

Kapitel 6

Reelle und komplexe Funktionen

6.1 Stetigkeit

Sei f eine Funktion und sei x ein Punkt ihres Definitionsbereiches. Sagen wir, dass diese Funktion stetig an der Stelle x ist, so verstehen wir darunter anschaulich, dass der Funktionswert $f(t)$ sich beliebig wenig von $f(x)$ unterscheidet, wenn nur t hinreichend nahe bei x ist. Wir sehen, dass man diesem Begriff Sinn geben kann, wenn man verlangt, dass Definitionsbereich und Wertebereich der betrachteten Funktion metrische Räume sind.

6.1.1 Definition. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, $D \subseteq X$ und $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion. f heißt *stetig an einer Stelle* $x \in D$, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon \text{ für alle } t \in D \text{ mit } d_X(t, x) < \delta,$$

oder äquivalent dazu, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta^X(x) \cap D) \subseteq U_\epsilon^Y(f(x)).$$

Ist f an jeder Stelle x ihres Definitionsbereiches D stetig, so heißt f *stetig* auf D . Die Menge aller stetigen Funktionen von X nach Y wird mit $C(X, Y)$ bezeichnet.

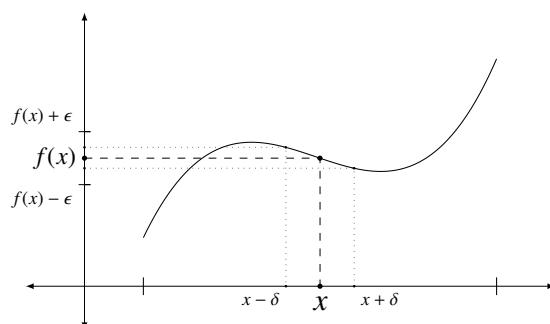
6.1.2 Beispiel.

- (i) Sei $f : X \rightarrow Y$ die konstante Funktion $f(x) := y_0$, $x \in X$. Dann ist f stetig, denn ist $x \in X$ und $\epsilon > 0$, so wähle etwa $\delta = 1$. Für alle $t \in X$ mit $d_X(t, x) < \delta$ gilt sicher

$$d_Y(f(t), f(x)) = d_Y(y_0, y_0) = 0 < \epsilon.$$

- (ii) stetig. Um das einzusehen seien $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Mit $\delta = \epsilon$ folgt für alle $t \in X$, $d_X(t, x) < \delta$, dass

$$d_X(f(t), f(x)) = d_X(t, x) < \delta = \epsilon.$$

Abbildung 6.1: ϵ - δ -Kriterium für $f : I (\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

- (iii) Allgemeiner gilt, dass jede *isometrische Abbildung*¹ $f : X \rightarrow Y$ stetig ist, da zu $x \in X$ und $\epsilon > 0$ mit $\delta = \epsilon$ wieder für alle $t \in X$, $d_X(t, x) < \delta$

$$d_Y(f(t), f(x)) = d_X(t, x) < \delta = \epsilon.$$

- (iv) Die Einbettungsabbildungen $\iota_j^y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ für $j = 1, \dots, p$ und für $y \in \mathbb{R}^p$ definiert durch

$$\xi \mapsto (0, \dots, \underbrace{\xi - y_j}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0) + y$$

sind isometrisch und daher stetig, wenn man \mathbb{R} und \mathbb{R}^p mit d_2 versieht. Insbesondere sind die Abbildungen $\iota_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x + i0$ und $\iota_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $y \mapsto 0 + iy$ stetig.

- (v) Die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ als Funktion auf \mathbb{C} ist isometrisch und daher stetig.

