

Anhang A

Mächtigkeit und das Lemma von Zorn

A.1 Mächtigkeit von Mengen

Die Mächtigkeit einer Menge ist ein in der Mathematik häufig gebrauchter Begriff. Bekannterweise hat eine nichtleere Menge M eine endliche Mächtigkeit $k \in \mathbb{N}$, wenn es eine Bijektion von $\{n \in \mathbb{N} : n \leq k\}$ auf M gibt; siehe Definition 2.3.15. In einem ähnlichen Sinne wollen wir festlegen, was es heißt, dass zwei beliebige Mengen gleichmächtig sind.

A.1.1 Definition. Zwei Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, falls sie beide leer sind, oder falls es eine bijektive Funktion von A auf B gibt.

Betrachten wir die Identität, so erkennen wir sofort, dass eine Menge immer gleichmächtig wie sie selbst ist. Da mit einer Funktion auch ihre Umkehrfunktion bijektiv ist, sehen wir, dass A und B genau dann gleichmächtig sind, wenn B und A gleichmächtig sind. Hintereinanderausführungen von Bijektionen sind wieder Bijektionen. Also folgt aus der Gleichmächtigkeit von A und B und der von B und C auch die von A und C .

A.1.2 Definition. Eine Menge A heißt *abzählbar*, falls A gleichmächtig wie \mathbb{N} oder endlich im Sinne von Definition 2.3.15 ist.

A.1.3 Beispiel. Da $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert durch $f(1) = 0$, $f(2n) = n$ und $f(2n+1) = -n$ für $n \in \mathbb{N}$ die geraden Zahlen bijektiv auf \mathbb{N} und die ungeraden Zahlen größer oder gleich drei auf $-\mathbb{N}$ abbildet, ist f bijektiv. Also sind \mathbb{N} und \mathbb{Z} gleichmächtig. Insbesondere ist \mathbb{Z} abzählbar.

A.1.4 Beispiel. Eine oft verwendete Tatsache ist die, dass \mathbb{N} und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig sind, und infolge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist. Dazu betrachten wir die Menge

$$M := \{(i, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i \leq k\}$$

und die Funktionen $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow M$ und $h : M \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(m, n) = (m, m + n - 1) \quad \text{und} \quad h(i, k) := (i, k + 1 - i).$$

Wegen $h \circ g = \text{id}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ und $g \circ h = \text{id}_M$ sind g und h bijektiv. Weiters sei $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(i, k) = \frac{1}{2}k(k-1) + i.$$

Für natürliche $k_1 < k_2$ und $i_1 \leq k_1$ sowie $i_2 \leq k_2$ gilt

$$f(i_1, k_1) = \frac{1}{2}k_1(k_1 - 1) + i_1 \leq \frac{1}{2}(k_1 + 1)k_1 \leq \frac{1}{2}k_2(k_2 - 1) < \frac{1}{2}k_2(k_2 - 1) + i_2 = f(i_2, k_2).$$

Im Falle $k_1 = k_2$ und $i_1 < i_2$ gilt offenbar auch $f(i_1, k_1) < f(i_2, k_2)$. Also ist f injektiv.

Um auch die Surjektivität nachzuweisen, sei bei gegebenem $r \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ maximal derart, dass $\frac{1}{2}k(k-1) < r$. Es folgt $r \leq \frac{1}{2}(k+1)k$ und somit

$$1 \leq r - \underbrace{\frac{1}{2}k(k-1)}_{=:i} \leq \frac{1}{2}(k+1)k - \frac{1}{2}k(k-1) = k.$$

Also gilt $(i, k) \in M$ und $f(i, k) = r$. Insgesamt ist $f \circ g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f \circ g(m, n) = \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2) + m$$

bijektiv.

A.1.5 Beispiel. Sei M die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$, und betrachte die Abbildung $h : M \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$h(x) := p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k},$$

wobei $x = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ und $p_1 < p_2 < \dots$ alle Primzahlen in aufsteigender Reihenfolge bezeichnet. Da jede natürliche Zahl größer eins eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat, bildet h die Menge M bijektiv auf $\{2, 3, 4, \dots\}$ ab. Somit ist auch $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = h(x) - 1$ eine Bijektion. Also sind M und \mathbb{N} gleichmächtig.

A.1.6 Beispiel. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist gleichmächtig wie die Menge $\{0, 1\}^M$ aller Funktionen ϕ von M in die zweielementige Menge $\{0, 1\}$. Um das einzusehen, betrachte $f : \{0, 1\}^M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ definiert durch

$$f(\phi) := \{x \in M : \phi(x) = 1\}.$$

Für $\phi_1 \neq \phi_2$ folgt $\phi_1(x) \neq \phi_2(x)$ für mindestens ein $x \in M$. Dieses x liegt daher in $f(\phi_1) \cap (M \setminus f(\phi_2))$ oder in $(M \setminus f(\phi_1)) \cap f(\phi_2)$. In jedem Fall gilt $f(\phi_1) \neq f(\phi_2)$. Also ist f injektiv.

Zu einem $A \subseteq M$ erfüllt die Funktion $\phi : M \rightarrow \{0, 1\}$ definiert durch

$$\begin{cases} \phi(x) = 0, & \text{falls } x \notin A, \\ \phi(x) = 1, & \text{falls } x \in A, \end{cases}$$

$f(\phi) = A$. Somit ist f auch surjektiv.

A.1.7 Fakta.

1. Sind A und B gleichmächtig, so sind es auch ihre Potenzmengen $\mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}(B)$, denn mit $f : A \rightarrow B$ ist auch die Funktion $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, die einem $C \subseteq A$ die Bildmenge $f(C)$ zuordnet, eine Bijektion.
2. Ist I eine Indexmenge und sind für alle $i \in I$ gleichmächtige Mengen A_i und B_i gegeben, so sind auch $\prod_{i \in I} A_i$ und $\prod_{i \in I} B_i$ gleichmächtig. In der Tat überprüft man leicht, dass $f : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$ mit $f((x_i)_{i \in I}) = (f_i(x_i))_{i \in I}$ eine Bijektion ist, wenn $f_i : A_i \rightarrow B_i$ für alle $i \in I$ bijektiv ist.

3. Ist I eine Indexmenge und sind für alle $i \in I$ gleichmächtige Mengen A_i und B_i derart gegeben, dass sowohl die Mengen A_i , $i \in I$, als auch die Mengen B_i , $i \in I$, paarweise disjunkt sind, so sind auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ und $\bigcup_{i \in I} B_i$ gleichmächtig. Sind nämlich wieder $f_i : A_i \rightarrow B_i$ für alle $i \in I$ bijektiv, dann ist es auch $f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$, wobei $f(x) = f_i(x)$ für $x \in A_i$.
4. Sind M und N gleichmächtig und $L \neq \emptyset$ eine weitere Menge, so sind auch L^M und L^N gleichmächtig, wobei L^M bzw. L^N die Menge aller Funktionen von M bzw. N nach L bezeichnet. Ist nämlich $f : M \rightarrow N$ bijektiv, so hat auch die Abbildung $h \mapsto h \circ f$ von L^N auf L^M diese Eigenschaft.

