Anhang A

Mächtigkeit und das Lemma von Zorn

A.1 Mächtigkeit von Mengen

Die Mächtigkeit einer Menge ist ein in der Mathematik häufig gebrauchter Begriff. Bekannterweise hat eine nichtleer Menge M eine endliche Mächtigkeit $k \in \mathbb{N}$, wenn es eine Bijektion von $\{n \in \mathbb{N} : n \leq k\}$ auf M gibt; siehe Definition 2.3.15. In einem ähnlichen Sinne wollen wir festlegen, was es heißt, dass zwei beliebige Mengen gleich mächtig sind.

A.1.1 Definition. Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, falls sie beide leer sind, oder falls es eine bijektive Funktion von A auf B gibt.

Betrachten wir die Identität, so erkennen wir sofort, dass eine Menge immer gleichmächtig wie sie selbst ist. Da mit einer Funktion auch ihre Umkehrfunktion bijektiv ist, sehen wir, dass A und B genau dann gleichmächtig sind, wenn B und A gleichmächtig sind. Hintereinanderausführungen von Bijektionen sind wieder Bijektionen. Also folgt aus der Gleichmächtigkeit von A und B und der von B und C auch die von A und C.

A.1.2 Definition. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls A gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ oder endlich im Sinne von Definition 2.3.15 ist.

A.1.3 Beispiel. Da $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(1) = 0$, $f(2n) = n$ und $f(2n+1) = -n$ für $n \in \mathbb{N}$ die geraden Zahlen bijektiv auf $\mathbb{N}$ und die ungeraden Zahlen größer oder gleich drei auf $-\mathbb{N}$ abbildet, ist f bijektiv. Also sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig. Insbesondere ist $\mathbb{Z}$ abzählbar.

A.1.4 Beispiel. Eine oft verwendete Tatsache ist die, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, und infolge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq k\}$$

und die Funktionen $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M$ und $h : M \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(m, n) = (m, m + n - 1) \quad \text{und} \quad h(i, k) := (i, k + 1 - i)\,.$$

Wegen $h \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ und $g \circ h = \mathrm{id}_M$ sind g und h bijektiv. Weiters sei $f : M \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(i, k) = \frac{1}{2} k(k - 1) + i\,.$$

Für natürliche $k_1 < k_2$ und $i_1 \leq k_1$ sowie $i_2 \leq k_2$ gilt

$$f(i_1, k_1) = \frac{1}{2}k_1(k_1 - 1) + i_1 \leq \frac{1}{2}(k_1 + 1)k_1 \leq \frac{1}{2}k_2(k_2 - 1) < \frac{1}{2}k_2(k_2 - 1) + i_2 = f(i_2, k_2)\,.$$

Im Falle $k_1 = k_2$ und $i_1 < i_2$ gilt offenbar auch $f(i_1, k_1) < f(i_2, k_2)$. Also ist f injektiv.
Um auch die Surjektivität nachzuweisen, sei bei gegebenem $r \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ maximal derart, dass $\frac{1}{2}k(k-1) < r$. Es folgt $r \leq \frac{1}{2}(k+1)k$ und somit

$$1 \leq \underbrace{r - \frac{1}{2}k(k-1)}_{=:i} \leq \frac{1}{2}(k+1)k - \frac{1}{2}k(k-1) = k\,.$$

Also gilt $(i, k) \in M$ und $f(i, k) = r$. Insgesamt ist $f \circ g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f \circ g\,(m, n) = \frac{1}{2}(m + n - 1)(m + n - 2) + m$$

bijektiv.

A.1.5 Beispiel. Sei M die disjunkte Vereinigung $\dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k$, und betrachte die Abbildung $h : M \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$h(x) := p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}\,,$$

wobei $x = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ und $p_1 < p_2 < \dots$ alle Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge bezeichnet. Da jede natürliche Zahl größer eins eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat, bildet h die Menge M bijektiv auf $\{2, 3, 4, \dots\}$ ab. Somit ist auch $f : M \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = h(x) - 1$ eine Bijektion. Also sind M und $\mathbb{N}$ gleichmächtig.

A.1.6 Beispiel. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist gleichmächtig wie die Menge $\{0, 1\}^M$ aller Funktionen ϕ von M in die zweielementige Menge $\{0, 1\}$. Um das einzusehen, betrachte $f : \{0, 1\}^M \to \mathcal{P}(M)$ definiert durch

$$f(\phi) := \{x \in M : \phi(x) = 1\}\,.$$

Für $\phi_1 \neq \phi_2$ folgt $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$ für mindestens ein $x \in M$. Dieses x liegt daher in $f(\phi_1) \cap (M \setminus f(\phi_2))$ oder in $(M \setminus f(\phi_1)) \cap f(\phi_2)$. In jedem Fall gilt $f(\phi_1) \neq f(\phi_2)$. Also ist f injektiv.
Zu einem $A \subseteq M$ erfüllt die Funktion $\phi : M \to \{0, 1\}$ definiert durch

$$\begin{cases} \phi(x) = 0\,, & \text{falls } x \notin A\,, \\ \phi(x) = 1\,, & \text{falls } x \in A\,, \end{cases}$$

$f(\phi) = A$. Somit ist f auch surjektiv.

