Kapitel 7

Differentialrechnung

Bewegt sich ein Objekt, und bezeichnet $s(t)$ den zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg, so erhält man die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t, indem man

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

betrachtet, und h immer kleiner macht. Um derlei Betrachtungen, die in den Naturwissenschaften eine wichtige Rolle spielen, einen mathematisch exakten Hintergrund zu geben, führen wir den Begriff der Ableitung ein.

7.1 Begriff der Ableitung

7.1.1 Definition. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ und sei $x \in (a, b)$. Dann heißt f *differenzierbar* im Punkt x, falls der Grenzwert

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ existiert. Dieser heißt dann die *Ableitung* von f an der Stelle x, und man schreibt dafür $f'(x)$ oder $\frac{df}{dt}(x)$.
Ist f zumindest auf $[x, b)$ definiert[1], und existiert

$$\lim_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, so spricht man von rechtsseitiger Differenzierbarkeit im Punkt x und schreibt $f'(x)^+$ dafür.
Entsprechend definiert man die linksseitige Differenzierbarkeit im Punkt x und die linksseitige Ableitung $f'(x)^-$.

Die Schreibweise $\frac{df}{dt}(x)$ erklärt sich aus der Interpretation der Ableitung als Grenzfall des Zuwachses von f dividiert durch den Zuwachs von t.

[1] Klarerweise könnte f sogar auf einer noch größeren Menge definiert sein.

Anschaulich ist die Ableitung $f'(x)$ die Steigung der Tangente – in der folgenden Grafik als durchgehende Gerade gezeichnet – am Punkt $(x, f(x))$. Diese Steigung der Tangente erhält man als Grenzwert der Steigungen der Verbindungsgeraden von $(x, f(x))$ und $(t, f(t))$ – als strichlierte Gerade gezeichnet – für $t \to x$.

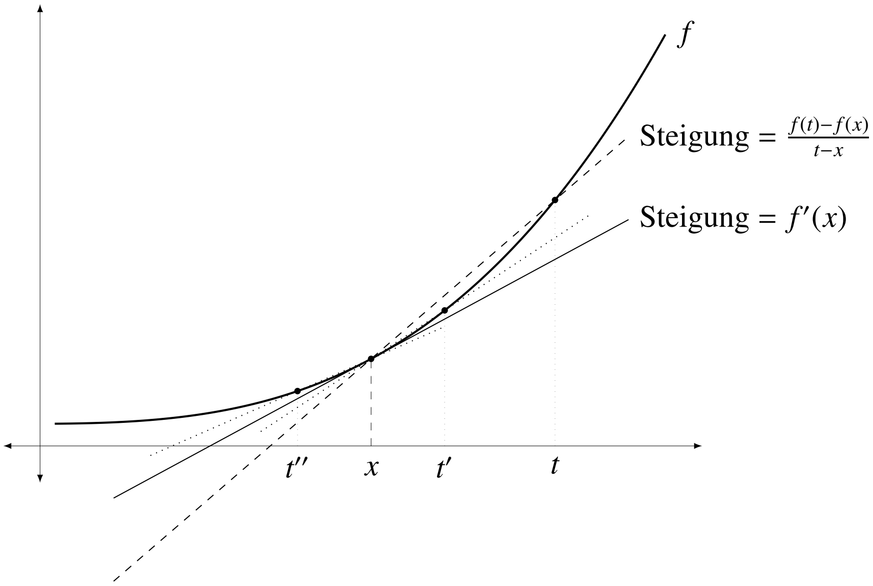


Abbildung 7.1: Ableitung als Grenzwert der Differenzenquotienten

7.1.2 Fakta.

1. Gemäß (5.25) existiert ein Grenzwert $\lim_{t \to x} h(t)$ genau dann, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim_{t \to x-} h(t)$ und $\lim_{t \to x+} h(t)$ existieren und übereinstimmen.

   Also ist f bei $x \in (a, b)$ genau dann differenzierbar, wenn f bei x links- und rechtsseitig differenzierbar ist und $f'(x)^-$ mit $f'(x)^+$ übereinstimmt. In diesem Fall ist $f'(x)^- = f'(x) = f'(x)^+$.

2. Da nach Lemma 5.3.7 genau dann $y = \lim_{t \to x} h(t)$, wenn für jede gegen x konvergente Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \neq x, n \in \mathbb{N}$, folgt, dass $h(t_n) \to y$, ist f bei x genau dann differenzierbar mit Ableitung $f'(x)$, wenn für jede solche Folge

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(t_n) - f(x)}{t_n - x} .$$

   Entsprechend lassen sich die einseitigen Ableitungen charakterisieren.

3. Entweder aus der letzten Behauptung oder aus (5.6) folgt, dass die Ableitung $f'(x)$ im Falle ihrer Existenz nur vom Aussehen von f lokal bei x, also von $f|_{(x-\delta, x+\delta)}$ für ein festes, aber beliebig kleines $\delta > 0$ abhängt. Entsprechendes gilt für einseitige Ableitungen.

4. Wegen (5.11) ist eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ genau dann differenzierbar bei $x \in (a, b)$, wenn $\operatorname{Re} f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es sind, wobei

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x) \,. \tag{7.1}$$

Entsprechendes gilt für einseitige Ableitungen.
Man kann auch die Differenzierbarkeit von $\mathbb{R}^p$-wertigen Funktionen f definieren. Dabei wird sich herausstellen, dass solche Funktionen genau dann differenzierbar sind, wenn alle Komponentenfunktionen $\pi_j \circ f$ differenzierbar sind.

7.1.3 Bemerkung. Ist f definiert auf einer offenen Teilmenge der komplexen Zahlen und bildet nach $\mathbb{C}$ hinein ab, so kann man analog $f'(w) := \lim_{z \to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ betrachten. Existiert dieser Grenzwert, so heißt f in w *komplex differenzierbar*. Wir werden diese komplexe Differenzierbarkeit in einem späteren Kapitel diskutieren.

7.1.4 Beispiel.

(i) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) ist die konstante Funktion $f(t) = \lambda,\ t \in \mathbb{R}$, an jeder Stelle x differenzierbar, und ihre Ableitung im Punkt x ist gleich 0.

(ii) Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ ist die reellwertige Funktion $f(t) = t^n,\ t \in \mathbb{R}$, auch an jedem Punkt x differenzierbar, sich folgendermaßen $f'(x)$ berechnen lässt:

$$\lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + \ldots + tx^{n-2} + x^{n-1})}{t - x} = nx^{n-1} \,.$$

(iii) Die stetige Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} \,, & \text{falls } t \neq 0 \,, \\ 0 \,, & \text{falls } t = 0 \,, \end{cases} \tag{7.2}$$

ist im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar. Denn

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t \sin \frac{1}{t} - 0}{t - 0} = \sin \frac{1}{t}$$

hat für $t \to 0$ keinen Grenzwert.

(iv) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Für die Einschränkung $f|_{(-R,R)} : (-R, R) \to \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} \,.$$

Diese Potenzreihe rechts konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ es tut und hat somit auch Konvergenzradius R. Sie ist daher stetig in t. Also ist obiger Limes gleich $\lim_{t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 0^{n-1} = a_1$. Später werden wir $f'(x)$ für alle $x \in (-R, R)$ berechnen.

(v) Sei $w \in \mathbb{C}$ und definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $f(x) = \exp(wx)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{\exp(wt) - \exp(wx)}{t-x} = \exp(wx) \lim_{t\to x} \frac{\exp(w(t-x)) - 1}{t-x} \\ &= \exp(wx) \lim_{\tau\to 0} \frac{\exp(w\tau) - 1}{\tau} = w\exp(wx)\,, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus (iv) folgt, da der Koeffizient a_1 in der Potenzreihe $\exp(w\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\tau^n$ eben w ist. Für $w = 1$ erhält man

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

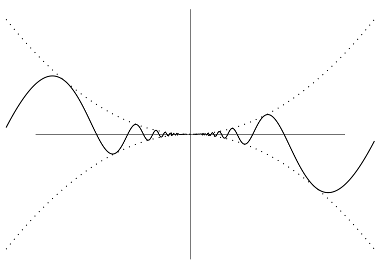
(vi) Als weitere Anwendung des vorherigen Beispiel berechnen wir

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{t\to x} \frac{\sin(t) - \sin(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{\operatorname{Im}\exp(it) - \operatorname{Im}\exp(ix)}{t-x} \\ &= \operatorname{Im}\left(\lim_{t\to x} \frac{\exp(it) - \exp(ix)}{t-x}\right) = \operatorname{Im}(i\exp(ix)) = \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \cos(x)\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Stetigkeit von $z \mapsto \operatorname{Im} z$ verwendet. Genauso erhält man $\cos'(x) = -\sin(x)$.

(vii) Für $t \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion f

$$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin\frac{1}{t}\,, & \text{falls} \quad t \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{falls} \quad t = 0\,. \end{cases}$$



Die Funktion f ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar mit Ableitung 0, da

$$\frac{f(t) - f(0)}{t-0} = t\sin\frac{1}{t} \xrightarrow{t\to 0} 0\,.$$

An einer Stelle $x \neq 0$ ist f differenzierbar und es gilt wie wir später sehen werden

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,.$$

7.1.5 Lemma. *Ist f im Punkt x differenzierbar, so ist sie dort stetig.*

Beweis. Aus $\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \alpha$ folgt

$$\lim_{t\to x} (f(t) - f(x)) = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \cdot (t-x) = \alpha \cdot 0 = 0\,. \qquad \square$$

7.1.6 Bemerkung. Wie man am Beispiel der Funktion f aus (7.2) sieht, gilt die Umkehrung von Lemma 7.1.5 nicht.

7.1.7 Satz. *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ beide differenzierbar im Punkt $x \in (a, b)$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ sind dann $\alpha f + \beta g, fg$ und, im Falle $g(x) \neq 0$, auch $\frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar mit den Ableitungen*

- $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *(*Produktregel*)*,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(*Quotientenregel*)*.

Entsprechende Regeln gelten auch für einseitige Ableitungen.

Beweis.

$$\lim_{t \to x} \frac{(\alpha f + \beta g)(t) - (\alpha f + \beta g)(x)}{t - x} = \alpha \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \beta \lim_{t \to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} .$$

Da f nach Lemma 7.1.5 bei x stetig ist, folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. Abschnitt 5.3)

$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t - x} = \lim_{t \to x} \left(f(t) \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right) + \lim_{t \to x} \left(\frac{f(t) - f(x)}{t - x} g(x) \right) =$$

$$\lim_{t \to x} f(t) \cdot \lim_{t \to x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} + g(x) \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) .$$

Die letzte Quotientenregel folgt ebenfalls aus der Stetigkeit und den Rechenregeln für Grenzwerte, indem man in

$$\frac{\frac{f(t)}{g(t)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)} \cdot \left(g(x) \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x) \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right) .$$

$t \to x$ streben lässt. ❑

7.1.8 Beispiel. Wir haben schon gesehen, dass $f(t) = t^n$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = nx^{n-1}$. Um das auch für $n \in -\mathbb{N}$ zu zeigen, verwende man die Quotientenregel:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{|n|}} \right)' = -\frac{(x^{|n|})'}{x^{2|n|}} = nx^{|n|-1-2|n|} = nx^{n-1} .$$

Weiters ist eine rationale Funktion in jedem Punkt, wo der Nenner nicht verschwindet, differenzierbar.

