Kapitel 8

Das Riemannsche Integral

8.1 Ober- und Untersummen

Schon die Mathematik der Antike beschäftigte man sich mit der Problemstellung, die Fläche gewisser Figuren zu berechnen. Bei Polygonen ist dies durch Zerlegung in Dreiecke unmittelbar möglich, bei krummlinigen Figuren ist dagegen nicht einmal so klar, wie Fläche überhaupt zu definieren ist.

8.1.1 Beispiel. Betrachte die Parabel gegeben durch $f(x) = x^2$.

Wir sind an der Fläche, die von der x-Achse, der Parabel und der Geraden $x = 1$ begrenzt wird, interessiert. Dazu könnte man, unserer intuitiven Vorstellung von Fläche folgend, so vorgehen, dass man die Fläche in Streifen der Breite $\triangle x$ zerlegt, z.B. $\triangle x = \frac{1}{n}$, und die Fläche eines Streifens durch das Rechteck mit der Breite $\triangle x$ und der Höhe min $f(x)$ approximiert, wobei das Minimum über die im betrachteten Streifen liegenden x-Koordinaten genommen wird. Ist $\triangle x$ sehr klein, so wird man hoffen, dass die Summe der Flächen aller dieser Rechtecke fast gleich der zu bestimmenden Fläche ist.

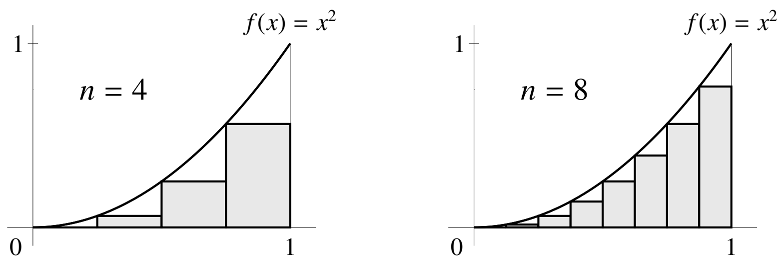

Abbildung 8.1: Approximation der Fläche von unten

Wir erhalten folgende Näherung für die Gesamtfläche A:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^{n} \min\{f(x) : (k-1)\frac{1}{n} \le x \le k\frac{1}{n}\} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\,. \end{aligned}$$

Für immer größer werdendes n bekommen wir $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{3}$ als Fläche A.
Genauso könnte man die Fläche des Streifens durch das Rechteck mit der Breite $\triangle x$ und der Höhe $\max f(x)$ approximieren. Unserer Vorstellung von Fläche folgend, sollte bei dieser zweiten Methode zur Flächenbestimmung dasselbe herauskommen.

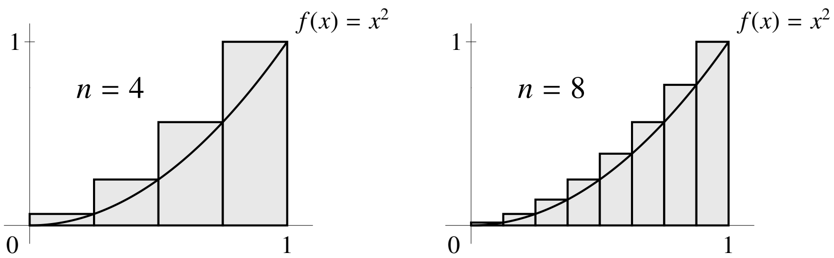

Abbildung 8.2: Approximation der Fläche von oben

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} O_n &= \sum_{k=1}^{n} \max\{f(x) : (k-1)\frac{1}{n} \le x \le k\frac{1}{n}\} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \end{aligned}$$

und für $n \to \infty$ erhalten wir denselben Wert $\lim_{n\to\infty} O_n = \frac{1}{3}$ für unsere Fläche A.

Wir wollen den Zugang aus dem letzten Beispiel formalisieren.

8.1.2 Definition. Sei $[a, b]$ ein endliches Intervall in $\mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir nennen eine endliche Teilmenge $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, falls $a, b \in \mathcal{Z}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}$ die Menge aller solcher Zerlegungen, versehen diese Menge mit der Relation $\subseteq$, und erhalten damit eine gerichtete Menge; vgl. Definition 5.3.1.
Wollen wir die Elemente einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ aufzählen, so werden wir das immer so tun, dass $n(\mathcal{Z}) + 1$ die Mächtigkeit von $\mathcal{Z}$ bezeichnet, und dass $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$, wobei

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{Z})} = b\,.$$

Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zu einer gegebenen Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\} \in \mathfrak{Z}$ bezeichnen wir mit $U(\mathcal{Z})$ die zu $\mathcal{Z}$ gehörige *Untersumme* von

f, also die Summe der Flächen der Rechtecke unter der Funktion f, die zur gegebenen Zerlegung gehört:

$$U(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} (\xi_j - \xi_{j-1}) \inf_{t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]} f(t) \,. \tag{8.1}$$

Entsprechend definieren wir die *Obersumme*

$$O(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} (\xi_j - \xi_{j-1}) \sup_{t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]} f(t) \,. \tag{8.2}$$

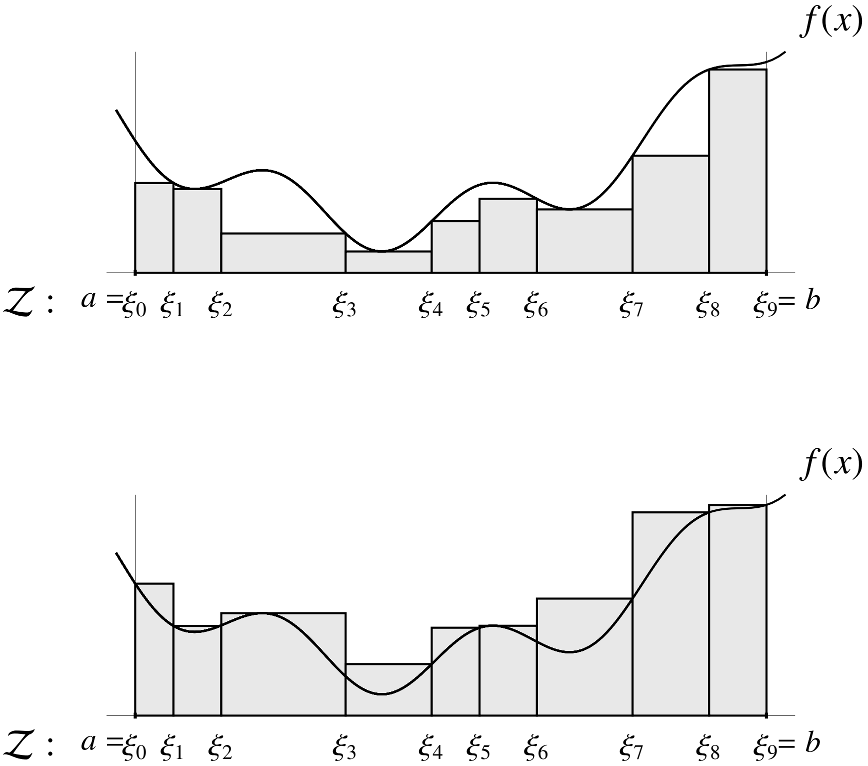

Abbildung 8.3: Veranschaulichung einer Unter- bzw. Obersumme

Da wir f als beschränkt voraussetzen, existieren diese Ober- und Untersummen. Wegen $b - a = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} (\xi_j - \xi_{j-1})$ gilt dabei

$$(b - a) \inf_{t \in [a,b]} f(t) \leq U(\mathcal{Z}) \leq O(\mathcal{Z}) \leq (b - a) \sup_{t \in [a,b]} f(t) \,.$$

Wir sehen also, dass alle Ober- und Untersummen gleichmäßig nach oben und nach unten beschränkt sind. Somit macht folgende Definition Sinn.

8.1.3 Definition. Wir setzen

$$\overline{\int_a^b} f\,dx := \inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}), \quad \underline{\int_a^b} f\,dx := \sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}),$$

und bezeichnen die erste Zahl als das *obere*- und die zweite als das *untere Integral* von f über $[a, b]$.
Die Funktion f heißt *integrierbar* auf $[a, b]$, falls das obere mit dem unteren Integral übereinstimmt. In diesem Fall bezeichnen wir ihren gemeinsamen Wert als das *Integral*[1] von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f\,dx := \overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx .$$

8.1.4 Bemerkung. Da die Menge $\mathfrak{Z}$ aller Zerlegungen von $[a, b]$ bezüglich $\subseteq$ eine gerichtete Menge ist, können wir von den Netzen $(U(\mathcal{Z}))_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}$ und $(O(\mathcal{Z}))_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}$ sprechen.
Wir schreiben zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2 \in \mathfrak{Z}$ gemäß Definition 8.1.2 als

$$\mathcal{Z}_1 = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z}_1)\} \quad \text{und} \quad \mathcal{Z}_2 = \{\eta_k : k = 0, \dots, n(\mathcal{Z}_2)\}$$

an. Falls $\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2$, so gibt es zu jedem $j \in \{1, \dots, n(\mathcal{Z}_1)\}$ Indizes $k(j-1) < k(j)$ mit

$$\xi_{j-1} = \eta_{k(j-1)} \underbrace{< \eta_{k(j-1)+1} < \cdots < \eta_{k(j)-1} <}_{k(j)-k(j-1)-1 \text{ viele}} \eta_{k(j)} = \xi_j .$$

Wegen $(\xi_j - \xi_{j-1}) = \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} (\eta_k - \eta_{k-1})$ folgt

$$\begin{aligned}(\xi_j - \xi_{j-1}) \inf_{t\in[\xi_{j-1},\xi_j]} f(t) &= \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} (\eta_k - \eta_{k-1}) \inf_{t\in \underbrace{[\xi_{j-1},\xi_j]}_{\supseteq[\eta_{k-1},\eta_k]}} f(t) \\ &\leq \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} (\eta_k - \eta_{k-1}) \inf_{t\in[\eta_{k-1},\eta_k]} f(t) .\end{aligned}$$

Summiert man über alle $j \in \{1, \dots, n(\mathcal{Z}_1)\}$ auf, so erhält man $U(\mathcal{Z}_1) \leq U(\mathcal{Z}_2)$. Wir sehen also, dass $(U(\mathcal{Z}))_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}$ ein monoton wachsendes Netz ist. Nach (5.10) gilt daher

$$\lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}) = \sup_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}) = \underline{\int_a^b} f\,dx .$$

[1] Man spricht auch vom *Darbouxschen Integral*.

Entsprechend ist das Netz $(O(\mathcal{Z}))_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}$ der Obersummen monoton fallend, und

$$\lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}) = \inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}) = \overline{\int_a^b} f\,dx\,.$$

Klarerweise ist damit auch das Netz $(O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}))_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}$ monoton fallend, und besteht aus nicht negativen reellen Zahlen. Also gilt auch

$$\inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}(O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z})) = \lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}(O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z}))\,, \tag{8.3}$$

und wegen der Rechenregeln für $\mathbb{R}$-wertige Netze (siehe Abschnitt 5.3) gleicht dieser Ausdruck

$$\lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} O(\mathcal{Z}) - \lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}} U(\mathcal{Z}) = \overline{\int_a^b} f\,dx - \underline{\int_a^b} f\,dx\,. \tag{8.4}$$

Also ist die Integrierbarkeit einer Funktion f äquivalent dazu, dass der Ausdruck in (8.3) verschwindet.

8.2 Das Riemann-Integral

Der oben vorgestellte Zugang ist zwar befriedigend, um dem Begriff Fläche unter einer Kurve einen Sinn zu geben, um aber etwa komplex- oder vektorwertige Funktionen integrieren zu können, benötigen wir einen alternativen Ansatz.

8.2.1 Definition. Wir nennen das Paar $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine *Riemann-Zerlegung* eines reellen Intervalls $[a,b]$ mit $a < b$, falls $n(\mathcal{R}) \in \mathbb{N}$ und $(\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})} \in \mathbb{R}^{n(\mathcal{R})+1}, (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \in \mathbb{R}^{n(\mathcal{R})}$, wobei

$$a = \xi_0 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{R})} = b \quad \text{und} \quad \alpha_j \in [\xi_{j-1}, \xi_j] \;\text{ für alle }\; j = 1, \dots, n(\mathcal{R})\,.$$

Weiters heißt

$$|\mathcal{R}| := \max\{(\xi_j - \xi_{j-1}) : j = 1, \dots, n(\mathcal{R})\}$$

die *Feinheit der Riemann-Zerlegung*. Die Punkte ξ_j heißen *Stützstellen* und die Punkte α_j *Zwischenstellen*. Wir versehen die Menge $\mathfrak{R}$ aller solcher Riemann-Zerlegungen mit der Relation

$$\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 :\Leftrightarrow |\mathcal{R}_2| \leq |\mathcal{R}_1|\,,$$

und erhalten mit $(\mathfrak{R}, \preceq)$ eine gerichtete Menge[2].

[2] $\preceq$ ist sicher nicht antisymmetrisch und unterscheidet sich wesentlich von der Halbordnung $\subseteq$ auf $\mathfrak{Z}$ aus Definition 8.1.2.

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ eine beschränkte Funktion, so betrachtet man das Netz $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$, wobei die *Riemann-Summe* zur Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}$ durch

$$S(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j)\,.$$

definiert ist. Konvergiert dieses Netz, so nennen wir die Funktion f *Riemann-integrierbar* und bezeichnen

$$\int_a^b f\,dx := \lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} S(\mathcal{R})$$

als das *Riemann Integral* von f über $[a,b]$.

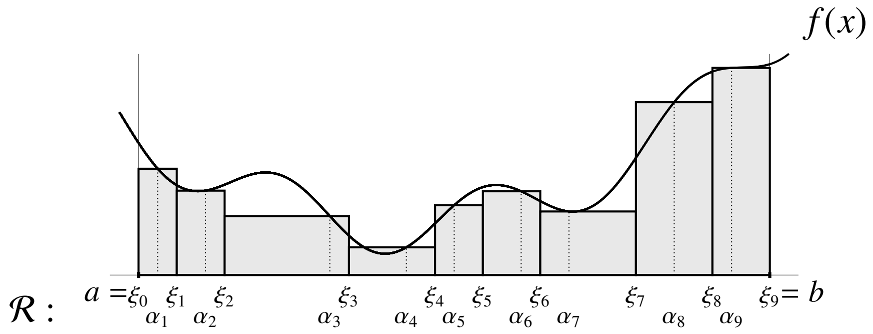

Abbildung 8.4: Veranschaulichung einer Riemann-Summe

Für $\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} S(\mathcal{R})$ schreibt man auch $\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(\mathcal{R})$, um deutlich zu machen, dass $\mathfrak{R}$ durch die Feinheit der Riemann-Zerlegung gerichtet wird. Da es zu jedem $\delta > 0$, $\delta \le b - a$ eine Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}$ gibt mit $|\mathcal{R}| = \delta$, ist die Existenz von $I = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(\mathcal{R})$ äquivalent zu

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \mathcal{R} \in \mathfrak{R},\ |\mathcal{R}| \le \delta \Rightarrow |S(\mathcal{R}) - I| < \epsilon\,.$$

8.2.2 Bemerkung. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, so folgt aus $\operatorname{Re} S(f,\mathcal{R}) = S(\operatorname{Re} f,\mathcal{R})$, $\operatorname{Im} S(f,\mathcal{R}) = S(\operatorname{Im} f,\mathcal{R})$ und der Tatsache, dass ein komplexwertiges Netz genau dann konvergiert, wenn Real- und Imaginärteil es tun, dass die Riemann-Integrierbarkeit von f zu der von $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ äquivalent ist.