A.1.8 Beispiel. Mit Hilfe von Fakta A.1.7, 2, und Beispiel A.1.4 zeigt man leicht durch vollständige Induktion, dass \mathbb{N} und \mathbb{N}^k für alle $k \in \mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

A.1.9 Satz. Keine Menge ist gleichmächtig wie ihre Potenzmenge.

Beweis. Für die leere Menge $M = \emptyset$ gilt $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$. Also enthält $\mathcal{P}(M)$ genau ein Element und ist daher nicht gleichmächtig wie M .

Für nichtleeres M betrachten wir eine beliebige Abbildung $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ und setzen

$$A := \{x \in M : x \notin f(x)\} \subseteq M.$$

Angenommen es gilt $A = f(y)$ für ein $y \in M$. Für $y \in f(y) = A$ folgt aus der Definition von A der Widerspruch $y \notin A$. Im Falle $y \notin f(y) = A$ folgt dagegen der Widerspruch $y \in A$. Also ist A niemals im Bild von f enthalten, wodurch $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ niemals bijektiv sein kann. \square

A.1.10 Beispiel. Wegen Satz A.1.9 sind \mathbb{N} und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht gleichmächtig. Die Menge $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} ist aber sehr wohl gleichmächtig wie \mathbb{N} . In der Tat ist $g : \mathcal{E}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch

$$g(A) := \sum_{k \in A} 2^{k-1}$$

bijektiv. Um sich das klar zu machen, betrachte die bijektive Funktion $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ aus Beispiel A.1.6 für $M = \mathbb{N}$. Für $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ ist $\phi := f^{-1}(A)$ eine Folge von Nullen und Einsen, die ab einem Index k nur aus Nullen besteht. $\phi(1)\phi(2)\dots\phi(k)$ ist nun genau die Dualzahldarstellung der Zahl $g(A)$. Umgekehrt lässt sich die Dualzahldarstellung einer jeden natürlichen Zahl n für ein eindeutiges $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ so darstellen, wodurch $n = g(A)$.

A.1.11 Satz (Satz von Schröder–Bernstein). Sind A und B zwei Mengen derart, dass es injektive Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow A$ gibt, so sind A und B gleichmächtig.

Beweis. Wir setzen $A_0 := A$, $B_0 := g(B)$, und für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv $A_k := g \circ f(A_{k-1})$ und $B_k := g \circ f(B_{k-1})$. Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, dass

$$A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \supseteq B_2 \supseteq \dots$$

Mit $D := \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_k$ ist daher

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (A_k \setminus B_k) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (B_k \setminus A_{k+1}) \cup D,$$

eine Vereinigung paarweise disjunkter Mengen. Also ist durch

$$h(x) := \begin{cases} g \circ f(x), & \text{falls } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_k \setminus B_k, \\ x, & \text{falls } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_k \setminus A_{k+1}, \\ x, & \text{falls } x \in D, \end{cases}$$

eine Abbildung $h : A_0 \rightarrow A_0$ wohldefiniert. Da die Abbildungen $h|_{B_k \setminus A_{k+1}} = \text{id}_{B_k \setminus A_{k+1}}$, $h|_D = \text{id}_D$ sowie $h|_{A_k \setminus B_k} = g \circ f|_{A_k \setminus B_k} : A_k \setminus B_k \rightarrow A_{k+1} \setminus B_{k+1}$ alle bijektiv sind, ist es gemäß Fakta A.1.7 auch h als Abbildung von A_0 auf

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \underbrace{(g \circ f)(A_k \setminus B_k)}_{=A_{k+1} \setminus B_{k+1}} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (B_k \setminus A_{k+1}) \cup D = B_0.$$

Also sind $A = A_0$ und B_0 gleichmächtig. Weil auch $g : B \rightarrow B_0$ eine Bijektion darstellt, sind es auch A und B . \square

A.1.12 Beispiel. Wir betrachten die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{Q} . Die Einbettung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(n) = n$ ist injektiv; vgl. Proposition 2.7.8. Andererseits hat jedes rationale q eine eindeutige Darstellung in der Form $\frac{p}{n}$ mit teilerfremden $p \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $g_1 : q = \frac{p}{n} \mapsto (p, n)$ ist somit eine injektive Abbildung von \mathbb{Q} nach $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Gemäß Beispiel A.1.3, Beispiel A.1.4 und Fakta A.1.7 gibt es auch eine Bijektion $g_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Wenden wir Satz A.1.11 auf f und $g := g_2 \circ g_1$ an, so sehen wir, dass \mathbb{N} und \mathbb{Q} gleichmächtig sind. Insbesondere ist \mathbb{Q} abzählbar.

A.1.13 Korollar. Sind A und B zwei Mengen derart, dass es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ und eine surjektive Abbildung $h : A \rightarrow B$ gibt, so sind A und B gleichmächtig.

Beweis. Für ein surjektives $h : A \rightarrow B$ ist das Urbild $h^{-1}\{b\} \subseteq A$ jeder einpunktigen Menge $\{b\} \subseteq B$ nichtleer. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Funktion $g : B \rightarrow A$ mit $g(b) \in h^{-1}\{b\}$ für alle $b \in B$. Weil das Urbild disjunkter Mengen disjunkt ist, muss $g(b_1) \neq g(b_2)$ für $b_1 \neq b_2$ gelten. Infolge ist g injektiv, wodurch wir Satz A.1.11 anwenden können. \square

A.1.14 Beispiel. Die Mengen $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und \mathbb{R} sind gleichmächtig. In der Tat stellt $f : \phi \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \phi(j) \cdot 3^{-j}$ eine injektive Funktion von $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ nach \mathbb{R} dar.

Andererseits ist $g_1 : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $g_1(\phi) := \sum_{j=1}^{\infty} \phi(j) \cdot 2^{-j}$ surjektiv; vgl. Übungsaufgabe 3.27. Weiters seien $g_2 : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ und $g_3 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv; siehe etwa Lemma 3.8.1. Die Abbildung $g_3 \circ g_2 \circ g_1 : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann ebenfalls surjektiv. Wegen Korollar A.1.13 sind also $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und \mathbb{R} gleichmächtig.

Nach Beispiel A.1.6 sind damit auch die Mengen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und \mathbb{R} gleichmächtig. Aus Beispiel A.1.6 und Satz A.1.9 erkennen wir schließlich, dass \mathbb{R} und \mathbb{N} nicht gleichmächtig sind.

A.1.15 Beispiel. Nach Fakta A.1.7 und Beispiel A.1.4 sind $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ gleichmächtig. Letztere Menge ist vermöge der Abbildung $\psi \mapsto (\psi_1, \psi_2)$ mit $\psi_1 = \psi|_{\mathbb{N}}$ und $\psi_2(k) = \psi(1-k)$, $k \in \mathbb{N}$, gleichmächtig wie $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Nach Beispiel A.1.14 und Fakta A.1.7 sind somit \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 gleichmächtig. Durch vollständige Induktion schließt man, dass auch für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Mengen \mathbb{R} und \mathbb{R}^n gleichmächtig sind.

A.2 Halbordnungen und Lemma von Zorn

A.2.1 Definition. Sei M eine Menge. Eine Relation \leq auf M , also $\leq \subseteq M \times M$, heißt Halbordnung auf M , falls folgende drei Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$ gelten.

Reflexivität: $x \leq x$.

Antisymmetrie: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

Transitivität: Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$.