- (vi) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $z \mapsto |z|$. Dann ist f stetig. Denn bei gegebenen $z \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \epsilon$. Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w - z| < \delta$ gilt wegen der Dreiecksungleichung nach unten

$$|f(w) - f(z)| = \left| |w| - |z| \right| \leq |w - z| < \delta = \epsilon.$$

- (vii) Sei $\pi_j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$, die Funktion $x = (x_i)_{i=1}^p \mapsto x_j$. Diese ist überall stetig, denn bei gegebenen $(x_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p$ und $\epsilon > 0$ wähle $\delta = \epsilon$. Für alle $(t_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p$ mit $d_2((x_i)_{i=1}^p, (t_i)_{i=1}^p) < \delta$ gilt

$$|x_j - t_j| \leq d_2((x_i)_{i=1}^p, (t_i)_{i=1}^p) < \epsilon.$$

Genauso zeigt man, dass auch die Abbildungen $\pi_j : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, p$, definiert durch $z = (z_i)_{i=1}^p \mapsto z_j$ stetig sind, wobei \mathbb{C}^p und \mathbb{C} mit d_2 versehen sind; vgl. Beispiel 3.1.5, (iii).

¹ Isometrisch bedeutet $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$.

(viii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := \lfloor x \rfloor$. Dabei bezeichnet $\lfloor \cdot \rfloor$ wieder die Gaußklammer. Diese Funktion ist stetig an jeder Stelle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, und nicht stetig an jeder Stelle $x \in \mathbb{Z}$:

Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, und ist $\epsilon > 0$ gegeben, so wähle $\delta > 0$, sodass das Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ keine ganze Zahl enthält. Dann ist f auf $(x - \delta, x + \delta)$ konstant, und somit gilt

$$|f(t) - f(x)| = 0 < \epsilon, \quad \text{falls } |t - x| < \delta.$$

Ist dagegen $x \in \mathbb{Z}$, so enthält das Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ für jedes $\delta > 0$ sowohl Zahlen t , die größer als x sind, als auch Zahlen t , die kleiner als x sind. Nun ist aber für $t_- < x$ sicher $f(t_-) < f(x)$ und – da ja beide Werte ganze Zahlen sind – $|f(t_-) - f(x)| \geq 1$. Wir können also für kein ϵ mit $0 < \epsilon \leq 1$ ein δ finden, das der geforderten Bedingung genügt.

6.1.3 Fakta. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, $x \in D \subseteq X$ und $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion.

1. Unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit folgt, dass die Stetigkeit bei x eine *lokale Eigenschaft* ist. Also ist f bei x genau dann stetig, wenn es ein $\rho > 0$ gibt, sodass $f|_{U_\rho(x) \cap D}$ stetig bei x ist.
2. Ist x ein isolierter Punkt von D , dann ist f immer stetig bei x . Ist nämlich $\delta > 0$, sodass $U_\delta(x) \cap D = \{x\}$, dann folgt $f(U_\delta(x) \cap D) = \{f(x)\} \subseteq U_\epsilon(f(x))$ für beliebiges $\epsilon > 0$.
3. Ist $f : D \rightarrow Y$ stetig auf D , so sicherlich auch $f|_C$ auf jeder Teilmenge $C \subseteq D$. Also sind Einschränkungen stetiger Abbildungen wieder stetig.

Nun wollen wir die Stetigkeit an einer Stelle mit Hilfe verschiedener Grenzwertbegriffe charakterisieren.

6.1.4 Proposition. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, $D \subseteq X$, und $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion. Ist $x \in D$ ein fester Punkt, dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist stetig an der Stelle x .
- (ii) Ist x kein isolierter Punkt, so gilt $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$, wobei wir diesen Limes verstehen als Limes des Netzes $(f(t))_{t \in D \setminus \{x\}}$, wo $D \setminus \{x\}$ mit der Relation

$$t \leq u \Leftrightarrow d_X(u, x) \leq d_X(t, x)$$

zu einer gerichteten Menge wird, vgl. Definition 5.5.2.

- (iii) Für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D \setminus \{x\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = x$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(x)$.
- (iv) Für jede Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = x$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(x)$.
- (v) Für jedes Netz $(t_i)_{i \in I}$ aus D mit $\lim_{i \in I} t_i = x$ gilt $\lim_{i \in I} f(t_i) = f(x)$.