8.2.3 Bemerkung. Für ein beschränktes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ sei M eine feste, endliche Teilmenge von $[a,b]$ mit m Elementen. Setzt man für eine Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}$

$$S_M(\mathcal{R}) = \sum_{\substack{j=1 \\ M\cap[\xi_{j-1},\xi_j]=\emptyset}}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j)\,,$$

so hat diese Summe höchstens $2m$ Summanden weniger als $S(\mathcal{R})$, da jedes Element aus M in höchstens zwei verschiedenen Intervallen $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ liegen kann. Somit folgt

$$\left|S_M(\mathcal{R}) - S(\mathcal{R})\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ M\cap[\xi_{j-1},\xi_j]\neq\emptyset}}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1})|f(\alpha_j)| \leq |\mathcal{R}| \cdot 2m \cdot \|f\|_\infty\,, \tag{8.5}$$

wobei $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$. Infolge konvergiert $(S_M(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ genau dann, wenn $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ es tut. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(\mathcal{R}) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S_M(\mathcal{R})\,.$$

Als Anwendung dieser Bemerkung sieht man, dass, wenn sich zwei Funktionen f und g nur auf einer endlichen Menge M unterscheiden, aus der Riemann-Integrierbarkeit von f auch die von g folgt. In der Tat ist dann $S_M(f,\mathcal{R}) = S_M(g,\mathcal{R})$, wobei das Argument f bzw. g andeutet, von welcher Funktion die entsprechende Riemann-Summe gebildet wird.

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir auch einen ersten Zusammenhang zwischen Riemann-Summen und Ober- bzw. Untersummen herstellen.

8.2.4 Lemma. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte reellwertige Funktion, und sei $\mathcal{Z}_0 \in \mathfrak{Z}$, $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass*

$$\forall \mathcal{R} \in \mathfrak{R},\ |\mathcal{R}| \leq \delta \Rightarrow U(\mathcal{Z}_0) - \epsilon \leq S(\mathcal{R}) \leq O(\mathcal{Z}_0) + \epsilon\,.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst für ein beschränktes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dass es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\forall \mathcal{R} \in \mathfrak{R},\ |\mathcal{R}| \leq \delta \Rightarrow S(\mathcal{R}) \leq O(\mathcal{Z}_0) + \epsilon\,. \tag{8.6}$$

Wir schreiben $\mathcal{Z}_0 = \{\eta_k : k = 0, \dots, n(\mathcal{Z}_0)\}$, und setzen $M = \mathcal{Z}_0$. Mit (8.5) erhalten wir

$$\left|S_M(\mathcal{R}) - S(\mathcal{R})\right| \leq |\mathcal{R}| \cdot 2(n(\mathcal{Z}_0) + 1) \cdot \|f\|_\infty\,.$$

Für $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}) \in \mathfrak{R}$ bedeutet $M \cap [\xi_{j-1}, \xi_j] = \emptyset$, dass $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ sicher ganz in einem gewissen Intervall $[\eta_{k(j)-1}, \eta_{k(j)}]$ enthalten ist. Mit $J := \{j \in \{1, \dots, n(\mathcal{R})\} : M \cap [\xi_{j-1}, \xi_j] = \emptyset\}$ folgt[3]

$$\begin{aligned}
S_M(\mathcal{R}) &= \sum_{j\in J} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j) = \sum_{k=1}^{n(\mathcal{Z}_0)} \sum_{j\in J, k(j)=k} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n(\mathcal{Z}_0)} \underbrace{\sum_{j\in J, k(j)=k} (\xi_j - \xi_{j-1})}_{\leq \eta_k - \eta_{k-1}} \sup_{t\in[\eta_{k-1},\eta_k]} f(t) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n(\mathcal{Z}_0)} (\eta_k - \eta_{k-1}) \sup_{t\in[\eta_{k-1},\eta_k]} f(t) = O(\mathcal{Z}_0)\,,
\end{aligned}$$

[3] Die Voraussetzung $f \geq 0$ geht in der letzten Ungleichung ein.

und daher

$$S(\mathcal{R}) \leq \left|S_M(\mathcal{R}) - S(\mathcal{R})\right| + O(\mathcal{Z}_0) \leq O(\mathcal{Z}_0) + |\mathcal{R}| \cdot 2(n(\mathcal{Z}_0) + 1) \cdot \|f\|_\infty .$$

Die zu beweisende Ungleichung (8.6) gilt nun für $|\mathcal{R}| \leq \delta := \frac{\epsilon}{2(n(\mathcal{Z}_0)+1)\cdot\|f\|_\infty}$.

Erfüllt ein beschränktes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nicht notwendigerweise $f(x) \geq 0$, so betrachte $f+c$ für ein hinreichend großes $c \in \mathbb{R}$, wie etwa $c = \|f\|_\infty$. Da $f(x) + c \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, erhalten wir (8.6) für $f + c$. Wegen

$$O(f + c, \mathcal{Z}_0) = O(f, \mathcal{Z}_0) + c(b-a) \quad \text{und} \quad S(f + c, \mathcal{R}) = S(f, \mathcal{R}) + c(b-a)$$

gilt (8.6) auch für f für ein bestimmtes $\delta > 0$. Indem wir das Gezeigte auf $-f$ anwenden und beachten, dass

$$O(-f, \mathcal{Z}_0) = -U(f, \mathcal{Z}_0) \quad \text{sowie} \quad S(-f, \mathcal{R}) = -S(f, \mathcal{R}),$$

erhalten wir $U(f, \mathcal{Z}_0) - \epsilon \leq S(f, \mathcal{R}) \leq O(f, \mathcal{Z}_0) + \epsilon$ für $|\mathcal{R}| \leq \delta$ mit einem hinreichend kleinen $\delta > 0$. ❑

Wir werden nun zeigen, dass die beiden vorgestellten Zugänge zur Integration für reellwertige Funktionen äquivalent sind.

8.2.5 Satz. *Für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(*i*) *Das obere und das untere Integral von f stimmen überein.*

(*ii*) $\inf_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z}}(O(\mathcal{Z}) - U(\mathcal{Z})) = 0$.

(*iii*) *f ist Riemann-integrierbar: Der Grenzwert $\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(\mathcal{R})$ existiert.*

(*iv*) *Setzt man für eine beliebige Riemann-Zerlegung $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}) \in \mathfrak{R}$*[4]

$$O(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) \sup_{t\in[\xi_{j-1},\xi_j]} f(t), \quad U(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) \inf_{t\in[\xi_{j-1},\xi_j]} f(t),$$

so gilt $\lim_{|\mathcal{R}|\to 0}(O(\mathcal{R}) - U(\mathcal{R})) = 0$.

(*v*) *Es gilt $\lim_{n\to\infty}(O(\mathcal{R}_n) - U(\mathcal{R}_n)) = 0$ für zumindest eine Folge $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Riemann-Zerlegungen.*

Treffen diese äquivalente Aussagen zu, so erhalten wir

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \int_a^b f\,dx = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} O(\mathcal{R}) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} U(\mathcal{R})$$

$$= \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{R}_n) = \lim_{n\to\infty} O(\mathcal{R}_n) = \lim_{n\to\infty} U(\mathcal{R}_n)$$

für jede beliebige Folge $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Riemann-Zerlegungen mit $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0$.

[4] Klarerweise gilt $O(\mathcal{R}) = O(\mathcal{Z})$ und $U(\mathcal{R}) = U(\mathcal{Z})$, wobei $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{R})\} \in \mathfrak{Z}$.

Beweis.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Wir wollen zeigen, dass mit $R := \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(\mathcal{R})$ auch $R = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} O(\mathcal{R})$.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es wegen der vorausgesetzten Konvergenz ein $\mathcal{R}_0$, sodass $|R - S(\mathcal{R})| < \epsilon$ für alle $\mathcal{R} \succeq \mathcal{R}_0$.

Sei $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}) \succeq \mathcal{R}_0$ eine feste Riemann-Zerlegung. Wir wählen für $j = 1, \ldots, n(\mathcal{R})$ und $k \in \mathbb{N}$ ein $\alpha_j^k \in [\xi_{j-1}, \xi_j]$, sodass

$$\sup_{t\in[\xi_{j-1},\xi_j]} f(t) - \frac{1}{k} < f(\alpha_j^k) \leq \sup_{t\in[\xi_{j-1},\xi_j]} f(t) .$$

Setzt man $\mathcal{R}^k = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j^k)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$, so folgt

$$\left|O(\mathcal{R}) - S(\mathcal{R}^k)\right| \leq \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \frac{1}{k} |\xi_j - \xi_{j-1}| = (b-a)\frac{1}{k} .$$

Wegen $|\mathcal{R}^k| = |\mathcal{R}| \leq |\mathcal{R}_0|$ gilt $\mathcal{R}^k \succeq \mathcal{R}_0$, und somit

$$|R - O(\mathcal{R})| \leq |R - S(\mathcal{R}^k)| + |S(\mathcal{R}^k) - O(\mathcal{R})| < \epsilon + \frac{b-a}{k} .$$

Für $k \to \infty$ folgt $|R - O(\mathcal{R})| \leq \epsilon$ und zwar für alle $\mathcal{R} \succeq \mathcal{R}_0$. Also gilt $\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} O(\mathcal{R}) = R$. Genauso verifiziert man $\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} U(\mathcal{R}) = R$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt damit

$$0 = R - R = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} (O(\mathcal{R}) - U(\mathcal{R})) .$$

$(iv) \Rightarrow (v)$: Ist $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Riemann-Zerlegungen mit $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0$, so besagt dieses Grenzverhalten für die Feinheit gerade, dass $\big(O(\mathcal{R}_n) - U(\mathcal{R}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge des Netzes $\big(O(\mathcal{R}) - U(\mathcal{R})\big)_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ im Sinne von Definition 5.3.6 ist. Gemäß Lemma 5.3.7 folgt

$$\lim_{n\to\infty} (O(\mathcal{R}_n) - U(\mathcal{R}_n)) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} (O(\mathcal{R}) - U(\mathcal{R})) = 0 .$$

Schließlich sei noch bemerkt, dass es offensichtlich eine Folge von Riemann-Zerlegungen mit $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0$ gibt. Man nehme etwa die Folge $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wo $\mathcal{R}_n$ genau $n+1$ viele äquidistante Stützstellen hat, und wobei die Zwischenstellen genau in der Mitte zwischen den angrenzenden Stützstellen liegt.

$(v) \Rightarrow (ii)$: Das ist klar, wenn man beachtet, dass $O(\mathcal{R}) = O(\mathcal{Z})$, $U(\mathcal{R}) = U(\mathcal{Z})$, wobei $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \ldots, n(\mathcal{R})\} \in \mathfrak{Z}$ die Menge der Stützstellen einer gegebenen Riemann-Zerlegung $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}) \in \mathfrak{R}$ ist.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Das haben wir schon in Bemerkung 8.1.4 gesehen; vgl. (8.3) und (8.4).

$(i) \Rightarrow (iii)$: Gelte $I := \overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$. Zu beliebigem $\epsilon > 0$ wähle $\mathcal{Z}_0$ mit

$$I - \epsilon < U(\mathcal{Z}_0) \leq O(\mathcal{Z}_0) < I + \epsilon\,.$$

Nach Lemma 8.2.4 folgt die Existenz eines $\delta > 0$, sodass

$$I - 2\epsilon < U(\mathcal{Z}_0) - \epsilon \leq S(\mathcal{R}) \leq O(\mathcal{Z}_0) + \epsilon < I + 2\epsilon$$

für $|\mathcal{R}| \leq \delta$; also $\lim_{|\mathcal{Z}|\to 0} S(\mathcal{R}) = I$.

Die Gültigkeit von $\lim_{n\to\infty} O(\mathcal{R}_n) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} O(\mathcal{R})$, $\lim_{n\to\infty} U(\mathcal{R}_n) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} U(\mathcal{R})$ und $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{R}_n) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(\mathcal{R})$ für $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0$ weist man ganz ähnlich wie im zweiten Beweisschritt nach. ❑

8.2.6 Beispiel. Die Folgen U_n und O_n aus Beispiel 8.1.1 sind nichts anderes als $U(\mathcal{R}_n)$ bzw. $O(\mathcal{R}_n)$, wobei $\mathcal{R}_n = ((\frac{j}{n})_{j=0}^n; (\frac{j}{n})_{j=1}^n)$[5]. Wegen $O(\mathcal{R}_n) - U(\mathcal{R}_n) = O_n - U_n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt aus Satz 8.2.5 die Riemann-Integrierbarkeit von $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$.
Wir können uns mit Satz 8.2.5 auch sicher sein, dass die Folgen U_n und O_n tatsächlich gegen das Integral von f über $[0, 1]$ konvergieren.

Wir werden später sehen, dass alle stetigen Funktionen integrierbar sind, und wie man mit Hilfe der Differentialrechnung das Integral konkret ausrechnet. Es sind aber bei weitem nicht alle Funktionen integrierbar; vgl. Beispiel 8.2.8.

8.2.7 Beispiel. Betrachte die konstante Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(t) = c$ für alle $t \in [a, b]$. Für eine Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}$ von $[0, 1]$ berechnet man

$$S(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j) = c \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) = c(b - a)\,,$$

und damit $\int_a^b c\,dx = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(\mathcal{R}) = c(b - a)$.
Wegen Bemerkung 8.2.3 sehen wir auch, dass jede Funktion, die konstant gleich c bis auf eine endliche Menge M ist, integrierbar ist und dass das Integral darüber ebenfalls $c(b - a)$ ergibt.

Wie wir im folgenden Beispiel sehen werden, lässt sich der Sachverhalt aus Beispiel 8.2.7 im Allgemeinen nicht auf den Fall eines abzählbaren M ausweiten.

