien $M_1, M_2$ Teilmengen von $G$.

Weisen Sie nach, dass für $x, y \in G$, eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ und Netze $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$ in $G$ über dieser gerichteten Menge mit $x_i \to x$ und $y_i \to y$ immer $x_i y_i \to xy$ gilt.

Weiters zeige man, dass wenn $M_1$ und $M_2$ kompakt sind, dann auch $M_1 \cdot M_2$ eine kompakte Teilmenge von $G$ ist.

12.52 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass $M_1 \cdot M_2$ abgeschlossen ist, wenn eine der beiden Mengen abgeschlossen und die andere kompakt ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $z$ im Abschluss von $M_1 \cdot M_2$ ist, und betrachten Sie ein Netz, dass aus $M_1 \cdot M_2$ heraus gegen $z$ konvergiert!

Anmerkung: $M_1 \cdot M_2$ ist am Allgemeinen nicht abgeschlossen, wenn man nur fordert, dass $M_1$ und $M_2$ abgeschlossen sind. Beispielsweise sind in der topologischen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ abgeschlossen. Die Menge $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$ ist aber dicht in $\mathbb{R}$ und damit nicht abgeschlossen.

12.53 Man zeige, dass das Bilder einer abzählbar kompakten bzw. folgenkompakten Teilmenge eines topologischen Raumes unter einer stetigen Funktion wieder abzählbar kompakt bzw. folgenkompakt ist.

Schließlich zeige man dieselbe Aussage für bedingt abzählbar kompakte bzw. bedingt folgenkompakte Teilmengen. Dabei heißt eine Teilmenge $A$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ bedingt abzählbar kompakt bzw. bedingt folgenkompakt, wenn jede Folge aus $A$ einen Häufungspunkt in $X$ bzw. eine gegen einen Punkt aus $X$ konvergente Teilfolge hat.

12.54 Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ mit der Eigenschaft, dass jede Folge in $A$ einen Häufungspunkt in $X$ hat. Man zeige, dass $c\ell(A)$ abzählbar kompakt ist.

12.55 Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $O \subseteq X$ offen und nichtleer. Zeigen Sie, dass

$$d_O(x,y) := d(x,y) + \left|\frac{1}{d(x, X\setminus O)} - \frac{1}{d(y, X\setminus O)}\right|$$

eine Metrik auf $O$ abgibt, wobei $\mathcal{T}(d_O) = \mathcal{T}(d)_O$ auf $O$.

12.56 Sei $\langle X, d\rangle$ ein vollständig metrischer Raum und $O \subseteq X$ offen und nichtleer. Mit der Notation aus dem vorherigen Übungsaufgabe zeige man, dass auch $\langle O, d_O\rangle$ ein vollständig metrischer Raum ist.

12.57 Sei $E$ eine unendliche Menge und sei $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ der Banachraum aller reellwertigen und beschränkten Funktion auf $E$ versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ jeder Teilmenge $A \subseteq E$, also $\mathbb{1}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\mathbb{1}_A(x) = 0$ für $x \notin A$, zu $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ gehört. Weiters berechne man $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|_\infty$ für Teilmengen $A, B \subseteq E$ mit $A \neq B$. Schließlich zeige man, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ um die Nullfunktion in $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ nicht total beschränkt ist.

Hinweis: Falls $K_1(0) = M_1 \cup \cdots \cup M_n$, so enthält mindestens eine Menge $M_j$ mindestens zwei verschiedene charakteristische Funktionen. Warum?

12.58 Zeigen Sie, dass $\mathcal{G} = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0, \|f'\|_\infty \le 1\}$ als Teilmenge von $C([0,1],\mathbb{R})$ relativ kompakt ist, also dass $c\ell(\mathcal{G})$ kompakt ist.

12.59 Man gebe an, ob $\mathcal{G} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ total beschränkt ist, wobei

(i) $K = [0,1]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) $K = [0,1]$ und $\mathcal{G} = \{f \in C(K,\mathbb{R}) : \|f\|_\infty \le 1\}$

(iii) $K = [0,1]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

(iv) $K = [0,2]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

12.60 Ist $\mathcal{G} = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C([0,1),\mathbb{R})$ gleichgradig stetig? Begründung!

12.61 Zeigen Sie, dass für einen kompakten metrischen Raum $K$ ein $\mathcal{G} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ genau dann total beschränkt ist, wenn $\mathcal{G}$ als Teilmenge des normierten Raumes $(C(K,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ beschränkt ist und wenn $\mathcal{G}$ gleichmäßig gleichgradig stetig ist.

Letzteres bedeutet, dass es zu jeden $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $f \in \mathcal{G}$ und alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$.