A.1.7 Fakta.

1. Sind A und B gleichmächtig, so sind es auch ihre Potenzmengen $\mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}(B)$, denn mit $f : A \to B$ ist auch die Funktion $g : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, die einem $C \subseteq A$ die Bildmenge $f(C)$ zuordnet, eine Bijektion.

2. Ist I eine Indexmenge und sind für alle $i \in I$ gleichmächtige Mengen A_i und B_i gegeben, so sind auch $\prod_{i\in I} A_i$ und $\prod_{i\in I} B_i$ gleichmächtig. In der Tat überprüft man leicht, dass $f : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ mit $f((x_i)_{i\in I}) = (f_i(x_i))_{i\in I}$ eine Bijektion ist, wenn $f_i : A_i \to B_i$ für alle $i \in I$ bijektiv ist.

3. Ist I eine Indexmenge und sind für alle $i \in I$ gleichmächtige Mengen A_i und B_i derart gegeben, dass sowohl die Mengen A_i, $i \in I$, als auch die Mengen B_i, $i \in I$, paarweise disjunkt sind, so sind auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ und $\bigcup_{i\in I} B_i$ gleichmächtig. Sind nämlich wieder $f_i : A_i \to B_i$ für alle $i \in I$ bijektiv, dann ist es auch $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} B_i$, wobei $f(x) = f_i(x)$ für $x \in A_i$.

4. Sind M und N gleichmächtig und $L \neq \emptyset$ eine weitere Menge, so sind auch L^M und L^N gleichmächtig, wobei L^M bzw. L^N die Menge aller Funktionen von M bzw. N nach L bezeichnet. Ist nämlich $f : M \to N$ bijektiv, so hat auch die Abbildung $h \mapsto h \circ f$ von L^N auf L^M diese Eigenschaft.

A.1.8 Beispiel. Mit Hilfe von Fakta A.1.7, 2, und Beispiel A.1.4 zeigt man leicht durch vollständige Induktion, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

A.1.9 Satz. *Keine Menge ist gleichmächtig wie ihre Potenzmenge.*

Beweis. Für die leere Menge $M = \emptyset$ gilt $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$. Also enthält $\mathcal{P}(M)$ genau ein Element und ist daher nicht gleichmächtig wie M.
Für nichtleeres M betrachten wir eine beliebige Abbildung $f : M \to \mathcal{P}(M)$ und setzen

$$A := \{x \in M : x \notin f(x)\} \subseteq M .$$

Angenommen es gilt $A = f(y)$ für ein $y \in M$. Für $y \in f(y) = A$ folgt aus der Definition von A der Widerspruch $y \notin A$. Im Falle $y \notin f(y) = A$ folgt dagegen der Widerspruch $y \in A$. Also ist A niemals im Bild von f enthalten, wodurch $f : M \to \mathcal{P}(M)$ niemals bijektiv sein kann. ❑

A.1.10 Beispiel. Wegen Satz A.1.9 sind $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht gleichmächtig. Die Menge $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist aber sehr wohl gleichmächtig wie $\mathbb{N}$. In der Tat ist $g : \mathcal{E}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(A) := \sum_{k\in A} 2^{k-1}$$

bijektiv. Um sich das klar zu machen, betrachte die bijektive Funktion $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ aus Beispiel A.1.6 für $M = \mathbb{N}$. Für $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist $\phi := f^{-1}(A)$ eine Folge von Nullen und Einsen, die ab einem Index k nur aus Nullen besteht. $\phi(1)\,\phi(2)\,\dots\,\phi(k)$ ist nun genau die Dualzahldarstellung der Zahl $g(A)$. Umgekehrt lässt sich die Dualzahldarstellung einer jeden natürlichen Zahl n für ein eindeutiges $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ so darstellen, wodurch $n = g(A)$.