8.2.8 Beispiel. Betrachte die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \text{ irrational}\,, \\ 1\,, & \text{falls } x \text{ rational}\,. \end{cases}$$

[5] Die Zwischenstellen sind hier nicht von Bedeutung.

Ist $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$, so enthält jedes Intervall $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ sowohl rationale als auch irrationale Zahlen. Damit folgt

$$U(\mathcal{Z}) = 0, \quad O(\mathcal{Z}) = 1\,.$$

Also ist f nicht integrierbar.

Im Folgenden wollen wir einige Eigenschaften von Integralen auflisten, die aus der Tatsache folgen, dass Integrale Grenzwerte von Netzen sind.

8.2.9 Lemma.

(*i*) *Seien* $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$ *und sei* $c \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. *Dann sind auch* $f_1 + f_2$ *und* cf_1 *Riemann-integrierbar, wobei*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\,dx = \int_a^b f_1\,dx + \int_a^b f_2\,dx, \quad \int_a^b (cf_1)\,dx = c\int_a^b f_1\,dx\,.$$

(*ii*) *Ist* f *Riemann-integrierbar über* $[a,b]$, *so gilt*

$$\Big|\int_a^b f\,dx\Big| \le \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \le (b-a)\cdot\|f\|_\infty\,, \tag{8.7}$$

wobei sogar $|S(f,\mathcal{R})| \le (b-a)\cdot\|f\|_\infty$ *für jede Riemann-Zerlegung* $\mathcal{R}$ *von* $[a,b]$.

(*iii*) *Sind* $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar, so folgt aus* $g_1(x) \le g_2(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$, *dass*

$$\int_a^b g_1\,dx \le \int_a^b g_2\,dx\,.$$

Beweis. Zunächst folgt unmittelbar aus der Definition der Riemann-Summen

$$S(f_1 + f_2, \mathcal{R}) = S(f_1, \mathcal{R}) + S(f_2, \mathcal{R}), \quad S(cf_1, \mathcal{R}) = cS(f_1, \mathcal{R}), \quad S(g_1, \mathcal{R}) \le S(g_2, \mathcal{R})\,.$$

Durch den Grenzübergang $|\mathcal{R}| \to 0$ erhalten wir (*i*) und (*iii*).
Zu gegebenen $\epsilon > 0$ und $\mathcal{Z}_0 \in \mathfrak{Z}$ sei $\delta > 0$ wie in Lemma 8.2.4, sodass

$$|\mathcal{R}| \le \delta \Rightarrow S(|f|, \mathcal{R}) \le O(|f|, \mathcal{Z}_0) + \epsilon\,.$$

Ist $\mathcal{R}$ eine Riemann-Zerlegung von $[a,b]$ mit $|\mathcal{R}| \le \delta$, so folgt leicht aus der Definition der Riemann-Summen und der Obersummen sowie der Dreiecksungleichung

$$|S(f,\mathcal{R})| \le |S(|f|,\mathcal{R})| \le O(|f|,\mathcal{Z}_0) + \epsilon \le \|f\|_\infty(b-a) + \epsilon\,.$$

(8.7) erhalten wir daraus durch Grenzwertbildung, und zwar zuerst $|\mathcal{R}| \to 0$ und dann $\mathcal{Z}_0 \in \mathfrak{Z}$, sowie der Tatsache, dass $\epsilon > 0$ beliebig ist.
Schließlich folgt $|S(f,\mathcal{R})| \le (b-a)\cdot\|f\|_\infty$ für jede Riemann-Zerlegung $\mathcal{R}$ von $[a,b]$ unmittelbar aus der Dreiecksungleichung. ❑

8.3 Integrale von stetigen Funktionen

Zunächst wollen wir den Begriff der Oszillation einer Funktion $f : D \to Y$ einführen, wobei $\langle Y, d_Y\rangle$ ein metrischer Raum und $D \subseteq X$ mit einem weiteren metrischen Raum $\langle X, d_X\rangle$ ist.

8.3.1 Definition. Die *Oszillation* ist die Abbildung $\rho : (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ definiert durch

$$\rho(\gamma) := \sup\{d_Y(f(s), f(t)) : s, t \in D,\ d_X(s, t) \le \gamma\}, \quad \gamma \in (0, +\infty)\,. \tag{8.8}$$

Offenbar hängt $\rho(\gamma)$ monoton wachsend von γ ab.

8.3.2 Bemerkung. Gemäß (6.1) ist $f : D \to Y$ genau dann gleichmäßig stetig, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall s, t \in D,\ d_X(s, t) \le \delta \Rightarrow d_Y(f(s), f(t)) \le \epsilon\,.$$

Da ein Supremum die kleinste obere Schranke einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ist das wegen (8.8) äquivalent zu

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \rho(\delta) \le \epsilon\,.$$

Wegen der Monotonie von ρ ist das wiederum dasselbe wie

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 \le \rho(t) \le \epsilon \quad \text{für alle} \quad t \in (0, \delta]\,.$$

Insbesondere ist die gleichmäßige Stetigkeit von f äquivalent zu $\lim_{\gamma\to 0+} \rho(\gamma) = 0$[6].

8.3.3 Lemma. *Für eine beschränkte Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) und zwei Riemann-Zerlegungen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ von $[a, b]$ gilt*

$$\left|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R}_2)\right| \le 2(b - a) \cdot \rho\big(\max(|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2|)\big)\,. \tag{8.9}$$

Beweis. Um das einzusehen, sei $\mathcal{R}$ eine Riemann-Zerlegung, deren Stützstellen die von $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ umfasst. Das bedeutet, dass für

$$\mathcal{R}_1 = \big((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R}_1)}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)}\big), \quad \mathcal{R}_2 = \big((\zeta_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R}_2)}; (\gamma_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R}_2)}\big)\,,$$

$$\mathcal{R} = \big((\eta_k)_{k=0}^{n(\mathcal{R})}; (\beta_k)_{k=1}^{n(\mathcal{R})}\big)\,,$$

die Beziehung

$$\{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{R}_1)\} \cup \{\zeta_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{R}_2)\} \subseteq \{\eta_k : k = 0, \dots, n(\mathcal{R})\}$$

gilt. Ist $j \in \{1, \dots, n(\mathcal{R}_1)\}$, so gibt es Indizes $k(j-1) < k(j)$, sodass

$$\xi_{j-1} = \eta_{k(j-1)} \underbrace{< \eta_{k(j-1)+1} < \dots < \eta_{k(j)-1} <}_{k(j)-k(j-1)-1 \text{ viele}} \eta_{k(j)} = \xi_j\,.$$

[6] Erfüllt die Funktion $f : D \to Y$ sogar $\rho(\gamma) \le M\gamma$ für alle $\gamma > 0$ und ein festes $M \ge 0$, so nennt man f *Lipschitz stetig*. Man sieht leicht ein, dass das äquivalent zu $d_Y(f(s), f(t)) \le M d_X(s, t)$ für alle $s, t \in D$ ist.

Wir erhalten wegen $(\xi_j - \xi_{j-1})f(\alpha_j) = \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} (\eta_k - \eta_{k-1})f(\alpha_j)$

$$\begin{aligned}\left|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R})\right| &= \left| \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)} \left((\xi_j - \xi_{j-1})f(\alpha_j) - \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} (\eta_k - \eta_{k-1})f(\beta_k) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)} \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} (\eta_k - \eta_{k-1})(f(\alpha_j) - f(\beta_k)) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)} \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} (\eta_k - \eta_{k-1}) \cdot |f(\alpha_j) - f(\beta_k)| \,.\end{aligned}$$

Aus $|\alpha_j - \beta_k| \leq (\xi_j - \xi_{j-1}) \leq |\mathcal{R}_1|$ für $k \in \{k(j-1)+1, \ldots, k(j)\}$ folgt

$$|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R})| \leq \sum_{k=1}^{n(\mathcal{R}_2)} (\eta_k - \eta_{k-1}) \cdot \rho(|\mathcal{R}_1|) = (b-a) \cdot \rho(|\mathcal{R}_1|) \,.$$

Genauso zeigt man $|S(\mathcal{R}_2) - S(\mathcal{R})| \leq (b-a) \cdot \rho(|\mathcal{R}_2|)$. Aus der Dreiecksungleichung und der Monotonie von ρ folgt dann (8.9). ❑

Für den folgenden Satz 8.3.4 sei in Erinnerung gerufen, dass gemäß Definition 5.3.10 ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ mit Werten in einem metrischen Raum $\langle X, d \rangle$ über eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ als *Cauchy-Netz* bezeichnet wird, falls (5.13), also

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists i_0 \in I : \; \forall i, j \succeq i_0 \Rightarrow d(x_i, x_j) < \epsilon$$

gilt. Aus Lemma 5.3.11 wissen wir, dass ein Netz in einem vollständigen metrischen Raum genau dann konvergiert, wenn es ein Cauchy-Netz ist.

8.3.4 Satz. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ stetig auf dem reellen Intervall $[a, b]$, so ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis. Die Funktion f ist wegen Proposition 6.1.13 beschränkt und wegen Satz 6.3.3 gleichmäßig stetig. Gemäß Lemma 5.3.11 folgt die Konvergenz von $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$, wenn wir zeigen können, dass $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ ein Cauchy-Netz ist.
Dazu sei $\epsilon > 0$, und sei $\delta > 0$, sodass $\rho(\delta) \leq \frac{\epsilon}{3(b-a)}$; vgl. Bemerkung 8.3.2. Sind nun $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ mit $|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2| < \delta$, so folgt aus (8.9) sofort

$$|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R}_2)| \leq 2(b-a) \cdot \rho(\max(|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2|)) < \epsilon \,,$$

und damit die Tatsache, dass $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ ein Cauchy-Netz ist. ❑

8.4 Differential und Integralrechnung

Um das Integral einer Funktion tatsächlich ausrechnen zu können, wollen wir einen wichtigen Zusammenhang zur Differentialrechnung herstellen. Bevor wir das tun, brauchen wir folgendes Lemma.

8.4.1 Lemma. *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ *ein Funktion auf dem reellen Intervall* $[a,b]$*, und sei* $c < d$, $[c,d] \subseteq [a,b]$. *Weiters bezeichne* $\mathbb{1}_{[c,d]}$ *die* Indikatorfunktion *(auch* charakteristische Funktion *genannt):*

$$\mathbb{1}_{[c,d]}(t) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } t \in [c,d], \\ 0, & \textit{falls } t \notin [c,d]. \end{cases}$$

Dann ist die Riemann-Integrierbarkeit von $f|_{[c,d]}$ *auf* $[c,d]$ *äquivalent zur Riemann-Integrierbarkeit von* $\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f$ *auf* $[a,b]$. *In dem Fall gilt*

$$\int_a^b \mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f \, dx = \int_c^d f|_{[c,d]} \, dx .$$

Außerdem folgt aus der Riemann-Integrierbarkeit von f *auf* $[a,b]$ *die Riemann-Integrierbarkeit von* $f|_{[c,d]}$ *auf* $[c,d]$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ die Riemann-Zerlegungen von $[a,b]$ und mit $\mathcal{R}' \in \mathfrak{R}'$ die Riemann-Zerlegungen von $[c,d]$.

- ⇝ Sei zunächst f über $[a,b]$ Riemann-integrierbar. Wir zeigen, dass dann $(S(f|_{[c,d]}, \mathcal{R}'))_{\mathcal{R}' \in \mathfrak{R}'}$ ein Cauchy-Netz ist. Dazu sei $\epsilon > 0$. Da $(S(f,\mathcal{R}))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ konvergent und daher ein Cauchy-Netz ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|S(f,\mathcal{R}_1) - S(f,\mathcal{R}_2)| < \epsilon$, wenn nur $|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2| \leq \delta$.

  Sind nun $\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}'_2 \in \mathfrak{R}'$ mit $|\mathcal{R}'_1|, |\mathcal{R}'_2| \leq \delta$, so wähle eine beliebige Fortsetzung $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ von $\mathcal{R}'_1$ bzw. $\mathcal{R}'_2$ zu Riemann-Zerlegungen von $[a,b]$ mit einer Feinheit kleiner oder gleich δ und sodass die Stütz- und Zwischenstellen von $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ außerhalb von $[c,d]$ übereinstimmen.

  Die Summanden $(\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j)$ zu Intervallen $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ mit $[\xi_{j-1}, \xi_j] \nsubseteq [c,d]$ treten dann bei $S(f,\mathcal{R}_1)$ und bei $S(f,\mathcal{R}_2)$ auf. Also folgt

  $$\left|S(f,\mathcal{R}_1) - S(f,\mathcal{R}_2)\right| = \left|S(f|_{[c,d]}, \mathcal{R}'_1) - S(f|_{[c,d]}, \mathcal{R}'_2)\right| < \epsilon .$$

  Somit ist $(S(f|_{[c,d]}, \mathcal{R}'))_{\mathcal{R}' \in \mathfrak{R}'}$ auch ein Cauchy-Netz und $f|_{[c,d]}$ daher auf $[c,d]$ Riemann-integrierbar.

- ⇝ Wegen $(\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f)|_{[c,d]} = f|_{[c,d]}$ folgt aus dem eben bewiesenen auch aus der Riemann-Integrierbarkeit von $\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f$ die von $f|_{[c,d]}$.

- ⇝ Wir setzen $M = \{c,d\}$, und wissen aus Bemerkung 8.2.3, dass der Beweis vollendet ist, wenn wir

  $$I = \lim_{|\mathcal{R}'| \to 0} S_M(f|_{[c,d]}, \mathcal{R}') \Rightarrow I = \lim_{|\mathcal{R}| \to 0} S_M(\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f, \mathcal{R}),$$

  zeigen können. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben, und $\delta > 0$, sodass aus $|\mathcal{R}'| \leq \delta$ die Ungleichung $|I - S_M(f|_{[c,d]}, \mathcal{R}')| < \epsilon$ folgt.