7.1.9 Satz (Kettenregel)**.** *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ reellwertig und $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, sodass $f(a, b) \subseteq (c, d)$. Ist f bei einem $x \in (a, b)$ und g bei $f(x)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ bei x differenzierbar mit der Ableitung*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) .$$

Beweis. Die vorausgesetzte Differenzierbarkeit von g bei $f(x)$ lässt sich dadurch charakterisieren, dass die Funktion $\psi : (c,d) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$,

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{g(s)-g(f(x))}{s-f(x)}, & \text{falls } s \neq f(x), \\ g'(f(x)), & \text{falls } s = f(x), \end{cases}$$

bei $f(x)$ stetig ist; vgl. Proposition 6.1.4. Somit gilt für alle $t \in (a,b) \setminus \{x\}$ – auch für die t mit $f(x) = f(t)$ –

$$\frac{(g \circ f)(t) - (g \circ f)(x)}{t - x} = \psi(f(t)) \cdot \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Wegen dem letzten Punkt in Proposition 6.1.4 und Lemma 7.1.5 folgt

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{t \to x} \psi(f(t)) \cdot \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \psi(\lim_{t \to x} f(t)) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \qquad \square$$

7.1.10 Bemerkung. Es gelten diverse einseitige Varianten von Satz 7.1.9, deren Beweise fast gleich verlaufen:
Ist $f : (a,b) \to (c,d],\ g : (c,d] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ x \in (a,b),\ f(x) = d$ sowie f bei x differenzierbar und g bei $f(x) = d$ linksseitig differenzierbar, so folgt $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))^- \cdot f'(x)$.
Ist $f : [a,b) \to (c,d)$, $g : (c,d) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, sowie f bei a rechtsseitig differenzierbar und g bei $f(a)$ differenzierbar, so folgt $(g \circ f)'(a)^+ = g'(f(a)) \cdot f'(a)^+$.
und so weiter.

7.1.11 Beispiel. Sei $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0$, wie in Beispiel 7.1.4, (*vii*). Durch Anwendung der Produkt- und der Kettenregel ergibt sich ($x \neq 0$)

$$f'(x) = (x^2)' \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(\cos \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

7.1.12 Satz. *Sei $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektiv und streng monoton, und bezeichne mit $g : (c,d) \to (a,b)$ ihre Umkehrfunktion. Ist f an einer Stelle x differenzierbar und gilt $f'(x) \neq 0$, so ist g an der Stelle $f(x)$ differenzierbar, und es gilt*

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Beweis. Wegen Korollar 6.5.3 sind f und g beide stetig. Ist daher $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $f(x)$ konvergente Folge aus $(c,d) \setminus \{f(x)\}$ und setzt man $\tau_n := g(t_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(a,b) \setminus \{x\}$ gegen $x = g(f(x))$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(t_n) - g(f(x))}{t_n - f(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(t_n) - x}{f(g(t_n)) - f(x)} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(\tau_n) - f(x)}{\tau_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}. \qquad \square$$

Auch bei obigem Satz gelten entsprechende Aussagen für einseitige Ableitungen, wenn f und damit auch g an einem der Ränder / beiden Rändern definiert ist.

7.1.13 Beispiel. Betrachte die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Diese ist stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Für ein festes $y \in \mathbb{R}^+$ und das entsprechende $x \in \mathbb{R}$ mit $y = \exp(x)$ folgt

$$\ln'(y) = \ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}\,.$$

7.1.14 Definition. Sei f eine reell- oder komplexwertige Funktion definiert auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Ist f an allen $x \in I$ differenzierbar, wobei im Falle, dass x der linke bzw. rechte Intervallrand von I ist und dieser in I liegt, die rechts- bzw. linksseitige Differenzierbarkeit gemeint ist, so nennt man die Funktion

$$f' : \begin{cases} I & \to \quad \mathbb{R}\,(\mathbb{C})\,, \\ x & \mapsto \quad f'(x)\,. \end{cases}$$

Ableitung von f auf I. Ist x der linke bzw. rechte Intervallrand von I und liegt dieser in I, so ist unter $f'(x)$ die rechts- bzw. linksseitige Ableitung an der Stelle x zu verstehen.

Einer Funktion f wird also eine weitere Funktion zugeordnet, welche die aus f abgeleitete Funktion f' genannt wird. Ihr Wert an einer Stelle x ist gerade der Limes des Differenzenquotienten von f bei x. Es ist also sinnvoll, von Eigenschaften der Funktion f', wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit zu sprechen. In Beispiel 7.1.4, (*vii*), haben wir gesehen, dass die Ableitung f' nicht notwendigerweise stetig sein muss.

7.1.15 Definition.

- Sei f eine reell- oder komplexwertige Funktion definiert auf einem reellen Intervall I, sodass die Ableitung f' von f auf ganz I existiert. Ist die Ableitung f' an einer Stelle x differenzierbar, so bezeichnet man $(f')'(x)$ mit $f''(x)$ und spricht von der zweiten Ableitung von f an der Stelle x. Im Falle, dass x Intervallrand ist, sei wieder die entsprechende einseitige Ableitung gemeint.

- Ausgehend von $f^{(0)} := f$ definiert man *höhere Ableitungen* rekursiv durch

  $$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x) \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

  wann immer $f^{(n-1)}$ auf I definiert ist und bei x differenzierbar ist. Die Funktion f heißt bei x dann *n-mal differenzierbar*.

- Existiert $f^{(n)}$ an allen Stellen $x \in I$ und ist $f^{(n)}$ stetig auf I, so spricht man von einer n-mal *stetig differenzierbaren* Funktion. Die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I wird mit $C^n(I)$ bezeichnet.

- $C^0(I)$ steht für die Menge $C(I)$ aller stetigen reell- oder komplexwertigen Funktion definiert auf dem Intervall I.

- Mit $f \in C^\infty(I)$ wollen wir zum Ausdruck bringen, dass f auf I beliebig oft differenzierbar ist.

Aus der Produktregel erhält man mittels vollständiger Induktion die oft nützliche Formel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} .$$

7.1.16 Beispiel.

(i) Für $f(x) = x^3 - 2x$ gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6,\ f''''(x) = 0,\ f^{(5)}(x) = 0, \ldots$$

Man sieht genauso, dass jedes Polynom p beliebig oft differenzierbar ist. Wenn n den Grad von p bezeichnet, dann gilt $p^{(n+1)}(x) = p^{(n+2)}(x) = \ldots = 0$.

(ii) Sei f die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 , & \text{falls } x \geq 0 , \\ -x^2 , & \text{falls } x < 0 . \end{cases}$$

Die Ableitung von f ist $f'(x) = 2|x|$. Die zweite Ableitung existiert also an der Stelle $x = 0$ nicht.

7.2 Mittelwertsätze

7.2.1 Definition. Sei $\langle X, d_X \rangle$ ein metrischer Raum, $E \subseteq X$ und $f : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f hat ein *lokales Maximum* in einem Punkt $x \in E$, falls

$$\exists\, \delta > 0 : f(x) \geq f(t) \text{ für alle } t \in E \cap U_\delta(x) .$$

Analog definiert man ein *lokales Minimum*. Ist x ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum, so spricht man von einem *lokalen Extremum*.

Man beachte den Unterschied zum Begriff des Maximums. Das ist eine Stelle $x \in E$, welche $f(x) \geq f(t)$ für alle $t \in E$ erfüllt, also nicht nur lokal bei x, sondern global. Man spricht dann von einem *globalen Maximum*. Analoge Bedeutung hat das *globale Minimum* bzw. das *globale Extremum*. Natürlich ist ein globales Extremum/Minimum/Maximum stets auch ein lokales.

7.2.2 Lemma. *Hat $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist f bei x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass x ein lokales Maximum ist. Den Fall eines lokalen Minimums behandelt man analog. Wählt man $\delta > 0$ wie in Definition 7.2.1, so gilt $f(x) \geq f(t)$ für alle $|t - x| < \delta$. Im Falle $t > x$ führt das auf die Ungleichung

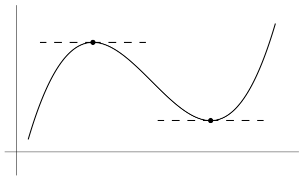
$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq 0 ,$$

und daher $f'(x) = \lim_{t\to x+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq 0$. Ist jedoch $t < x$, so impliziert $f(x) \geq f(t)$

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0\,.$$

Also muss auch $f'(x) = \lim_{t\to x-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0$. ❑

Geometrisch bedeutet Lemma 7.2.2, dass an einem lokalen Extremum die Tangente an die Kurve $y = f(x)$, falls eine solche existiert, waagrecht liegen muss.



7.2.3 Korollar (Satz von Rolle)**.** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar. Gilt* $f(a) = f(b) = 0$*, so gibt es ein* $\zeta \in (a,b)$*, sodass* $f'(\zeta) = 0$.

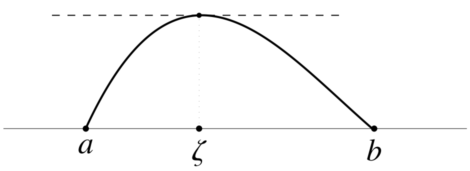


Abbildung 7.2: Veranschaulichung des Satzes von Rolle

Beweis. Aus Korollar 6.1.14 wissen wir, dass f auf $[a,b]$ ein Maximum und ein Minimum besitzt. Also gibt es $x_-, x_+ \in [a,b]$, sodass

$$f(x_-) \leq f(t) \leq f(x_+) \quad \text{für alle} \quad t \in [a,b]\,.$$

Sind beide x_- und x_+ Randpunkte, also $x_-, x_+ \in \{a,b\}$, dann muss $f(t) = 0$ für alle $t \in [a,b]$ und daher $f'(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$ gelten.
Ist x_- in (a,b) enthalten, so muss nach Lemma 7.2.2 $f'(x_-) = 0$. Im Falle $x_+ \in (a,b)$ schließt man genauso. ❑

7.2.4 Korollar (*)**.** *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und n-mal differenzierbar auf* (a,b)*. Weiters habe f mindestens* $n+1$ *Nullstellen in* $[a,b]$*. Dann existiert* $\xi \in (a,b)$ *mit* $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Beweis. Der Fall $n = 1$ folgt sofort aus Korollar 7.2.3. Angenommen der Satz gelte für $n-1$. Wir zeigen ihn für n.
Nach Korollar 7.2.3 liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f'. Also hat f' mindestens n Nullstellen. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein ξ mit $f^{(n)}(\xi) = (f')^{(n-1)}(\xi) = 0$. ❑

7.2.5 Beispiel (*). Wir wollen zeigen, dass die Gleichung

$$(1 - \ln x)^2 = x(3 - 2\ln x)$$

in $(0, +\infty)$ genau zwei Lösungen hat. Dazu betrachten wir $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (1 - \ln x)^2 - x(3 - 2\ln x)\,.$$

Es gilt zu zeigen, dass f genau zwei Nullstellen hat. Setzt man $x = 1$, so folgt $f(1) = -2 < 0$. Andererseits folgt wegen $\lim_{x\to 0+} x(3 - 2\ln x) = 0$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty\,.$$

Aus $f(x) \geq x(2\ln x - 3) \geq x$ für $x \geq \exp(2)$ schließen wir auf

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Insbesondere gibt es $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \xi < 1 < \eta < +\infty$, sodass $f(\xi) > 0, f(\eta) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz muss es einen Punkt $\alpha \in (\xi, 1)$ und einen Punkt $\beta \in (1, \eta)$ geben, sodass $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$. Also hat f mindestens zwei Nullstellen.
Um zu zeigen, dass es nicht mehr Nullstellen sein können, berechnen wir

$$f'(x) = 2(\ln x - 1)\frac{1}{x} + 2\ln x - 1, \quad f''(x) = 2\frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x - 1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{4 - 2\ln x + 2x}{x^2}\,.$$

Für $x \in (0, 1]$ ist $\ln x \leq 0$ und somit $f''(x) > 0$. Für $x \in (1, +\infty)$ gilt wegen $x > \ln x$ auch $f''(x) > 0$. Also hat f'' keine Nullstelle. Nach dem Satz von Rolle kann f' höchstens eine und infolge f höchstens zwei Nullstellen haben; vgl. Korollar 7.2.4.

7.2.6 Satz (Mittelwertsatz). *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, so existiert ein Punkt $\zeta \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta)\,.$$

Beweis. Die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F(t) := f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)\,,$$

ist auf $[a, b]$ stetig (vgl. Korollar 6.1.8) und auf (a, b) differenzierbar (vgl. Beispiel 7.1.4, (*i*), (*ii*) und Satz 7.1.7) und erfüllt $F(a) = F(b) = 0$. Korollar 7.2.3 auf F angewandt liefert uns ein $\zeta \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \qquad \square$$

Für $g(t) = t$ ist Satz 7.2.6 ein Spezialfall folgender Verallgemeinerung.

