

Aufbau Analysis

Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	ix
12 Topologische Grundbegriffe	1
12.1 Topologische Grundbegriffe	1
12.2 Abgeschlossene Mengen	6
12.3 Häufungspunkte von Netzen*	10
12.4 Stetige Abbildungen	11
12.5 Basis, Subbasis	16
12.6 Initiale Topologie	20
12.7 Spur- und Produkttopologie	23
12.8 Finale Topologie*	27
12.9 Zusammenhang und Trennungseigenschaft (T1)	30
12.10 Trennungseigenschaften (T3) und (T4)	33
12.11 Das Lemma von Urysohn	35
12.12 Kompaktheit	39
12.13 Satz von Tychonoff*	44
12.14 Abstand und Durchmesser von Mengen	45
12.15 Kompaktheit in metrischen Räumen	46
12.16 Abzählbar kompakt und folgenkompakt*	52
12.17 Alexandroff-Kompaktifizierung	53
12.18 Der Satz von Stone-Weierstraß	56
12.19 Übungsaufgaben	61
13 Implizite Funktionen und Mannigfaltigkeiten	73
13.1 Der Banachsche Fixpunktsatz	73
13.2 Implizite Funktionen	75
13.3 Der Umkehrsatz	81
13.4 Höhere Ableitbarkeit von impliziten Funktionen*	85
13.5 Mannigfaltigkeiten	87
13.6 Tangentialräume	97
13.7 Gebiete mit orientierbarem Rand	104
13.8 Abstrakte Mannigfaltigkeiten*	109
13.9 Übungsaufgaben	113

14 Mengen und Abbildungen	121
14.1 Rechnen auf $[0, +\infty]$ und $[-\infty, +\infty]$	121
14.2 Fortsetzung von Funktionenräumen	122
14.3 M -fortsetzbare Funktionale	125
14.4 σ -Algebren und messbare Funktionen	130
14.5 Integrale nichtnegativer Funktionen	134
14.6 Integrierbare $[-\infty, +\infty]$ -wertige Funktionen	136
14.7 Multiplizierte, eingeschränkte und transformierte Maße	140
14.8 Von Funktionalen erzeugte σ -Algebren	143
14.9 Fortsetzung von Maßen und Vergleichssatz	148
14.10 Der Darstellungssatz von Riesz	153
14.11 Das Lebesguesche Maß auf \mathbb{R}^d	159
14.12 Reguläre Maße*	167
14.13 Initiale σ -Algebren	173
14.14 Produktmaße	175
14.15 Integrale komplexwertiger und vektorwertiger Funktionen	183
14.16 Haarsches Maß auf topologischen Gruppen*	191
14.17 Übungsaufgaben	202
15 Transformationsformel, Integralsätze	215
15.1 Transformationsformel	215
15.2 Stetig differenzierbare topologische Gruppe im \mathbb{R}^{d*}	225
15.3 C^1 -Bilder von Nullmengen*	227
15.4 Satz von Sard*	228
15.5 Fixpunktsatz von Brouwer*	229
15.6 Invarianzsätze von Brouwer*	233
15.7 Integration über Mannigfaltigkeiten	236
15.8 Faltung	247
15.9 Integralsätze	253
15.10 Poissonsches Integral*	262
15.11 Übungsaufgaben	268
16 Funktionenräume	277
16.1 Die Höldersche und andere Ungleichungen	277
16.2 L^p -Räume \mathbb{R} -wertiger Funktionen	280
16.3 L^p -Räume \mathbb{C} -wertiger Funktionen	282
16.4 Konvergenz im Maß	283
16.5 Fast gleichmäßige Konvergenz	286
16.6 Dichtheit in L^p	289
16.7 Faltung am L^1	294
16.8 Schwache Ableitung	297
16.9 Übungsaufgaben	300