Beweis.

(i) \Leftrightarrow (ii): Im Falle, dass x ein isolierter Punkt von D ist, wissen wir schon, dass f bei x stetig ist.

Sei also $x \in D$ Häufungspunkt von D . Die Stetigkeit von f an der Stelle x bedeutet nach Definition

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon \text{ für alle } t \in D \text{ mit } d_X(t, x) < \delta.$$

Die Beziehung $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ bedeutet gemäß Definition 5.5.2,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon \text{ für alle } t \in D \setminus \{x\} \text{ mit } d_X(t, x) < \delta.$$

Wegen $d_X(t, x) = 0$ für $t = x$ sind diese beiden Aussagen äquivalent.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Das haben wir schon Korollar 5.5.4 gesehen.

(v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (iii): (iv) ist Spezialfall von (v) und genauso (iii) von (iv).

(i) \Rightarrow (v): Sei $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\epsilon(f(x))$. Sei nun $i_0 \in I$ mit $x_i \in U_\delta(x)$, $i \geq i_0$. Für diese i folgt $f(x_i) \in U_\epsilon(f(x))$, und daraus die behauptete Grenzwertbeziehung. \square

6.1.5 Korollar. Sind $f, g : D \rightarrow Y$ beide stetig und gilt $f(x) = g(x)$ für alle x in einer Teilmenge $E \subseteq D$, so gilt auch $f(x) = g(x)$ für alle $x \in c(E) \cap D$.

Insbesondere stimmen zwei stetige f und g auf D überein, wenn sie das nur auf einer dichten Teilmenge E von D tun.

Beweis. Zu $x \in D \cap c(E)$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $E \subseteq D$, sodass $x_n \rightarrow x$. Wegen $f(x_n) = g(x_n)$ und aus der Stetigkeit beider Funktionen folgt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x). \quad \square$$

Viele stetige Funktionen lassen sich mit Hilfe des nächsten Lemmas als solche identifizieren.

6.1.6 Lemma. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, $D \subseteq X$, $E \subseteq Y$ und $f : D \rightarrow Y$ und $g : E \rightarrow Z$ mit $f(D) \subseteq E$. Ist f bei $x \in D$ und g bei $f(x)$ stetig, so ist $g \circ f : D \rightarrow Z$ bei x stetig.

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ gibt es wegen der Stetigkeit von g ein $\gamma > 0$, sodass $g(U_\gamma(f(x)) \cap E) \subseteq U_\epsilon(g(f(x)))$, und wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, sodass $f(U_\delta(x) \cap D) \subseteq U_\gamma(f(x))$. Setzt man das zusammen und beachtet, dass auch $f(U_\delta(x) \cap D) \subseteq f(D) \subseteq E$, so erhält man

$$(g \circ f)(U_\delta(x) \cap D) \subseteq g(U_\gamma(f(x)) \cap E) \subseteq U_\epsilon(g(f(x))). \quad \square$$

6.1.7 Beispiel. Aus den Rechenregeln für Folgen in Satz 3.3.5 folgern wir mit Hilfe der Folgencharakterisierung der Stetigkeit, Proposition 6.1.4, (iv), dass die algebraischen Operationen

$$+ : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) & \mapsto x + y, \end{cases} \quad - : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto -x, \end{cases}$$

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) & \mapsto x \cdot y, \end{cases} \quad \cdot^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ x & \mapsto \frac{1}{x}, \end{cases}$$

stetig sind. Genauso sind die algebraischen Operationen auf \mathbb{C} stetig. Hier sind $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}, \mathbb{C}^2$ alle mit der euklidischen Metrik d_2 versehen².

6.1.8 Korollar. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, $x \in D \subseteq X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen.

- Die Abbildung $t \mapsto (f(t), g(t))$ von D nach \mathbb{R}^2 ist genau dann bei x stetig, wenn f und g es sind.
- Sind f und g stetig bei x , so auch die Abbildungen

$$t \mapsto \lambda \cdot f(t), \quad t \mapsto f(t) + g(t), \quad t \mapsto f(t)g(t)$$

von D nach \mathbb{R} .