Ist nun $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine Riemann-Zerlegung von $[a,b]$ mit $|\mathcal{R}| \le \delta$, so sei $\mathcal{R}' = ((\xi'_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R}')}; (\alpha'_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R}')})$ die Riemann-Zerlegung von $[c,d]$, für die

$$\{\xi'_1, \dots, \xi'_{n(\mathcal{R}')-1}\} = \{\xi_1, \dots, \xi_{n(\mathcal{R})-1}\} \cap (c,d)\,,$$

sowie

$$\{\alpha'_2, \dots, \alpha'_{n(\mathcal{R}')-1}\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n(\mathcal{R})}\} \cap [\xi'_1, \xi'_{n(\mathcal{R}')-1}]\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} S_M(\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f, \mathcal{R}) &= \sum_{\substack{j=1 \\ c,d \notin [\xi_{j-1},\xi_j]}}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) \mathbb{1}_{[c,d]}(\alpha_j) f(\alpha_j) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ c<\xi_{j-1},\xi_j<d}}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j) \\ &= \sum_{j=2}^{n(\mathcal{R}')-1} (\xi'_j - \xi'_{j-1}) f(\alpha'_j) = S_M(f|_{[c,d]}, \mathcal{R}')\,. \end{aligned}$$

Wegen $|\mathcal{R}'| \le |\mathcal{R}| \le \delta$ folgt $|I - S_M(\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f, \mathcal{R})| < \epsilon$, und wir erhalten $I = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S_M(\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f, \mathcal{R})$. ❑

8.4.2 Bemerkung. Mit Hilfe von Bemerkung 8.2.3 sieht man leicht, dass die Riemann-Integrierbarkeit von $\mathbb{1}_{[c,d]} \cdot f$ über $[a,b]$ zu der von $\mathbb{1}_{(c,d)} \cdot f$ bzw. $\mathbb{1}_{(c,d]} \cdot f$ oder auch der von $\mathbb{1}_{[c,d)} \cdot f$ äquivalent ist. Die entsprechenden Integrale stimmen alle überein.

8.4.3 Definition. Eine Abbildung $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ heißt *stückweise stetige Funktion*, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a,b]$ gibt, sodass sich die Funktionen $f|_{(t_{j-1},t_j)}$ stetig auf $[t_{j-1}, t_j]$ fortsetzen lassen.

8.4.4 Bemerkung. Aus Lemma 8.4.1 folgt, dass jede stückweise stetige Funktion Riemann-integrierbar ist. Ist nämlich $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ und sind $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, sodass sich für alle $j = 1, \dots, n$, die Funktion $f|_{(t_{j-1},t_j)}$ stetig auf $[t_{j-1}, t_j]$ fortsetzen lässt, so sind alle Funktionen $\mathbb{1}_{(t_{j-1},t_j)} \cdot f$ und daher auch ihre Summe Riemann-integrierbar. Diese Summe unterscheidet sich aber von f nur an endlich vielen Punkten und ist daher selbst Riemann-integrierbar.

Für eine reell- bzw. komplexwertige, Riemann-integrierbare Funktion f auf $[a,b]$ und $c \in [a,b]$ setzen wir

$$\int_c^c f(x)\,dx := 0\,.$$

Gilt $a \le u \le v \le w \le b$, so folgt mit dieser Konvention aus Lemma 8.4.1, Lemma 8.2.9 und Bemerkung 8.4.2

$$\begin{aligned} \int_u^w f(t)\,dt &= \int_a^b \mathbb{1}_{[u,w]}(t) \cdot f(t)\,dt = \int_a^b (\mathbb{1}_{[u,v)}(t) + \mathbb{1}_{[v,w]}(t)) \cdot f(t)\,dt \\ &= \int_a^b \mathbb{1}_{[u,v)}(t) \cdot f(t)\,dt + \int_a^b \mathbb{1}_{[v,w]}(t) \cdot f(t)\,dt = \int_u^v f(t)\,dt + \int_v^w f(t)\,dt \end{aligned}$$

bzw.

$$\int_u^w f(t)\,dt - \int_u^v f(t)\,dt = \int_v^w f(t)\,dt\,. \tag{8.10}$$

8.4.5 Satz (Hauptsatz der Diff.-Int.Rechnung)**.** *Sei f eine reell- oder komplexwertige Funktion auf $[a,b]$, die über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist. Für $x \in [a,b]$ definiere*[7]

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Dann ist die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ stetig auf $[a,b]$.
Ist f in einem Punkt x_0 stetig, so ist F bei x_0 differenzierbar, und es gilt[8]

$$F'(x_0) = f(x_0)\,.$$

Beweis. Als erstes sei bemerkt, dass gemäß unser Definition 8.2.1 die Funktion f als Riemann-integrierbare Funktion auch beschränkt ist. Für $a \le x < y \le b$ folgt wegen (8.10)

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \le \|f\|_\infty \cdot (y - x)\,.$$

Insbesondere ist F stetig[9].
Sei nun f stetig bei einem $x_0 \in [a,b)$. Ist $\epsilon > 0$ gegeben, so existiert $\delta > 0$, sodass

$$|f(t) - f(x_0)| \le \epsilon \quad \text{für alle} \quad t \in [a,b] \;\text{ mit }\; |t - x_0| < \delta\,.$$

Insbesondere gilt für $x_0 < x < \min(x_0 + \delta, b)$ wegen (8.10) und (8.7)

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^x \frac{f(t) - f(x_0)}{x - x_0}\,dt \right| \le \sup_{t \in [x_0, x]} |f(t) - f(x_0)| \le \epsilon\,.$$

Also folgt $F'(x_0)^+ = \lim_{x \to x_0+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$. Entsprechend zeigt man $F'(x_0)^- = f(x_0)$, wenn $x_0 \in (a,b]$. ❑

8.4.6 Bemerkung. Mit den Voraussetzungen von Satz 8.4.5 gilt für

$$G(x) := \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$G'(x) = -f(x)$. Setzen wir allgemein für $a \le u \le v \le b$

$$\int_v^u f(t)\,dt := -\int_u^v f(t)\,dt\,,$$

[7] Die Existenz dieses Integrals für alle $x \in [a,b]$ folgt aus Lemma 8.4.1.
[8] Ist x_0 gleich a oder b, so meinen wir die links- bzw. rechtsseitige Differenzierbarkeit bzw. Ableitung.
[9] Wir sehen, dass diese Funktion sogar *Lipschitz stetig* ist, also dass $|F(y) - F(x)| \le M \cdot |y - x|$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit einer festen Konstanten $M \ge 0$ gilt.

so folgt für jedes feste $c \in [a, b]$

$$\Big(\int_c^x f(t)\, dt \Big)' = f(x)$$

egal, ob $x \geq c$ oder $x \leq c$.

Folgendes Korollar ist die Grundlage, Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen zu können.

8.4.7 Korollar. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) stetig, und ist $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) eine* Stammfunktion *von f, also H ist auf $[a, b]$ differenzierbar mit $H'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt*

$$\int_a^b f(t)\, dt = H(b) - H(a) .$$

Beweis. Nach Satz 8.4.5 ist die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ebenfalls eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$. Somit unterscheiden sich H und F nur um eine Konstante, $F \equiv H + c$ auf $[a, b]$; vgl. Bemerkung 7.5.2. Wegen $0 = F(a) = H(a) + c$ ist $H(a) = -c$, und somit

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) = H(b) + c = H(b) - H(a) . \qquad \square$$

8.4.8 Beispiel. Wir wollen das Integral der Funktion $\ln x$ über das Intervall $[1, 3]$ berechnen. Eine Stammfunktion von $\ln x$ auf $(0, +\infty)$ ist $x(\ln(x) - 1)$. Also folgt mit der Konvention, dass $g(x)|_a^b = g(b) - g(a)$,

$$\int_1^3 \ln t\, dt = x(\ln(x) - 1)|_1^3 = 3(\ln 3 - 1) - (-1) = 3 \ln 3 - 2 .$$

8.4.9 Beispiel. Um das bestimmte Integral $\int_0^\pi t e^{2it}\, dt$ zu berechnen, nehmen wir die Stammfunktion $\frac{x}{2i} e^{2ix} - \frac{1}{(2i)^2} e^{2ix}$ von $x e^{2ix}$ und erhalten

$$\int_0^\pi t e^{2it}\, dt = \left(\frac{x}{2i} e^{2ix} - \frac{1}{(2i)^2} e^{2ix} \right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2i} .$$

8.4.10 Bemerkung. Aus dem Hauptsatz sieht man insbesondere, dass für eine überall auf $[a, b]$ stetige Funktion f die Funktion $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, die $F'(x) = f(x)$ und $F(a) = 0$ erfüllt.
Ist umgekehrt $F(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$ mit $F(a) = 0$, so ist ihre Ableitung f stetig und wegen Satz 8.3.4 integrierbar. Die Funktion $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\, dt$ hat nach dem Hauptsatz dieselbe Ableitung wie F. Außerdem verschwinden sie beide bei a, womit $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ für alle $x \in [a, b]$; vgl. Korollar 8.4.7.

Also wird $C[a, b]$ durch den Integraloperator bijektiv auf $\{F \in C^1[a, b] : F(a) = 0\}$ abgebildet. Die Umkehrabbildung ist dabei das Differenzieren. Man sieht auch leicht, dass diese beiden Mengen Vektorräume sind, und dass dieser Integraloperator linear ist.

8.4.11 Korollar. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, und gilt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, so verschwindet f identisch auf $[a,b]$.*

Beweis. Die Funktion $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$ liegt in $C^1[a,b]$, erfüllt $F(a) = F(b) = 0$ und hat für $x \in (a,b)$ die Ableitung $F'(x) = f(x) \geq 0$. Also ist $F(x)$ monoton wachsend, und somit $0 = F(a) \leq F(x) \leq F(b) = 0$. Mit F verschwindet auch $F' = f$ identisch. ❑

Die in Lemma 7.5.4 kennengelernten Regeln zur Auffindung von Stammfunktionen führen auf entsprechende Regeln zur Berechnung von Integralen.

8.4.12 Lemma (Substitutionsregel)**.** *Sei f reell- oder komplexwertig und stetig auf $[a,b]$, und $g \in C^1[\alpha,\beta]$ reellwertig mit $g([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt\,.$$

Beweis. Nach Lemma 7.5.4 ist $(\int f) \circ g$ eine Stammfunktion von $f(g(t))g'(t)$. Aus Korollar 8.4.7 folgt daher die behauptete Gleichheit. ❑

Ähnlich beweist man folgendes Lemma.

8.4.13 Lemma (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g \in C^1[a,b]$. Dann gilt*

$$\int\limits_a^b f'g\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b fg'\,dx\,.$$

Für $f(b)g(b) - f(a)g(a)$ schreibt man auch $fg|_a^b$.

Folgender Satz wird ebenfalls Hauptsatz der Differential-Integralrechnung genannt. Dieser ist dem Satz 8.4.5 zwar sehr ähnlich, aber auf den zweiten Blick unterscheiden sie sich doch durch die Voraussetzungen wesentlich.

8.4.14 Satz (*)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über $[a,b]$, sodass es eine stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, die auf (a,b) differenzierbar ist und die dort $F'(x) = f(x)$ erfüllt. Dann gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis. Sei $\{\xi_j : j = 0,\ldots,n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann existieren nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung Satz 7.2.6 Zwischenstellen $\alpha_i, \xi_{i-1} \leq \alpha_i \leq \xi_i$, sodass

$$F(\xi_i) - F(\xi_{i-1}) = (\xi_i - \xi_{i-1})f(\alpha_i)\,.$$

Somit ist $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine Riemann-Zerlegung von $[a, b]$. Es folgt

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \xi_{i-1}) f(\alpha_i) = S(\mathcal{R}).$$

Für $|\mathcal{R}| \to 0$ strebt die rechte Seite gegen $\int_a^b f(x)\,dx$. ❑

Man beachte, dass Satz 8.4.14 nur auf reellwertige Funktionen anwendbar ist, da im Beweis der Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwendet wird, der ja nur für reellwertige Funktionen gilt.

8.5 Weitere Eigenschaften des Integrals*

Sind f und g im folgenden Satz stetig, so ist die Aussage des Satzes eine einfache Konsequenz aus der Tatsache, dass stetige Funktionen integrierbar sind.

8.5.1 Satz. *Sind f, g reellwertig und über $[a, b]$ Riemann-integrierbar, so sind es auch $|f|, f^2, fg$ und*

$$\Big| \int_a^b f\,dx \Big| \le \int_a^b |f|\,dx.$$

Beweis. Zu einem $\epsilon > 0$ existiert nach Satz 8.2.5 eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_i : i = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$ von $[a, b]$, sodass $O(f, \mathcal{Z}) - U(f, \mathcal{Z}) < \epsilon$. Setze für $i = 0, \dots, n(\mathcal{Z})$

$$M_i = \sup_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} f(x),$$

$$M_i^* = \sup_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} |f(x)|, \quad m_i^* = \inf_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} |f(x)|.$$

Für $x, y \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$ folgt $|f(x)| - |f(y)| \le |f(x) - f(y)| \le M_i - m_i$, und mit Hilfe von Lemma 2.9.11

$$M_i^* - m_i^* = \sup_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} |f(x)| + \sup_{x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} (-|f(x)|) = \sup_{x, y \in [\xi_{i-1}, \xi_i]} (|f(x)| - |f(y)|) \le M_i - m_i.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} O(|f|, \mathcal{Z}) - U(|f|, \mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} (M_i^* - m_i^*)(\xi_i - \xi_{i-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} (M_i - m_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) = O(f, \mathcal{Z}) - U(f, \mathcal{Z}) < \epsilon. \end{aligned}$$

Gemäß (8.3) und (8.4) ist somit $|f|$ integrierbar. Die behauptete Ungleichung folgt aus Lemma 8.2.9, (ii).

Ist $\mathcal{Z}$ wie oben, so folgt aus der Tatsache, dass $x \mapsto x^2$ monoton wachsend auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ist,

$$\sup_{x\in[\xi_{i-1},\xi_i]} f(x)^2 - \inf_{x\in[\xi_{i-1},\xi_i]} f(x)^2 = (M_i^*)^2 - (m_i^*)^2 = (M_i^* + m_i^*)(M_i^* - m_i^*)$$
$$\leq 2\|f\|_\infty \cdot (M_i^* - m_i^*)\,.$$

Nun erhalten wir aus

$$O(f^2,\mathcal{Z}) - U(f^2,\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} \left(\sup_{x\in[\xi_{i-1},\xi_i]} f(x)^2 - \inf_{x\in[\xi_{i-1},\xi_i]} f(x)^2 \right) (\xi_i - \xi_{i-1})$$
$$\leq 2\|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n(\mathcal{Z})} (M_i^* - m_i^*)(\xi_i - \xi_{i-1})$$
$$= 2\|f\|_\infty (O(|f|,\mathcal{Z}) - U(|f|,\mathcal{Z})) < 2\|f\|_\infty \cdot \epsilon$$

wieder wegen (8.3) und (8.4) die Integrierbarkeit von f^2. Die Behauptung für fg folgt aus der Beziehung

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right).$$ ❑

8.5.2 Bemerkung. Sind die Funktionen in Satz 8.5.1 komplexwertig, so sind mit f, g auch $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f, \mathrm{Re}\, g, \mathrm{Im}\, g$ Riemann-integrierbar. Da man $|f|^2, \mathrm{Re}\, fg, \mathrm{Im}\, fg$ als Summe von Produkten von $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f, \mathrm{Re}\, g, \mathrm{Im}\, g$ darstellen kann, sind auch $|f|^2, fg$ Riemann-integrierbar.
Man zeigt auch ähnlich wie im Beweis von Satz 8.5.1, dass mit $|f|^2$ auch $\sqrt{|f|^2} = |f|$ Riemann-integrierbar ist.