Eine Halbordnung \leq auf M heißt Totalordnung, falls je zwei Elemente vergleichbar sind, also gilt für $x, y \in M$ immer $x \leq y$ oder $y \leq x$.

A.2.2 Definition. Sei \leq eine Halbordnung auf der Menge M . Für $R \subseteq M$ heißt $y \in M$ obere (untere) Schranke von R , falls $x \leq y$ ($y \leq x$) für alle $x \in R$, und $m \in R$ heißt maximales (minimales) Element von R , falls aus $x \in R$ und $m \leq x$ ($x \in R$ und $x \leq m$) die Gleichheit $x = m$ folgt. $m \in R$ heißt größtes (kleinstes) Element von R , wenn $x \leq m$ ($m \leq x$) für alle $x \in R$.

Für $R \subseteq M$ heißt $y \in M$ Supremum oder kleinste obere Schranke (Infimum oder größte untere Schranke) von R , falls y eine obere (untere) Schranke von R ist, und gleichzeitig $y \leq x$ ($x \leq y$) für alle oberen (unteren) Schranken x von R gilt.

Das nun folgende Lemma von Zorn ist ein fundamentales Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz und war vor allem in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts umstritten. Mittlerweile hat der Großteil der Mathematiker das Auswahlaxiom akzeptiert, auch wenn ein möglicher Verzicht darauf immer noch in manchen Situationen explizit hervorgehoben wird.

Das *Auswahlaxiom* besagt ja, dass es bei gegebener Indexmenge I und gegebenen nichtleeren Mengen A_i , $i \in I$, immer eine *Auswahlfunktion* $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ gibt. Das Auswahlaxiom besagt also nichts anderes, als dass $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

A.2.3 Definition. Sei (M, \leq) eine halbgeordnete Menge. Wenn für jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke existiert, dann heißt (M, \leq) *induktiv geordnet*. Wenn sogar jeweils eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt (M, \leq) *strikt induktiv geordnet*.

Folgendes Lemma ist das zentrale Hilfsmittel für den Beweis des Lemma von Zorn.

A.2.4 Lemma. *Es sei (M, \leq) eine nichtleere halbgeordnete und strikt induktive Menge mit einem kleinsten Element o . Ist $F : M \rightarrow M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft*

$$m \leq F(m) \text{ für alle } m \in M,$$

dann gibt es ein $m \in M$ mit $F(m) = m$.

Beweis. Wir nennen eine Teilmenge S von M zulässig, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten: $o \in S$, $F(S) \subseteq S$, und für jede total geordnete Teilmenge $T \subseteq S$ liegt auch die kleinste obere Schranke $\sup T$ in S . Die ganze Menge M ist zulässig. Wir setzen

$$D := \bigcap_{S \subseteq M \text{ zulässig}} S,$$

und erkennen $o \in D$. Zudem erhalten wir

$$F(D) \subseteq \bigcap_{S \subseteq M \text{ zulässig}} F(S) \subseteq \bigcap_{S \subseteq M \text{ zulässig}} S = D.$$

Da für ein total geordnetes $T \subseteq D$ und ein zulässiges S immer $\sup T \in S$ gilt, folgt auch $\sup T \in D$, wodurch sich D als kleinste zulässige Teilmengen von M herausstellt.

Wenn wir zeigen können, dass D total geordnet ist, dann folgt daraus für die kleinste obere Schranke $\sup D$, dass $\sup D$ das größte Element von D ist. Wegen der Zulässigkeit gilt dann $F(\sup D) \in D$ und infolge $F(\sup D) \leq \sup D$. Zusammen mit der vorausgesetzten Eigenschaft von F erhalten wir $F(\sup D) = \sup D$. Noch zu zeigen ist also die Tatsache, dass D total geordnet ist.

Für den Beweis davon nennen wir $e \in D$ ein *extremales Element*, wenn $s \in D$ mit $s \leq e$ und $s \neq e$ die Ungleichung $F(s) \leq e$ nach sich zieht. Für ein *extremales* e setzen wir

$$S_e := \{s \in D : s \leq e \text{ oder } F(e) \leq s\},$$

und zeigen, dass S_e zulässig ist:

- ↪ Wegen $o \leq e$ liegt in S_e .
- ↪ Für jedes Element $s \in S_e$ folgt aus $s \leq e$, $s \neq e$ die Ungleichung $F(s) \leq e$, aus $s = e$ folgt $F(s) = F(e)$, und $s \not\leq e$ bedingt $F(e) \leq s \leq F(s)$, wodurch $F(S_e) \subseteq S_e$.
- ↪ Sei T eine total geordnete Teilmenge von S_e . Gilt für alle $t \in T$ die Ungleichung $t \leq e$, so auch $\sup T \leq e$. Wenn aber $t \not\leq e$ für mindestens ein $t \in T$, dann folgt $F(e) \leq t \leq \sup T$. In jedem Fall gilt $\sup T \in S_e$.

Da D die kleinste zulässige Teilmenge von M ist, erhalten wir $S_e = D$. Können wir zeigen, dass jedes $e \in D$ extremal ist, so folgt für $s \in D = S_e$ die Ungleichung $s \leq e$ oder die Ungleichung $e \leq F(e) \leq s$, womit sich D als total geordnet herausstellt. Um zu beweisen, dass jedes $e \in D$ extremal ist, betrachten wir

$$E := \{e \in D : e \text{ ist extremal}\},$$

und weisen nach, dass E zulässig ist und infolge D gleicht:

- ↪ Als kleinstes Element ist o extremal.
- ↪ Wir müssen zeigen, dass mit e auch $F(e)$ in E liegt. Also gilt es, aus $s \in D$ mit $s \leq F(e)$ und $s \neq F(e)$ die Ungleichung $F(s) \leq F(e)$ abzuleiten. Wegen $s \in D = S_e$ gilt $s \leq e$ oder $F(e) \leq s$, wobei wir letzteres wegen $s \leq F(e)$ und $s \neq F(e)$ ausschließen können. Aus $s = e$ folgt trivialerweise $F(s) \leq F(e)$ und aus $s \leq e$, $s \neq e$, wegen $e \in E$ die Ungleichung $F(s) \leq e \leq F(e)$.
- ↪ Schließlich sei $T \subseteq E$ total geordnet. Um $\sup T \in E$ zu zeigen, sei $s \in D$ mit $s \leq \sup T$ und $s \neq \sup T$. Wenn für jedes $t \in T$ die Ungleichung $F(t) \leq s$ gelten würde, so erhielten wir wegen $t \leq F(t)$ den Widerspruch $\sup T \leq s$. Also muss $F(e) \not\leq s$ für ein $e \in T$ ($\subseteq E$), womit wegen $D = S_e$ auch $s \leq e$. Aus $s \neq e$ folgt wegen $e \in E$ die Ungleichung $F(s) \leq e \leq \sup T$, und aus $s = e$ folgt wegen $\sup T \in D = S_e$ und $s \leq \sup T$, $s \neq \sup T$ die Ungleichung $F(s) = F(e) \leq \sup T$. In jedem Fall gilt $F(s) \leq \sup T$, womit $\sup T$ extremal ist.

□

Wir kommen zur Herleitung des Lemma von Zorn aus dem Auswahlaxiom.

A.2.5 Satz (Lemma von Zorn). *Eine nichtleere und induktiv geordnete Menge (M, \leq) besitzt ein maximales Element.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall einer strikt induktiv geordneten Menge.