- Ist f bei x stetig, und gilt $f(t) \neq 0$, $t \in D$, so ist auch $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ von D nach \mathbb{R} bei x stetig.

Dieselben Aussagen sind wahr, wenn f und g komplexwertig sind.

Beweis. Für eine beliebige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gilt gemäß Proposition 3.6.1, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n), g(x_n)) = (f(x), g(x))$. Wegen Proposition 6.1.4, (iv), folgt daher die erste Behauptung.

Für bei x stetige f und g sind $t \mapsto f(t) + g(t)$, $t \mapsto f(t) \cdot g(t)$ und $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ Zusammensetzungen von einer bei x stetigen und einer überall stetigen Funktion. Zum Beispiel ist $t \mapsto f(t)g(t)$ die Zusammensetzung von $t \mapsto (f(t), g(t))$ und $(u, v) \mapsto uv$; siehe Beispiel 6.1.7. Jedes konstante $g(t) = \lambda$, $t \in D$, ist stetig, wodurch sich auch die Stetigkeit von $t \mapsto \lambda \cdot f(t)$ ergibt. \square

6.1.9 Bemerkung. Mit fast identer Argumentation sieht man, dass für Abbildungen $f_1, \dots, f_p : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \in D \subseteq X$ für einen metrischen Raum X genau dann alle diese Abbildungen stetig bei x sind, wenn die Abbildung $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_p(t))$ von D nach \mathbb{R}^p stetig bei x ist. Diese Feststellung können wir auch so formulieren, dass eine Abbildung $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $\pi_j \circ \phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, p$ stetig sind; vgl. Beispiel 6.1.2. Entsprechendes gilt für Abbildungen $f_1, \dots, f_p : D \rightarrow \mathbb{C}$.

² Diese Feststellung gilt für den reellen Fall auch, wenn man d_1 oder d_∞ hernimmt; vgl. Proposition 3.6.1.

6.1.10 Beispiel.

- (i) Weil $x \mapsto x$ als Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R} stetig ist, folgt mit Korollar 6.1.8 nacheinander auch die Stetigkeit der Abbildungen $x \mapsto x \cdot x$, $x \mapsto x \cdot x \cdot x$ usw. . Also sind die Abbildungen $x \mapsto x^m$ von \mathbb{R} nach \mathbb{R} für jedes $m \in \mathbb{N}$ stetig genauso wie die konstante Abbildung $x \mapsto x^0 := 1$.

Wieder mit einigen Anwendungen von Korollar 6.1.8 folgt, dass für jedes Polynom p mit reellen Koeffizienten $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$x \mapsto p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

von \mathbb{R} nach \mathbb{R} stetig ist. Für zwei Polynome p und q mit reellen Koeffizienten betrachten wir die rationale Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Wegen Fakta 6.1.3, 3, sind $p|_D$ und $q|_D$ stetig und wegen Korollar 6.1.8 auch f^3 .

- (ii) Für ein Polynom p mit komplexen Koeffizienten $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ können wir die Abbildung $z \mapsto a_n z^n + \dots + a_0 = p(z)$ als Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C} betrachten. Man zeigt wie im vorherigen Beispiel, dass auch diese Abbildung stetig ist.

Für zwei Polynome p und q mit komplexen Koeffizienten ist die rationale Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit $D = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$ ebenfalls stetig.

- (iii) Für zwei Polynome p und q mit komplexen Koeffizienten sind auch die Funktionen $x \mapsto p(x)$ und $x \mapsto q(x)$ als Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{C} sowie $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ als Abbildungen von $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ von \mathbb{R} nach \mathbb{C} stetig, denn sie lassen sich schreiben als Zusammensetzung der stetigen Abbildung $\iota_1 : x \mapsto x + i0$ und der entsprechenden Funktion aus dem letzten Punkt.

