Aufbau Analysis

Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Nach der Veröffentlichung meines ersten Buches [K], *Fundament Analysis*, welches aus den Vorlesungen Analysis 1 und Analysis 2 an der TU Wien und den dazugehörigen Skripten hervorgegangen ist, lag es nahe, auch aus den Inhalten der Analysis 3 Vorlesung, welche ebenfalls in einem Skriptum zusammengefasst waren, ein Buch zu verfassen. Zusätzlich zur Materie der Vorlesungen Analysis 1 und 2 sowie Lineare Algebra 1 und 2 stellt die Maßtheorie, welche an der TU Wien im Rahmen eigener Vorlesungen gelehrt wird, ein wesentliches Werkzeug für große Teile meiner Analysis 3 Vorlesung dar.
Themen wie das mehrdimensionale Integral, die Transformationsformel, das Oberflächenintegral und die Integralsätze können ohne Maßtheorie behandelt werden und wurden früher meist auch ohne diese behandelt. Für eine mathematisch genaue Diskussion dieser Inhalte ist dann aber ein technisch relativ aufwendiger Apparat vonnöten, der gleichsam eine abgespeckte Ausgabe der Maßtheorie darstellt und der später, ganz im Gegensatz zur Maßtheorie, nicht mehr gebraucht wird. Für mich macht es daher Sinn, die Maßtheorie als zentralen Inhalt der Höheren Analysis zu betrachten.
Im Lichte dessen sollte ein Buch über die Grundlagen der Höheren Analysis auch eine Einführung in die Maßtheorie beinhalten. Also habe ich bei der Erstellung des vorliegenden Buches mit Kapitel 14 begonnen und damit meine persönliche Sicht auf die Maßtheorie und auf das Lebesguesche Integral in Textform gegossen. Das von der klassischen Literatur zur Maßtheorie Abweichende dabei ist, dass der Ausgangspunkt nicht Mengensysteme samt $[0, +\infty]$-wertiger Funktionen darauf mit gewissen Eigenschaften, sondern Vektorräume $\mathcal{F}$ bestehend aus Funktionen mit der Eigenschaft, dass mit f auch $|f|$ zu diesem Vektorraum gehört, samt gewisser 'linearer' Abbildungen von $\{f \in \mathcal{F} : g \geq 0\}$ nach $[0, +\infty]$ sind; siehe dafür Definition 14.3.2. Dieser Zugang orientiert sich am sogenannten Daniell Integral; siehe etwa [HR]. Der wesentliche Vorteil hier besteht darin, dass der in der modernen Analysis so wichtige Darstellungssatz von Riesz, Satz 14.10.7, gleichsam mit herausfällt. Es folgen klassische Inhalte wie etwa der Satz von der beschränkten Konvergenz, der Satz von Fubini, Integrale komplexwertiger Funktionen, wobei einerseits der Daniellsche Ansatz und andererseits klassische Literatur zur Maßtheorie wie das Buch [E] als Vorlage dienten.
Da mein zweites Buch als Fortsetzung von *Fundament Analysis* gedacht ist, startet hier die Kapitelnummerierung nicht mit dem ersten Kapitel, sondern mit Kapitel 12. Das letzte Kapitel der ersten Ausgabe von *Fundament Analysis* ist ebenfalls Kapitel 12. Ich habe mich aber entschlossen, dieses Kapitel über die Grundlagen der mengentheoretischen Topologie von meinem ersten Buch in mein zweites Buch zu verschieben, da es sich dabei

doch um eine fortgeschrittene Materie innerhalb der Analysis handelt. Zentrale Inhalte des darauffolgenden Kapitel 13 sind der Satz über implizite Funktionen, der Umkehrsatz und die Theorie der im $\mathbb{R}^p$ eingebetteten Mannigfaltigkeiten. Zu dem anschließenden Kapitel 14 wurde oben schon einiges gesagt. Das Kapitel 15 widmet sich der Transformationsformel für Integrale nach dem Lebesgueschen Maß, dem Oberflächenmaß von eingebetteten Mannigfaltigkeiten, den Integralsätzen von Gauß und Green sowie einigen interessanten Konsequenzen dieser klassischen Resultate der Höheren Analysis. In Kapitel 16 werden die L^p-Räume für $p \in [1, +\infty]$ eingeführt und grundlegende Ergebnisse dazu gebracht. Weiters werden Konvergenz im Maß, dazugehörige Funktionenräume und schließlich die schwache Ableitung diskutiert. Kapitel 17 behandelt die Fouriertransformation, die Laplacetransformation und klassische Fourierreihen. Im vorletzten Kapitel 18 werden der für die Maßtheorie zentrale Satz von Radon-Nikodym bewiesen, signierte sowie reelle und komplexe Maße eingeführt und diskutiert sowie die topologischen Dualräume der L^p-Räume und des Raumes $C_0(X)$ für einen lokalkompakten Hausdorffraum X bestimmt. Schließlich behandelt das letzte Kapitel Verteilungsfunktionen von (reellen, komplexen) Maßen auf $\mathbb{R}$, stellt einen Zusammenhang zur Weglänge her, betrachtet absolut stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und zeigt, dass sich die Radon-Nikodym Ableitung eines Maßes auf $\mathbb{R}$ bezüglich eines anderen Maßes auch mit einer Art 'Grenzwert des Differenzenquotienten' berechnen lässt.
Die mit * gekennzeichneten Abschnitte, Resultate bzw. Bemerkungen sind weiterführendes bzw. tiefer erklärendes Material, welches nicht zum Verständnis von nachfolgenden Inhalten notwendig ist, und daher beim ersten Mal übergangen werden kann.
Ein großer Teil des vorliegenden Buches ist aus dem Skriptum zur Vorlesung Analysis 3, die ich schon einige Male gehalten habe, entstanden. Ich wurde dabei immer wieder auf Druckfehler, mathematische Ungereimtheiten oder auch Fehlendes hingewiesen, wofür ich sehr, sehr dankbar bin. Ich hoffe also, dass das vorliegende Werk nicht mehr allzu fehlerbehaftet ist. Sollten Sie beim Lesen doch noch Fehler finden, dann bitte ich Sie, mich auf diese per Email aufmerksam zu machen. Besonderen Dank möchte ich sowohl Brigitte Wyss für die Erstellung des Bildes eines Apfels am Buchdeckel meines ersten Buches 'Fundament Analysis' als auch Martin Kaar für die aus dem Apfels gemachte Birne am Buchdeckel des vorliegenden Buches ausdrücken. Der Titel 'Aufbau Analysis' soll für den Stellenwert der hier gebrachten Inhalte im Gebäude der modernen Analysis stehen und setzt gleichsam auf das 'Fundament Analysis' auf.

michael.kaltenbaeck@tuwien.ac.at Wien, 2021