17 Integraltransformationen und Fourierreihen	303
17.1 Fouriertransformation von L^1 Funktionen	303
17.2 Fouriertransformation von L^2 Funktionen	310
17.3 Laplacetransformation	314
17.4 Fourierreihen	316
17.5 Fourierreihen auf $L^2[-\pi, \pi]$	320
17.6 Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen*	327
17.7 Übungsaufgaben	328
18 Dualitäten und komplexe Maße	333
18.1 Der Satz von Radon-Nikodym	333
18.2 Die Dualräume der L^p -Räume	337
18.3 Signierte und komplexe Maße	342
18.4 $C_0(\Omega)$ und sein Dualraum*	351
18.5 Übungsaufgaben	355
19 Absolut stetige Funktionen*	357
19.1 Verteilungsfunktionen	357
19.2 Existenz der Ableitung fast überall	359
19.3 Transformation via Verteilungsfunktion	362
19.4 Verteilungsfunktionen von reellen und komplexen Maßen auf \mathbb{R}	366
19.5 Übungsaufgaben	373
A Mächtigkeit und das Lemma von Zorn	375
A.1 Mächtigkeit von Mengen	375
A.2 Halbordnungen und Lemma von Zorn	379
A.3 Mehr über die Mächtigkeit von Mengen	381
Literaturverzeichnis	385
Index	386

Vorwort

Nach der Veröffentlichung meines ersten Buches [K], *Fundament Analysis*, welches aus den Vorlesungen Analysis 1 und Analysis 2 an der TU Wien und den dazugehörigen Skripten hervorgegangen ist, lag es nahe, auch aus den Inhalten der Analysis 3 Vorlesung, welche ebenfalls in einem Skriptum zusammengefasst waren, ein Buch zu verfassen. Zusätzlich zur Materie der Vorlesungen Analysis 1 und 2 sowie Lineare Algebra 1 und 2 stellt die Maßtheorie, welche an der TU Wien im Rahmen eigener Vorlesungen gelehrt wird, ein wesentliches Werkzeug für große Teile meiner Analysis 3 Vorlesung dar.

Themen wie das mehrdimensionale Integral, die Transformationsformel, das Oberflächenintegral und die Integralsätze können ohne Maßtheorie behandelt werden und wurden früher meist auch ohne diese behandelt. Für eine mathematisch genaue Diskussion dieser Inhalte ist dann aber ein technisch relativ aufwendiger Apparat vonnöten, der gleichsam eine abgespeckte Ausgabe der Maßtheorie darstellt und der später, ganz im Gegensatz zur Maßtheorie, nicht mehr gebraucht wird. Für mich macht es daher Sinn, die Maßtheorie als zentralen Inhalt der Höheren Analysis zu betrachten.

Im Lichte dessen sollte ein Buch über die Grundlagen der Höheren Analysis auch eine Einführung in die Maßtheorie beinhalten. Also habe ich bei der Erstellung des vorliegenden Buches mit Kapitel 14 begonnen und damit meine persönliche Sicht auf die Maßtheorie und auf das Lebesguesche Integral in Textform gegossen. Das von der klassischen Literatur zur Maßtheorie Abweichende dabei ist, dass der Ausgangspunkt nicht Mengensysteme samt $[0, +\infty]$ -wertiger Funktionen darauf mit gewissen Eigenschaften, sondern Vektorräume \mathcal{F} bestehend aus Funktionen mit der Eigenschaft, dass mit f auch $|f|$ zu diesem Vektorraum gehört, samt gewisser 'linearer' Abbildungen von $\{f \in \mathcal{F} : g \geq 0\}$ nach $[0, +\infty]$ sind; siehe dafür Definition 14.3.2. Dieser Zugang orientiert sich am sogenannten Daniell Integral; siehe etwa [HR]. Der wesentliche Vorteil hier besteht darin, dass der in der modernen Analysis so wichtige Darstellungssatz von Riesz, Satz 14.10.7, gleichsam mit herausfällt. Es folgen klassische Inhalte wie etwa der Satz von der beschränkten Konvergenz, der Satz von Fubini, Integrale komplexwertiger Funktionen, wobei einerseits der Daniellsche Ansatz und andererseits klassische Literatur zur Maßtheorie wie das Buch [E] als Vorlage dienten.