8.6 Uneigentliche Integrale

Angenommen, eine Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ lässt sich zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ fortsetzen, dann folgt aus der Stetigkeit von $F(x)$ in Satz 8.4.5, dass

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt\,. \tag{8.11}$$

Hat die Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ nicht die Eigenschaft, dass sie sich auf $[a,b]$ zu einer Riemann-integrierbaren Funktion fortsetzen lässt, so kann man immer noch versuchen, für $x \in [a,b)$ das Integral $\int_a^x f(t)\,dt$ zu berechnen, und dann x gegen b streben zu lassen.

8.6.1 Definition. Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, wobei $a < b \leq +\infty$, und sei $f|_{[a,x]}$ für alle $x \in [a,b)$ Riemann-integrierbar. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar*, falls

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{\beta\to b-} \int_a^\beta f(t)\,dt$$

existiert. Dazu sagen wir auch, dass $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergiert. Entsprechend definiert man uneigentliche Integrale für Funktionen $f : (a,b] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, wenn $-\infty \leq a < b$.

Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), so definiert man mit einem beliebigen $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{\beta \to b-} \int_c^\beta f(t)\,dt + \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^c f(t)\,dt\,, \tag{8.12}$$

falls die Grenzwerte existieren.
Eine reell- bzw. komplexwertige Funktion f heißt *absolut uneigentlich integrierbar*, falls $|f|$ uneigentlich integrierbar ist. Dazu sagt man auch, dass $\int_a^b f(t)\,dt$ *absolut konvergiert*.

Man sieht leicht, dass (8.12) nicht von der Wahl von $c \in (a, b)$ abhängt.

8.6.2 Beispiel.

(*i*) Für $a \in \mathbb{R}$ rechnet man

$$\int_a^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta e^{-t}\,dt = \lim_{\beta \to +\infty} -(e^{-\beta} - e^{-a}) = e^{-a}\,.$$

(*ii*) Mit der Regel von de l'Hospital erhält man für ein $b > 0$

$$\int_0^b \ln t\,dt = \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^b \ln t\,dt = b(\ln(b) - 1) - \lim_{\alpha \to 0+} \alpha(\ln(\alpha) - 1) = b(\ln(b) - 1)\,.$$

(*iii*) Bei der Berechnung von

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{t}\,dt \tag{8.13}$$

sieht man, dass bei uneigentlichen Integralen ähnliche Phänomene auftreten, wie bei Reihen. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}\int_1^\beta \frac{\sin \pi t}{t}\,dt &= \int_1^{[\beta]} \frac{\sin \pi t}{t}\,dt + \int_{[\beta]}^\beta \frac{\sin \pi t}{t}\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{[\beta]-1} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{|\sin \pi t|}{t}\,dt + \int_{[\beta]}^\beta \frac{\sin \pi t}{t}\,dt\,.\end{aligned}$$

Man erkennt unschwer, dass $\int_n^{n+1} \frac{|\sin \pi t|}{t}\,dt$ monoton gegen Null für $n \to \infty$ konvergiert. Nach dem Leibnizschen Kriterium, Korollar 3.10.7, und wegen

$$\left| \int_{[\beta]}^\beta \frac{\sin \pi t}{t}\,dt \right| \leq \frac{1}{[\beta]} \int_{[\beta]}^{[\beta]+1} |\sin \pi t|\,dt = \frac{2}{\pi[\beta]} \overset{\beta \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

konvergiert (8.13).

Das Integral ist aber nicht absolut konvergent in dem Sinne, dass auch $\lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \left|\frac{\sin \pi t}{t}\right| dt$ existiert, da

$$\int_1^\beta \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \sum_{n=1}^{[\beta]-1} \int_n^{n+1} \frac{|\sin \pi t|}{n+1}\,dt = \int_0^1 |\sin \pi t,|\,dt \cdot \sum_{n=1}^{[\beta]-1} \frac{1}{n+1}$$

für $\beta \to +\infty$ divergiert.

8.6.3 Lemma. *Seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), wobei $a < b \leq +\infty$, und seien $f|_{[a,x]}$ und $g|_{[a,x]}$ sowie die Beträge dieser Funktionen für alle $x \in [a, b)$ Riemann-integrierbar.*
Ist das uneigentliche Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist es auch konvergent. Gilt obendrein die Ungleichung $|g(x)| \geq |f(x)|$ für alle $x \in [c, b)$ mit einem $c \in [a, b)$, so ist auch $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent und infolge auch konvergent.
Entsprechende Aussagen gelten für Funktionen, die auf Intervallen der Bauart $(a, b]$ bzw. (a, b) definiert sind.

Beweis. Wegen ($c \leq x_1 \leq x_2$)

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} g(t)\,dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |g(t)|\,dt, \quad \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,dt \leq \int_{x_1}^{x_2} |g(t)|\,dt\,,$$

vererbt sich die Eigenschaft, dass $\left(\int_a^x |g(t)|\,dt\right)_{x \geq a}$ ein Cauchy-Netz ist auch auf $\left(\int_a^x g(t)\,dt\right)_{x \geq a}$ bzw. $\left(\int_a^x |f(t)|\,dt\right)_{x \geq a}$. Die behauptete Konvergenz folgt dann aus Lemma 5.3.11. ❑

8.6.4 Bemerkung. Man kann Lemma 8.6.3 anwenden, um aus der Divergenz eines uneigentlichen Integrales $\int_a^b |f(x)|\,dx$ auf die Divergenz von $\int_a^b |g(x)|\,dx$ zu schließen, wenn $|g(x)| \geq |f(x)|$ für alle $x \in [c, b)$ mit einem $c \in [a, b)$.

8.6.5 Beispiel. Man betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3}\,dx := \lim_{\alpha \to 0+} \int_\alpha^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3}\,dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3}\,dx\,.$$

Da die Funktion $h(x) := x \ln x$ nur für $x \in (0, +\infty)$ definiert ist, ist dieses Integral uneigentlich an beiden Integrationsgrenzen. Die Funktion $h(x)$ lässt sich aber stetig auf $[0, +\infty)$ durch $h(x) = 0$ stetig fortsetzen. Somit bleibt nur die Uneigentlichkeit bei der Stelle $+\infty$; vgl. (8.11).
Für $x \geq 1$ ist der Integrand nicht negativ, wodurch

$$\left| \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3} \right| = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3} \leq \frac{x^2}{(x^2+1)^3} \leq \frac{x^2}{(x^2)^3} = \frac{1}{x^4}\,.$$

Wegen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^\infty = \frac{1}{3}$$

folgt aus Lemma 8.6.3 die absolute Konvergenz unseres Integrals.

8.6.6 Beispiel. Man betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{e^{2x} - e^x}\,dx\,. \tag{8.14}$$

Dieses ist nur uneigentlich bei 0. Für $x \in (0, 1]$ gilt

$$\left|\frac{\ln x}{e^{2x} - e^x}\right| = \frac{-\ln x}{e^{2x} - e^x}\,.$$

Wegen $e^{-x} \geq \frac{1}{e}$ für alle $x \in [0, 1]$ folgt

$$\frac{-\ln x}{e^{2x} - e^x} = e^{-x}\,\frac{-\ln x}{e^x - 1} \geq \frac{1}{e}\,\frac{-\ln x}{e^x - 1}\,.$$

Weiters gilt $-\ln x \geq 1$ für alle $x \in (0, \frac{1}{e}]$ und infolge ($x \in (0, 1]$)

$$\frac{-\ln x}{e^{2x} - e^x} \geq \mathbb{1}_{(0,\frac{1}{e}]}(x) \cdot \frac{1}{e}\,\frac{1}{e^x - 1} \geq 0\,.$$

Dabei ist $\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{e}]}$ die Charakteristische Funktion des Intervalls $(0, \frac{1}{e}]$. Für alle $\epsilon \in (0, \frac{1}{e})$ erhalten wir mit der Monotonie des Integrals

$$I_\epsilon := \int_\epsilon^1 \left|\frac{\ln x}{e^{2x} - e^x}\right| dx \geq \frac{1}{e}\int_\epsilon^{\frac{1}{e}} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \frac{1}{e}\int_\epsilon^{\frac{1}{e}} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\,dx\,.$$

Nun steht im Zähler die Ableitung des Nenners. Also ist $\ln(1 - e^{-x})$ eine Stammfunktion des Integranden. (Wegen $x > 0$ ist das Argument des Logarithmus positiv.) Daraus ergibt sich

$$I_\epsilon \geq \frac{1}{e}\ln(1 - e^{-x})\Big|_\epsilon^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}\ln\frac{1 - e^{-\frac{1}{e}}}{1 - e^{-\epsilon}}\,.$$

Für $\epsilon \to 0+$ konvergiert die rechte Seite und damit auch die linke Seite gegen $+\infty$. Insbesondere divergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \left|\frac{\ln x}{e^{2x} - e^x}\right| dx\,,$$

und infolge auch (8.14).

8.7 Vertauschung von Integralen mit Grenzwerten

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 6.6.12.

8.7.1 Lemma. *Seien $(I, \preceq_I)$ und $(J, \preceq_J)$ zwei gerichtete Mengen, und sei $\langle Y, d\rangle$ ein vollständig metrischer Raum. Weiters seien $H : I \times J \to Y$ und $h : I \to Y$ Funktionen, sodass für alle $j \in J$ die Funktion $H_j : I \to Y,\ i \mapsto H(i, j)$ beschränkt ist, und sodass*

$$h(i) = \lim_{j \in J} H(i, j)$$

gleichmäßig auf I, also

$$\forall \epsilon > 0\ \exists j_0 \in J : d(H(i, j), h(i)) \leq \epsilon \quad \textit{für alle} \quad j \succeq j_0 \ \textit{ und alle } \ i \in I\,,$$

bzw. äquivalent dazu $h = \lim_{j\in J} H_j$ *in* $\langle \mathcal{B}(I,Y), d_\infty\rangle$[10].
Schließlich existiere für alle $j \in J$ *der Limes* $A_j := \lim_{i\in I} H(i,j)$. *Unter diesen Voraussetzungen ist sowohl* $(A_j)_{j\in J}$ *als auch* $(h(i))_{i\in I}$ *in* Y *konvergent, wobei*

$$\lim_{j\in J} A_j = \lim_{i\in I} h(i)\,; \tag{8.15}$$

also gilt

$$\lim_{j\in J}\lim_{i\in I} H(i,j) = \lim_{i\in I}\lim_{j\in J} H(i,j)\,.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz ist $(H_j)_{j\in J}$ in $\mathcal{B}(I,Y)$ ein Cauchy-Netz. Es existiert also ein $j_0 \in J$, sodass für $j,k \geq j_0$ und alle $i \in I$ gilt

$$d_Y(H(i,j), H(i,k)) \leq d_\infty(H_j, H_k) \leq \epsilon\,.$$

Hält man j und k fest, so folgt $d_Y(A_j, A_k) = \lim_{i\in I} d_Y(H(i,j), H(i,k)) \leq \epsilon$. Damit ist $(A_j)_{j\in J}$ ein Cauchy-Netz, und wegen Lemma 5.3.11 konvergent. Setzen wir $\lim_{j\in J} A_j =: A$, so gilt

$$d_Y(h(i), A) \leq d_Y(h(i), H(i,j)) + d_Y(H(i,j), A_j) + d_Y(A_j, A)\,.$$

Wähle j nach der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz, sodass für alle $i \in I$ gilt $d_Y(h(i), H(i,j)) \leq d_\infty(h, H_j) < \epsilon$ und sodass $d_Y(A_j, A) < \epsilon$. Für dieses j existiert ein $i_0 \in I$, sodass aus $i \geq i_0$, die Ungleichung $d_Y(H(i,j), A_j) < \epsilon$ folgt. Insgesamt erhalten wir

$$d_Y(h(i), A) < 3\epsilon \quad \text{für } i \in I \text{ mit } i \geq i_0\,.$$ ❑

Aus diesem Lemma folgen nun eine Reihe wichtiger Ergebnisse.

8.7.2 Satz. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen auf* $[a,b]$ *mit Werten in* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *Gilt* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *gleichmäßig auf* $[a,b]$, *so ist auch* f *Riemann-integrierbar, wobei*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx\,.$$

Entsprechendes gilt für gleichmäßig konvergente Netze von Funktionen.

Beweis. Um das letzte Lemma anwenden zu können, sei $I = \mathfrak{R}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a,b]$ versehen mit der durch die Feinheit induzierte Ordnung und $(J, \leq_J) = (\mathbb{N}, \leq)$. Weiters sei $Y = \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, versehen mit der Euklidischen Metrik, je nachdem, wo die Funktionen hinein abbilden.
Wir setzen $H(\mathcal{R}, n) := S(f_n, \mathcal{R})$, $h(\mathcal{R}) = S(f, \mathcal{R})$. Wegen Lemma 8.2.9, (ii), gilt

$$|H(\mathcal{R}, n) - h(\mathcal{R})| = |S(f_n - f, \mathcal{R})| \leq \|f_n - f\|_\infty \cdot (b-a) = d_\infty(f_n, f)\cdot(b-a)\,. \tag{8.16}$$

[10] Wegen Satz 6.6.11 und Lemma 5.3.11 ist diese Tatsache, dass $\lim_{j\in J} H_j$ in $\langle \mathcal{B}(I,Y), d_\infty\rangle$ existiert äquivalent dazu, dass $(H_j)_{j\in J}$ in $\langle \mathcal{B}(I,Y), d_\infty\rangle$ ein Cauchy-Netz ist.

Also konvergiert $H(.,n)$ gleichmäßig gegen h. Nach Lemma 8.7.1 folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(f_n,\mathcal{R})$$

$$= \lim_{|\mathcal{R}|\to 0}\lim_{n\to\infty} S(f_n,\mathcal{R}) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(f,\mathcal{R}) = \int_a^b f\,dx\,,$$

wobei $\lim_{n\to\infty} S(f_n,\mathcal{R}) = S(f,\mathcal{R})$ für ein festes $\mathcal{R}\in\mathfrak{R}$ aus (8.16) folgt.
Der Beweis für Netze verläuft fast identisch. ❑

8.7.3 Beispiel. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R. Dann gilt für $[a,b]\subseteq\{x\in\mathbb{R}: |x|<R\}$

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^b x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\Big|_{x=a}^{b}\,.$$

Somit haben wir eine weitere Möglichkeit, Stammfunktionen auszurechnen. So ist etwa die Stammfunktion von e^{-x^2} nicht als Summe von Produkten von Funktionen wie Polynome, e hoch Polynomen, oder dergleichen darstellbar. Aber zumindest lässt sich eine Stammfunktion $F(x)$ als

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^x\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}t^{2j}\,dt = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)(2j+1)}x^{2j+1}\,,$$

anschreiben.