- (iv) Da für ein lineares Funktional $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ der Ausdruck $f(x)$ als Linearkombination der Einträge von $x \in \mathbb{R}^p$ geschrieben werden kann, folgt leicht mit Hilfe von Proposition 6.1.4, (iv), dass ein jedes solches f stetig ist.

Daraus und mit Hilfe von Bemerkung 6.1.9 sieht man allgemeiner, dass auch alle linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ stetig sind. Entsprechendes gilt für \mathbb{C} -lineare Abbildungen $A : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^q$.

- (v) Aus dem letzten Beispiel oder direkt mit Hilfe von Proposition 6.1.4, (iv), zusammen mit Bemerkung 6.1.9 erkennt man auch, dass $(x, y) \mapsto x + y$ als Abbildung von $\mathbb{R}^{2p} \cong \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ nach \mathbb{R}^p sowie $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ als Abbildung von $\mathbb{R}^{p+1} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ nach \mathbb{R}^p stetig sind. Entsprechendes gilt im komplexen Fall.

³ Wem diese Tatsache trivial vorkommt, der versuche „zu Fuß“, also durch explizite Angabe einer Zahl δ zu vorgegebenen ϵ und x , zu überprüfen, dass etwa die Funktion $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ auf ihrem Definitionsbereich \mathbb{R} stetig ist.

6.1.11 Beispiel. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^p$, Y ein metrischer Raum und $f : D \rightarrow Y$ stetig, so folgt aus Beispiel 6.1.2, Fakta 6.1.3, 3 und Lemma 6.1.6 für alle $j = 1, \dots, p$ und alle $y \in \mathbb{R}^p$ die Stetigkeit von $f \circ \iota_j^y : \{t \in \mathbb{R} : \iota_j^y(t) \in D\} \rightarrow Y$.

Umgekehrt kann man aber nicht von der Stetigkeit aller $f \circ \iota_j^y$ auf die von f schließen, wie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\xi, \eta) := \begin{cases} \frac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}, & \text{falls } (\xi, \eta) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (\xi, \eta) = (0, 0), \end{cases}$$

zeigt. Diese Funktion ist bei $(0, 0)$ nicht stetig, weil etwa $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die folgende mengentheoretisch orientierte Charakterisierung der Stetigkeit einer Funktion spielt eine wichtige Rolle. Man beachte, dass dabei für die Funktion f der Definitionsbereich gleich dem ganzen metrischen Raum X ist.

6.1.12 Proposition. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist stetig.
- (ii) Für jede in $\langle Y, d_Y \rangle$ offene Teilmenge B von Y ist ihr Urbild $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ offen in $\langle X, d_X \rangle$.
- (iii) Für jede in $\langle Y, d_Y \rangle$ abgeschlossene Teilmenge F von Y ist ihr Urbild $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$ abgeschlossen in $\langle X, d_X \rangle$.

Beweis.

(i) \Rightarrow (ii): Sei $B \subseteq Y$ offen, und sei $x \in f^{-1}(B)$. Da B offen ist und $f(x) \in B$, folgt $U_\epsilon(f(x)) \subseteq B$ für ein $\epsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit existiert $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\epsilon(f(x)) \subseteq B$, was zu $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B)$ äquivalent ist. Also enthält $f^{-1}(B)$ mit jedem Punkt eine ganze δ -Kugel, womit sich $f^{-1}(B)$ als offen erweist.

(ii) \Rightarrow (i): Sei $\epsilon > 0$ und $x \in X$ gegeben. Die Menge $U_\epsilon(f(x))$ ist offen, also ist auch $f^{-1}(U_\epsilon(f(x)))$ offen. Wegen $x \in f^{-1}(U_\epsilon(f(x)))$ existiert ein $\delta > 0$, sodass $U_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U_\epsilon(f(x)))$. Das heißt aber gerade $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\epsilon(f(x))$.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Das folgt sofort aus Proposition 5.1.14 und der Tatsache, dass $f^{-1}(M^c) = f^{-1}(M)^c$ für alle $M \subseteq Y$. \square

6.1.13 Proposition. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, und $f : D \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Ist $K \subseteq D$ kompakt, so ist auch $f(K) \subseteq Y$ kompakt und damit auch beschränkt.