12.62 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F}$ eine Menge von holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ auf $D$. Zudem sei $\mathcal{F}$ lokal gleichmäßig beschränkt. Also gilt für alle kompakten $K \subseteq D$

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{\infty,K} < +\infty\,,$$

wobei $\|f\|_{\infty,K} = \sup_{z\in K} |f(z)|$. Zeigen Sie, dass für jedes feste kompakte $L \subseteq D$ die Menge $\{f|_L : f \in \mathcal{F}\}$ der Einschränkungen aller $f \in \mathcal{F}$ auf $L$ eine relativ kompakte Teilmenge von $C(L,\mathbb{C})$ ist.

Hinweis: Für die gleichgradige Stetigkeit von $\{f|_L : f \in \mathcal{F}\}$ bei einem $w \in L$ verwende man die Cauchysche Integralformel mit einem Weg der Form $\gamma(t) = w + 2r\exp(it)$ mit hinreichend kleinem $r > 0$, um $|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|$ für alle $z \in U_r(w)$ mit einem von $z$ unabhängigen $C > 0$ zu zeigen.

12.63 Sei $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Weiters sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Zu einer Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$ von $[0,1]$, also $0 = \xi_0 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{Z})} = 1$, definieren wir $h_{\mathcal{Z}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ induktiv durch ($j = 0, \dots, n(\mathcal{Z}) - 1$)

$$h_{\mathcal{Z}}(t) := y_j + (t - \xi_j) f(\xi_j, y_j) \quad \text{für} \quad t \in [\xi_j, \xi_{j+1}],$$

und $y_{j+1} := h_{\mathcal{Z}}(\xi_{j+1})$. Skizzieren Sie $h_{\mathcal{Z}}$ und zeigen Sie, dass für $t \in [0,1]$

$$h_{\mathcal{Z}}(t) = y_0 + \int_0^t g_{\mathcal{Z}}(s)\,\mathrm{d}s,$$

wobei $g_{\mathcal{Z}}(s) = f(\xi_j, y_j)$ für $s \in (\xi_j, \xi_{j+1}]$ und $g_{\mathcal{Z}}(0) = f(\xi_0, y_0)$. Zeigen Sie auch, dass die Menge $\{h_{\mathcal{Z}} : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}\}$ von Funktionen gleichgradig stetig ist und dass $\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} \|h_{\mathcal{Z}}\|_\infty < +\infty$.

12.64 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel sei $\mathcal{Z}_m, m \in \mathbb{N}$, eine Folge von Zerlegungen von $[0,1]$ mit $|\mathcal{Z}_m| \to 0$ für $m \to 0$, wobei $|\mathcal{Z}| := \max_{j=1,\dots,n(\mathcal{Z})} |\xi_j - \xi_{j-1}|$. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von $f|_{[0,1]\times[-N,N]}$ mit hinreichend großem $N$, dass

$$\lim_{m \to \infty} (g_{\mathcal{Z}_m}(s) - f(s, h_{\mathcal{Z}_m}(s))) = 0$$

und zwar gleichmäßig auf $[0,1]$. Schließlich zeige man mit Hilfe des Satzes von Ascoli die Existenz eines stetigen $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = y_0 + \int_0^t f(s, h(s))\,\mathrm{d}s \quad \text{für} \quad t \in [0,1].$$

Anmerkung: Differenzieren nach $t$ zeigt, dass $h$ die Lösung der Differentialgleichung $h'(x) = f(x, h(x))$ mit Anfangsbedingung $h(0) = y_0$ ist, was eine elementare Version des *Satzes von Peano* über die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen darstellt.

12.65 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Man zeige, dass dann jedes $Y \subseteq X$ versehen mit der Spurtopologie ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ist, falls $Y$ offen oder abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ ist.

12.66 Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, lokalkompakte topologische Räume, wobei alle bis auf endlich viele dieser Räume sogar kompakt sind. Zeigen Sie, dass dann $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ ebenfalls lokalkompakt ist.

12.67 Mit der Notation aus Satz 12.17.2 führe man genau aus, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $Y$ ist.

12.68 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $(Y, \mathcal{O})$ seine Alexandroff Kompaktifizierung. Ist $(Z, \mathcal{W})$ ein kompakter Hausdorff-Raum, $R \subseteq Z$ eine offene Teilmenge und $h : (R, \mathcal{W}_R) \to (X, \mathcal{T})$ ein Homöomorphismus, so zeige man, dass die Funktion $f : Z \to Y$ definiert durch $f(x) = h(x)$ für $x \in R$ und $f(z) = \infty$ für $z \in Z \setminus R$ stetig ist. Falls dabei $Z \setminus R$ einpunktig ist, so zeige man weiters, dass $f$ auch ein Homöomorphismus ist.

Anmerkung: Für $h : (0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{T} : z \neq 1\}$ mit $h(t) = \exp(it)$ zeigt dieses Übungsbeispiel, dass die Einpunktkompaktifizierung von $(0, 2\pi)$ zu $\mathbb{T}$ homöomorph ist.