A.1.11 Satz (*Satz von Schröder–Bernstein*)**.** *Sind A und B zwei Mengen derart, dass es injektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ gibt, so sind A und B gleichmächtig.*

Beweis. Wir setzen $A_0 := A$, $B_0 := g(B)$, und für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv $A_k := g \circ f(A_{k-1})$ und $B_k := g \circ f(B_{k-1})$. Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, dass

$$A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \supseteq B_2 \supseteq \dots .$$

Mit $D := \bigcap_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} A_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} B_k$ ist daher

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} (A_k \setminus B_k) \;\cup\; \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} (B_k \setminus A_{k+1}) \;\cup\; D ,$$

eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen. Also ist durch

$$h(x) := \begin{cases} g \circ f(x), & \text{falls } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_k \setminus B_k, \\ x, & \text{falls } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_k \setminus A_{k+1}, \\ x, & \text{falls } x \in D, \end{cases}$$

eine Abbildung $h : A_0 \to A_0$ wohldefiniert. Da die Abbildungen $h|_{B_k \setminus A_{k+1}} = \mathrm{id}_{B_k \setminus A_{k+1}}$, $h|_D = \mathrm{id}_D$ sowie $h|_{A_k \setminus B_k} = g \circ f|_{A_k \setminus B_k} : A_k \setminus B_k \to A_{k+1} \setminus B_{k+1}$ alle bijektiv sind, ist es gemäß Fakta A.1.7 auch h als Abbildung von A_0 auf

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \underbrace{(g \circ f)(A_k \setminus B_k)}_{=A_{k+1} \setminus B_{k+1}} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (B_k \setminus A_{k+1}) \cup D = B_0 .$$

Also sind $A = A_0$ und B_0 gleichmächtig. Weil auch $g : B \to B_0$ eine Bijektion darstellt, sind es auch A und B. ❑

A.1.12 Beispiel. Wir betrachten die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$. Die Einbettung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(n) = n$ ist injektiv; vgl. Proposition 2.7.8. Andererseits hat jedes rationale q eine eindeutige Darstellung in der Form $\frac{p}{n}$ mit teilerfremden $p \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $g_1 : q = \frac{p}{n} \mapsto (p, n)$ ist somit eine injektive Abbildung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Gemäß Beispiel A.1.3, Beispiel A.1.4 und Fakta A.1.7 gibt es auch eine Bijektion $g_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wenden wir Satz A.1.11 auf f und $g := g_2 \circ g_1$ an, so sehen wir, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleichmächtig sind. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ abzählbar.

A.1.13 Korollar. *Sind A und B zwei Mengen derart, dass es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ und eine surjektive Abbildung $h : A \to B$ gibt, so sind A und B gleichmächtig.*

Beweis. Für ein surjektives $h : A \to B$ ist das Urbild $h^{-1}\{b\} \subseteq A$ jeder einpunktigen Menge $\{b\} \subseteq B$ nichtleer. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Funktion $g : B \to A$ mit $g(b) \in h^{-1}\{b\}$ für alle $b \in B$. Weil das Urbild disjunkter Mengen disjunkt ist, muss $g(b_1) \neq g(b_2)$ für $b_1 \neq b_2$ gelten. Infolge ist g injektiv, wodurch wir Satz A.1.11 anwenden können. ❑

A.1.14 Beispiel. Die Mengen $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig. In der Tat stellt $f : \phi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \phi(j) \cdot 3^{-j}$ eine injektive Funktion von $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ nach $\mathbb{R}$ dar.
Andererseits ist $g_1 : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ definiert durch $g_1(\phi) := \sum_{j=1}^{\infty} \phi(j) \cdot 2^{-j}$ surjektiv; vgl. Übungsaufgabe 3.27. Weiters seien $g_2 : [0, 1] \to (0, 1)$ und $g_3 : (0, 1) \to \mathbb{R}$ surjektiv; siehe etwa Lemma 3.8.1. Die Abbildung $g_3 \circ g_2 \circ g_1 : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ ist dann ebenfalls surjektiv. Wegen Korollar A.1.13 sind also $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig.
Nach Beispiel A.1.6 sind damit auch die Mengen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig. Aus Beispiel A.1.6 und Satz A.1.9 erkennen wir schließlich, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ nicht gleichmächtig sind.

A.1.15 Beispiel. Nach Fakta A.1.7 und Beispiel A.1.4 sind $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ gleichmächtig. Letztere Menge ist vermöge der Abbildung $\psi \mapsto (\psi_1, \psi_2)$ mit $\psi_1 = \psi|_{\mathbb{N}}$ und $\psi_2(k) = \psi(1-k)$, $k \in \mathbb{N}$, gleichmächtig wie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Nach Beispiel A.1.14 und Fakta A.1.7 sind somit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ gleichmächtig. Durch vollständige Induktion schließt man, dass auch für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ gleichmächtig sind.

A.2 Halbordnungen und Lemma von Zorn

A.2.1 Definition. Sei M eine Menge. Eine Relation $\leq$ auf M, also $\leq \subseteq M \times M$, heißt Halbordnung auf M, falls folgende drei Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$ gelten.

Reflexivität: $x \leq x$.

Antisymmetrie: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

Transitivität: Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

Eine Halbordnung $\leq$ auf M heißt Totalordnung, falls je zwei Elemente vergleichbar sind, also gilt für $x, y \in M$ immer $x \leq y$ oder $y \leq x$.