Beweis. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f(K)$, und sei $x_n \in K$, sodass $f(x_n) = y_n$. Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine gegen ein $x \in K$ konvergente Teilfolge $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aus der Stetigkeit folgt

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n(k)}.$$

Also hat $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert aus $f(K)$. Also ist $f(K)$ kompakt und wegen Proposition 5.2.8 beschränkt. \square

6.1.14 Korollar. Sei $\langle X, d_X \rangle$ ein metrischer Raum, $D \subseteq X$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann ist f auf K beschränkt und nimmt ein Maximum und ein Minimum an: Es gibt Punkte $x_{\max}, x_{\min} \in K$ mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Insbesondere nimmt jede auf einem reellen Intervall $[a, b]$ definierte und stetige reellwertige Funktion ein Maximum und ein Minimum an.

Beweis. Nach Proposition 6.1.13 ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, und wegen Proposition 5.2.8 damit beschränkt und abgeschlossen. Wegen Beispiel 5.1.13 ist $\sup f(K) = \max f(K) = f(x_{\max})$ für ein $x_{\max} \in K$. Entsprechend zeigt man die Aussage für das Minimum. \square

6.1.15 Proposition. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume und $D \subseteq X$ kompakt. Ist $f : D \rightarrow Y$ stetig und injektiv, so ist es auch $f^{-1} : \text{ran}(f) \rightarrow D \subseteq X$.

Beweis. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\text{ran } f$ mit $y_n \rightarrow y$, und setze $x_n = f^{-1}(y_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für die Stetigkeit von f^{-1} bei y müssen wir $x_n \rightarrow f^{-1}(y)$ nachweisen, wofür es gemäß Lemma 5.2.11 wegen der Kompaktheit von D reicht, $f^{-1}(y)$ als einzig möglichen Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu identifizieren.

Ist $x \in X$ Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also ist x Grenzwert einer Teilfolge $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, dann folgt $x \in D$, da D wegen Proposition 5.2.8 abgeschlossen ist. Aus der Stetigkeit erhalten wir $y_{n(k)} = f(x_{n(k)}) \rightarrow f(x)$ für $k \rightarrow \infty$. Als Teilfolge einer gegen y konvergenten Folge konvergiert $(y_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ auch gegen y , womit $f(x) = y$ bzw. $x = f^{-1}(y)$. \square

6.1.16 Beispiel. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für ein festes $c > 0$ sei $f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch die Vorschrift $f(t) = t^n$. Wegen Beispiel 6.1.10 und Fakta 6.1.3, 3, ist f stetig. Zudem gilt $f([0, c]) = [0, c^n]$, vgl. Bemerkung 2.9.7.

Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, c^n] \rightarrow [0, c] \subseteq \mathbb{R}$, $t \mapsto \sqrt[n]{t}$, ist gemäß Proposition 6.1.15 stetig. Wegen $c^n \rightarrow +\infty$ für $c \rightarrow +\infty$ und da die Stetigkeit wegen Fakta 6.1.3, 1, eine lokale Eigenschaft ist, folgt sogar die Stetigkeit von $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Stetigkeit der Wurzelfunktion kann man auch mit Hilfe von Satz 3.3.5, (vii), leicht zeigen.

6.2 Der Zwischenwertsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Anschauung von Stetigkeit legt nahe, dass mit I auch $f(I)$ ein Intervall ist.

6.2.1 Bemerkung. Man überlegt sich leicht, dass $I \subseteq \mathbb{R}$ genau dann ein *Intervall* ist, also genau dann eine der Formen $(a, b \in \mathbb{R}, a < b,$)

$$\emptyset, (a, b), [a, b], [a, a], (a, b], [a, b), (a, +\infty), (-\infty, a), [a, +\infty), (-\infty, a], \mathbb{R},$$

hat, wenn für I gilt

$$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq I.$$

Um zu rechtfertigen, dass $f(I)$ wieder ein Intervall ist, werden wir eine weitere charakteristische Eigenschaft von Intervallen herleiten.