7.2.7 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Weiters gelte $g'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$. Dann existiert eine Stelle $\zeta \in (a, b)$ mit*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}. \tag{7.3}$$

Beweis. Zunächst existiert nach Satz 7.2.6 ein $x \in (a, b)$ mit $g(b) - g(a) = g'(x)(b - a)$, woraus wir $g(b) - g(a) \neq 0$ schließen. Somit ist die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(t) - g(a)\right),$$

wohldefiniert, stetig und auf (a, b) differenzierbar, wobei

$$F'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(t).$$

Weiters gilt $F(a) = F(b) = 0$. Somit gibt es nach Korollar 7.2.3 ein $\zeta \in (a, b)$ mit $F'(\zeta) = 0$, was aber genau (7.3) bedeutet. ❑

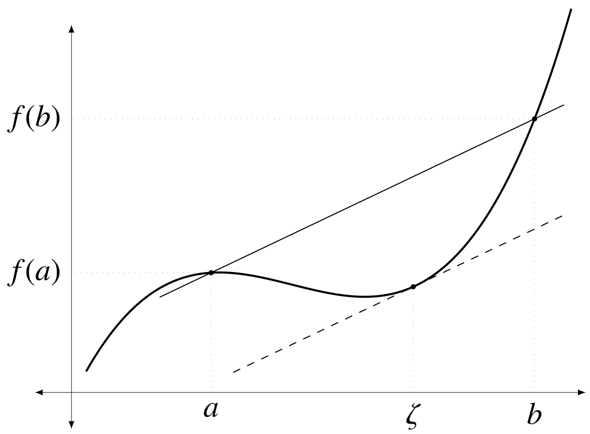


Abbildung 7.3: Mittelwertsatz

7.2.8 Bemerkung.

- ⇝ Satz 7.2.6, welcher auch 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung genannt wird, besagt, dass man – falls durchwegs Tangenten existieren – stets eine Tangente findet, welche parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ liegt.
- ⇝ Die Stelle ζ aus Satz 7.2.6, an der die Steigung der Kurve mit der mittleren Steigung im Intervall $[a, b]$ übereinstimmt, ist nicht eindeutig bestimmt.
- ⇝ Satz 7.2.7 heißt auch 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Obwohl man es auf den ersten Blick nicht sieht, so hat der Mittelwertsatz doch weitreichende Folgerungen.

7.2.9 Korollar. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Bezeichnen a, b die Intervallränder von I, so sei f auf (a, b) differenzierbar.*

- *Gilt $f'(x) \geq 0$ (> 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf I (streng) monoton wachsend.*
- *Gilt $f'(x) \leq 0$ (< 0) für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf I (streng) monoton fallend.*
- *Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant auf I.*

Bezüglich der Umkehrung gilt nur, dass, wenn f monoton wachsend (fallend) ist, für ihre Ableitung immer $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) gilt.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. Dann existiert eine Stelle $x \in (x_1, x_2)$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x) .$$

Daraus folgt unmittelbar das behauptete Monotonieverhalten.
Ist umgekehrt f monoton wachsend (fallend), so gilt für den Differenzenquotient für alle $x, t \in (a, b)$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0 \ (\leq 0) .$$

Für $t \to x$ folgt $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). ❑

7.2.10 Beispiel. Dass aus der strengen Monotonie einer Funktion f nicht notwendigerweise $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle x folgt, erkennt man anhand eines einfachen Beispiels. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Ihre Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist nur ≥ 0, aber nicht > 0 für alle $x \in \mathbb{R}$.

7.2.11 Bemerkung. Dass aus $f' \equiv 0$ auf einem Intervall f konstant folgt, gilt auch für komplexwertige Funktionen. Das sieht man leicht, indem man f in Real- und Imaginärteil aufspaltet; vgl. (7.1).

Obwohl die Ableitung f' einer auf einem Intervall (a, b) differenzierbaren Funktion nicht notwendig stetig sein muss, so gilt trotzdem stets folgende Zwischenwerteigenschaft.

7.2.12 Korollar. *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $f'(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Für $f'(x_1) < f'(x_2)$ aus $f'(I)$ mit $x_1, x_2 \in I$ gilt es $[f'(x_1), f'(x_2)] \subseteq f'(I)$ zu zeigen. Sei also $c \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_1) < c < f'(x_2)$.
Wir nehmen zunächst $x_1 < x_2$ an. Betrachte die Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - ct$. Für ihre Ableitung gilt

$$g'(x_1) = f'(x_1) - c < 0, \quad g'(x_2) = f'(x_2) - c > 0 .$$

Sei $x \in [x_1, x_2]$ eine Stelle, an der g ihr Minimum annimmt. Wir wollen $x \in (x_1, x_2)$ zeigen. Wegen $g'(x_1) < 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{g(t) - g(x_1)}{t - x_1} < 0 \quad \text{für alle} \quad t \in (x_1, x_1 + \delta)\,.$$

Also muss $g(t) < g(x_1)$ für solche Werte von t. Der Punkt x_1 scheidet als Kandidat für das Minimum also aus. Wegen $g'(x_2) > 0$ folgt die Existenz eines $\delta > 0$, sodass

$$\frac{g(t) - g(x_2)}{t - x_2} > 0 \quad \text{für alle} \quad t \in (x_2 - \delta, x_2)\,.$$

Infolge gilt $g(t) < g(x_2)$ für solche t, womit der Punkt x_2 für das Minimum auch nicht in Frage kommt. Daher haben wir $x \in (x_1, x_2)$, und nach Lemma 7.2.2 folgt $0 = g'(x) = f'(x) - c$, also $c = f'(x) \in f'(I)$.
Den Fall $x_1 > x_2$ führt man durch die Betrachtung von $-f$ auf den obigen Fall zurück. ❑

7.2.13 Korollar (*). *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind alle Unstetigkeitsstellen von f' von zweiter Art.*

Beweis. Ist x nicht linker Randpunkt von I und existiert $f'(x-) = \lim_{t \to x-} f'(t)$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ mit $f'((x - \delta(\epsilon), x)) \subseteq (f'(x-) - \epsilon, f'(x-) + \epsilon)$.
Gilt dabei $f'(x-) \neq f'(x)$ und setzt man $\epsilon = \frac{|f'(x-) - f'(x)|}{2}$, so folgt $f'((x - \delta(\epsilon), x)) \subseteq (f'(x-) - \epsilon, f'(x-) + \epsilon)$, aber $f'(x) \notin (f'(x-) - 2\epsilon, f'(x-) + 2\epsilon)$. Infolge kann die Bildmenge $f'((x - \delta(\epsilon), x])$ kein Intervall sein, was Korollar 7.2.12 widerspricht.
Ist x nicht nicht rechter Randpunkt von I und existiert $f'(x+) = \lim_{t \to x+} f'(t)$ mit $f'(x+) \neq f'(x)$, so leitet man auf analoge Weise einen Widerspruch zu Korollar 7.2.12 her. Also können Unstetigkeitsstellen nur von 2. Art sein. ❑

Wir werden nun Satz 7.2.7 verwenden, um eine sehr nützliche Methode herzuleiten, Limiten zu berechnen.

7.2.14 Satz (Regel von de L'Hospital). *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b), wobei $a, b, \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, -\infty \leq a < b \leq +\infty$. Für $x \in (a, b)$ hinreichend nahe bei a gelte $g'(x) \neq 0$, sowie*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0\,, \tag{7.4}$$

oder

$$\lim_{x \to a+} g(x) = +\infty\,. \tag{7.5}$$

Existiert unter diesen Voraussetzungen der Grenzwert $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so existiert auch $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$, wobei

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Die analoge Aussage ist richtig, wenn man überall $x \to a+$ durch $x \to b-$ oder in (7.5) $+\infty$ durch $-\infty$ ersetzt.

Beweis. Wir setzen die Existenz von $A := \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ voraus.

⇝ Da die betrefflichen Grenzwerte nur von den Funktionswerten lokal bei x abhängen (vgl. (5.6)), können wir b nötigenfalls kleiner machen, sodass $g'(x) \neq 0$ auf ganz (a, b) gilt. Damit kann g auf (a, b) höchstens eine Nullstelle haben, da sonst nach Korollar 7.2.3 $g'(\zeta) = 0$ für ein $\zeta \in (a, b)$. Machen wir b nötigenfalls nochmals kleiner, so können wir auch $g(x) \neq 0$ auf ganz (a, b) annehmen.

⇝ Wir weisen nun nach, dass unter der Voraussetzung (7.5) und mit den im vorherigen Punkt gemachten Annahmen g auf (a, b) positive Werte annimmt und streng monoton fallend ist.

In der Tat ist nach dem Zwischenwertsatz, Korollar 6.2.6, $g((a, b))$ ein reelles Intervall, das wegen (7.5) positive Zahlen enthält. Gemäß unserer Annahme gilt aber $0 \notin g((a, b))$, weshalb $g(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. (7.5) bedingt auch die Existenz von Zahlen $s, t \in (a, b)$, $s < t$, sodass $g(s) > g(t)$. Nach dem Mittelwertsatz, Satz 7.2.6, folgt $g'(x) < 0$ für ein $x \in (s, t) \subseteq (a, b)$. Nach Korollar 7.2.12 ist $g'((a, b))$ ein reelles Intervall, welches somit eine negative Zahl, aber gemäß der Annahmen im vorherigen Beweispunkt nicht die Null enthält. Also gilt $g'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ und infolge ist g streng monoton fallend.

⇝ Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > A$, und wähle $r \in \mathbb{R}$ mit $A < r < \alpha$. Wegen $\lim_{t\to a+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A$ existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} < r \quad \text{für alle} \quad t \in (a, c)\,.$$

Sind dann $x, y \in (a, c)$, $x < y$ beliebig, so folgt aus Satz 7.2.7

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \tag{7.6}$$

für ein $t \in (x, y) \subseteq (a, c)$.

Ist die Bedingung (7.4) erfüllt, so lässt man in obiger Beziehung x gegen a streben und erhält

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha \quad \text{für alle} \quad y \in (a, c)\,.$$

Ist dagegen Bedingung (7.5) erfüllt, so halte man y in (7.6) fest. Da g auf (a, b) streng monoton fallend und positiv ist, folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} < r\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\,.$$

Lässt man hier $x \to a+$ streben, so konvergiert die rechte Seite gegen r $(> \alpha)$. Also erhalten wir die Existenz eines $d \in (a, c)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \alpha \quad \text{für alle} \quad x \in (a, d)\,.$$

Wir haben also unter jeder der Voraussetzungen (7.4) und (7.5) nachgewiesen, dass für ein gewisses $\rho \in (a, b)$

$$\frac{f(t)}{g(t)} < \alpha, \quad \text{wenn nur} \quad t \in (a, \rho)\,.$$

$\rightsquigarrow$ Wendet man das Gezeigte auf $-f$ und $-A$ statt f und A an, so sieht man, dass es auch zu jedem $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta < A$ ein $\rho \in (a, b)$ gibt, sodass

$$\frac{f(t)}{g(t)} > \beta, \quad \text{wenn nur} \quad t \in (a, \rho)\,.$$

Damit folgt $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$; vgl. (5.12). ❑

7.2.15 Bemerkung. Indem man eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil zerlegt, folgt aus Satz 7.2.14 zusammen mit (7.1), dass Satz 7.2.14 auch gilt wenn f komplexwertig und g nach wie vor reellwertig ist. Die Voraussetzungen, dass $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, muss dabei als Existent eines Grenzwertes in $\mathbb{C}$ verstanden werden.

7.2.16 Beispiel.

(*i*)

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0\,.$$

(*ii*) Um $\lim_{x \to 0+} x^x$ zu bestimmen, sei zunächst bemerkt, dass $x^x = \exp(x \ln x)$ für $x > 0$. Aus dem vorherigen Beispiel und wegen der Stetigkeit von exp gilt

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} \exp(x \ln x) = \exp(\lim_{x \to 0+} x \ln x) = \exp(0) = 1\,.$$

(*iii*) Weil $(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge[2] des Netzes $(x^x)_{x \in (0,+\infty)}$ ist, wobei $(0, +\infty)$ so gerichtet ist, dass $x_1 \preceq x_2 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$, folgt aus dem letzten Beispiel auch

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Diese Tatsache folgt offenbar auch aus $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$; vgl. Beispiel 3.3.7.