A.2.2 Definition. Sei $\leq$ eine Halbordnung auf der Menge M. Für $R \subseteq M$ heißt $y \in M$ obere (untere) Schranke von R, falls $x \leq y$ $(y \leq x)$ für alle $x \in R$, und $m \in R$ heißt maximales (minimales) Element von R, falls aus $x \in R$ und $m \leq x$ $(x \in R$ und $x \leq m)$ die Gleichheit $x = m$ folgt. $m \in R$ heißt größtes (kleinstes) Element von R, wenn $x \leq m$ $(m \leq x)$ für alle $x \in R$.
Für $R \subseteq M$ heißt $y \in M$ Supremum oder kleinste obere Schranke (Infimum oder größte unter Schranke) von R, falls y eine obere (untere) Schranke von R ist, und gleichzeitig $y \leq x$ $(x \leq y)$ für alle oberen (unteren) Schranken x von R gilt.

Das nun folgende Lemma von Zorn ist ein fundamentales Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz und war vor allem in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts umstritten. Mittlerweile hat der Großteil der Mathematiker das Auswahlaxiom akzeptiert, auch wenn ein möglicher Verzicht darauf immer noch in manchen Situationen explizit hervorgehoben wird.
Das *Auswahlaxiom* besagt ja, dass es bei gegebener Indexmenge I und gegebenen nichtleeren Mengen $A_i,\ i \in I$, immer eine *Auswahlfunktion* $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ gibt. Das Auswahlaxiom besagt also nichts anderes, als dass $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

A.2.3 Definition. Sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Wenn für jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke existiert, dann heißt $(M, \leq)$ *induktiv geordnet*. Wenn sogar jeweils eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt $(M, \leq)$ *strikt induktiv geordnet*.

Folgendes Lemma ist das zentrale Hilfsmittel für den Beweis des Lemma von Zorn.

A.2.4 Lemma. *Es sei $(M, \leq)$ eine nichtleere halbgeordnete und strikt induktive Menge mit einem kleinsten Element o. Ist $F : M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft*

$$m \leq F(m) \quad \textit{für alle} \quad m \in M\,,$$

dann gibt es ein $m \in M$ mit $F(m) = m$.

Beweis. Wir nennen eine Teilmenge S von M zulässig, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten: $o \in S$, $F(S) \subseteq S$, und für jede total geordnete Teilmenge $T \subseteq S$ liegt auch die kleinste obere Schranke $\sup T$ in S. Die ganze Menge M ist zulässig. Wir setzen

$$D := \bigcap_{S \subseteq M \text{ zulässig}} S\,,$$

und erkennen $o \in D$. Zudem erhalten wir

$$F(D) \subseteq \bigcap_{S \subseteq M \text{ zulässig}} F(S) \subseteq \bigcap_{S \subseteq M \text{ zulässig}} S = D\,.$$

Da für ein total geordnetes $T \subseteq D$ und ein zulässiges S immer $\sup T \in S$ gilt, folgt auch $\sup T \in D$, wodurch sich D als kleinste zulässige Teilmengen von M herausstellt.
Wenn wir zeigen können, dass D total geordnet ist, dann folgt daraus für die kleinste obere Schranke $\sup D$, dass $\sup D$ das größte Element von D ist. Wegen der Zulässigkeit gilt dann $F(\sup D) \in D$ und infolge $F(\sup D) \leq \sup D$. Zusammen mit der vorausgesetzten Eigenschaft von F erhalten wir $F(\sup D) = \sup D$. Noch zu zeigen ist also die Tatsache, dass D total geordnet ist.
Für den Beweis davon nennen wir $e \in D$ ein extremales Element, wenn $s \in D$ mit $s \leq e$ und $s \neq e$ die Ungleichung $F(s) \leq e$ nach sich zieht. Für ein extremales e setzen wir

$$S_e := \{s \in D : s \leq e \;\text{ oder }\; F(e) \leq s\}\,,$$

und zeigen, dass S_e zulässig ist:

- ⇝ Wegen $o \leq e$ liegt in S_e.
- ⇝ Für jedes Element $s \in S_e$ folgt aus $s \leq e,\ s \neq e$ die Ungleichung $F(s) \leq e$, aus $s = e$ folgt $F(s) = F(e)$, und $s \nleq e$ bedingt $F(e) \leq s \leq F(s)$, wodurch $F(S_e) \subseteq S_e$.
- ⇝ Sei T eine total geordnete Teilmenge von S_e. Gilt für alle $t \in T$ die Ungleichung $t \leq e$, so auch $\sup T \leq e$. Wenn aber $t \nleq e$ für mindestens ein $t \in T$, dann folgt $F(e) \leq t \leq \sup T$. In jedem Fall gilt $\sup T \in S_e$.