Mit Hilfe des Hauptsatzes, Satz 8.4.5, können wir auch Differentiation und Limes vertauschen.

8.7.4 Korollar. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reell- bzw. komplexwertigen und stetig differenzierbaren Funktionen definiert auf $[a,b]$.*
Existiert ein Punkt $x_0\in[a,b]$, sodass $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und ist die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$, so ist auch die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$, und es gilt

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)\quad \textit{für alle}\quad x\in[a,b]\,.$$

Entsprechendes gilt für Netze von Funktionen.

Beweis. Nach Satz 8.4.5 bzw. Bemerkung 8.4.6 gilt $f_n(x) = \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)$ für alle $x\in[a,b]$. Setzen wir $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$ und $A := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$, so ist g wegen Korollar 6.6.14 stetig. Außerdem folgt für $x\in[a,b]$ aus Satz 8.7.2

$$f(x) := \int_{x_0}^x g(t)\,dt + A = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,,$$

womit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zumindest punktweise gegen $f(x)$ konvergiert. Nach Satz 8.4.5 ist die linke Seite differenzierbar mit $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.
Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt aus

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - g(t))\, dt + f_n(x_0) - A \right| \\ &\le (b-a)\cdot \|f_n' - g\|_\infty + |f_n(x_0) - A| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.\end{aligned}$$

Der Beweis für Netze verläuft fast identisch. ❑

Dass man aus der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge im Allgemeinen nicht die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Ableitungen erhält, zeigt

8.7.5 Beispiel. Sei $f_n(x) = \frac{\sin\, nx}{\sqrt{n}}$ für $x \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,,$$

und zwar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\, \cos\, nx$$

gilt aber etwa $\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = +\infty$.

Wenden wir Korollar 8.7.4 auf Potenzreihen an, so erhalten wir folgendes Resultat. Dieses zeigt insbesondere, dass die Taylorreihe zur Grenzfunktion einer Potenzreihe mit der gegebenen Potenzreihe übereinstimmt; vgl. Fakta 7.4.5, 6.

8.7.6 Proposition. *Sei $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty (k+1)a_{k+1} z^k$ denselben Konvergenzradius R. Die Funktion*

$$f : (-R, R) \to \mathbb{C},\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

ist auf $(-R, R)$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} x^k\,.$$

Sie ist sogar beliebig oft differenzierbar mit ($l \in \mathbb{N}$)

$$f^{(l)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+l)\cdots(k+1)\, a_{k+l} x^k\,, \tag{8.17}$$

wobei auch diese Potenzreihe Konvergenzradius R hat. Insbesondere gilt

$$f^{(l)}(0) = l!\, a_l\,.$$

Beweis. Dass der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}z^k$ auch R ist, prüft man entweder mit Hilfe des Majorantenkriteriums durch einen Vergleich mit $\sum_{k=0}^{\infty}|a_n z^k|$ nach, oder man zeigt, dass[11]

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|(k+1)a_{k+1}|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}} = R\,,$$

vgl. Satz 6.8.7.
Für jedes feste $r\in(0,R)$ konvergiert wegen Satz 6.8.7 die Funktionenfolge $(\sum_{k=0}^{n}a_k t^k)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[-r,r]$ gleichmäßig gegen f. Analog konvergiert die Funktionenfolge $(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}t^k)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[-r,r]$ gleichmäßig und zwar wegen Korollar 8.7.4 gegen f'. Da $r<R$ beliebig war, folgt die Behauptung.
Die Verallgemeinerung in (8.17) folgt nun leicht durch vollständige Induktion. ❑

8.7.7 Beispiel. Für $x\in(-1,1)$ ist die Funktion $x\mapsto\ln(1-x)$ beliebig oft differenzierbar. Da $\ln(1-x)' = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ nach Proposition 8.7.6 mit der Ableitung von $x\mapsto -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $x\in(-1,1)$ übereinstimmt, und da $\ln(1-x)$ und $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ für $x=0$ beide den Wert Null annehmen, folgt aus Korollar 7.2.9, dass

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad \text{für alle}\ \ x\in(-1,1)\,.$$

Da diese Reihe auch für $x=-1$ (bedingt) konvergiert, folgt aus Satz 6.12.1, dass $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$.

Als Vorspiel zum nächsten Ergebnis wollen wir uns kurz mit dem Produkt zweier metrischer Räume beschäftigen.

8.7.8 Fakta.

1. Seien $\langle X,d_X\rangle$ und $\langle Y,d_Y\rangle$ zwei metrische Räume. Ist $X\times Y$ die Menge aller geordneten Paare, und definiert man
$$d\big((a,b),(x,y)\big) := \max(d_X(a,x),d_Y(b,y))\,, \tag{8.18}$$
so sieht man unmittelbar, dass $(X\times Y,d)$ ein metrischer Raum ist, und dass $(x_n,y_n)\to(x,y)$ genau dann, wenn $x_n\to x$ und $y_n\to y$.

2. Sind $K_1\subseteq X$ und $K_2\subseteq Y$ jeweils kompakt, so ist es auch $K_1\times K_2$, denn ist $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $K_1\times K_2$, so gibt es eine Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $x_{n(k)}\to x\in K_1$ und weiter eine Teilfolge $(y_{n(k(j))})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $y_{n(k(j))}\to y\in K_2$, also $(x_{n(k(j))},y_{n(k(j))})\to(x,y)$.

3. Die offene Kugel $U_\epsilon(a,b)$ um ein $(a,b)\in X\times Y$ ist nichts anderes als $U_\epsilon(a)\times U_\epsilon(b)$, da
$$d\big((a,b),(x,y)\big) = \max(d_X(a,x),d_Y(b,y)) < \epsilon \Leftrightarrow d_X(a,x)<\epsilon \wedge d_Y(b,y)<\epsilon\,.$$

[11] Um diese Gleichheit einzusehen, verwendet man am besten die Charakterisierung des Limes Superior als größter Häufungspunkt; vgl. Proposition 5.2.3.

4. Sind $O_1 \subseteq X$, $O_2 \subseteq Y$ offen, so auch $O_1 \times O_2 \subseteq X \times Y$, da es zu $(a, b) \in X \times Y$ sicherlich ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(a) \subseteq O_1$ und $U_\epsilon(b) \subseteq O_2$ gibt, und dann $U_\epsilon(a, b) \subseteq O_1 \times O_2$.

5. Die Definition von d_∞ auf $\mathbb{R}^p$ passt genau in dieses Bild, denn haben wir $p_1 + p_2 = p$, und sind sowohl $\mathbb{R}^{p_1}$ als auch $\mathbb{R}^{p_2}$ versehen mit d_∞, so stimmt die Metrik (8.18) auf $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}$ mit d_∞ überein.

8.7.9 Korollar. *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (Y, d_Y), und $f : [a, b] \times K \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ stetig. Dann ist auch die Funktion $R : K \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ definiert durch*[12]

$$R(t) = \int_a^b f(s, t)\, ds \,,$$

stetig.

Beweis. Es gilt, $\lim_{t \to t_0} R(t) = \lim_{t \in K \setminus \{t_0\}} R(t) = R(t_0)$ für ein beliebiges $t_0 \in K$ zu zeigen. Dabei ist $K \setminus \{t_0\}$ geordnet durch

$$t_1 \preceq t_2 \Leftrightarrow d_Y(t_0, t_1) \geq d_Y(t_0, t_2) \,.$$

Wegen der Kompaktheit von $[a, b] \times K$ ist die Funktion f sogar gleichmäßig stetig; vgl. Satz 6.3.3. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es somit ein $\delta > 0$, sodass

$$d((s, t), (s', t')) < \delta \Rightarrow |f(s, t) - f(s', t')| < \epsilon \,.$$

Insbesondere folgt aus $d_Y(t, t_0) < \delta$ wegen $d((s, t), (s, t_0)) = d_Y(t, t_0)$ die Ungleichung $|f(s, t) - f(s, t_0)| < \epsilon$ für alle $s \in [a, b]$ und somit

$$\|f(., t) - f(., t_0)\|_\infty = \sup_{s \in [a,b]} |f(s, t) - f(s, t_0)| \leq \epsilon \,.$$

Also konvergiert das Netz $(f(., t))_{t \in K \setminus \{t_0\}}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f(., t_0) : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. Wegen Satz 8.7.2 gilt dann

$$\lim_{t \to t_0} R(t) = \lim_{t \to t_0} \int_a^b f(s, t)\, ds = \int_a^b \lim_{t \to t_0} f(s, t)\, ds = \int_a^b f(s, t_0)\, ds = R(t_0) \,. \qquad \square$$

Mit Lemma 8.7.1 lässt sich auch die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge zeigen.

8.7.10 Satz (Satz von Fubini)**.** *Ist $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ stetig, so gilt*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(s, t)\, dt \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s, t)\, ds \right) dt \,. \tag{8.19}$$

[12] Eine derartige Funktion heißt *Parameterintegral*.

Beweis. Die Existenz der inneren Integrale wird durch Satz 8.3.4 und der äußeren Integrale durch Korollar 8.7.9 gewährleistet.
Sei $I = \mathfrak{R}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ und sei $J = \mathfrak{P}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[c, d]$ beide gerichtet mit der durch die Feinheit induzierten Ordnung. Wir definieren für $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ und $\mathcal{P} = ((\eta_j)_{j=0}^{n(\mathcal{P})}; (\beta_j)_{j=1}^{n(\mathcal{P})})$

$$H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \sum_{k=1}^{n(\mathcal{P})} (\xi_j - \xi_{j-1})(\eta_k - \eta_{k-1}) f(\alpha_j, \beta_k) , \tag{8.20}$$

und bemerken, dass

$$H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n(\mathcal{P})} (\eta_k - \eta_{k-1}) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j, \beta_k) \right)}_{= S(f_1, \mathcal{R})(\beta_k)} = S(S(f_1, \mathcal{R}), \mathcal{P}) ,$$

wobei $f_1(s) := f(s, t)$, $s \in [a, b]$, die Funktion f mit festgehaltener zweiten Variable $t \in [c, d]$ ist, und $S(f_1, \mathcal{R})(t)$ als Funktion eben dieser Variable betrachtet wird. Wegen (8.9) gilt

$$\begin{aligned} |H(\mathcal{R}, \mathcal{P}_1) - H(\mathcal{R}, \mathcal{P}_2)| &= |S(S(f_1, \mathcal{R}), \mathcal{P}_1) - S(S(f_1, \mathcal{R}), \mathcal{P}_2)| \\ &\leq 2(d - c) \cdot \rho(\max(|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2|)) , \end{aligned} \tag{8.21}$$

wobei ρ die Oszillation der Funktion $t \mapsto S(f_1, \mathcal{R})(t)$ ist; vgl. (8.8). Wegen Lemma 8.2.9, (ii), gilt

$$|S(f_1, \mathcal{R})(t) - S(f_1, \mathcal{R})(t')| = \left| S\Big((f(,t) - f(.,t')), \mathcal{R} \Big) \right| \leq (b - a) \cdot \sup_{s \in [a,b]} |f(s, t) - f(s, t')| ,$$

und damit

$$\begin{aligned} \rho(\max(|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2|)) &= \sup_{|t-t'| \leq \max(|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2|)} |S(f_1, \mathcal{R})(t) - S(f_1, \mathcal{R})(t')| \\ &\leq (b - a) \cdot \rho_f(\max(|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2|)) . \end{aligned}$$

Hier ist $\rho_f(\gamma) = \sup\{ |f(s', t') - f(s, t)| : \max(|s - s'|, |t - t'|) \leq \gamma \}$ die Oszillation der Funktion $(s, t) \mapsto f(s, t)$. Also erhalten wir zusammen mit (8.21)

$$\|H(., \mathcal{P}_1) - H(., \mathcal{P}_2)\|_\infty = \sup_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} |H(\mathcal{R}, \mathcal{P}_1) - H(\mathcal{R}, \mathcal{P}_2)| \leq 2\, (b - a)\, (d - c)\, \rho_f(\max(|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2|)) .$$

Wegen der Kompaktheit von $[a, b] \times [c, d]$ ist f gleichmäßig stetig; vgl. Satz 6.3.3. Wie in Bemerkung 8.3.2 festgestellt, bedeutet das $\lim_{\gamma \to 0+} \rho_f(\gamma) = 0$. Somit ist $(H(., \mathcal{P}))_{\mathcal{P} \in J}$ ein Cauchy-Netz in $\mathcal{B}(I, \mathbb{C})$[13] und konvergiert wegen Lemma 5.3.11 daher in $\mathcal{B}(I, \mathbb{C})$ bzgl. d_∞ – also gleichmäßig – gegen eine Funktion $h : I \to \mathbb{C}$.

[13] Das ist der vollständig metrische Raum aller auf I beschränkten $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen versehen mit d_∞, vgl. Definition 6.6.3.

Aus Symmetriegründen konvergiert auch $(H(\mathcal{R}, .))_{\mathcal{R}\in I}$ in $\mathcal{B}(J, \mathbb{C})$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g : J \to \mathbb{C}$. Insbesondere sind alle Voraussetzungen von Lemma 8.7.1 erfüllt, und wir erhalten

$$\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} H(\mathcal{R}, \mathcal{P}),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) &= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n(\mathcal{P})} (\eta_k - \eta_{k-1}) \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \left(\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j, \beta_k) \right) \\
&= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S\Big(\int_a^b f(s, .)\, ds, \mathcal{R}), \mathcal{P}\Big) \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b f(s, t)\, ds \right) dt .
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt $\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} H(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = \int_a^b \left(\int_c^d f(s, t)\, dt \right) ds$ und damit (8.19). ❑

8.7.11 Bemerkung. Ist eine stetige reell- oder komplexwertige Funktion f auf einem Quader $\prod_{j=1}^p [a_j, b_j] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_p, b_p] \subseteq \mathbb{R}^p$ definiert, so ist wegen Korollar 8.7.9 die Funktion $(t_j)_{j=1}^{p-1} \mapsto \int_{a_p}^{b_p} f(t_1, \dots, t_{p-1}, s)\, ds$ auf $\prod_{j=1}^{p-1} [a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^{p-1}$ stetig.
Nun kann man nach der vorletzten Variablen integrieren, dann nach der vorvorletzten, und so weiter. Schließlich erhält man

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_p}^{b_p} f(t_1, \dots, t_p)\, dt_p \dots dt_1 . \tag{8.22}$$

Wendet man Satz 8.7.10 mehrere Male an, so sieht man, dass es hier nicht auf die Integrationsreihenfolge ankommt.
Man kann das als Ausgangspunkt für die Integrationstheorie für Funktionen, die auf einem Rechteck oder allgemeiner über einem Quader $Q = \prod_{j=1}^p [a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^p$ definiert sind, nehmen, indem man

$$\int_Q f(t)\, dt$$

als (8.22) definiert. Dieser Ausdruck hängt zumindest für stetige f nicht von der Integrationsreihenfolge ab, ist also in einem gewissen Sinne sinnvoll definiert.
Größere Probleme tauchen auf, wenn man etwa das Integral einer stetigen Funktion über einen Kreis definieren will.