12.69 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher nicht kompakt ist. Zeigen Sie, dass $I := \{(x, K) : x \in X \setminus K,\ K \text{ ist kompakte Teilmenge von } X\}$ mit $(x_1, K_1) \leq (x_2, K_2) :\Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ zu einer gerichteten Menge wird. Zeigen Sie für eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) auch, dass

$$\forall \epsilon > 0\ \exists K \text{ kompakt } \forall x \in X \setminus K :\ |g(x)| < \epsilon$$

genau dann, wenn $\lim_{(x,K) \in I} g(x) = 0$.

12.70 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum. Zeigen Sie in dieser allgemeinen Situation, dass $C_0(X, \mathbb{R})$ ($C_0(X, \mathbb{C})$) ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(X, \mathbb{R})$ ($C_b(X, \mathbb{C})$) ist. Zeigen Sie weiters, dass diese Räume übereinstimmen, wenn $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

12.71 Zeigen Sie, dass für einen kompakten topologischen Raum $K$ aus der Existenz einer punktetrennenden Algebra $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ schon folgt, dass $K$ Hausdorffsch ist.

Anmerkung: Für kompakte Hausdorff-Räume ist die Algebra $C(K, \mathbb{R})$ tatsächlich punktetrennend. Um das zu zeigen, benötigt man das Lemma von Urysohn, Korollar 12.11.2.

12.72 Führen Sie genau aus, warum der Raum $\mathcal{P}$ aus Übungsaufgabe 6.33 aller stetigen, komplexwertigen, $2\pi$-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$, versehen mit $\|.\|_\infty$, die lineare Hülle der Funktionen $t \mapsto \exp(itn)$, $n \in \mathbb{Z}$, dicht enthält; vgl. Beispiel 12.18.10.

Anmerkung: Da die Funktionen der Bauart $t \mapsto \exp(itn)$ alle unendlich oft differenzierbar sind, ist auch die Menge aller $2\pi$-periodischen und unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dicht in $\mathcal{P}$.

12.73 Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Unterhalbgruppe bzgl. $+$, also $n, m \in M \Rightarrow m + n \in M$. Ist dann die lineare Hülle aller Funktionen $[0, +\infty) \ni x \mapsto \exp(-nx)$, $n \in M$, dicht in $C_0([0, +\infty), \mathbb{R})$? Begründung!

12.74 Sei $\mathbb{D}$ der offene in Einheitskreis $U_1^{\mathbb{C}}(0)$ und $c\ell(\mathbb{D})$ der abgeschlossene Einheitskreis $K_1^{\mathbb{C}}(0)$ um die Null in $\mathbb{C}$ bzgl. $|.|$.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C}[z]|_{c\ell(\mathbb{D})}$ aller Funktionen $f : c\ell(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ von Polynombauart $f(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j z^j$ eine Algebra in $C_b(c\ell(\mathbb{D}), \mathbb{C})$ abgibt. Zeigen Sie auch, dass diese Algebra nicht dicht in $C_b(c\ell(\mathbb{D}), \mathbb{C})$ ist. Welche Voraussetzung von Korollar 12.18.9 ist nicht erfüllt?

Hinweis: Für das Faktum, dass $\mathbb{C}[z]|_{c\ell(\mathbb{D})}$ nicht dicht ist, untersuche man einen gleichmäßigen Grenzwert $f \in C_b(c\ell(\mathbb{D}), \mathbb{C})$ einer Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}[z]|_{c\ell(\mathbb{D})}$ punkto Holomorphie auf $\mathbb{D}$!

12.75 Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Zeigen Sie, dass die Menge aller Funktionen $f : K \to \mathbb{C}$ der Bauart $f(z) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{j,k} z^j \bar{z}^k$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_{j,k} \in \mathbb{C}$, dicht in $C_b(K, \mathbb{C})$ ist.

12.76 Geben Sie ein Beispiel eines topologischen, nicht kompakten Hausdorff-Raumes $(X, \mathcal{T})$ und einer punktetrennenden und nirgends verschwindenden Algebra $\mathcal{A} \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ an, welche nicht dicht in $C_b(X, \mathbb{R})$ ist! Begründung!

Hinweis: Nehmen Sie $X = [0, 1]$, $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie und für $\mathcal{A}$ irgendeine punktetrennende und nirgends verschwindende Algebra bestehend aus Funktionen auf $[0, 1]$, die stetig bzgl. der Euklidischen Topologie sind.

12.77 Seien $X, Y$ zwei kompakte topologische Räume, und seien $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ und $\mathcal{B} \subseteq C(Y, \mathbb{R})$ zwei punktetrennende und nirgends verschwindende Algebren. Zeigen Sie, dass dann die Menge aller Funktionen der Bauart

$$(x, y) \mapsto \sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j(y)$$

mit $f_j \in \mathcal{A}$ und $g_j \in \mathcal{B}$ dicht in $C(X \times Y, \mathbb{R})$ ist.

Zeigen Sie damit, dass die Menge aller reellen Polynome $\mathbb{R}[x, y]$ in zwei Variablen betrachtet als Funktionen auf einem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ dicht in $C([a, b] \times [c, d], \mathbb{R})$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie Übungsaufgabe 12.50.