Da für ein festes $x \in M$ jedes maximale Element von $\{y \in M : x \leq y\}$ auch maximales Element von M ist, dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass M ein kleinstes Element enthält. Hätte ein solches M kein maximales Element, so finden wir für jedes $m \in M$ ein größeres Element¹ $F(m)$ und definieren damit eine Funktion $F : M \rightarrow M$ derart, dass $m < F(m)$ für alle $m \in M$. Da M strikt induktiv geordnet ist, folgt aus Lemma A.2.4 der Widerspruch $F(m) = m$ für ein $m \in M$.

Für ein induktiv und nicht notwendigerweise strikt induktiv geordnetes M sei \mathcal{H} die Menge aller total geordneten Teilmengen von M . Bezüglich der Inklusion bildet \mathcal{H} eine Halbordnung. Da für ein bezüglich \subseteq total geordnetes $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ die Teilmenge $\bigcup_{N \in \mathcal{T}} N$ von M bezüglich \leq total geordnet und daher die kleinste obere Schranke von \mathcal{T} darstellt, ist \mathcal{H} sogar strikt induktiv geordnet.

Nach dem ersten Beweisteil besitzt \mathcal{H} somit ein maximales Element T . Jede obere Schranke n von T muss dann zu T gehören, da anderenfalls $T \cup \{n\}$ eine total geordnete Menge wäre, die T echt umfasste. Dieses Element n ist ein maximales Element von M , denn für jedes $m \in M$ folgt aus $n \leq m$, dass m eine obere Schranke von T ist und infolge ebenfalls zu T gehören muss. Also folgt $m \leq n$ und somit $m = n$. \square

A.3 Mehr über die Mächtigkeit von Mengen

A.3.1 Definition. Sind A und B zwei Mengen, so schreiben wir $|A| \leq |B|$, wenn $A = \emptyset$ oder wenn es eine injektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt.

A.3.2 Beispiel. Für Mengen A und B mit $A \subseteq B$ gilt offenbar $|A| \leq |B|$.

Wegen Satz A.1.11 ist $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ äquivalent dazu, dass A und B gleichmächtig sind. Wir schreiben für diesen Sachverhalt auch $|A| = |B|$.

Aus dem folgenden Resultat erkennen wir, dass für zwei Mengen A und B immer entweder $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$.

A.3.3 Satz. *Sind A und B nichtleere Mengen, so gibt eine injektive Funktion $f : A \rightarrow B$ oder eine injektive Funktion $g : B \rightarrow A$.*

Beweis. Wir betrachten alle möglichen Bijektionen $h : D_h \rightarrow R_h$ mit $D_h \subseteq A$ und $R_h \subseteq B$. Da solche Funktionen h Teilmengen von $D_h \times R_h \subseteq A \times B$ sind, bildet die Menge \mathcal{B} aller solchen Bijektionen eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(A \times B)$ von $A \times B$. Insbesondere ist \subseteq eine Halbordnung auf \mathcal{B} . Wir wollen zeigen, dass \mathcal{B} durch \subseteq induktiv geordnet ist. Dazu sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ totalgeordnet und

$$\phi := \bigcup_{h \in \mathcal{T}} h.$$

Für $(a, b_1), (a, b_2) \in \phi$ erhalten wir $(a, b_1) \in h_1$ und $(a, b_2) \in h_2$ für $h_1, h_2 \in \mathcal{T}$. Da \mathcal{T} totalgeordnet ist, gilt $h_1 \subseteq h_2$ oder $h_2 \subseteq h_1$. Im ersten Fall erhalten wir $(a, b_1), (a, b_2) \in h_2$, wobei $b_1 = b_2$, da h_2

¹Man beachte, dass man für die Existenz einer solchen Funktion F das Auswahlaxiom verwendet. In der Tat ist F eine Auswahlfunktion der Familie $(A_m)_{m \in M}$, wobei $A_m = \{x \in M : m \leq x, m \neq x\}$.

eine Funktion ist. Im zweiten Fall folgt analog $b_1 = b_2$. Damit bildet ϕ eine Funktion $\phi : D_\phi \rightarrow B$ mit $D_\phi \subseteq A$.

Die Abbildung ϕ ist auch injektiv. In der Tat folgt aus $(a_1, b), (a_2, b) \in \phi$ wie oben die Existenz eines $h \in \mathcal{T}$ mit $(a_1, b), (a_2, b) \in h$. Die Injektivität von h impliziert $a_1 = a_2$. Also gilt $\phi \in \mathcal{B}$.

Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales $f \in \mathcal{B}$. Bezeichnet D_f den Definitionsbereich und R_f die Bildmenge von f , so ist $f : D_f \rightarrow R_f$ bijektiv. Im Falle $D_f = A$ ist f , betrachtet als Funktion von A nach B , injektiv. Im Falle $R_f = B$ ist $g := f^{-1} : R_f \rightarrow D_f$, betrachtet als Funktion von B nach A , injektiv. Gilt schließlich $D_f \subsetneq A$ und $R_f \subsetneq B$, so können wir $a \in A \setminus D_f$ und $b \in B \setminus R_f$ wählen, und erhalten mit $\psi := f \cup \{(a, b)\}$ eine Bijektion $\psi : A \cup \{a\} \rightarrow B \cup \{b\}$, was aber der Maximalität von f widerspricht. \square

A.3.4 Korollar. Für nichtleere Mengen A und B gilt $|A| \leq |B|$ genau dann, wenn es eine surjektive Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt.

Beweis. $|A| \leq |B|$ bedingt definitionsgemäß die Existenz einer injektiven Abbildung $f : A \rightarrow B$. Setzen wir nun $g(b) := f^{-1}(b)$ für $b \in f(A)$ und $g(b) := a_0$ für $b \in B \setminus f(A)$ mit einem festen $a_0 \in A$, so ist $g : B \rightarrow A$ offenbar surjektiv.

Existiert ein surjektives $g : B \rightarrow A$ und würde $|A| \leq |B|$ nicht gelten, so folgt $|B| \leq |A|$ wegen Satz A.3.3 und daher die Existenz einer injektiven Abbildung $h : B \rightarrow A$. Nach Korollar A.1.13 erhielten wir $|A| = |B|$ und infolge den Widerspruch $|A| \leq |B|$. \square

Eine nichtleere Menge M ist endlich mit Mächtigkeit $k \in \mathbb{N}$, wenn es eine Bijektion von $\{n \in \mathbb{N} : n \leq k\}$ auf M gibt; siehe Definition 2.3.15. Nicht endliche Mengen nennen wir *unendliche Mengen*.

A.3.5 Lemma. Für jede unendliche Menge A gilt $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Beweis. Da A nichtleer ist, gibt es ein $a \in A$. Durch $f_1 : \{1\} \rightarrow A$ mit $f_1(1) = a$ ist eine injektive Funktion definiert. Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f_n : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ injektiv, so gilt $f_n(\{1, \dots, n\}) \subsetneq A$, da wir A als nicht endlich vorausgesetzt haben. Somit können wir f_n zu einer Funktion $f_{n+1} : \{1, \dots, n, n+1\} \rightarrow A$ mit $f_{n+1}(n+1) \notin f_n(\{1, \dots, n\})$ fortsetzen und erhalten wieder eine injektive Abbildung. Die nach Rekursionsatz, Satz 2.3.3, existierende Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ ist dann injektiv. \square

A.3.6 Lemma. Für jede unendliche Menge A gilt $|A| = |\mathbb{N} \times A|$.