Als Folgerung erhält man unmittelbar eine Aussage über die Differenzierbarkeit von Parameterintegralen.

8.7.12 Korollar. *Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ stetig, sodass die Ableitung nach der ersten Variablen für alle $(s, t) \in [a, b] \times [c, d]$ existiert, und dass*

$$(s, t) \mapsto \frac{d}{ds} f(s, t)^{14} ,$$

[14] Dafür werden wir später $\frac{\partial}{\partial s} f(s, t)$ schreiben.

ebenfalls auf $[a,b] \times [c,d]$ *stetig ist. Dann ist die Funktion* $s \mapsto \int_c^d f(s,t)\,dt$ *für* $s \in [a,b]$ *stetig differenzierbar mit der Ableitung*

$$\frac{d}{ds}\int_c^d f(s,t)\,dt = \int_c^d \frac{d}{ds} f(s,t)\,dt\,. \tag{8.23}$$

Beweis. Wegen Satz 8.7.10 und dem zweiten Hauptsatz gilt

$$\int_a^x \int_c^d \frac{d}{ds} f(s,t)\,dt\,ds = \int_c^d \int_a^x \frac{d}{ds} f(s,t)\,ds\,dt = \int_c^d (f(x,t) - f(a,t))\,dt\,.$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Variablen x, so erhält man (8.23). Dass (8.23) stetig von $s \in [a,b]$ abhängt, folgt aus Korollar 8.7.9. ❑

8.7.13 Beispiel. Als Anwendung der Grenzwertvertauschungen wollen wir folgende besonders in der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie wichtige Tatsache zeigen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,. \tag{8.24}$$

Dazu betrachte man ($x \in [0,C]$ mit $C > 0$ beliebig)

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt\,. \tag{8.25}$$

Die Ableitung des Integranden nach x ist $-2xe^{-x^2(t^2+1)}$. Somit ist diese und offensichtlich der Integrand selber auf $[0,C] \times [0,1]$ stetig. Aus Korollar 8.7.12 schließen wir

$$F'(x) = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt\,.$$

Außerdem gilt

$$F(0) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{4} - \arctan(x)\Big|_0^1 = 0\,.$$

Ist andererseits $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$, so gilt $G'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, und aus der Substitutionsregel folgt $F'(x) = G'(x)$. Wegen $G(0) = 0 = F(0)$ folgt $F(x) = G(x)$ und zwar für alle $x \geq 0$, da ja $C > 0$ beliebig war.

Wegen $\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \leq e^{-x^2}$ konvergiert der Integrand in (8.25) für $x \to +\infty$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, und mit Satz 8.7.2 erhält man

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

und damit (8.24).

8.7.14 Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$F(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx = \lim_{\gamma \to 0+} \int_\gamma^1 \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx\,.$$

Diese ist wohldefiniert für $t \in [0, +\infty)$, da obiges uneigentliches Integral für alle $t \geq 0$ konvergiert, wobei es aber nur für $t > 0$ absolut konvergiert.
Man beachte dabei auch, dass 0 nicht wirklich eine Uneigentlichkeitsstelle obigen Integrales ist, da sich die Funktion $g(x) := \frac{\sin x}{x}$ von $(0, +\infty)$ stetig auf $[0, +\infty)$ durch $g(0) := 1 = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x}$ fortsetzen lässt. Also gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_\delta^1 \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx = \int_0^1 g(x) \cdot e^{-xt}\, dx\,.$$

Man betrachte für $\alpha > 1$ die Funktion

$$F_\alpha(t) = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx$$

definiert auf $[0, +\infty)$. Offenbar konvergiert $F_\alpha(t)$ für $\alpha \to +\infty$ punktweise gegen $F(t)$.
Wir bemerken, dass $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ für $x \neq 0$. In der Tat verschwindet die Funktion $\sin x - x$ bei Null, und auf $[0, +\infty)$ hat sie eine Ableitung kleiner gleich Null. Somit ist sie monoton fallend. Also gilt $\sin x - x \leq 0$ und daher $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ für $x \in (0, +\infty)$. Für $x < 0$ gilt diese Ungleichung wegen $\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \left|\frac{\sin(-x)}{-x}\right|$.
Wir wollen nun $\lim_{t \to +\infty} F(t)$ berechnen. Dazu betrachten wir $F(t)$ für $t \in [\delta, +\infty)$ für ein festes $\delta > 0$, und bemerken, dass für $t \geq \delta$

$$\begin{aligned}
|F(t) - F_\alpha(t)| &= \left| \lim_{\gamma \to 0+} \int_\gamma^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx \right| \\
&\leq \lim_{\gamma \to 0+} \int_\gamma^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\delta x}\, dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta e^{-\delta x}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\delta x}\, dx + \int_\alpha^{+\infty} e^{-\delta x}\, dx = \frac{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}} + e^{-\alpha}}{\delta}\,.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck rechts konvergiert für $\alpha \to +\infty$ gegen 0 und zwar unabhängig von $t \in [\delta, +\infty)$. Also konvergiert F_α gegen F gleichmäßig auf $[\delta, +\infty)$.
Andererseits gilt nach Satz 8.7.2 für ein festes $\alpha > 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} F_\alpha(t) &= \lim_{t \to +\infty} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx \\
&= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \lim_{t \to +\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\, dx = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} 0\, dx = 0\,,
\end{aligned}$$

da wegen $\left|\frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\right| \le e^{-t\frac{1}{\alpha}}$ das Netz von Funktionen $x \mapsto \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}$, $x \in [\frac{1}{\alpha}, \alpha]$ für $t \to +\infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.
Setzen wir also $H(t,\alpha) := F_\alpha(t)$ für $(t,\alpha) \in [\delta, +\infty) \times (1, +\infty)$, wobei diese Intervalle jeweils gegen $+\infty$ gerichtet sind, so folgt aus Lemma 8.7.1

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} F_\alpha(t) = \lim_{\alpha\to+\infty} \lim_{t\to+\infty} F_\alpha(t) = \lim_{\alpha\to+\infty} 0 = 0\,.$$

Nun wollen wir $F'(t)$ für $t > 0$ berechnen. Dazu halten wir wieder $\delta > 0$ fest und betrachten $t \in [\delta, +\infty)$. Wir wissen schon, dass $F_\alpha \to F$ und zwar gleichmäßig auf dieser Menge. Betrachten wir für ein festes $\alpha > 1$ das Integral

$$F_\alpha(t) = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\,dx\,,$$

so ist der Integrand stetig in $(x,t) \in [\frac{1}{\alpha}, \alpha] \times [\delta, +\infty)$, und auch die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt} = -\sin x \cdot e^{-xt}$$

des Integranden nach $t \in [\delta, +\infty)$ ist stetig in $(x,t) \in [\frac{1}{\alpha}, \alpha] \times [\delta, +\infty)$. Also gilt nach Korollar 8.7.12

$$F_\alpha'(t) = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} -\sin x \cdot e^{-xt}\,dx\,.$$

Wegen ($t \in [\delta, +\infty)$)

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} -\sin x \cdot e^{-xt}\,dx - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} -\sin x \cdot e^{-xt}\,dx\right| &\le \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{-\delta x}\,dx + \int_\alpha^{+\infty} e^{-\delta x}\,dx \\ &= \frac{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}} + e^{-\alpha}}{\delta}\end{aligned}$$

konvergiert $F_\alpha'(t)$ für $\alpha \to +\infty$ unabhängig von $t \ge \delta$, daher gleichmäßig in $t \in [\delta, +\infty)$, gegen

$$\int_0^{+\infty} -\sin x \cdot e^{-xt}\,dx\,.$$

Gemäß Korollar 8.7.4 ist das somit genau $F'(t)$ und zwar für $t \in (0, +\infty)$, da ja das feste $\delta > 0$ beliebig war. Wegen

$$\int_0^{+\infty} -\sin x \cdot e^{-xt}\,dx = \frac{1}{1+t^2}(t \sin x + \cos x)e^{-xt}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+t^2}, \quad \text{für } t > 0\,,$$

folgt $F(t) = C - \arctan t$ für $t \in (0, +\infty)$ mit einem festen reellen C. Lässt man t gegen $+\infty$ streben, so erhält man $C = \frac{\pi}{2}$.
Schließlich gilt für $t \ge 0$[15]

$$F(t) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-xt}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot e^{-xt} \sin x\,dx\,.$$

[15] Man denke sich wieder $\frac{\sin x}{x}$ bei $x = 0$ stetig fortgesetzt mit dem Wert 1.

Das erste Integral ist gemäß Korollar 8.7.9 stetig in $t \in [0, +\infty)$. Das zweite stimmt nach einer partiellen Integration überein mit

$$\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\frac{t\sin x+\cos x}{1+t^2}e^{-xt}\right]_1^{\beta} - \lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{1}{x^2}\frac{t\sin x+\cos x}{1+t^2}e^{-xt}\,dx\,. \tag{8.26}$$

Man beachte, dass der erste Grenzwert genau

$$\frac{t\sin 1+\cos 1}{1+t^2}e^{-t}$$

ist, und somit auch stetig in $t \in [0, +\infty)$ ist. Wegen $\left|\frac{t\sin x+\cos x}{1+t^2}e^{-xt}\right| \le 1$ gilt für $t \ge 0$

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\frac{t\sin x+\cos x}{1+t^2}e^{-xt}\,dx - \int_1^{\beta}\frac{1}{x^2}\frac{t\sin x+\cos x}{1+t^2}e^{-xt}\,dx\right| \le \int_{\beta}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Also konvergiert das Netz

$$\int_1^{\beta}\frac{1}{x^2}\frac{t\sin x+\cos x}{1+t^2}e^{-xt}\,dx$$

von stetigen (siehe Korollar 8.7.9) Funktion in $t \in [0, +\infty)$ gleichmäßig gegen den zweiten Grenzwert aus (8.26). Somit ist auch dieser stetig (vgl. Korollar 6.6.14), und wir haben die Stetigkeit von $F(t)$ auf ganz $[0, +\infty)$ nachgewiesen. Insbesondere gilt

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = F(0) = \lim_{t\to0+}F(t) = \lim_{t\to0+}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan t\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

8.8 Mittelwertsatz

In Analogie zu den Mittelwertsätzen der Differentialrechnung, Satz 7.2.6 und Satz 7.2.7, gilt der

8.8.1 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derart, dass g und $f \cdot g$ Riemann-integrierbar sind und dass $g(t) \ge 0$ für alle $t \in [a, b]$. Dann existiert ein $\mu \in [\inf_{t\in[a,b]} f(t), \sup_{t\in[a,b]} f(t)]$ mit*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \mu\int_a^b g(t)\,dt\,. \tag{8.27}$$

Ist f stetig, so gibt es dabei ein $x \in [a, b]$, sodass $\mu = f(x)$.

Beweis. Man betrachte die Ungleichung

$$g(s)\inf_{t\in[a,b]}f(t) \le g(s)f(s) \le g(s)\sup_{t\in[a,b]}f(t)\,,$$

und integriere alle Funktionen nach s. Nach Lemma 8.2.9 erfüllen die Integrale dieselbe Ungleichungskette. Daraus folgt unmittelbar (8.27). Für ein stetiges f ist nach dem Zwischenwertsatz $f(x) = \mu$ für ein $x \in [a, b]$. ❏

Für $g(t) = 1$ erhalten wir aus Satz 8.8.1 unmittelbar, dass für ein Riemann-integrierbares $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mu(b-a)\,, \tag{8.28}$$

wobei im Falle der Stetigkeit von f gilt, dass $\mu = f(x)$ für ein gewisses $x \in [a, b]$.
Als Anwendung können wir mit Satz 8.8.1 die Darstellung des Restgliedes im Satz von Taylor, Satz 7.4.2, unter etwas stärkeren Voraussetzungen nochmals ableiten. Dazu benötigen wir zunächst eine Darstellung dieses Restgliedes in Integralform, die auch für komplexwertige Funktion gültig ist.

8.8.2 Proposition. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ aus $C^{n+1}(I)$. Dann gilt für $x, y \in I$*

$$f(x) = f(y) + \frac{f'(y)}{1!}(x-y) + \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n + \int_y^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\,.$$

Beweis. Um diese Formel einzusehen, starten wir mit

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,dt\,,$$

und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_y^x f'(t)\cdot 1\,dt = f'(y)(x-y) + \int_y^x f''(t)\cdot(x-t)\,dt \\ &= f'(y)(x-y) + f''(y)\frac{(x-y)^2}{2} + \int_y^x f'''(t)\cdot\frac{(x-t)^2}{2}\,dt \\ &= \dots = \sum_{k=1}^n f^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!} + \int_y^x f^{(n+1)}(t)\cdot\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\,. \end{aligned}$$

❑

8.8.3 Bemerkung. Ist f reellwertig, so folgt aus Satz 8.8.1, dass sich das Restglied in der Form $f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!}$ für ein geeignetes $\xi \in [\min(x, y), \max(x, y)]$ schreiben lässt; vgl. Satz 7.4.2.

8.9 Übungsaufgaben

8.1 Man betrachte die Funktion $f(x) = x^3 + 1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Wählen Sie $n+1$ äquidistante Stützstellen, und berechnen Sie zur entsprechenden Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ von $[0, 1]$ die Ober- und die Untersummen, sowie $\lim_{n\to\infty} O(\mathcal{Z}_n)$, $\lim_{n\to\infty} U(\mathcal{Z}_n)$.

Hinweis: $4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2$.

8.2 Berechnen Sie das Integral aus dem vorherigen Beispiel mit Hilfe von Riemann-Summen mit $n+1$ äquidistanten Stützstellen, und Zwischenstellen an den Intervallmittelpunkten.

8.3 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und bezeichne $\mathfrak{R}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ gerichtet durch die Feinheit. Zeigen Sie, dass dass für ein Netz $(f(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ mit Werten in einem metrischen Raum folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} f(\mathcal{R}) = y, \text{ also } \forall\epsilon > 0\ \exists\mathcal{R}_0 \in \mathfrak{R} : \forall\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_0 \Rightarrow d(f(\mathcal{R}), y) < \epsilon\,.$$

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall|\mathcal{R}| < \delta \Rightarrow d(f(\mathcal{R}), y) < \epsilon\,.$$

$$\forall(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} |\mathcal{R}_n| = 0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(\mathcal{R}_n) = y\,.$$

8.4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig. Weiters bezeichne $\mathfrak{R}$ die Menge aller Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ gerichtet durch die Feinheit. Zu jedem $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}, (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}) \in \mathfrak{R}$ sei $F(\mathcal{R})$ die Funktion auf $[a, b]$ definiert durch

$$F(\mathcal{R})(x) = f(\alpha_j)\,,$$

wenn $x \in [\xi_{j-1}, \xi_j)$, und $F(\mathcal{R})(b) = f(\alpha_{n(\mathcal{R})})$.