(*iv*)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \to 0+} \frac{\cos x}{1} = 1\,.$$

Genauso sieht man $\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$.

[2] Siehe Definition 5.3.6!

(v) Man betrachte den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{x^2}\right) \tag{7.7}$$

Dieser Ausdruck ist von der Form $\infty-\infty$. Wir rechnen

$$\left(\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x^2-(\sin x)^2}{(x\sin x)^2}\,.$$

Für $x\to 0$ ist dieser Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$. Also stimmt der Grenzwert in (7.7) nach der Regel von de L'Hospital angewandt für $x\to 0-$ und $x\to 0+$ mit

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{2x(\sin x)^2+2x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin(2x)}{2x(\sin x)^2+x^2\sin(2x)}$$

überein, falls letzterer existiert. Wenden wir die Regel von de L'Hospital nochmals für $x\to 0-$ und $x\to 0+$ an, so erhalten wir (wieder falls der rechte Limes existiert)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(2x)}{2(\sin x)^2+4x\sin(2x)+2x^2\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{(\sin x)^2+2x\sin(2x)+x^2\cos(2x)}\,.$$

Dieser Ausdruck ist abermals von der Form $\frac{0}{0}$. Wir müssten die Regel von de L'Hospital noch zweimal anwenden, um zu einem Ergebnis zu kommen. Etwas einfacher ist es, diesen Grenzwert als

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sin x)^2+2x\sin(2x)+x^2\cos(2x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+4\frac{\sin(2x)}{2x}+\cos(2x)}$$

zu schreiben. Zweimal de L'Hospital (jeweils für $x\to 0-$ und $x\to 0+$) liefert $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}=2$, und wegen $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+4\frac{\sin(2x)}{2x}+\cos(2x)}=\frac{1}{1+4+1}=\frac{1}{6}\,.$$

Also ist (7.7) genau $\frac{1}{3}$.

(vi) Eine andere Möglichkeit den Grenzwert (7.7) zu berechnen, besteht darin, die Potenzreihenentwicklung von $\sin x$ um 0 zu verwenden:

$$\left(\frac{1}{(\sin x)^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1-(\frac{\sin x}{x})^2}{(\sin x)^2}=\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{(\sin x)^2}=$$

$$\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2}=\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n+1)!}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2}\,.$$

Oben und unten durch x^2 dividieren ergibt

$$\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+3)!}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\right)^2}\,.$$

Man beachte, dass alle hier auftretenden Potenzreihen Konvergenzradius $+\infty$ haben. Somit stehen in Zähler und Nenner stetige Funktionen in x; vgl. Satz 6.8.7. Für $x \to 0$ konvergiert die Potenzreihen gegen den nullten Summanden. Also erhalten wir für den Grenzwert (7.7) abermals $2\frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{3}$.

(vii) Sei $w \in \mathbb{C}$ mit einem Realteil, der kleiner als Null ist. Wir wollen zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{t\to+\infty} t\exp(wt)$ in $\mathbb{C}$ die komplexe Zahl 0 ist. Entweder wir betrachten dazu Real- und Imaginärteil des Grenzwertes gesondert, oder – was einfacher ist – wir bemühen Satz 6.9.3, um für $t > 0$

$$|t\exp(wt)| = t\exp(t\operatorname{Re} w) = \frac{t}{\exp\left(t(-\operatorname{Re} w)\right)}$$

zu erhalten. Wegen $-\operatorname{Re} w > 0$ ist der Grenzwert davon für $t \to +\infty$ von der Form $\frac{+\infty}{+\infty}$. Somit stimmt nach Satz 7.2.14 dieser Grenzwert überein mit

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t'}{\exp\left(t(-\operatorname{Re} w)\right)'} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{-\operatorname{Re} w\cdot\exp\left(t(-\operatorname{Re} w)\right)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\exp(t\operatorname{Re} w)}{-\operatorname{Re} w} = 0\,.$$

Für die letzte Gleichheit siehe (6.13).

7.2.17 Korollar. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit den Randpunkten a, b, $a < b$ und $f : I \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ eine Abbildung, die auf (a, b) differenzierbar ist.*
Ist $a \in I$, f dort stetig und existiert $\lim_{t\to a+} f'(t)$ in $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, so ist f bei a rechtsseitig differenzierbar, wobei $\lim_{t\to a+} f'(t) = f'(a)^+$. Entsprechendes gilt für $t \to b-$, wenn $b \in I$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit von f bei a können wir Satz 7.2.14 im reellwertigen Fall bzw. Bemerkung 7.2.15 im komplexwertigen Fall anwenden und erhalten

$$f'(a)^+ = \lim_{t\to a+}\frac{f(t)-f(a)}{t-a} = \lim_{t\to a+}\frac{f'(t)}{1}\,.$$

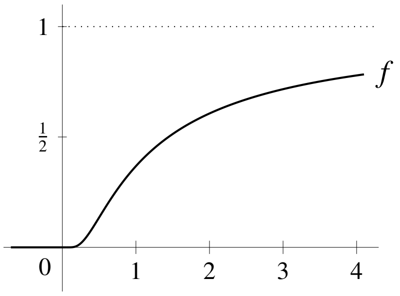
❑

7.2.18 Bemerkung. Ist mit der Notation aus Korollar 7.2.17 f reellwertig und gilt $a \in I$ sowie $\lim_{t\to a+} f'(t) = +\infty$ $(= -\infty)$, so lässt sich Satz 7.2.14 genauso wie im Beweis von Korollar 7.2.17 anwenden, und man erhält, dass f bei a nicht rechtsseitig differenzierbar ist. Entsprechendes gilt für $t \to b-$, wenn $b \in I$.

7.2.19 Bemerkung. Wegen Korollar 7.2.17 gilt $f \in C^1(I)$ genau dann, wenn $f \in C(I)$, $f|_{(a,b)} \in C^1(a, b)$ und sich $(f|_{(a,b)})'$ auf ganz I stetig fortsetzen lässt. Dabei bezeichnen a und b wieder die Randpunkte des Intervalls I.

7.2.20 Beispiel. Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls} \quad x > 0, \\ 0, & \text{falls} \quad x \le 0. \end{cases}$$



Klarerweise ist f auf $(-\infty, 0]$ beliebig oft ableitbar mit $f^{(n)}(x) = 0,\ x \le 0$.
Auf $(0, +\infty)$ gilt $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, und durch vollständige Induktion sieht man, dass ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{für} \quad x > 0\,.$$

mit gewissen Polynomen $p_n(x)$ vom Grad $2n$. Mit Hilfe der Regel von de L'Hospital, Satz 7.2.14, erkennen wir

$$\lim_{x \to 0+} f^{(n)}(x) = \lim_{y \to +\infty} \frac{p_n(y)}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{p_n'(y)}{e^y} = \dots = \lim_{y \to +\infty} \frac{p_n^{(2n)}(y)}{e^y} = 0\,,$$

da $p_n^{(2n)}(y)$ eine Konstante ist. Wir sehen insbesondere, dass f auf $[0, +\infty)$ stetig ist, und dass wegen $\lim_{t \to 0+} f'(t) = 0$ nach Korollar 7.2.17 $f'(0)^+ = 0$ gilt. Zusammen mit $f'(0)^- = 0$ erhalten wir die Differenzierbarkeit von f auch an der Stelle 0, wobei $f'(0) = 0$; also $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Wiederholte Anwendung dieses Argumentes auf f', f'' usw. zeigt, dass f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, wobei $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

7.3 Motivation zum Taylorschen Lehrsatz*

Eine Motivation des Taylorschen Lehrsatz ergibt sich aus folgenden Interpolationsüberlegungen. Die Gerade, die eine Kurve in einem Punkt am besten approximiert, ist die Tangente, falls diese existiert. Approximiert man die Kurve mit einem Polynom höheren Grades, so kann man hoffen, dass die Approximation genauer wird.
Die Tangente wurde als Grenzlage von Sekanten durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x + \triangle x, f(x + \triangle x))$ definiert. Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, sind diese Sekanten wohldefinierte Objekte.
Ein Polynom vom Grade kleiner oder gleich n ist eindeutig festgelegt durch die Vorgabe der Werte $y_0, \dots, y_n$ an $n+1$ verschiedenen Stellen $x_0, \dots, x_n$. In der Tat ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \prod_{j \in \{0,\dots,n\} \setminus \{k\}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

ein solches Polynom, und die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n höchstens n Nullstellen hat.

Betrachten wir nun $n+1$ Punkte der Kurve f mit den x-Koordinaten $x, x+\triangle x, \dots, x+n\triangle x$, und legen ein Polynom p durch diese Punkte. Für große Schrittweiten $\triangle x$ wird das erhaltene Polynom nicht viel mit der Kurve zu tun haben, lässt man jedoch $\triangle x \to 0$ streben, so hofft man auf eine gute Approximation.

7.3.1 Satz (Newtonsche Interpolationsformel)**.** *Seien $x, \triangle x$ und Werte $y_0, \dots, y_n$ gegeben. Das Polynom, welches durch die Punkte $(x, y_0), (x+\triangle x, y_1), \dots, (x+n\triangle x, y_n)$ geht, ist gleich*

$$\begin{aligned} p(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1!}\frac{\triangle y_0}{\triangle x} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\ \frac{\triangle^2 y_0}{\triangle x^2} + \cdots \\ \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!}\ \frac{\triangle^n y_0}{\triangle x^n}, \end{aligned}$$

wobei wir $x_j = x + j\triangle x$ gesetzt haben und $\triangle^j y_0$ die j-te Differenz bezeichnet. Diese ist rekursiv definiert als

$$\triangle y_i = y_{i+1} - y_i,\ \triangle^2 y_i = \triangle y_{i+1} - \triangle y_i, \dots .$$

Beweis. Offenbar gilt $p(x_0) = y_0$. Man erhält $p(x_1) = y_0 + (x_1 - x_0)\frac{\triangle y_0}{\triangle x} = y_0 + \triangle x \frac{\triangle y_0}{\triangle x} = y_0 + (y_1 - y_0) = y_1$. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} p(x_j) &= y_0 + (x_j - x_0)\frac{\triangle y_0}{\triangle x} + \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)}{2}\ \frac{\triangle^2 y_0}{\triangle x^2} + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})}{j!}\ \frac{\triangle^j y_0}{\triangle x^j} \\ &= y_0 + j\triangle x\frac{\triangle y_0}{\triangle x} + \frac{j\triangle x(j-1)\triangle x}{2}\ \frac{\triangle^2 y_0}{\triangle x^2} + \cdots + \frac{j!\triangle x^j}{j!}\ \frac{\triangle^j y_0}{\triangle x^j} \\ &= \binom{j}{0} y_0 + \binom{j}{1}\triangle y_0 + \binom{j}{2}\triangle^2 y_0 + \cdots + \binom{j}{j}\triangle^j y_0 . \end{aligned}$$

Wir zeigen nun mittels Induktion die folgende Behauptung: Für je $j+1$ Werte $y_0, \dots, y_j$ gilt die Formel

$$y_j = \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \triangle^l y_0 .$$

Der Induktionsanfang $j = 0$ ist offensichtlich richtig. Sei die Formel also bereits gezeigt für je j Werte. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\triangle^l y_0 &= y_0 + \sum_{l=1}^{j-1}\binom{j}{l}\triangle^l y_0 + \triangle^j y_0 \\
&= y_0 + \sum_{l=1}^{j-1}\left[\binom{j-1}{l-1}+\binom{j-1}{l}\right]\triangle^l y_0 + (\triangle^{j-1}y_1 - \triangle^{j-1}y_0) \\
&= y_0 + \sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l-1}(\triangle^{l-1}y_1 - \triangle^{l-1}y_0) + \sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}\triangle^l y_0 + (\triangle^{j-1}y_1 - \triangle^{j-1}y_0) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{j-2}\binom{j-1}{l}\triangle^l y_1 + \triangle^{j-1}y_1\right)}_{=y_j} \\
&\qquad - \left(\sum_{l=0}^{j-2}\binom{j-1}{l}\triangle^l y_0 + \triangle^{j-1}y_0\right) + \left(y_0 + \sum_{l=1}^{j-1}\binom{j-1}{l}\triangle^l y_0\right) \\
&= y_j\,.
\end{aligned}$$