Beweis. Wir nennen eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A)$ zulässig, wenn alle $f \in \mathcal{T}$ injektive Abbildungen $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ sind, und wenn $f(\mathbb{N}) \cap g(\mathbb{N}) = \emptyset$ für alle $f, g \in \mathcal{T}$ mit $f \neq g$. Die Menge \mathfrak{T} aller zulässigen \mathcal{T} ist durch \subseteq halbgeordnet. Man überprüft leicht, dass für ein totalgeordnetes $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T}$ die Vereinigung $\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$ wieder zulässig ist. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}$. Wäre

$$B := A \setminus \bigcup_{f \in \mathcal{T}} f(\mathbb{N})$$

unendlich, so gäbe es nach Lemma A.3.5 ein injektives $g : \mathbb{N} \rightarrow B$. Offenbar ist dann $\mathcal{T} \cup \{g\}$ auch zulässig, was der Maximalität widerspricht. Also ist B endlich und infolge \mathcal{T} nichtleer.

Wir greifen ein $\psi : \mathbb{N} \rightarrow A$ aus \mathcal{T} heraus. Im Falle $B = \emptyset$ setzen wir $h := \psi$. Anderenfalls gibt es ein $m \geq 0$ und ein bijektives $\phi : \{-m, \dots, 0\} \rightarrow B$; vgl. Definition 2.3.15. Wegen $B \cap \psi(\mathbb{N}) = \emptyset$ ist $\phi \cup \psi$ eine injektive Funktion von $\{-m, \dots, 0\} \cup \mathbb{N}$ nach A . Durch

$$h : \mathbb{N} \rightarrow A, \quad h(n) := (\phi \cup \psi)(n - 1 - m),$$

wird dann auch eine injektive Funktion definiert mit $h(\mathbb{N}) = B \cup \psi(\mathbb{N})$. Setzen wir $\mathcal{R} := (\mathcal{T} \setminus \{\psi\}) \cup \{h\}$, so ist auch \mathcal{R} zulässig, wobei

$$\bigcup_{f \in \mathcal{R}} f(\mathbb{N}) = A.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $\theta : \mathbb{N} \times \mathcal{R} \rightarrow A$ definiert durch $\theta(n, f) = f(n)$ bijektiv ist, womit $|A| = |\mathbb{N} \times \mathcal{R}|$. Die Aussage des Lemma folgt mit Beispiel A.1.4 und Fakta A.1.7 aus

$$|\mathbb{N} \times A| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathcal{R}| = |\mathbb{N} \times \mathcal{R}| = |A|. \quad \square$$

A.3.7 Korollar. Sind $B_i, i \in I$, Mengen mit abzählbarem $I \neq \emptyset$ derart, dass $|B_i| \leq |B_k|$ mit einem unendlichen B_k für ein festes $k \in I$, so gilt

$$\left| \bigcup_{i \in I} B_i \right| = |B_k|.$$

Beweis. Offenbar gilt $|B_k| \leq \left| \bigcup_{i \in I} B_i \right|$; siehe Beispiel A.3.2. Für die umgekehrte Ungleichung seien $g_i : B_k \rightarrow B_i, i \in I$, surjektive Abbildungen; siehe Korollar A.3.4. Infolge ist auch die durch $f(n, b) = g_{\phi(n)}(b)$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \times B_k \rightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$ surjektiv, wobei auch $\phi : \mathbb{N} \rightarrow I$ surjektiv ist. Aus Lemma A.3.6 folgt schließlich $\left| \bigcup_{i \in I} B_i \right| \leq |B_k|$. \square

A.3.8 Satz. Für jede unendliche Menge A und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $|A| = \underbrace{|A \times \cdots \times A|}_{n \text{ mal}}$.

Beweis. Es reicht offenbar, $|A| = |A \times A|$ zu zeigen. Dazu sei \mathcal{B} die Menge aller möglichen Bijektionen $f : B_f \times B_f \rightarrow B_f$, wobei $B_f \subseteq A$. Gemäß Beispiel A.1.4 und Lemma A.3.5 gilt $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ totalgeordnet, so prüft man elementar nach, dass

$$\bigcup_{f \in \mathcal{T}} f$$

eine Bijektion von $\bigcup_{f \in \mathcal{T}} (B_f \times B_f) = \left(\bigcup_{f \in \mathcal{T}} B_f \right) \times \left(\bigcup_{f \in \mathcal{T}} B_f \right)$ auf $\bigcup_{f \in \mathcal{T}} B_f$ abgibt. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales $h \in \mathcal{B}$. Konstruktionsbedingt gilt $|B_h| = |B_h \times B_h|$. Für $|B_h| = |A|$ folgt $|A| = |A \times A|$ aus Fakta A.1.7.

Wir bringen schließlich die Annahme, dass B_h und A nicht gleichmächtig sind, zu einem Widerspruch. Aus $|B_h| \leq |A|, |B_h| \neq |A|$ folgt zunächst aus Korollar A.3.7, dass $|A \setminus B_h| = |A|$. Wir erhalten $|B_h| \leq |A \setminus B_h|, |B_h| \neq |A \setminus B_h|$ und somit die Existenz einer injektiven Funktion $\phi : B_h \rightarrow A \setminus B_h$; siehe Satz A.3.3. Für $B := B_h \dot{\cup} \phi(B_h)$ gilt

$$B \times B = (B_h \times B_h) \dot{\cup} (\phi(B_h) \times B_h) \dot{\cup} (B_h \times \phi(B_h)) \dot{\cup} (\phi(B_h) \times \phi(B_h)),$$

wobei $\phi(B_h) \times B_h, B_h \times \phi(B_h)$ und $\phi(B_h) \times \phi(B_h)$ alle gleichmächtig wie $B_h \times B_h$ und somit gleichmächtig wie B_h sind. Mit Korollar A.3.7 folgt

$$|(\phi(B_h) \times B_h) \dot{\cup} (B_h \times \phi(B_h)) \dot{\cup} (\phi(B_h) \times \phi(B_h))| = |B_h \times B_h| = |B_h| = |\phi(B_h)|.$$

Also gibt es eine Bijektion $g : (\phi(B_h) \times B_h) \dot{\cup} (B_h \times \phi(B_h)) \dot{\cup} (\phi(B_h) \times \phi(B_h)) \rightarrow \phi(B_h)$, womit auch $h \cup g$ eine Bijektion von $B \times B$ nach B ist, was aber der Maximalität von h widerspricht. \square

A.3.9 Korollar. Für eine unendliche Menge A gilt $|\mathcal{E}(A)| = |A|$, wobei $\mathcal{E}(A)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von A bezeichnet.