Da mein zweites Buch als Fortsetzung von *Fundament Analysis* gedacht ist, startet hier die Kapitelnummerierung nicht mit dem ersten Kapitel, sondern mit Kapitel 12. Das letzte Kapitel der ersten Ausgabe von *Fundament Analysis* ist ebenfalls Kapitel 12. Ich habe mich aber entschlossen, dieses Kapitel über die Grundlagen der mengentheoretischen Topologie von meinem ersten Buch in mein zweites Buch zu verschieben, da es sich dabei

doch um eine fortgeschrittene Materie innerhalb der Analysis handelt. Zentrale Inhalte des darauffolgenden Kapitel 13 sind der Satz über implizite Funktionen, der Umkehrsatz und die Theorie der im \mathbb{R}^p eingebetteten Mannigfaltigkeiten. Zu dem anschließenden Kapitel 14 wurde oben schon einiges gesagt. Das Kapitel 15 widmet sich der Transformationsformel für Integrale nach dem Lebesgueschen Maß, dem Oberflächenmaß von eingebetteten Mannigfaltigkeiten, den Integralsätzen von Gauß und Green sowie einigen interessanten Konsequenzen dieser klassischen Resultate der Höheren Analysis. In Kapitel 16 werden die L^p -Räume für $p \in [1, +\infty]$ eingeführt und grundlegende Ergebnisse dazu gebracht. Weiters werden Konvergenz im Maß, dazugehörige Funktionenräume und schließlich die schwache Ableitung diskutiert. Kapitel 17 behandelt die Fouriertransformation, die Laplacetransformation und klassische Fourierreihen. Im vorletzten Kapitel 18 werden der für die Maßtheorie zentrale Satz von Radon-Nikodym bewiesen, signierte sowie reelle und komplexe Maße eingeführt und diskutiert sowie die topologischen Dualräume der L^p -Räume und des Raumes $C_0(X)$ für einen lokalkompakten Hausdorffraum X bestimmt. Schließlich behandelt das letzte Kapitel Verteilungsfunktionen von (reellen, komplexen) Maßen auf \mathbb{R} , stellt einen Zusammenhang zur Weglänge her, betrachtet absolut stetige Funktionen auf \mathbb{R} und zeigt, dass sich die Radon-Nikodym Ableitung eines Maßes auf \mathbb{R} bezüglich eines anderen Maßes auch mit einer Art 'Grenzwert des Differenzenquotienten' berechnen lässt.

Die mit * gekennzeichneten Abschnitte, Resultate bzw. Bemerkungen sind weiterführendes bzw. tiefer erklärendes Material, welches nicht zum Verständnis von nachfolgenden Inhalten notwendig ist, und daher beim ersten Mal übergangen werden kann.

Ein großer Teil des vorliegenden Buches ist aus dem Skriptum zur Vorlesung Analysis 3, die ich schon einige Male gehalten habe, entstanden. Ich wurde dabei immer wieder auf Druckfehler, mathematische Ungereimtheiten oder auch Fehlendes hingewiesen, wofür ich sehr, sehr dankbar bin. Ich hoffe also, dass das vorliegende Werk nicht mehr allzu fehlerbehaftet ist. Sollten Sie beim Lesen doch noch Fehler finden, dann bitte ich Sie, mich auf diese per Email aufmerksam zu machen. Besonderen Dank möchte ich sowohl Brigitte Wyss für die Erstellung des Bildes eines Apfels am Buchdeckel meines ersten Buches 'Fundament Analysis' als auch Martin Kaar für die aus dem Apfels gemachte Birne am Buchdeckel des vorliegenden Buches ausdrücken. Der Titel 'Aufbau Analysis' soll für den Stellenwert der hier gebrachten Inhalte im Gebäude der modernen Analysis stehen und setzt gleichsam auf das 'Fundament Analysis' auf.