Man zeige, dass dann $\lim_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}} F(\mathcal{R}) = f$ und zwar in $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{C})$ bezüglich der Metrik d_∞, also gleichmäßig.

8.5 Man berechne folgende Integrale:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \frac{dx}{x}, \quad \int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x}\,.$$

8.6 Man berechne folgende Integrale:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\,dx, \quad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x+1}{x^4 - x}\,dx\,.$$

8.7 Man berechne durch geeignete Substitutionen folgende Integrale:

$$\int_{-4}^{1} 5\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx, \quad \int_1^5 \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\,dx\,.$$

8.8 Man berechne folgende Integrale:

$$\int_5^9 \frac{x^3}{4x-1}\,dx, \quad \int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx\,.$$

8.9 Man berechne die Integrale:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx, \quad \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x}\,dx\,.$$

8.10 Man berechne

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x + \tan x}{1+\cos x}\,dx\,.$$

8.11 Zeigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung (Ober-, Unter-, Riemann-Summen), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \qquad (k, n \in \mathbb{N})\,.$$

Hinweis: $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ ist eine Stammfunktion von x^k und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, wenn F eine Stammfunktion von f ist.

8.12 Für $m, n \in \mathbb{Z}$ berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \exp(int) \cdot \exp(-imt)\,dt\,,$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\cdot\sin(mt)\,dt, \quad \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cdot\cos(mt)\,dt, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nt)\cdot\cos(mt)\,dt\,.$$

Hinweis: Es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, wenn F eine Stammfunktion von f ist. Unterscheiden Sie dabei den Fall $m = n$ und $m \neq n$. Um Rechenarbeit zu sparen, kann man die letzten drei Integrale auf das erste zurück führen.

8.13 Man zeige:

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}(\cos nt + \cot\frac{t}{2}\cdot\sin nt)\,,$$

sowie $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = \pi$.

8.14 Sei $f(x)$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Wir nehmen an, dass $f(x)$ stetig und 1-periodisch ist, also dass $f(x) = f(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass $f(x)$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Weiters beweise man, dass für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Gleichheit gilt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+1} f(x)\,dx\,.$$

8.15 Sind folgende uneigentliche Integrale absolut konvergent oder nicht?

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{e^{2x} - e^x}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{(x^2+1)^3}\,dx\,.$$

Hinweis zur Divergenz: Wenn ein uneigentliches Integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ divergiert, und wenn $|g(x)| \geq |f(x)|$, dann divergiert auch $\int_a^b |g(x)|\,dx$ (Divergente Minorante).

8.16 Man bestimme die Fläche unter der Kurve $\frac{1}{4x^2-12x+13}$, wenn x in $[-1, 2]$ läuft.

8.17 Man berechne mit Hilfe eines Riemann-Integrals den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius $r > 0$.

Weiters berechne den Flächeninhalt folgender Teilmenge der Ebene:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq x^2\}\,.$$

8.18 Welche folgender Integrale sind eigentliche bzw. uneigentliche Riemann-Integrale? Weiters berechne man diese ($r > 0$):

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9x - 4x^2}}\,dx, \quad \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx, \quad \int_1^3 \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{2 + x + \sqrt{x^2 + 4x + 5}}\,dx\,.$$

Hinweis: Zum letzten Integral: Substituieren Sie zuerst, sodass $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 = t^2+1$.

8.19 Für welche $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existieren die (uneigentlichen) Integrale:

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx, \quad \int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx, \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha\,dx\,.$$

Im Falle der Existenz berechne man diese! Weiters berechne man (falls existent)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt\,.$$

8.20 Man berechne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - 2t + 2) \exp(-|t| \cdot (2 + i\pi))\,dt\,.$$

Weiters betrachte man den Betrag $f(x)$ des Integranden als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Man bestimme lokal und globale Extrema, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Wo ist f monoton wachsend, fallend, wo konvex und wo konkav?

8.21 Überprüfe, ob folgende Integrale absolut konvergieren:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{x \sin x}}\,dx\,.$$

8.22 Man berechne ($a > 0,\ b \in \mathbb{R},\ w = -a + ib$):

$$\int_0^{\infty} e^{wt}\,dt\,,$$

sowie

$$\int_0^{\infty} e^{wt} \cos bt\,dt, \quad \int_0^{\infty} e^{wt} \sin bt\,dt\,.$$

8.23 Man berechne das uneigentliche Integral $\int_0^{+\infty}(t^2+2t)\exp(wt)\sin t\,dt$ mit $w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} w < 0$.

8.24 Man berechne

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^6+i}\,dx, \quad \int_0^1 x^m (\log x)^n\,dx, \quad n, m \in \mathbb{N}\,.$$

8.25 Sei $\alpha \geq 0$, und I_α sei definiert als

$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,dx\,.$$

Man finde durch partielle Integration eine Relation zwischen I_α und $I_{\alpha+2}$. Man zeige mit Hilfe dieser Rekursionsformel, dass für $k \in \mathbb{N}$ folgende zwei Formeln gelten:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\,,$$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\,.$$

8.26 Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $k \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x\,.$$

Daraus und aus dem vorherigen Beispiel leite man folgende Ungleichungen her:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k)}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k+1)} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k) \cdot 2} \leq \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2k-2)}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)}\,.$$

Nun forme man diese Ungleichung so um, sodass in der Mitte nur noch $\frac{\pi}{2}$ steht, und man leite daraus die *Wallische Produktformel* her:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdots \cdot (2k)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \cdots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{1}{2k}\,.$$

8.27 Sei $f(x)$ auf $[0, n]$ stetig differenzierbar. Man zeige durch eine Zerlegung von $\int_0^n$ in $\sum_{j=1}^n \int_{j-1}^j$ und unter Verwendung der partiellen Integration, dass sich die Differenz von $\sum_{k=1}^n f(k)$ und $\int_0^n f(x)\,dx$ berechnen lässt durch

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n (x - \lfloor x \rfloor) f'(x)\,dx\,.$$

Außerdem zeige man:

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \int_0^n (x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}) f'(x)\,dx\,.$$

8.28 Man zeige mit Hilfe des vorherigen Beispiels, dass der Limes

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$$

existiert.

Anmerkung: Durch die Existenz dieses Grenzwertes lässt sich angeben, wie schnell die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ gegen $+\infty$ konvergiert, nämlich genauso schnell wie $\ln n$ es für $n \to \infty$ tut. Die Zahl γ wird *Euler-Mascharonische Konstante* genannt; ihr ungefährer Wert ist $0,577215....$

8.29 Sei $f(x)$ auf $[0, n]$ zweimal stetig differenzierbar. Man zeige, dass sich die Differenz von $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ und $\int_0^n f(x)\,dx$ berechnen lässt durch

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(x)\,dx = \frac{f(n) - f(0)}{2} - \int_0^n \phi(x) f''(x)\,dx\,,$$

wobei $\phi(x) = \frac{(x-\lfloor x\rfloor)^2-(x-\lfloor x\rfloor)}{2}$.

8.30 Man wende voriges Beispiel auf $f(x) = \ln(x + 1)$ an, und zeige, dass das uneigentliche Integral

$$a := -\int_0^\infty \phi(x) f''(x)\,dx + 1$$

existiert. Man zeige weiters, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} \ln((n + 1)!) - (n + \frac{3}{2})\ln(n + 1) + n + 1 = \lim_{n\to\infty} \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln n + n\,.$$

8.31 Man zeige, dass für den Grenzwert a aus dem vorherigen Beispiel

$$e^a = \lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

gilt. Man setze $b := e^a$, und zeige weiters, dass $b = \sqrt{2\pi}$.

Hinweis: Man zeige mit Hilfe des Wallischen Produkts

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}}{b_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

wobei $b_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. Man verwende dabei auch die Tatsache, dass

$$\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots(2k)}\,.$$

Anmerkung: Mit diesem Beispiel erhält man die *Stirlingsche Formel*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1\,.$$

Es gilt somit die asymptotische Gleichung $n! \cong n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

8.32 Sei $\mathcal{Q}[a,b]$ die Menge alle stückweise stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$. Weiters sei $\mathcal{N}$ die Menge aller $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, sodass $f(t) \neq 0$ für nur endlich viele t.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{Q}[a,b]$ (versehen mit punktweiser Addition und Multiplikation) ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{N}$ ein Unterraum davon ist. Weiters zeige man, dass $(c, f + \mathcal{N}) \mapsto F$, wobei $F(x) = c + \int_a^x f(t)\,dt$ eine wohldefinierte, lineare und bijektive Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathcal{Q}[a,b]/\mathcal{N}$ auf

$$\{F \in C[a,b] : F \text{ ist stückweise stetig differenzierbar auf } [a,b]\}.$$

Für die Definition von stückweise stetig differenzierbar siehe Definition 11.1.9. Bestimmen Sie auch die Umkehrfunktion von $(c, f + \mathcal{N}) \mapsto F$!

8.33 Geben Sie eine Riemann-integrierbare aber nicht stückweise stetige Funktion f an und führen Sie aus, warum f diese Eigenschaft hat!

Hinweis: Betrachten Sie etwa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 1$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$, $f(t) = \frac{1}{2}$ auf $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $f(t) = \frac{1}{4}$ auf $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, usw. . Bauen Sie zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung von $[0,1]$, sodass die Differenz von Ober- und Untersumme kleiner als ϵ wird.

8.34 Man berechne

$$\lim_{a\to 0} \int_0^1 \frac{1}{1 + a\sin^2(x)}\,dx.$$

8.35 Man berechne

$$\lim_{x\to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{x\to 0+} \int_0^R .. = \int_0^R \lim_{x\to 0+} ..$ für jedes feste reelle $R \geq 0$. Dann definiere man $H : [0, +\infty) \times (0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $H(R, x) := \int_0^R \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$, wobei $[0, +\infty)$ durch $\leq$ und $(0, 1]$ durch $\geq$ gerichtet sind. Nun weise man nach, dass sich Lemma 8.7.1 anwenden lässt.

8.36 Man betrachte die Funktionenfolge

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x-k}.$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Man zeige, dass $S_N(x)$ auf jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $h(x)$ konvergiert.

Man berechne $h(k + \frac{1}{2})$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Schließlich zeige man $h(x) = \pi \cot(\pi x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, indem man ihre Ableitungen vergleicht. Man verwende dazu Beispiel 6.29 und 6.30.

Hinweis: Es gilt $S_N(x) = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x^2-k^2}$. Begründung für Vertauschen von Limes und Differenzieren!

8.37 Durch Betrachtung der Ableitung leite man die Taylorreihe zur Funktion arctan mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ her.

Anmerkung: Zusammen mit dem Abelschen Grenzwertsatz, Satz 6.12.1, folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

8.38 Durch Betrachtung der Ableitung leite man die Taylorreihe zur Funktion areatanh mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ her.

8.39 Man berechne
$$\int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_1^2 z^{x+y}\, dx \right) dy \right) dz\,,$$
und begründe alle vorgenommenen Vertauschungen.

8.40 Für $x \in (0, +\infty)$ zeige man, dass folgendes uneigentliche Integral absolut konvergiert:
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt\,.$$
Weiters zeige man, dass $\Gamma(x)$ stetig von x abhängt.

Hinweis: Sei $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$ fest. Man zeige, dass $f_n(x) := \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-t} t^{x-1}\, dt$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a, b]$ ist, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $\Gamma(x)$ konvergiert. Dazu zeige man, dass $|e^{-t} t^{x-1}| \le K_1 t^{a-1},\ t \in (0, 1]$ und $|e^{-t} t^{x-1}| \le K_2 \frac{1}{t^2},\ t \in [1, +\infty)$ mit irgendwelche Konstanten K_1, K_2.

Allgemeiner Tipp, wie man $f(t) \le Cg(t)$ mit irgendeinem $C > 0$ für reellwertige, nicht negative und stetige Funktionen f, g auf einem Intervall $[a, b)$ mit $g(t) \neq 0$ herleitet:

Gilt $\lim_{t \to b-} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$, so gibt es insbesondere zu $\epsilon = 1$ ein $t_0 \in [a, b)$, sodass $t \ge t_0 \Rightarrow \frac{f(t)}{g(t)} \le 1$. Da die Funktion $\frac{f(t)}{g(t)}$ auf dem kompakten Intervall $[a, t_0]$ stetig ist, ist sie dort beschränkt, d.h. $\frac{f(t)}{g(t)} \le C$ für ein $C > 0$, das ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch $C \ge 1$ erfüllt. Also gilt $\frac{f(t)}{g(t)} \le C$ auf ganz $[a, b)$.

8.41 Man zeige, dass für $x > 0,\ n \in \mathbb{N}$:
$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x),\ \ \Gamma(n) = (n - 1)!\,.$$

8.42 Für $x \in (0, +\infty)$ zeige man, dass folgendes uneigentliche Integral absolut konvergiert:
$$g_k(x) := \int_0^\infty e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1}\, dt\,.$$
Weiters zeige man, dass die g_k stetig sind, dass $\int_1^y g_k(t)\, dt = g_{k-1}(y) - g_{k-1}(1)$, und dass daher g_k die k-te Ableitung der Gammafunktion ist.

Hinweis: Sei $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$ beliebig. Man zeige, dass $(\alpha \in (1, +\infty), x \in [a, b])$ $F(\alpha, x) := \int_{\frac{1}{\alpha}}^\alpha e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1}\, dt$ gleichmäßig auf $[a, b]$ konvergiert, wenn $\alpha \to +\infty$. Dazu zeige man, dass $|e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1}| \le K_1 t^{\frac{3}{4}a-1},\ t \in (0, 1]$ und $|e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1}| \le K_2 \frac{1}{t^2},\ t \in (1, +\infty)$ mit irgendwelchen Konstanten K_1, K_2.

8.43 Sei x nun nicht nur in $(0, +\infty)$, sondern allgemeiner in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Man zeige, dass dann $\Gamma(x)$ ebenfalls konvergiert, und zwar in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, dass diese Funktion stetig auf ganz $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ist, und dass $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ gilt.

Schließlich stelle man $\operatorname{Re} \Gamma(z)$ und $\operatorname{Im} \Gamma(z)$ getrennt dar.

8.44 Man berechne $\Gamma(\frac{1}{2})$!