Beweis. Bezeichne $\mathcal{E}_n(A)$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von A mit Mächtigkeit n . Da für $n \geq 2$ die Abbildung $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$ die Menge $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ mal}}$ surjektiv auf $\mathcal{E}_n(A)$ abbildet, folgt $|\mathcal{E}_n(A)| \leq |A|$; vgl. Satz A.3.8. Für $n = 1$ ist $a \mapsto \{a\}$ von A nach $\mathcal{E}_1(A)$ sogar bijektiv. Somit folgt aus Korollar A.3.7

$$|A| = |\mathcal{E}_1(A)| = |\underbrace{\mathcal{E}_0(A)}_{=\{\emptyset\}} \dot{\cup} \mathcal{E}_1(A) \dot{\cup} \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{E}_n(A)|. \quad \square$$

Literaturverzeichnis

- [B] V.I. BOGACHEV: *Measure Theory I*, Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [C] L. CONLON: *Differentiable manifolds*, Birkhäuser Boston, 2001.
- [DK1] J.J. DUISTERMAAT, J.A.C. KOLK: *Multidimensional Real Analysis I*, Cambridge University Press, 2004.
- [DK2] J.J. DUISTERMAAT, J.A.C. KOLK: *Multidimensional Real Analysis II*, Cambridge University Press, 2004.
- [E] J. ELSTRODT: *Maß und Integrationstheorie*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [Ha] P. HALMOS: *Measure Theory*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1974.
- [HR] E. HEWITT, K.A. ROSS: *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag New York, 1979.
- [H1] H. HEUSER: *Lehrbuch der Analysis I*, B.G. Teubner Stuttgart, 1990.
- [H2] H. HEUSER: *Lehrbuch der Analysis 2*, B.G. Teubner Stuttgart, 1990.
- [J] K. JÄNICH: *Vektor Analysis*, Springer Verlag 2001.
- [K] M. KALTENBÄCK: *Fundament Analysis*, Berliner Studienreihe Math., Heldermann, 2014.
- [K] D. KOFLER: *Die Invariansätze von Brouwer*, Seminararbeit, TU-Wien, 2014.
- [Ri] W. RINOW: *Lehrbuch der Topologie*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd.79, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975.
- [Ru] W. RUDIN: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill New York, 1987.
- [Z] L. ZAJÍČEK: *An elementary proof of the one-dimensional Rademacher theorem*, *Mathematica Bohemica*, Vol. 117 (1992), No. 2, 133–136.

Index

- $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu, \nu}$, 177
 $AC([c, d], \mathbb{C})$, 371
 $AC([c, d], \mathbb{R})$, 371
 $AC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 370
 $AC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 370
 $AC_{\mu}([c, d], \mathbb{C})$, 371
 $AC_{\mu}([c, d], \mathbb{R})$, 371
 $AC_{\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 370
 $AC_{\mu}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 370
 $A \dot{\cup} B$, 104
 B° , 10
 $C(X, \mathbb{R})$, 26
 C^1 -Diffeomorphismus, 83
 $C_{00}^{\infty}(D, \mathbb{R})$, 61
 C^k -Diffeomorphismus, 83
 $C^m(M, N)$, 112
 $C_0(X, \mathbb{C})$, 54
 $C_0(X, \mathbb{R})$, 54
 $C_0(\Omega, \mathbb{C})'$, 353
 $C_0(\Omega, \mathbb{R})'$, 353
 $C_b(X, \mathbb{C})$, 27
 $C_b(X, \mathbb{R})$, 27
 $C_b(X, \mathbb{R})$, 38
 $C_{00}(X, \mathbb{C})$, 54
 $C_{00}(X, \mathbb{R})$, 54
 $D^{\alpha} f$, 297
 $GL(d, \mathbb{C})$, 192
 $GL(d, \mathbb{R})$, 163
 $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, 285
 $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, 285
 $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, 282
 $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})'$, 339
 $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, 280
 $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})'$, 339
 $L_{loc}^1(G)$, 297
 $L_{loc}^1(G, \mathcal{A}(\mathcal{T}^d)_G, \lambda_d, \mathbb{C})$, 297
 $M(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$, 346
 $M(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$, 346
 $M_{reg}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{C})$, 351
 $M_{reg}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$, 351
 S^d , 229
 T_x , 97
 X' , 337
 $cl(B)$, 7
 $\Gamma(t)$, 167
 $\mathbb{T}(X)$, 16
 \mathbb{R}^X , 27
 $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$, 174
 δ_{ω} , 136
 $\dot{\cup}$, 104
 $\ell^p(\Omega, \mathbb{C})$, 283
 $\ell^p(\Omega, \mathbb{R})$, 283
 $\int f \, d\mu$, 134
 $\int_{\Gamma} f \, d\mu$, 142
 λ , 164
 λ_1 , 164
 λ_d , 159
 \mathbb{D} , 212
 \mathbb{T} , 102
 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, 175
 $\mathcal{A}(\mathcal{K})$, 131
 $\mathcal{A}(\mathcal{T}^1)$, 153
 $\mathcal{A}(\mathcal{T}^d)$, 159
 $\mathcal{A}(\phi_{\uparrow \downarrow}^M)$, 145
 $\mathcal{A}(\psi)$, 145
 $\mathcal{D}(\mathcal{K})$, 151
 \mathcal{D}_d , 161
 \mathcal{E} , 131
 $\mathcal{F}(\mathcal{A})_{\mathbb{C}}^1$, 289
 $\mathcal{F}(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^1$, 289
 $\mathcal{F}((\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mu, \nu})$, 177
 \mathcal{F}_+ , 122
 $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, 285
 $\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, 285
 $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty])$, 137
 $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, 185

- $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, 137
 $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^d)$, 184
 \mathcal{L}^d , 162
 $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, [-\infty, +\infty])$, 280
 $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, 282
 $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, 280
 \mathcal{R}_ω , 168
 \mathcal{T}^p , 2
 $\mathcal{T}^<$, 2
 $\mathcal{T}^>$, 13
 \mathcal{T}_X , 23
 μ -Nullmenge, 134
 μ -fast überall, 138
 $\mu \perp \nu$, 333
 $\mu \circ T^{-1}$, 143
 $\mu \otimes \nu$, 178
 $\nu \ll \mu$, 333, 347
 ω_F , 159
 $\overline{\mathcal{B}}$, 149
 ∂G , 104
 $\partial^o G$, 106
 $\partial^s G$, 104
 $\phi_{\uparrow\downarrow}^M$, 144
 ϕ_{\uparrow}^M , 126
 $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$, 25
 σ -Algebra, 130
 finale, 208
 von Mengensystem erzeugte, 131
 σ -additiv, 128
 σ -kompakt, 241
 σ -Algebra
 initiale, 173
 Produkt-, 174
 Spur-, 142
 σ -endlich, 134
 \sim_μ , 138, 282
 $\text{supp } \mu$, 172
 $\text{supp}(f)$, 54
 $d(A)$, 45
 $d(A, B)$, 45
 $d(x, A)$, 45
 $f \sim_\mu g$, 138, 282
 f_t , 292
 $g \cdot \mu$, 140, 343
 k_δ , 249
 $x_i \xrightarrow{i \in I} x$, 4
 $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$, 27
 $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, 27
 \mathcal{F}_\uparrow^M , 122
(A1)-(A3), 7
(ABI), 3
(ABII), 16
(B1), (B2), 18
(F1)-(F3), 3
(O1)-(O3), 1
(T1), 31
(T2), 5
(T3), 33
(T4), 33
äquivalent, 109
äußeres Maß, 205
Abbildung
 offene, 83
 stetige, 11
Ableitung
 schwache, 297
Abschluss einer Menge, 7
absolut stetig, 333, 347
Abstand
 von Element und Teilmenge, 45
 von zwei Teilmengen, 45
abzählbare Menge, 375
Abzählbarkeitsaxiom
 erstes, 3
 zweites, 16
äquivalente Metriken, 2
Alexandroff-Kompaktifizierung, 53
Algebra
 nirgends verschwindend, 57
 punktetrennende, 57
Algebra von Funktionen, 56
Atlas, 109
Auswahlaxiom, 379
Auswahlfunktion, 379
Banachalgebra, 295
 kommutative, 295
Banachscher Fixpunktsatz, 73
Basis
 eines Filters, 3
Basis einer Topologie, 16
Betafunktion, 181