❑

Ist f an der Stelle x differenzierbar, so erhalten wir

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y_0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} = f'(x)\,.$$

Allgemein gilt

7.3.2 Lemma. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und n-mal stetig differenzierbar auf (a,b). Ist $x \in (a,b)$, so gilt für $y_j = f(x + j\triangle x)$, $j = 0,\dots,n$,*

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle^n y_0}{\triangle x^n} = f^{(n)}(x)\,.$$

Beweis. Sei $p(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1!}\frac{\triangle y_0}{\triangle x} + \ldots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{n!}\frac{\triangle^n y_0}{\triangle x^n}$. Die Funktion $h(x) := f(x) - p(x)$ hat die $n+1$ Nullstellen $x_0, \cdots, x_n$, welche für hinreichend kleines $\triangle x$ in (a,b) liegen. Mit Korollar 7.2.4 folgt die Existenz von $\xi \in (x_0, x_n)$ mit $h^{(n)}(\xi) = 0$. Nun gilt

$$0 = h^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - p^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \frac{\triangle^n y_0}{\triangle x^n}\,.$$

Für $\triangle x \to 0$ gilt $\frac{\triangle^n y_0}{\triangle x^n} \to f^{(n)}(x)$ aufgrund der Stetigkeit von $f^{(n)}$. ❑

Man erhält also als Grenzfall des in einem Punkt x_0 approximierenden Polynoms gerade

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)}{n!}f^{(n)}(x_0)\,.$$

Wählt man den Grad von p immer größer, so wird (hoffentlich) $p(x)$ die Kurve $f(x)$ immer besser annähern.

7.4 Der Taylorsche Lehrsatz

Wir wollen im folgenden eine gegebene Funktion f auf einem reellen Intervall I durch Polynome approximieren. Für hinreichend oft differenzierbare f werden wir das durch das sogenannte Taylorpolynom zu bewerkstelligen suchen.

7.4.1 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$, I ein reelles Intervall, $y \in I$ fest und $f : I \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Weiters sei f bei y mindestens n-mal differenzierbar; vgl. Definition 7.1.15. Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y)$$

in der Variable x nennt man dann das n-te *Taylorsche Polynom* an der *Anschlussstelle* y. Die Fehlerfunktion $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ nennt man das n-te Restglied.

Dass $T_n(x)$ eine gute Wahl ist, um ein reellwertiges f zu approximieren, folgt aus dem nun folgenden Satz, welcher eine Art Verfeinerung des Mittelwertsatzes ist.

7.4.2 Satz (Taylorscher Lehrsatz)**.** *Sei I ein reelles Intervall und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Weiters sei $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^n(I)$ und derart, dass $f^{(n)}$ im Inneren von I – also auf I ohne seine Randpunkte – differenzierbar ist, bzw. äquivalent dazu, dass f auf dem Inneren von I sicher $n+1$-mal differenzierbar ist.*
*Zu $x, y \in I$, $x \neq y$, gibt es immer ein $\xi \in (\min(x,y), \max(x,y))$, sodass sich das n-te Restglied $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ schreiben lässt als (*Lagrange-Form *des Restgliedes)*

$$R_n(x) = \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) .$$

Beweis. Seien $F, G : [\min(x,y), \max(x,y)] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(t), \quad G(t) = (x-t)^{n+1} .$$

Voraussetzungsgemäß sind beide stetig auf $[\min(x,y), \max(x,y)]$ und differenzierbar auf $(\min(x,y), \max(x,y))$, wobei $G'(t) = -(n+1)(x-t)^n \neq 0$ für $t \in (\min(x,y), \max(x,y))$ und

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) .$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, Satz 7.2.7, gibt es ein ξ im Intervall $(\min(x,y), \max(x,y))$, sodass

$$\frac{R_n(x)}{(x-y)^{n+1}} = \frac{F(y) - F(x)}{G(y) - G(x)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} . \qquad \square$$

Für reellwertige Funktionen f gibt Satz 7.4.2 im Falle der Differenzierbarkeit von $f^{(n)}$ im Inneren von I eine Möglichkeit, das Restglied $R_n(x)$ durch $\frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ auszudrücken. Das Problem dabei ist, dass man von ξ nur weiß, dass es zwischen x und y liegt. Nichtsdestotrotz kann man manchmal $f^{(n+1)}$ so gut abschätzen, dass man sicher sagen kann, dass $R_n(x)$ klein wird.

7.4.3 Bemerkung. Wählt man im obigen Beweis $G(t) = (x - t)^p$ für ein festes aber beliebiges $p \in \mathbb{N}$, so erhält man mit derselben Argumentation ein $\xi \in (\min(x, y), \max(x, y))$, sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x - y)^p (x - \xi)^{n-p+1} .$$

Stellt man ξ durch $\xi = \theta x + (1 - \theta)y$ für ein $\theta \in (0, 1)$ dar, so erhält man die *Schlömilchsche Form*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x - y)^{n+1}(1 - \theta)^{n-p+1} .$$

des Restgliedes. Für $p = n + 1$ erhält man die Lagrange Form und für $p = 1$ die sogenannte *Cauchysche Form* des Restgliedes.

7.4.4 Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, I ein reelles Intervall, und $f : I \to \mathbb{R}$ derart, dass $f \in C^n(I)$ und dass f auf dem Inneren des Intervalls I sogar $(n + 1)$-mal differenzierbar ist. Gilt nun $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ für alle ξ im Inneren von I, so folgt $R_n(x) = 0$ und daher $f(x) = T_n(x)$ für alle $x \in I$. Kurz zusammengefasst bedeutet das, dass genau die Polynome vom Grad kleiner oder gleich n alle möglichen Lösungen der *Differentialgleichung*

$$f^{(n+1)}(\xi) = 0 ,$$

sind. Indem man f in Real- und Imaginärteil zerlegt, folgt diese Tatsache auch für komplexwertige f.

7.4.5 Fakta. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ wie in Definition 7.4.1.

1. Man sieht unmittelbar durch Nachrechnen, dass $p(x) := T_n(x)$ ein Polynom höchstens n-ten Grades ist, sodass

$$p(y) = f(y),\ p'(y) = f'(y),\ \ldots,\ p^{(n)}(y) = f^{(n)}(y) . \tag{7.8}$$

   Die höheren Ableitungen von T_n verschwinden identisch, da es ein Polynom höchstens n-ten Grades ist.

2. Ist $p(x)$ ein weiteres Polynom höchstens n-ten Grades, sodass (7.8), dann verschwinden die Ableitungen 0-ten bis n-ten Grades von $q(x) = p(x) - T_n(x)$ an der Stelle y.

   Wenden wir Satz 7.4.2 auf die reellen Funktionen $\operatorname{Re} q(x)$ und $\operatorname{Im} q(x)$ oder auch nur $q(x)$, falls diese reell ist, an, so folgt wegen $q^{(n+1)} \equiv 0$, dass $q(x) = 0$. Also definiert die Eigenschaft (7.8) das Polynom $T_n(x)$ eindeutig.

3. Ist f selber ein Polynom vom Grad m, so gilt insbesondere $f(x) = T_n(x)$ für $n \geq m$.
4. Ist f beliebig oft differenzierbar, so kann man für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ das Taylorpolynom $T_n(x)$ an der Anschlussstelle y betrachten. Man erhält schließlich die *Taylorreihe* von f an der Anschlussstelle y:
$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(y)}{n!} (x-y)^n .$$
Das ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, +\infty]$. Hier können alle Fälle auftreten.
5. Ist $R > 0$, so konvergiert die Potenzreihe insbesondere auf $(y-R, y+R)$. Nun kann $T(x)$ auf $(y-R, y+R) \cap I$ mit der Ausgangsfunktion $f(x)$ übereinstimmen; sie muss es aber nicht. Für $x \in (y-R, y+R) \cap I$ gilt offenbar $T(x) = f(x)$ genau dann, wenn $R_n(x) \to 0$.
6. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, und betrachte die Funktion
$$f : (y-R, y+R) \to \mathbb{C}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-y)^n .$$
Wir werden in Proposition 8.7.6 sehen, dass $f^{(l)}(y) = l! \cdot a_l$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Taylorreihe von f an der Anschlussstelle y ist somit genau $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-y)^n$, und konvergiert daher auf $(y-R, y+R)$.

   Das Restglied $R_n(x)$ konvergiert dann klarerweise gegen 0.

7.4.6 Beispiel.

(*i*) Sei $f(t) = e^t$. Dann gilt $f^{(n)}(t) = e^t$, also $f^{(n)}(0) = 1$. Wir erhalten
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) ,$$
wobei $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$ mit $\xi \in (0, x)$.

Da e^x die Grenzfunktion einer Potenzreihe ist, – so wurde sie ja eingeführt – muss $R_n(x) \to 0$; vgl. Fakta 7.4.5, 6. Man kann dieses Grenzverhalten aber auch unschwer durch eine elementare Abschätzung von $R_n(x)$ erhalten.

(*ii*) Betrachte die Funktion
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2^k t)}{k!} .$$
Differenziert man diese Reihe gliedweise und die resultierende Reihe nochmals usw., so erhält man
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2^k \sin(2^k t)}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2^{2k} \cos(2^k t)}{k!}, \ldots$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^k)^l}{k!}$ für jedes $l \in \mathbb{N}$ konvergiert, sind sämtliche dieser Reihen gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$. Wie wir später in Korollar 8.7.4 sehen werden, ist die Funktion f daher in jedem Punkt beliebig oft differenzierbar, und ihre Ableitungen werden durch obige Reihen dargestellt. Es gilt daher

$$f'(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(2k+1)}(0) = \ldots = 0\,,$$

und

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2nk}}{k!} = (-1)^n (e^{4^n} - 1)\,.$$

Die Taylorreihe von f bei 0 ist also gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{4^n} - 1)}{(2n)!}\, x^{2n}\,.$$

Wendet man das Quotientenkriterium an, so erhält man mit $a_n = \frac{(-1)^n (e^{4^n} - 1)}{(2n)!}\, x^{2n}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(e^{4^n 2} + 1)(e^{4^n} + 1)}{(2n+2)(2n+1)}\, x^2 \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \quad \text{für alle} \quad x \neq 0\,.$$

Diese Reihe ist also nur für $x = 0$ konvergent.

(*iii*) Das Taylorpolynom $T_n(x)$ der Funktion f aus Beispiel 7.2.20 ist stets identisch Null. Also ist f ein Beispiel für eine C^∞-Funktion, deren Taylorreihe bei der Anschlussstelle 0 auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, aber nicht mit f übereinstimmt.

Wir haben gesehen, dass für eine differenzierbare Funktion f, welche an einer Stelle x ein lokales Extremum besitzt, $f'(x) = 0$ gelten muss. Wie das Beispiel $f(t) = t^3$ zeigt, gilt die Umkehrung im Allgemeinen nicht. Aus dem Taylorschen Satz erhält man unmittelbar eine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum.

7.4.7 Korollar. *Für $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ sei $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ eine zumindest m-mal differenzierbare Funktion, $x \in (c, d)$, $f^{(m)}$ bei x stetig, und gelte*

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(m-1)}(x) = 0, \quad f^{(m)}(x) \neq 0\,.$$

Ist m gerade, so ist x ein lokales Extremum von f, und zwar ein lokales Minimum falls $f^{(m)}(x) > 0$ und ein lokales Maximum falls $f^{(m)}(x) < 0$. Ist dagegen m ungerade, so ist x sicher kein lokales Extremum von f.