Da D die kleinste zulässige Teilmenge von M ist, erhalten wir $S_e = D$. Können wir zeigen, dass jedes $e \in D$ extremal ist, so folgt für $s \in D = S_e$ die Ungleichung $s \leq e$ oder die Ungleichung $e \leq F(e) \leq s$, womit sich D als total geordnet herausstellt. Um zu beweisen, dass jedes $e \in D$ extremal ist, betrachten wir

$$E := \{e \in D : e \;\text{ ist extremal}\}\,,$$

und weisen nach, dass E zulässig ist und infolge D gleicht:

- ⇝ Als kleinstes Element ist o extremal.
- ⇝ Wir müssen zeigen, dass mit e auch $F(e)$ in E liegt. Also gilt es, aus $s \in D$ mit $s \leq F(e)$ und $s \neq F(e)$ die Ungleichung $F(s) \leq F(e)$ abzuleiten. Wegen $s \in D = S_e$ gilt $s \leq e$ oder $F(e) \leq s$, wobei wir letzteres wegen $s \leq F(e)$ und $s \neq F(e)$ ausschließen können. Aus $s = e$ folgt trivialerweise $F(s) \leq F(e)$ und aus $s \leq e,\ s \neq e$, wegen $e \in E$ die Ungleichung $F(s) \leq e \leq F(e)$.
- ⇝ Schließlich sei $T \subseteq E$ total geordnet. Um $\sup T \in E$ zu zeigen, sei $s \in D$ mit $s \leq \sup T$ und $s \neq \sup T$. Wenn für jedes $t \in T$ die Ungleichung $F(t) \leq s$ gelten würde, so erhielten wir wegen $t \leq F(t)$ den Widerspruch $\sup T \leq s$. Also muss $F(e) \nleq s$ für ein $e \in T$ $(\subseteq E)$, womit wegen $D = S_e$ auch $s \leq e$. Aus $s \neq e$ folgt wegen $e \in E$ die Ungleichung $F(s) \leq e \leq \sup T$, und aus $s = e$ folgt wegen $\sup T \in D = S_e$ und $s \leq \sup T,\ s \neq \sup T$ die Ungleichung $F(s) = F(e) \leq \sup T$. In jedem Fall gilt $F(s) \leq \sup T$, womit $\sup T$ extremal ist.

❑

Wir kommen zur Herleitung des Lemma von Zorn aus dem Auswahlaxiom.

A.2.5 Satz (Lemma von Zorn)**.** *Eine nichtleere und induktiv geordnete Menge* $(M, \leq)$ *besitzt ein maximales Element.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall einer strikt induktiv geordneten Menge.
Da für ein festes $x \in M$ jedes maximale Element von $\{y \in M : x \leq y\}$ auch maximales Element von M ist, dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass M ein kleinstes Element enthält. Hätte ein solches M kein maximales Element, so finden wir für jedes $m \in M$ ein größeres Element[1] $F(m)$ und definieren damit eine Funktion $F : M \to M$ derart, dass $m < F(m)$ für alle $m \in M$. Da M strikt induktiv geordnet ist, folgt aus Lemma A.2.4 der Widerspruch $F(m) = m$ für ein $m \in M$.
Für ein induktiv und nicht notwendigerweise strikt induktiv geordnetes M sei $\mathcal{H}$ die Menge aller total geordneten Teilmengen von M. Bezüglich der Inklusion bildet $\mathcal{H}$ eine Halbordnung. Da für ein bezüglich $\subseteq$ total geordnetes $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ die Teilmenge $\bigcup_{N \in \mathcal{T}} N$ von M bezüglich $\leq$ total geordnet und daher die kleinste obere Schranke von $\mathcal{T}$ darstellt, ist $\mathcal{H}$ sogar strikt induktiv geordnet.
Nach dem ersten Beweisteil besitzt $\mathcal{H}$ somit ein maximales Element T. Jede obere Schranke n von T muss dann zu T gehören, da anderenfalls $T \cup \{n\}$ eine total geordnete Menge wäre, die T echt umfasste. Dieses Element n ist ein maximales Element von M, denn für jedes $m \in M$ folgt aus $n \leq m$, dass m eine obere Schranke von T ist und infolge ebenfalls zu T gehören muss. Also folgt $m \leq n$ und somit $m = n$. ❑

A.3 Mehr über die Mächtigkeit von Mengen

A.3.1 Definition. Sind A und B zwei Mengen, so schreiben wir $|A| \leq |B|$, wenn $A = \emptyset$ oder wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.

A.3.2 Beispiel. Für Mengen A und B mit $A \subseteq B$ gilt offenbar $|A| \leq |B|$.