- Bild
 - wesentliches, 211
- Bildmaß, 143
- Borel-Teilmenge, 131, 153
- Borelmaß, 155, 167
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 316
- Darstellungssatz von Fischer-Riesz, 333
- Darstellungssatz von Riesz, 156
- dicht, 7
 - in einer Menge, 7
- Dichte, 335, 347
- Diffeomorphismus, 83, 112
 - C^1 -, 83
 - C^k -, 83
- Dirichlet-Kern, 323
- Divergenz, 259
- Dualraum
 - topologischer, 337
- Durchmesser einer Teilmenge, 45
- dyadische Rechtecke, 161
- Dynkin-System, 151
- Einbettung, 91
 - zu Karte gehörige, 91
- Einheit
 - approximative, 296
- Einheitssphäre, 229
- Einpunkt-Kompaktifizierung, 53
- endlich, 134
- endliche Durchschnittseigenschaft, 39
- Erste Greensche Identität, 260
- erstes Abzählbarkeitsaxiom, 3
- Euklidische Topologie, 2
- Faktorisierungsabbildung, 28
- Faltung
 - L^1 - L^1 , 294
 - L^1 - L^∞ , 247
 - L^p - L^q , 295
 - Träger, 248
 - von zwei Funktionen, 247
- Filter, 3
- Filterbasis, 3
- finale Topologie, 28
- Fixpunkt, 232
- Fixpunktsatz
 - Banachscher, 73
- Fläche, 87
- folgenkompakt, 52
- Fortsetzungssatz, 149
- Fortsetzungssatz von Tietze, 37
- Fourierkoeffizienten
 - einer $L^2[-\pi, \pi]$ -Funktion, 321
 - eines komplexen Maßes, 354
- Fourierreihe, 319, 321
- Fouriertransformation, 303
- Fouriertransformierte, 303
- Funktion
 - \mathbb{R}^d -wertige, integrierbar, 184
 - \mathbb{R}^d -wertige, messbare, 184
 - \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbare, 131
 - ganze, 305
 - gerade, 322
 - harmonische, 262
 - im Unendlichen verschwindende, 54
 - integrierbare, 136
 - komplexwertige, integrierbar, 184
 - komplexwertige, messbare, 184
 - lokal integrierbare, 297
 - messbare bezüglich \mathcal{A} , 131
 - mit kompaktem Träger, 54
 - stetige, 11
 - Träger einer, 54
 - ungerade, 322
 - von beschränkter Variation, 366
- Funktional
 - M -fortsetzbares, 126
 - positives, lineares, 153
- Funktionenmenge
 - gleichgradig stetige, 50
- Gammafunktion, 167
 - Grenzwertdarstellung, 190
- Gaußscher Integralsatz, 259
- gerade Funktionen, 322
- gesättigte Teilmenge, 29
- getrennte Mengen, 30
 - durch offene Mengen, 30
 - durch stetige Funktion, 36
- gleichgradig stetige Funktionenmenge, 50
- gleichmächtige Mengen, 375

- Gradient, 259
Greenscher Integralsatz, 260
Gruppe
 affine, 226, 271
 lokalkompakte, 191
 topologisch, 191
 unimodulare, 201
Häufungspunkt einer Menge, 9
Häufungspunkt eines Netzes, 10
Höldersche Ungleichung, 277
Haarsches Maß
 Linkes, 201
 Rechtes, 201
Hahnsche Zerlegung, 344
Hahnscher Zerlegungssatz, 343
halbstetig
 von oben, 13
 von unten, 13, 154
harmonisch, 262
Hausdorff, 5
Hausdorffsch, 5
Hilbertraum, 316
homöomorphe topologische Räume, 15
Homöomorphismus, 15
im Unendlichen verschwindende Funktion, 54
implizites Differenzieren, 75
induktiv geordnet, 379
initiale σ -Algebra, 173
initiale Topologie, 21
Innere einer Menge, 10
Integral
 Lebesguesches, 134, 136
 nach komplexem Maß, 348
 Riemannsches, 164
integrierbare Treppenfunktionen, 289
isolierter Punkt, 9
Jensensche Ungleichung, 279
Karte, 109
 mit Atlas verträgliche, 109
Karte einer Teilmenge von \mathbb{R}^p , 87
kompakt, 39
 abzählbar, 52
 folgen-, 52
Komplement
 orthogonales, 317
komplexe Maße
 absolute Stetigkeit, 347
komplexes Maß, 342
konvergentes Netz bezüglich Topologie, 4
Konvergenz
 fast gleichmäßige, 286
 im Maß, 283
Kreuzprodukt, 246
Kugelkoordinaten, 89, 221
Kurve, 87
Lagrangesche Multiplikatorenregel, 101
Lagrangeschen Multiplikator, 102
Laplace, 259
Laplacetransformierte, 314
Lebesgue-Integral, 134, 136
Lebesgue-Teilmenge, 162
Lebesgues-Maß, 159
Lemma
 von Fatou, 135
 von Urysohn, 36
 von Zorn, 381
Lie Gruppe, 90
linkes Haarsches Maß, 201
Lipschitz stetig, 227
Lokalisationsprinzip, 327
lokalkompakte Gruppe, 191
lokalkompakter topologischer Raum, 53
Möbiusband, 99, 119
Maß, 128
 σ -endliches, 134
 äußeres, 205
 absolut stetiges, 333
 Bild-, 143
 Borel-, 155, 167
 endliches, 134
 komplexes, 342
 linksinvariantes, 193
 lokal endliches, 167, 170
 metrisches äußeres, 205
 rechtsinvariantes, 198
 reelles, 342
 reguläres, 167
 reguläres, komplexes, 351