Beweis. Gemäß Satz 7.4.2 mit Anschlussstelle x und $n + 1 = m$ gilt für $t \in (c, d)$ mit einer geeigneten Zwischenstelle ξ zwischen t und x

$$f(t) = f(x) + \frac{(t - x)^m}{m!} f^{(m)}(\xi)\,.$$

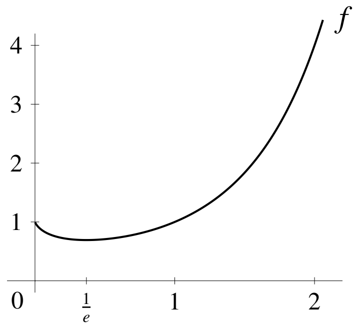
Ist $f^{(m)}(x) > 0$, so gilt für ξ in einer hinreichend kleinen Umgebung $(x - \delta, x + \delta)$ von x ebenfalls $f^{(m)}(\xi) > 0$. Da ξ zwischen t und x liegt, folgt aus $t \in (x - \delta, x + \delta)$, dass für gerades m

$$\frac{(t-x)^m}{m!} f^{(m)}(\xi) > 0\,.$$

Somit folgt $f(t) > f(x)$, und x ist ein lokales Minimum. Ganz analog verläuft die Argumentation für $f^{(m)}(x) < 0$. Ist m ungerade, so hat $(t - x)^m$ für $t < x$ ein anderes Vorzeichen als für $t > x$. Also ist x kein lokales Extremum. ❑

7.4.8 Beispiel. Mit den bisher gesammelten Ergebnissen lassen sich sogenannte *Kurvendiskussionen* von Funktionen durchführen.

Man betrachte etwa die Funktion $f(x) = x^x$ auf $(0, +\infty)$.



- ⇝ Zunächst ist diese Funktion stetig und beliebig oft differenzierbar.
- ⇝ Klarerweise ist sie immer positiv, hat also keine Nullstellen.
- ⇝ Um die lokalen Extrema zu finden, betrachte

  $$f'(x) = x^x(1 + \ln x), \quad f''(x) = x^{x-1} + x^x(1 + \ln x)^2\,.$$

  Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ ist $\frac{1}{e}$. Wegen $f''(\frac{1}{e}) > 0$ folgt aus Korollar 7.4.7, dass diese Stelle ein lokales Minimum ist.
- ⇝ Für $0 < x < \frac{1}{e}$ ist $f'(x) < 0$, also dort monoton fallend, und für $\frac{1}{e} < x$ ist $f'(x) > 0$, also dort monoton wachsend, vgl. Korollar 7.2.9. Insbesondere ist $\frac{1}{e}$ ein absolutes Minimum von f auf $(0, +\infty)$.
- ⇝ Schließlich haben wir in Beispiel 7.2.16 gesehen, dass $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$. Wegen $x^x \geq e^x$ für $x \geq e$ gilt auch $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

7.4.9 Beispiel. Wir wollen die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = (1 - \ln x)^2 - x(3 - 2\ln x)\,.$$

aus Beispiel 7.2.5 weiter diskutieren, für die wir schon berechnet haben, dass

$$f'(x) = 2(\ln x - 1)\frac{1}{x} + 2\ln x - 1, \quad f''(x) = 2\frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x - 1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{4 - 2\ln x + 2x}{x^2}\,.$$

Zudem haben wir festgestellt, dass $f''(x) > 0$ für $x \in (0, +\infty)$ und dass f genau zwei Nullstellen ξ, η hat, wobei $0 < \xi < 1 < \eta < +\infty$.
Nach dem Satz von Rolle hat dann auch f' mindestens eine Nullstelle x_0 mit $\xi < x_0 < \eta$. Wegen $f''(x) > 0$ und dem Satz von Rolle kann es davon aber nur eine geben, und mit Korollar 7.4.7 erkennen wir aus $f''(x_0) > 0$, dass x_0 ein lokales Minimum von f ist.
In der Tat muss f' wegen $f''(x) > 0$ streng monoton wachsen. Außerdem gilt wegen $f'(x) \leq -\frac{1}{x}$ für $x \in (0, 1)$

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = -\infty\,,$$

und wegen $f'(x) \geq 2 \ln x - 1$ für $x > e$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty\,.$$

Daraus erkennen wir auch, dass f eine eindeutige Nullstelle haben muss.
Wegen der Monotonie von f' gilt

$$f'(s) < f'(x_0) = 0 < f'(t) \quad \text{für} \quad 0 < s < x_0 < t < +\infty\,.$$

Also ist f auf $(0, x_0)$ monoton fallend und auf $(x_0, +\infty)$ monoton wachsend, weshalb x_0 sogar ein globales Minimum von f sein muss.

7.5 Stammfunktion

Bei der Integration von Funktionen wird es wichtig sein, zu einer gegebenen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ – falls möglich – eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ zu finden, sodass $F' = f$.

7.5.1 Definition. Sei I ein reelles Intervall und $f : I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Wir nennen eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ eine *Stammfunktion* von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
Hat ein f mindestens eine Stammfunktion, so heißt die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f das *unbestimmte Integral* von f und wird durch $\int f$ bezeichnet.

7.5.2 Bemerkung. Mit F ist offensichtlicherweise auch $F + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ eine Stammfunktion von f.
Sind umgekehrt F_1, F_2 zwei Stammfunktionen derselben Funktion f, dann gilt $(F_1 - F_2)' \equiv 0$ auf I. Nach Korollar 7.2.9 bzw. Bemerkung 7.2.11 ist $F_1 - F_2$ eine Konstante. Somit gibt es bis auf additive Konstanten eine eindeutige Stammfunktion F, und

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})\}\,.$$

7.5.3 Beispiel. Ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$, so überzeugt man sich sofort, dass $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \ln |x|$ die Gleichung $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erfüllt. Für die Funktion $G : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \operatorname{sgn}(x) + \ln |x|$ gilt ebenfalls $G'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dieser scheinbare Widerspruch zu Bemerkung 7.5.2 lässt sich dadurch erklären, dass $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja kein Intervall ist – Korollar 7.2.9 lässt sich darauf nicht anwenden.

Zum Aufsuchen von Stammfunktionen gegebener Funktionen ist folgendes Resultat sehr hilfreich.

7.5.4 Lemma. *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f, g : I \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. Weiters sei $h : J \to I$ differenzierbar.*

(*i*) *Haben f und g Stammfunktionen, so auch $\alpha f + \beta g$, wobei*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g \,.$$

(*ii*) *Sind f und g differenzierbar auf I, sodass $f'g$ eine Stammfunktion hat, dann hat auch fg' eine solche, und es gilt die* Regel von der Partiellen Integration*:*

$$\int f'g = fg - \int fg' \,. \tag{7.9}$$

(*iii*) *Mit f hat auch $(f \circ h) \cdot h' : J \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ eine Stammfunktion, wobei (*Substitutionsregel*)*

$$\int ((f \circ h) \cdot h') = \left(\int f \right) \circ h \,.$$

Diese drei Beziehungen sind so zu verstehen, dass wenn $\int \cdots$ für jeweils eine Stammfunktion steht, die Gleichheit bis auf eine Konstante gilt.

Beweis.

(*i*) Sind F und G Stammfunktionen von f und g, so folgt $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$. Also ist $\alpha F + \beta G$ eine Stammfunktion von $\alpha f + \beta g$.

(*ii*) Ist H Stammfunktion von $f'g$, so folgt aus der Produktregel

$$(fg - H)' = (f'g + fg') - f'g = fg' \,.$$

Somit ist $fg - H$ Stammfunktion von fg', und es gilt (7.9).

(*iii*) Ist F Stammfunktion von f, so folgt aus der Kettenregel in Satz 7.1.9 bzw. Bemerkung 7.1.10, dass $(F \circ h)' = (f \circ h) \cdot h'$. Also ist $F \circ h$ Stammfunktion von $(f \circ h) \cdot h'$. ❑

7.5.5 Bemerkung. Zur Substitutionsregel gibt es folgende Merkregel:
Seien I, J wieder reelle Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, und $h : J \to I$ differenzierbar. Schreiben wir $x = h(t)$ mit $t \in J$ und formal $dx = h'(t)\,dt$, so erhält man aus

$$\left(\int f \right)(x) =: \int f(x)\,dx$$

durch Ersetzen von x durch $h(t)$ und dx durch $h'(t)\,dt$

$$\int f(h(t)) \cdot h'(t)\,dt := \int ((f \circ h) \cdot h') \,.$$

Wie gesagt ist das eine Merkregel, die sich beim Bestimmen konkreter Stammfunktionen aber als durchaus praktikabel und übersichtlich herausgestellt hat; siehe etwa Beispiel 7.5.10.

7.5.6 Bemerkung (*). Man kann die Substitutionsregel verwenden, um einfache *Differentialgleichungen* der Form

$$y'(t) \cdot f(y(t)) = g(t) \quad \text{für} \quad t \in I\,, \tag{7.10}$$

zu lösen. Hier sind I, J reelle Intervalle und $f : J \to \mathbb{R}$ sowie $g : I \to \mathbb{R}$ vorgegebene stetige Funktionen.
Angenommen man hat eine Funktion $y : I \to J \subseteq \mathbb{R}$, welche (7.10) erfüllt. Hat f eine Stammfunktion F, so ist nach der Substitutionsregel die Funktion $F \circ y$ eine Stammfunktion von $t \mapsto y'(t) \cdot f(y(t))$ und daher auch von g.
Kennt man andererseits eine Stammfunktion G von g explizit, so folgt $F \circ y = G + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Also hat man eine implizite Beschreibung von $y(t)$. In manchen Fällen lässt sich diese Gleichung nach y auflösen, wodurch man $y(t)$ explizite beschreiben kann. Diese hier beschriebene Methode nennt heißt *Trennung der Variablen*.

7.5.7 Beispiel (*). Man betrachte die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Eine reellwertige Lösung y dieser Differentialgleichung ist $y \equiv 0$. Angenommen y ist eine weitere reellwertige Lösung mit $y(t_0) < 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Wegen der Stetigkeit gilt $y(t) < 0$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) =: I$.
Ist $f : I \to (-\infty, 0)$ die Funktion $f(\eta) = \frac{1}{\eta}$, so gilt für $t \in I$,

$$y'(t) \cdot \frac{1}{y(t)} = y'(t) \cdot f(y(t)) = 1\,.$$

Eine Stammfunktion von f ist $F(\eta) = \ln(-\eta)$, und somit $t \mapsto \ln(-y(t))$ eine Stammfunktion von $y'(t) \cdot \frac{1}{y(t)}$ auf I. Von 1 ist $t \mapsto t$ eine Stammfunktion. Es folgt daher

$$\ln(-y(t)) = t + c \quad \text{für} \quad t \in I\,,$$

und infolge $y(t) = -e^c \cdot e^t$ bzw. $y(t) = d \cdot e^t$ für $t \in I$ mit einem reellen $d \in (-\infty, 0)$.
Man beachte, dass wir von der Gültigkeit von $y'(t) = y(t)$ auf $y(t) = d \cdot e^t,\ t \in I$, geschlossen haben, wir uns also zunächst nicht sicher sein können, dass $y'(t) = y(t)$ überhaupt eine Lösung hat. Durch Einsetzen zeigt man aber unmittelbar, dass $y(t) = d \cdot e^t,\ t \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $y'(t) = y(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Wir werden nun einige Funktionstypen auflisten und angeben, wie man die unbestimmten Integrale von diesen bestimmt.

(*i*) Für die Funktion $f(x) = x^n$ mit einem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert auf $\mathbb{R}$ ist $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ eine Stammfunktion; also $\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$.

(*ii*) Die Funktion $f(x) = x^{-n}$ mit einem $n \in \mathbb{N}, n > 1$, definiert auf $(-\infty, 0)$ oder auf $(0, +\infty)$ hat $F(x) = \frac{1}{-n+1} x^{-n+1}$ als Stammfunktion.

(*iii*) $f(x) = x^{-1}$ definiert auf $(-\infty, 0)$ oder auf $(0, +\infty)$ hat $F(x) = \ln|x|,\ x \neq 0$, als Stammfunktion.