Wegen Satz A.1.11 ist $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ äquivalent dazu, dass A und B gleichmächtig sind. Wir schreiben für diesen Sachverhalt auch $|A| = |B|$.
Aus dem folgenden Resultat erkennen wir, dass für zwei Mengen A und B immer entweder $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$.

A.3.3 Satz. *Sind A und B nichtleere Mengen, so gibt eine injektive Funktion* $f : A \to B$ *oder eine injektive Funktion* $g : B \to A$.

Beweis. Wir betrachten alle möglichen Bijektionen $h : D_h \to R_h$ mit $D_h \subseteq A$ und $R_h \subseteq B$. Da solche Funktionen h Teilmengen von $D_h \times R_h \subseteq A \times B$ sind, bildet die Menge $\mathcal{B}$ aller solchen Bijektionen eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(A \times B)$ von $A \times B$. Insbesondere ist $\subseteq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{B}$.
Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{B}$ durch $\subseteq$ induktiv geordnet ist. Dazu sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ totalgeordnet und

$$\phi := \bigcup_{h \in \mathcal{T}} h \,.$$

Für $(a, b_1), (a, b_2) \in \phi$ erhalten wir $(a, b_1) \in h_1$ und $(a, b_2) \in h_2$ für $h_1, h_2 \in \mathcal{T}$. Da $\mathcal{T}$ totalgeordnet ist, gilt $h_1 \subseteq h_2$ oder $h_2 \subseteq h_1$. Im ersten Fall erhalten wir $(a, b_1), (a, b_2) \in h_2$, wobei $b_1 = b_2$, da h_2

[1] Man beachte, dass man für die Existenz einer solchen Funktion F das Auswahlaxiom verwendet. In der Tat ist F eine Auswahlfunktion der Familie $(A_m)_{m \in M}$, wobei $A_m = \{x \in M : m \leq x,\ m \neq x\}$.

eine Funktion ist. Im zweiten Fall folgt analog $b_1 = b_2$. Damit bildet ϕ eine Funktion $\phi : D_\phi \to B$ mit $D_\phi \subseteq A$.
Die Abbildung ϕ ist auch injektiv. In der Tat folgt aus $(a_1, b), (a_2, b) \in \phi$ wie oben die Existenz eines $h \in \mathcal{T}$ mit $(a_1, b), (a_2, b) \in h$. Die Injektivität von h impliziert $a_1 = a_2$. Also gilt $\phi \in \mathcal{B}$.
Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales $f \in \mathcal{B}$. Bezeichnet D_f den Definitionsbereich und R_f die Bildmenge von f, so ist $f : D_f \to R_f$ bijektiv. Im Falle $D_f = A$ ist f, betrachtet als Funktion von A nach B, injektiv. Im Falle $R_f = B$ ist $g := f^{-1} : R_f \to D_f$, betrachtet als Funktion von B nach A, injektiv. Gilt schließlich $D_f \subsetneq A$ und $R_f \subsetneq B$, so können wir $a \in A \setminus D_f$ und $b \in B \setminus R_f$ wählen, und erhalten mit $\psi := f \cup \{(a, b)\}$ eine Bijektion $\psi : A \cup \{a\} \to B \cup \{b\}$, was aber der Maximalität von f widerspricht. ❑

A.3.4 Korollar. *Für nichtleere Mengen A und B gilt $|A| \leq |B|$ genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung $g : B \to A$ gibt.*

Beweis. $|A| \leq |B|$ bedingt definitionsgemäß die Existenz einer injektiven Abbildung $f : A \to B$. Setzen wir nun $g(b) := f^{-1}(b)$ für $b \in f(A)$ und $g(b) := a_0$ für $b \in B \setminus f(A)$ mit einem festen $a_0 \in A$, so ist $g : B \to A$ offenbar surjektiv.
Existiert ein surjektives $g : B \to A$ und würde $|A| \leq |B|$ nicht gelten, so folgt $|B| \leq |A|$ wegen Satz A.3.3 und daher die Existenz einer injektiven Abbildung $h : B \to A$. Nach Korollar A.1.13 erhielten wir $|A| = |B|$ und infolge den Widerspruch $|A| \leq |B|$. ❑

Eine nichtleer Menge M ist endlich mit Mächtigkeit $k \in \mathbb{N}$, wenn es eine Bijektion von $\{n \in \mathbb{N} : n \leq k\}$ auf M gibt; siehe Definition 2.3.15. Nicht endliche Mengen nennen wir *unendliche Mengen*.