- reguläres, reelles, 351
- Riesz-reguläres, 155
- signiertes, 342
- vollständiges, 145
- von innen reguläres, 167
- Wahrscheinlichkeits-, 279
- Maße
 - zueinander singuläre, 333
- Maßraum, 134, 183
 - Vervollständigung von, 149
- Majorante
 - integrierbare, 186, 187
- Mannigfaltigkeit, 109
 - implizit definierte, 87
 - Produkt-, 111
- Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^p , 87
- Menge
 - σ -endliche bezüglich Maß, 134
 - abgeschlossene, 6
 - Abschluss einer, 7
 - abzählbare, 375
 - dichte, 7
 - endliche bezüglich Maß, 134
 - gesättigte, 29
 - induktiv geordnete, 379
 - Inneres einer, 10
 - kompakte, 39
 - kritischen Punkte, 228
 - offene, 1
 - reguläre, 167
 - relativ kompakte, 39
 - strikt induktiv geordnete, 379
 - total beschränkte, 47
 - unendliche, 382
 - von außen reguläre, 167
 - von innen reguläre, 167
 - zusammenhängende, 31
- Mengen
 - durch offene Mengen getrennte, 30
 - getrennte, 30
 - gleichmächtige, 375
- Mengendifferenz
 - symmetrische, 288, 290
- Mengenfunktion
 - σ -additive, 128
- Messraum, 130
- Metriken
 - äquivalente, 2
- metrisches äußeres Maß, 205
- metrisierbar, 49
- metrisierbarer topologischer Raum, 49
- Minkowskische Ungleichung, 278
- Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen, 268
- Modularfunktion, 201
- Mollifier, 249
- Multiindex, 297
- Nabla, 259
- Netz
 - konvergentes bezüglich Topologie, 4
- Neumannsche Reihe, 230
- nirgends verschwindende Algebra, 57
- Normale
 - äußere, 106
- normaler topologischer Raum, 33
- Normalvektor, 99
- Nullmenge, 134
- Oberflächenmaß, 236, 238
- oberhalbstetig, 13
- offene Abbildung, 25
- orthogonale Komplement, 317
- orthogonale Projektion, 318
- Orthogonalsystem, 317
- Orthonormalbasis, 319
- Orthonormalsystem, 317
- Parameterintegral
 - Differenzierbarkeit von, 187
 - Holomorphie von, 188
 - Stetigkeit von, 186
- Poisson-Darstellung, 267
- Poissonkern, 265
- Polarkoordinaten, 219
- Polnischer Raum, 170
- Polynom
 - trigonometrisches, 60
- positives, lineares Funktional, 153
- Produkt von Funktion und Maß, 140
- Produkt- σ -Algebra, 174
- Produktmaß, 180
- Produkttopologie, 25

- Projektion
 orthogonale, 318
- Punkt
 isolierter, 9
 punktetrennende Funktionenmenge, 50, 57
 Punktmaß bei einem Punkt, 136
- Quotiententopologie, 28
- Rand, 63
 durch Mannigfaltigkeit darstellbar, 104
 glatter, 104
 orientierbarer, 106
 topologischer, 104
- Raum
 (T₂)-, 5
 Hausdorff, 5
 topologischer, 1
- Rechenregeln
 für $[-\infty, +\infty]$, 121
 für $[0, +\infty]$, 121
- Rechtecke
 dyadische, 161
- rechtes Haarsches Maß, 201
- reelle Maße
 absolute Stetigkeit, 347
- reelles Maß, 342
- regulär
 von außen, 167
 von innen, 167
- regulärer topologischer Raum, 33
- Riemann-Integral, 164
- Riemann-Stieltjes-Integral, 158
- Ring
 von Teilmengen, 124
- Satz
 über die Inverse Funktion, 86
 über implizite Funktionen, 77
 von Lindelöf, 237
 Darstellungssatz von Fischer-Riesz, 333
 Darstellungssatz von Riesz, 156
 Fixpunktsatz von Banach, 73
 Fixpunktsatz von Brouwer, 232
 Fortsetzungssatz, 149
 Fortsetzungssatz von Tietze, 37
 Gaußscher Integralsatz, 259
 Greenscher Integralsatz, 260
 Hahnscher Zerlegungssatz, 343
 Rangsatz, 100
 Satz über implizite Funktionen, 86
 Umkehrsatz, 82
 Vergleichssatz, 151
 von Ascoli, 50
 von Carathéodory, 146
 von der beschränkten Konvergenz, 139
 von der Invarianz der Dimension, 235
 von der Invarianz offener Mengen, 235
 von der monotonen Konvergenz, 135
 von Fubini, 178
 von Jegorow, 289
 von Peano, 52, 69
 von Picrad-Lindelöf, 74
 von Radon-Nikodym, 335
 von Riesz-Markov, 353
 von Sard, 228
 von Schröder-Bernstein, 377
 von Stone-Weierstraß, 58
 von Tychonoff, 44
 Zerlegungssatz von Lebesgue, 336
- schwache Ableitung, 297
- Schwartz Klasse, 310
- Seminorm, 280, 337
- separabel, 7
- separable Menge, 7
- signiertes Maß, 342
- singuläre Maß, 333
- Skalarprodukt, 316
- Skalarproduktraum, 316
- Spur- σ -Algebra, 142
- Spurtopologie, 23
- stetig, 11
 gleichgradig, 50
 in einem Punkt, 11
- stetig differenzierbare Abbildung, 112
- stetige
 Abbildung, 11
 Funktion, 11
- Stieltjessche Umkehrformel, 210
- strikt induktiv geordnet, 379
- Subbasis einer Topologie, 16
- Supremum
 wesentliches, 278

- symmetrische Mengendifferenz, 288, 290
- Tangentialraum, 97
- Teilmannigfaltigkeit, 110
- Teilmenge
 - Borel-Teilmenge, 131, 153
 - Lebesgue-Teilmenge, 162
- Teilraum
 - topologischer, 23
- Testfunktion, 297
- Topologie, 1
 - Basis von, 16
 - cofinite, 66
 - diskrete, 2
 - Euklidische, 2
 - feinere, 16
 - finale, 28
 - gröbere, 16
 - initiale, 21
 - Klumpentopologie, 2
 - normale, 33
 - Produkt-, 25
 - Quotienten-, 28
 - reguläre, 33
 - Spur-, 23
 - Subbasis von, 16
 - von einer Metrik induzierte, 2
- topologische Gruppe, 191
- topologische Räume
 - homöomorphe, 15
- topologischer Raum
 - lokalkompakter, 53
 - metrisierbarer, 49
- topologischer Teilraum, 23
- Torus, 94
- total beschränkte Menge, 47
- totale Variation, 346
- Träger, 296
 - eines Maßes, 172
- Träger einer Funktion, 54
- Transformationsformel, 216
- Trennungssaxiom
 - (T1), 31
 - (T2), 5
 - (T3), 33
 - (T4), 33
- Treppenfunktion, 124
 - \mathbb{R}^d -wertige, 185
 - integrierbare, 289
- trigonometrisches Polynom, 60
- Umgebung, 3
- Umgebungsbasis, 3
- Umgebungsfilter, 3
- Umkehrformel
 - Stieltjessche, 210
- unendlich, 382
- ungerade Funktionen, 322
- Ungleichung
 - Cauchy-Schwarz, 316
 - Höldersche, 277
 - Jensensche, 279
 - Minkowski, 278
- unimodular, 201
- unterhalbstetig, 13
- Untermannigfaltigkeit, 87, 110
- Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^p , 87
- Variation
 - einer Funktion, 366
 - eines Maßes, 344, 345
 - totale, 346
- Vektor
 - ins Äußere zeigend, 106
 - ins Innere zeigend, 106
- Vergleichssatz, 151
- Verteilungsfunktion
 - eines Borelmaßes, 357
 - eines komplexen Maßes, 366
- Vervollständigung, 149
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 279
- Wahrscheinlichkeitsraum, 279
- wesentliche Supremum, 278
- Zählmaß, 136
- Zerlegung der Eins
 - glatte, 252
- Zerlegungssatz von Lebesgue, 336
- zusammenhängend, 31
- Zusammenhangskomponente, 32
- Zweite Greensche Identität, 260
- zweites Abzählbarkeitsaxiom, 16