(*iv*) Um die Stammfunktion von $\ln x$ auf $(0, +\infty)$ zu ermitteln, wenden wir die Partielle Integration aus Lemma 7.5.4 an:

$$\int \ln(x) = \int (x') \ln(x) = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} = x(\ln(x) - 1) + c\,.$$

(*v*) $\int e^x = e^x + c,\ \int \sinh x = \cosh x + c,\ \int \cosh x = \sinh x + c.$

(*vi*) $\int \sin x = -\cos x + c,\ \int \cos x = \sin x + c.$

(*vii*) Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Durch partieller Integration sieht man

$$\begin{aligned}\int \cos^n t = \int (\cos^{n-1} t) \cdot (\cos t) &= (\cos^{n-1} t)(\sin t) + (n-1) \int (\cos^{n-2} t)(\sin t)^2 \\ &= (\cos^{n-1} t)(\sin t) + (n-1) \int (\cos^{n-2} t - \cos^n t)\,.\end{aligned}$$

Also erhält man die Rekursionsgleichung

$$\int \cos^n t = \frac{1}{n}(\cos^{n-1} t)(\sin t) + \frac{n-1}{n} \int (\cos^{n-2} t)\,,$$

womit sich die Stammfunktion von $\cos^n t$ rekursiv berechnen lässt. Entsprechendes gilt für die Stammfunktion von $\sin^n t$:

$$\int \sin^n t = -\frac{1}{n}(\sin^{n-1} t)(\cos t) + \frac{n-1}{n} \int (\sin^{n-2} t)\,.$$

(*viii*) Mit Hilfe von (*i*) und der Substitutionsregel folgt ($k \in \mathbb{N},\ k > 1$)

$$\int \frac{a}{(x-b)} = a \ln|x-b| + c, \quad \int \frac{a}{(x-b)^k} = \frac{a}{(-k+1)(x-b)^{k-1}} + c\,,$$

wobei man diese Funktionen auf einem Intervall betrachtet, das b nicht enthält.

(*ix*) $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c$, wobei $\arctan x$ die Umkehrfunktion von $\tan = \frac{\sin}{\cos} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist.

(*x*) Um $\int \frac{x}{1+x^2}$ zu ermitteln, wende man die Substitutionsregel auf $h(x) = x^2,\ h'(x) = 2x$ und $f(y) = \frac{1}{1+y}$ an:

$$\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+y}\right)_{y=x^2} = \frac{1}{2}(\ln|1+y|)_{y=x^2} = \frac{1}{2} \ln|1+x^2|\,.$$

(xi) Ganz ähnlich sieht man $\int \frac{x}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)} \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}$ für $k \in \mathbb{N}, k > 1$.

(xii) $\int \frac{1}{(1+x^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}, k > 1$ lässt sich rekursiv berechnen, indem man $t = \arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ substituiert:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^k} &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} = \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^{k-1}} = \int \cos^{2k-2} t \\ &= \frac{1}{2k-2}(\cos^{2k-2} t) \cdot (\tan t) + \frac{2k-3}{2k-2} \int (\cos^{2k-4} t) \\ &= \frac{1}{2k-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} . \end{aligned}$$

($xiii$) Ist nun allgemein $f(x) = \frac{x+d}{(x^2+px+q)^k}$, und hat $x^2 + px + q$ keine reellen Nullstellen ($D := q - \frac{p^2}{4} > 0$), so schreibe

$$f(x) = \frac{(x + \frac{p}{2}) + (d - \frac{p}{2})}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^k} .$$

Um $\int f(x)$ zu berechnen, substituiere $\sqrt{D}y - \frac{p}{2} = x(y)$:

$$\int f(x) = \frac{1}{D^k} \int \frac{Dy + \sqrt{D}(d - \frac{p}{2})}{(1+y^2)^k} .$$

Dieses Integral lässt sich mit Hilfe der oben behandelten Funktionen lösen.

(xiv) Zu guter Letzt noch Stammfunktionen von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen ($w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$):

$$\int e^{ix} = -ie^{ix} + c, \quad \int e^{wx} = \frac{1}{w} e^{wx} + c,$$

$$\int xe^{wx} = \frac{x}{w} e^{wx} - \int \frac{1}{w} e^{wx} = \frac{x}{w} e^{wx} - \frac{1}{w^2} e^{wx} + c .$$

Um die Stammfunktion einer beliebigen rationalen Funktion $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei $P(x)$ und $Q(x)$ zwei reelle Polynome sind, zu ermitteln, werden wir diese in eine Summe von Funktionen entwickeln, deren Stammfunktionen wir eben kennengelernt haben.
Als erstes erhalten wir aus dem *Euklidischen Algorithmus*

$$P(x) = S(x)Q(x) + T(x) ,$$

wobei $S(x)$ und $T(x)$ reelle Polynome sind, und wobei der Grad von $T(x)$ kleiner als der von $Q(x)$ ist.
Das Integral von $R(x) = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}$ ist daher $\int S(x) + \int \frac{T(x)}{Q(x)}$. Das erste Integral berechnet man leicht mit Hilfe von (i). Für das zweite müssen wir $\frac{T(x)}{Q(x)}$ weiter zerlegen.
Dazu betrachten wir zuerst die auftretenden Polynome als komplexe Polynome. Das hat den Vorteil, dass sich jedes komplexe Polynom bis auf eine Konstante als Produkt von Faktoren der Bauart $(z - z_j)$ schreiben lässt.

7.5.8 Satz. *Seien $T(z)$, $Q(z)$ zwei komplexe Polynome, sodass der Grad n von $Q(z)$ größer als der von $T(z)$ ist. Schreiben wir $Q(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ mit $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ als*

$$Q(z) = a_n (z - z_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (z - z_m)^{\nu_m} ,$$

wobei $z_i \neq z_j$ wenn $i \neq j$ und wobei $\nu_1, \dots, \nu_m \in \mathbb{N}$, $\nu_1 + \dots + \nu_m = n$, so gibt es eindeutige Zahlen $a_{jk} \in \mathbb{C}$, sodass ($z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$)

$$\frac{T(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\nu_j} \frac{a_{jk}}{(z - z_j)^k} .$$

Beweis. Unser Problem ist äquivalent zur Existenz und Eindeutigkeit von Zahlen a_{jk}, sodass für $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{a_n} T(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\nu_j} a_{jk} (z - z_j)^{\nu_j - k} \prod_{l=1, l \neq j}^{m} (z - z_l)^{\nu_l} . \tag{7.11}$$

Betrachte den Vektorraum $\mathbb{C}_{n-1}[z]$ aller komplexen Polynome vom Grad kleiner n. Dieser hat Dimension n. Kann man nun zeigen, dass die n Stück Polynome

$$(z - z_j)^{\nu_j - k} \prod_{l=1, l \neq j}^{m} (z - z_l)^{\nu_l}, \; j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \nu_j ,$$

linear unabhängig in $\mathbb{C}_{n-1}[z]$ sind, so bilden sie sogar eine Basis, und unser Satz folgt sofort aus der Linearen Algebra.
Um die linear Unabhängigkeit zu zeigen, sei

$$\sum_{j=1,\dots,m, k=1,\dots,\nu_j} \lambda_{jk} (z - z_j)^{\nu_j - k} \prod_{l=1, l \neq j}^{m} (z - z_l)^{\nu_l} = 0 .$$

Setzt man $z = z_1, \dots, z_m$, so folgt $\lambda_{1\nu_1} = \dots = \lambda_{m\nu_m} = 0$. Nun kann man $\prod_{j=1}^{m} (z - z_j)$ durchdividieren und erhält

$$\sum_{j=1,\dots,m; k=1,\dots,\nu_j - 1} \lambda_{jk} (z - z_j)^{\nu_j - 1 - k} \prod_{l=1, l \neq j}^{m} (z - z_l)^{\nu_l - 1} = 0 .$$

Wiederholt man obige Argumentation, so folgt $\lambda_{j(\nu_j - 1)} = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}, \nu_j > 1$, usw. bis man schließlich $\lambda_{jk} = 0$ für alle $j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \nu_j$ erhält. ❑

7.5.9 Bemerkung. Aus (7.11) sehen wir auch, wie man die Zahlen a_{jk} gewinnen kann. In der Tat kann man alle auftretenden Polynome ausmultiplizieren und vergleicht dann die Koeffizienten, die bei jedem z^k links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen. Diese müssen übereinstimmen, und so erhält man n Gleichungen für n Unbekannte.
Etwas weniger Arbeit hat man, wenn man den eben gebrachten Beweisgedanken einfließen lässt. Man kann nämlich in (7.11) nacheinander $z = z_1, \dots, z_m$ setzen und erhält so $a_{j\nu_j}$ ganz leicht.

Wir kehren zu unseren reellen Polynomen $T(x)$ und $Q(x)$ zurück. Wenn wir auf diese Satz 7.5.8 anwenden, hat das den Nachteil, dass man eine Partialbruchzerlegung mit möglicherweise nicht nur reellen Komponenten erhält.
Da $Q(z)$ aber reelle Koeffizienten hat, gilt $Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$. Infolge muss mit z_j auch $\bar{z}_j$ eine Nullstelle von $Q(z)$ sein, wobei diese die gleiche Vielfachheit ν_j haben.
Somit sind die Nullstellen von $Q(z)$ von der Form $x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots z_q, \bar{z}_1, \ldots \bar{z}_q$, wobei $x_j \in \mathbb{R}$ und $z_j \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Die Partialbruchzerlegung aus Satz 7.5.8 lässt sich dann schreiben als

$$\frac{T(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{\nu_j} \frac{a_{jk}}{(z - x_j)^k} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{\mu_j} \left(\frac{b_{jk}}{(z - z_j)^k} + \frac{c_{jk}}{(z - \bar{z}_j)^k} \right).$$

Wegen $\frac{T(z)}{Q(z)} = \overline{\frac{T(\bar{z})}{Q(\bar{z})}}$ folgt aus der Eindeutigkeit der komplexen Partialbruchzerlegung $a_{jk} \in \mathbb{R}$ und $c_{jk} = \bar{b}_{jk}$, und man erhält

$$\left(\frac{b_{jk}}{(z - z_j)^k} + \frac{c_{jk}}{(z - \bar{z}_j)^k} \right) = \left(\frac{b_j (z - \bar{z}_j)^k + \bar{b}_j (z - z_j)^k}{(z^2 - 2z \operatorname{Re}(z_j) + |z_j|^2)^k} \right),$$

wobei die Polynome in Zähler und Nenner reell sind. Summiert man nun über k auf und bringt die Summe auf gemeinsamen Nenner, so erhält man eine Funktion der Form

$$\frac{T_j(z)}{(z^2 + B_j z + C_j)^{\mu_j}},$$

wobei $T_j(z)$ ein reelles Polynom mit Grad kleiner $2\mu_j$ ist, und $B_j = -2 \operatorname{Re}(z_j)$, $C_j = |z_j|^2$. Durch wiederholte Anwendung des *Euklidischen Algorithmus* kann man dieses Polynom als

$$T_j(z) = \sum_{k=1}^{\mu_j} (d_{jk} z + e_{jk})(z^2 + B_j z + C_j)^{\mu_j - k}$$

anschreiben. Somit folgt die Zerlegung

$$\frac{T(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{\nu_j} \frac{a_{jk}}{(z - x_j)^k} + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{d_{jk} z + e_{jk}}{(z^2 + B_j z + C_j)^k}, \tag{7.12}$$

welche nur reelle Zahlen beinhaltet. Dabei haben die $z^2 + B_j z + C_j$ klarerweise keine reellen Nullstellen.
Zur praktischen Berechnung der Koeffizienten a_{jk} in (7.12) multipliziert man $Q(z)$ links und rechts und führt einen Koeffizientenvergleich durch. Durch Einsetzen von $z = x_j$ lassen sich die $a_{j\nu_j}$ auch schneller ermitteln.
Um $\int \frac{T(x)}{Q(x)}$ zu berechnen, genügt es nun die einzelnen Summanden in der Partialbruchzerlegung zu integrieren und diese dann zu summieren.

7.5.10 Beispiel. Wir wollen das Integral $\int \tan x\,dx$ auf einem Intervall I berechnen, wobei keine Nullstelle von $\cos x$ enthalten darf:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \underset{\left[\substack{t=\cos x\\ dt=-\sin x dx}\right]}{=} -\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C\,.$$

Diese Methode beruht darauf, dass unser Integrand von der Gestalt $f(t(x))\,t'(x)$ ist, und noch dazu mit einer sehr einfachen Funktion f. Daher können wir die Substitutionsregel unmittelbar anwenden und die entstehende Funktion leicht integrieren.