A.3.5 Lemma. *Für jede unendliche Mengen A gilt $|\mathbb{N}| \leq |A|$.*

Beweis. Da A nichtleer ist, gibt es ein $a \in A$. Durch $f_1 : \{1\} \to A$ mit $f_1(1) = a$ ist eine injektive Funktion definiert. Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f_n : \{1, \ldots, n\} \to A$ injektiv, so gilt $f_n(\{1, \ldots, n\}) \subsetneq A$, da wir A als nicht endlich vorausgesetzt haben. Somit können wir f_n zu einer Funktion $f_{n+1} : \{1, \ldots, n, n+1\} \to A$ mit $f_{n+1}(n+1) \notin f_n(\{1, \ldots, n\})$ fortsetzen und erhalten wieder eine injektive Abbildung. Die nach Rekursionssatz, Satz 2.3.3, existierende Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ ist dann injektiv. ❑

A.3.6 Lemma. *Für jede unendliche Menge A gilt $|A| = |\mathbb{N} \times A|$.*

Beweis. Wir nennen eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A)$ zulässig, wenn alle $f \in \mathcal{T}$ injektive Abbildungen $f : \mathbb{N} \to A$ sind, und wenn $f(\mathbb{N}) \cap g(\mathbb{N}) = \emptyset$ für alle $f, g \in \mathcal{T}$ mit $f \neq g$. Die Menge $\mathfrak{T}$ aller zulässigen $\mathcal{T}$ ist durch $\subseteq$ halbgeordnet. Man überprüft leicht, dass für ein totalgeordnetes $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ die Vereinigung $\bigcup_{\mathcal{S} \in \mathfrak{S}} \mathcal{S}$ wieder zulässig ist. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}$. Wäre

$$B := A \setminus \bigcup_{f \in \mathcal{T}} f(\mathbb{N})$$

unendlich, so gäbe es nach Lemma A.3.5 ein injektives $g : \mathbb{N} \to B$. Offenbar ist dann $\mathcal{T} \cup \{g\}$ auch zulässig, was der Maximalität widerspricht. Also ist B endlich und infolge $\mathcal{T}$ nichtleer.
Wir greifen ein $\psi : \mathbb{N} \to A$ aus $\mathcal{T}$ heraus. Im Falle $B = \emptyset$ setzen wir $h := \psi$. Anderenfalls gibt es ein $m \geq 0$ und ein bijektives $\phi : \{-m, \ldots, 0\} \to B$; vgl. Definition 2.3.15. Wegen $B \cap \psi(\mathbb{N}) = \emptyset$ ist $\phi \cup \psi$ eine injektive Funktion von $\{-m, \ldots, 0\} \cup \mathbb{N}$ nach A. Durch

$$h : \mathbb{N} \to A, \quad h(n) := (\phi \cup \psi)(n - 1 - m),$$

wird dann auch eine injektive Funktion definiert mit $h(\mathbb{N}) = B \cup \psi(\mathbb{N})$. Setzen wir $\mathcal{R} := (\mathcal{T} \setminus \{\psi\}) \cup \{h\}$, so ist auch $\mathcal{R}$ zulässig, wobei

$$\bigcup_{f \in \mathcal{R}} f(\mathbb{N}) = A\,.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $\theta : \mathbb{N} \times \mathcal{R} \to A$ definiert durch $\theta(n, f) = f(n)$ bijektiv ist, womit $|A| = |\mathbb{N} \times \mathcal{R}|$. Die Aussage des Lemma folgt mit Beispiel A.1.4 und Fakta A.1.7 aus

$$|\mathbb{N} \times A| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathcal{R}| = |\mathbb{N} \times \mathcal{R}| = |A|\,. \qquad \square$$

A.3.7 Korollar. *Sind $B_i, i \in I$, Mengen mit abzählbarem $I \neq \emptyset$ derart, dass $|B_i| \leq |B_k|$ mit einem unendlichen B_k für ein festes $k \in I$, so gilt*

$$|\bigcup_{i \in I} B_i\,| = |B_k|\,.$$

Beweis. Offenbar gilt $|B_k| \leq |\bigcup_{i \in I} B_i|$; siehe Beispiel A.3.2. Für die umgekehrte Ungleichung seien $g_i : B_k \to B_i, i \in I$, surjektive Abbildungen; siehe Korollar A.3.4. Infolge ist auch die durch $f(n, b) = g_{\phi(n)}(b)$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \times B_k \to \bigcup_{i \in I} B_i$ surjektiv, wobei auch $\phi : \mathbb{N} \to I$ surjektiv ist. Aus Lemma A.3.6 folgt schließlich $|\bigcup_{i \in I} B_i\,| \leq |B_k|$. $\square$

A.3.8 Satz. *Für jede unendliche Menge A und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $|A| = |\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}}|$.*