7.5.11 Beispiel. Wir wollen das Integral $\int x^2 \sin x\,dx$ auf einem beliebigen Intervall berechnen und verwenden dazu partielle Integration.

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$
$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x - \int \sin x\,dx)$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C\,.$$

Mit dieser Methode kann man zum Beispiel alle Integrale von der Form

$$\int P(x)e^x\,dx,\ \int P(x)\sin x\,dx,\ \int P(x)\cos x\,dx\,,$$

mit einem Polynom P berechnen.

7.5.12 Beispiel (Integration von $R(e^x)$)**.** Hat man eine Funktion f der Gestalt $f(x) = R(e^x)$, wobei R eine rationale Funktion ist, so kann man deren Integral stets mit Hilfe der Substitution $t = e^x$ auf das Integral einer rationalen Funktion bringen. Denn es gilt, mit $t = e^x$,

$$\int R(e^x)\,dx \underset{\left[\substack{t=e^x\\ dt=e^x dx\\ dx=\frac{1}{t}dt}\right]}{=} \int R(t)\frac{1}{t}\,dt\,.$$

7.5.13 Beispiel. Wir wollen das Integral $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+2}\,dx$ auf $\mathbb{R}$ berechnen. Zunächst gilt

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+2}\,dx = \int \frac{(e^x)^2-1}{e^x+2}\,dx \underset{\left[\substack{t=e^x\\ dx=\frac{1}{t}dt}\right]}{=} \int \frac{t^2-1}{t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt\,.$$

Man beachte, dass nach der Substitution $t(x) = t$ in $(0, +\infty)$ liegt; also immer positiv ist. Nun haben wir ein Integral einer rationalen Funktion auf $(0, +\infty)$ zu berechnen. Dazu schreiben wir

$$\frac{t^2-1}{t+2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{t^2-1}{t^2+2t} = \frac{t^2+2t-2t-1}{t^2+2t} = 1 - \frac{2t+1}{t(t+2)}\,,$$

und versuchen nun den zweiten Summanden in Partialbrüche zu zerlegen:

$$\frac{2t+1}{t(t+2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} = \frac{(A+B)t+2A}{t(t+2)} .$$

Koeffizientenvergleich führt auf $A = \frac{1}{2}$ und $B = \frac{3}{2}$. Also haben wir

$$\frac{t^2-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{2t} - \frac{3}{2(t+2)}$$

und infolge

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-1}{t+2} \cdot \frac{1}{t}\, dt &= t - \frac{1}{2} \ln t - \frac{3}{2} \ln(t+2) \\ &= e^x - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \ln(e^x+2) .\end{aligned}$$

7.5.14 Beispiel (Integration von $R(\sin x, \cos x)$)**.** Hat man eine Funktion f der Gestalt $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, wobei R eine rationale Funktion ist, so kann man deren Integral stets mit Hilfe der Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ auf das Integral einer rationalen Funktion bringen. Denn $t = \tan \frac{x}{2}$ gilt

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} ,$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} ,$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \quad \text{also} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt .$$

7.6 Übungsaufgaben

7.1 Geben Sie den jeweils maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ folgender Funktionen

$$\cos(3x),\ \tan^2(5x^3),\ \ln|\cos x| , \sinh(x),\ \ \cosh(x) .$$

an, und bestimmen Sie für ein beliebiges $x \in D$ jeweils die Ableitung der Funktion bei x.

Hinweis: Für komplexwertige Funktionen gelten auch die Ableitungsregeln wie Summenregel und Produktregel. Die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil bedeutet daher oft einen unnötigen Aufwand!

7.2 Geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sqrt{4-x^2} + 2$ als reellwertige Funktion definiert ist; also ist der Maximale Definitionsbereich D dieser Funktion zu bestimmen. Für welche $x \in D$ ist f differenzierbar? Geben Sie die Ableitung von f an diesen Stellen an!

7.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = at$ für $t < 2$ und durch $f(t) = b + t^{\frac{3}{2}}$ für $t \geq 2$.

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist! Bestimmen Sie für diese Wahl von a, b auch $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und geben Sie an, ob f stetig differenzierbar bzw. auf $\mathbb{R}$ sogar zwei mal differenzierbar ist.

7.4 Man berechne die Ableitung der Umkehrfunktion $\arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ von $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$ sowie die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{areasinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; vgl. Übungsbeispiele 6.24 und 6.25.

7.5 Zeigen Sie, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend und bijektiv ist. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\arccos : (-1, 1) \to (0, \pi)$ der Funktion $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$.

7.6 Man zeige, dass $\tanh : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ bijektiv und streng monoton wachsend ist. Skizze!

Weiters berechne man die Ableitung der entsprechenden Umkehrfunktion areatanh.

7.7 Man berechne die Ableitung folgender Funktionen auf $\mathbb{R}^+$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha, x^x,\ (x^x)^x,\ x^{x^x}, \ln(x + \cos^2(\frac{1}{x^2}))\,.$$

7.8 Berechnen Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = x^3 e^x\,, \quad g(x) = \exp\left(x^{999}\right),\ h(x) = \frac{1}{2 + \exp(i4x)}\,,$$

$f^{(1000)}(x)$, $g^{(1000)}(0)$ und $h'(x)$.

7.9 Berechnen Sie ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}},\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1},\quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos nx}{\sin(n^2 x^2)}\,.$$

7.10 Die Exponentialfunktion hat eine in der Theorie der Differentialgleichungen wichtige Eigenschaft: $(e^{ax})' = ae^{ax}$.

Nun sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die $f'(x) = af(x)$ erfüllt. Man zeige: $f(x) = ce^{ax}$ für eine reelle Konstante c.

Hinweis: Differenzieren Sie $f(x)e^{-ax}$!

7.11 Die Funktion $\tan x$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ definiert als $\frac{\sin x}{\cos x}$. Man berechne die erste und die zweite Ableitung dieser Funktion. Weiters bestimme man die Nullstellen der Funktion, und zeige, dass sie streng monoton wachsend auf jedem in $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ enthaltenem Intervall ist. Skizze!

Schließlich zeige man $\lim_{t\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan t = \pm\infty$ und damit, dass tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet, und berechne man die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (Arcustangens).

7.12 Ist $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (x-1)^{x-1}$, $x > 1$ und $f(1) = 1$ bei 1 stetig? Ist f bei 1 rechtsseitig differenzierbar?

7.13 Sei $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (x-1)^{x-1}$ für $x \in (1, 2]$ und durch $f(x) = c + xe^{-x}$ für $x \le 1$ und mit einem $c \in \mathbb{R}$, sodass f stetig ist.

Geben Sie c an! Skizzieren Sie die Funktion! Wo ist f differenzierbar? Suchen Sie die Nullstellen der Ableitung dort, wo die Funktion ableitbar ist! Geben Sie an, auf welchen Teilintervallen von $(-\infty, 2]$ die Funktion (streng) monoton wächst und wo sie (streng) monoton fällt. Bestimmen Sie auch alle lokalen Extrema, sowie das globale Maximum und Minimum (falls vorhanden)!

7.14 Für welchen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten (daher $a, b > 0$) auf der Parabel $y = 4 - x^2$ besitzt das Dreieck, das von der Tangente in (a, b) an die Parabel und den Koordinatenachsen begrenzt wird, minimalen Flächeninhalt?

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass der Kandidat fürs lokale Extremum tatsächlich ein Minimum ist!

7.15 Sei $\alpha > 0$. Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} < \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(1+x)^\alpha} \quad \text{für alle } x > 0\,,$$

und mit Hilfe dieser Ungleichung die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

7.16 Sei $P_n(x) := 2^{-n}(n!)^{-1}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$ das n-te Legendre-Polynom für $n \ge 0$.

(i) Bestimme $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$.

(ii) Bestimme $P_n(0)$.

(iii) Bestätige $(xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ für eine n-fach differenzierbare Funktion f.

(iv) Bestätige $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$.

Anmerkung: Mit (ii) und (iv) lassen sich die Legendre-Polynome rekursiv berechnen.

7.17 Bekannterweise ist $\sin x$ als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ entwickelbar. Man verwende das Taylorsche Restglied um folgende Fragestellung zu beantworten:

Wie groß muss man n wählen, sodass die Differenz des n-ten Taylorpolynoms mit Anschlussstelle 0 von $\sin x$ zur Funktion $\sin x$ auf $[-3, 3]$ höchstens 10^{-6} beträgt?

7.18 Man zeige, dass ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für $0 \le x < 1$, indem man zeigt, dass das Taylorsche Restglied gegen Null konvergiert.

Anmerkung: Die Gleichheit gilt auch für $-1 < x < 0$, denn die Potenzreihe $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ hat Konvergenzradius 1 und stimmt für $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $(1+x)^\alpha$ überein. Nun kann man mit Hilfe des Weierstraß Kriterium zeigen, dass $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ bei festem $x \in (-1, 1)$ stetig in α ist, wenn α

in einer beliebigen kompakten Menge der Form $[-K, K]$ läuft. Da $(1+x)^\alpha$ und $1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ stetige Funktionen in α sind und auf der dichten Menge $[-K, K] \cap \mathbb{Q}$ übereinstimmen, müssen sie auf ganz $[-K, K]$ übereinstimmen.

7.19 Sei f eine reellwertige stetige Funktion, die auf einem Intervall I definiert ist und die im Inneren von I ableitbar ist. Man beweise, dass f genau dann konvex ist, wenn ihre Ableitung f' monoton wachsend ist.

Wenn für f noch zusätzlich die zweite Ableitung im Inneren von I existiert, wie lässt sich dann die Konvexität durch f'' charakterisieren?

Hinweis: Für die $\Rightarrow$ Richtung verwende man letzte Charakterisierung im Übungsbeispiel 6.41. Für die andere Richtung verwende man den Mittelwertsatz.

7.20 Man beweise, dass die Funktionen $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex sind. Weiters zeige man, dass $\ln x$ auf $\mathbb{R}^+$ konkav ist.

7.21 Sei f eine konvexe Funktion auf einem Intervall I. Man beweise mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dass folgende Ungleichungen gelten (*Jensensche Ungleichung*): Für beliebige $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ gilt

$$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)\,.$$

Für beliebige $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \in [0, +\infty)$, wobei nicht alle Null sein dürfen, gilt

$$f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j}\right) \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j}\,.$$

Man zeige damit: Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ gilt

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \leq a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_n\lambda_n\,.$$

Hinweis: $f(x) = e^x$!

7.22 Führen Sie bei der Funktion $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit $f(0) = 0$ eine Kurvendiskussion durch.

Bestimmen Sie also Nullstellen, lokale (globale Extrema), auf welchen Teilintervallen die Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist, Wendepunkte, also Stellen, wo die erste Ableitung der Funktion ein lokales Extremum hat. Bestimmen Sie auch auf welchen Teilintervallen die Funktion konvex bzw. konkav ist!

7.23 Führen Sie bei der Funktion $f_2(x) = x^3 - \frac{48}{x}$, $x \neq 0$ eine Kurvendiskussion durch.

Bestimmen Sie also Nullstellen, lokale (globale Extrema), auf welchen Teilintervallen die Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist, Wendepunkte, also Stellen, wo die erste Ableitung der Funktion ein lokales Extremum hat. Bestimmen Sie auch auf welchen Teilintervallen die Funktion konvex bzw. konkav ist!

7.24 Man berechne die Stammfunktion von x^α auf $(0, \infty)$, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$, und von a^x, wobei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

7.25 Man bestimme die unbestimmten Integrale

$$\int (x^3 + 2x^2 - 3)e^{2x-4} \text{ und } \int x^3 \exp(wx)\,,$$

wobei $w \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest ist.

7.26 Man berechne die unbestimmten Integrale

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} \text{ und } \int x^2 \sin x\,.$$

Hinweis: Hat man eine Funktion f der Gestalt $f(x) = R(e^x)$ wobei R eine rationale Funktion ist, so kann man deren Integral stets mit Hilfe der Substitution $t = e^x$ auf das Integral einer rationalen Funktion bringen.