Beweis. Es reicht offenbar, $|A| = |A \times A|$ zu zeigen. Dazu sei $\mathcal{B}$ die Menge aller möglichen Bijektionen $f : B_f \times B_f \to B_f$, wobei $B_f \subseteq A$. Gemäß Beispiel A.1.4 und Lemma A.3.5 gilt $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ totalgeordnet, so prüft man elementar nach, dass

$$\bigcup_{f \in \mathcal{T}} f$$

eine Bijektion von $\bigcup_{f \in \mathcal{T}}(B_f \times B_f) = (\bigcup_{f \in \mathcal{T}} B_f) \times (\bigcup_{f \in \mathcal{T}} B_f)$ auf $\bigcup_{f \in \mathcal{T}} B_f$ abgibt. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales $h \in \mathcal{B}$. Konstruktionsbedingt gilt $|B_h| = |B_h \times B_h|$. Für $|B_h| = |A|$ folgt $|A| = |A \times A|$ aus Fakta A.1.7.
Wir bringen schließlich die Annahme, dass B_h und A nicht gleichmächtig sind, zu einem Widerspruch. Aus $|B_h| \leq |A|, |B_h| \neq |A|$ folgt zunächst aus Korollar A.3.7, dass $|A \setminus B_h| = |A|$. Wir erhalten $|B_h| \leq |A \setminus B_h|, |B_h| \neq |A \setminus B_h|$ und somit die Existenz einer injektiven Funktion $\phi : B_h \to A \setminus B_h$; siehe Satz A.3.3. Für $B := B_h \dot\cup \phi(B_h)$ gilt

$$B \times B = (B_h \times B_h) \dot\cup (\phi(B_h) \times B_h) \dot\cup (B_h \times \phi(B_h)) \dot\cup (\phi(B_h) \times \phi(B_h))\,,$$

wobei $\phi(B_h) \times B_h$, $B_h \times \phi(B_h)$ und $\phi(B_h) \times \phi(B_h)$ alle gleichmächtig wie $B_h \times B_h$ und somit gleichmächtig wie B_h sind. Mit Korollar A.3.7 folgt

$$|(\phi(B_h) \times B_h) \dot\cup (B_h \times \phi(B_h)) \dot\cup (\phi(B_h) \times \phi(B_h))| = |B_h \times B_h| = |B_h| = |\phi(B_h)|\,.$$

Also gibt es eine Bijektion $g : (\phi(B_h) \times B_h) \dot\cup (B_h \times \phi(B_h)) \dot\cup (\phi(B_h) \times \phi(B_h)) \to \phi(B_h)$, womit auch $h \cup g$ eine Bijektion von $B \times B$ nach B ist, was aber der Maximalität von h widerspricht. $\square$

A.3.9 Korollar. *Für eine unendliche Menge A gilt $|\mathcal{E}(A)| = |A|$, wobei $\mathcal{E}(A)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von A bezeichnet.*

Beweis. Bezeichne $\mathcal{E}_n(A)$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von A mit Mächtigkeit n. Da für $n \geq 2$ die Abbildung $(a_1, \ldots, a_n) \to \{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}}$ surjektiv auf $\mathcal{E}_n(A)$ abbildet, folgt $|\mathcal{E}_n(A)| \leq |A|$; vgl. Satz A.3.8. Für $n = 1$ ist $a \mapsto \{a\}$ von A nach $\mathcal{E}_1(A)$ sogar bijektiv. Somit folgt aus Korollar A.3.7

$$|A| = |\mathcal{E}_1(A)| = |\underbrace{\mathcal{E}_0(A)}_{=\{\emptyset\}} \dot\cup \mathcal{E}_1(A) \dot\cup \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{E}_n(A)|\,.$$ ❑

Literaturverzeichnis

[B] V.I. Bogachev: *Measure Theory I,* Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.

[C] L. Conlon: *Differentiable manifolds,* Birkhäuser Boston, 2001.

[DK1] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk: *Multidimensional Real Analysis I,* Cambridge University Press, 2004.

[DK2] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk: *Multidimensional Real Analysis II,* Cambridge University Press, 2004.

[E] J. Elstrodt: *Maß und Integrationstheorie,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[Ha] P. Halmos: *Measure Theory,* Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1974.

[HR] E. Hewitt, K.A. Ross: *Abstract Harmonic Analysis I,* Springer-Verlag New York, 1979.

[H1] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis 1,* B.G. Teubner Stuttgart, 1990.

[H2] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis 2,* B.G. Teubner Stuttgart, 1990.

[J] K. Jänich: *Vektor Analysis,* Springer Verlag 2001.

[K] M. Kaltenbäck: *Fundament Analysis,* Berliner Studienreihe Math., Heldermann, 2014.

[K] D. Kofler: *Die Invarianzsätze von Brouwer,* Seminararbeit, TU-Wien, 2014.

[Ri] W. Rinow: *Lehrbuch der Topologie,* Hochschulbücher für Mathematik, Bd.79, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975.

[Ru] W. Rudin: *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill New York, 1987.

[Z] L. Zajíček: *An elementary proof of the one-dimensional Rademacher theorem,* Mathematica Bohemica, Vol. 117 (1992), No. 2, 133–136.

Index