6.2.2 Definition. Dazu nennen wir eine Teilmenge E eines metrischen Raumes *zusammenhängend*, wenn man E nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen schreiben kann. Dabei heißen A und B *getrennt*, wenn

$$c(A) \cap B = A \cap c(B) = \emptyset.$$

6.2.3 Satz. *Eine Teilmenge I von \mathbb{R} ist genau dann ein Intervall, wenn I zusammenhängend ist.*

Beweis.

↪ Im Falle, dass I nur ein oder gar kein Element enthält – also $I = \{x\}$ oder $I = \emptyset$, erkennt man sofort mit Bemerkung 6.2.1 und Definition 6.2.2, dass I ein Intervall und I auch zusammenhängend ist. Wir können also für den Rest des Beweises annehmen, dass I zumindest zwei verschiedene Elemente enthält.

↪ Angenommen es existieren $x, y \in I, x < y$, sodass $[x, y] \not\subseteq I$. Wähle $z \in [x, y] \setminus I$ und setze

$$A := (-\infty, z] \cap I, \quad B := [z, +\infty) \cap I.$$

Dann sind A und B disjunkt, und jeder Häufungspunkt t von A ist in $(-\infty, z]$, da diese Menge ja abgeschlossen ist. Wegen $z \notin I$ folgt $z \notin B$ und damit $c(A) \cap B = \emptyset$. Genauso sieht man $A \cap c(B) = \emptyset$. Also ist I nicht zusammenhängend.

↪ Sei umgekehrt I nicht zusammenhängend. Dann können wir I als $A \cup B$ mit nichtleeren A, B schreiben, wobei $c(A) \cap B = A \cap c(B) = \emptyset$. Wähle $x \in A$ und $y \in B$, und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $x < y$.

Man betrachte $t = \sup(A \cap [x, y])$. Insbesondere ist $x \leq t \leq y$. Weiters erhält man aus $t \in c(A \cap [x, y]) \subseteq c(A)$ (siehe Beispiel 3.3.4), dass $t \notin B$, und somit $x \leq t < y$.

Wir wollen nun $[x, y] \not\subseteq I$ zeigen, was im Fall $t \notin A$, sofort aus $t \in [x, y] \setminus (A \cup B) = [x, y] \setminus I$ folgt.

Im Fall $t \in A$ folgt aus $t \notin c(B)$ die Existenz einer ϵ -Kugel $(t - \epsilon, t + \epsilon)$, sodass

$$(t - \epsilon, t + \epsilon) \cap B = \emptyset.$$

Zusammen mit $x \leq t < y \in B$ folgt daraus

$$x \leq t < \underbrace{t + \frac{\epsilon}{2}}_{\notin B} < t + \epsilon \leq y \quad \text{also} \quad t + \frac{\epsilon}{2} \in (x, y) \setminus B.$$

Wegen $t = \sup(A \cap [x, y])$ kann $t + \frac{\epsilon}{2}$ aber nicht in A liegen. Somit gilt $t + \frac{\epsilon}{2} \in [x, y] \setminus (A \cup B) = [x, y] \setminus I$ und daher $[x, y] \not\subseteq I$. \square

6.2.4 Proposition. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, $D \subseteq X$ und $f : D \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Ist $E \subseteq D$ zusammenhängend, so auch $f(E)$.

Beweis. Angenommen $f(E)$ wäre nicht zusammenhängend. Dann gilt $f(E) = A \cup B$ mit $A, B \neq \emptyset$ und $c(A) \cap B = A \cap c(B) = \emptyset$. Für die nichtleeren Mengen $E \cap f^{-1}(A)$, $E \cap f^{-1}(B)$ folgt

$$E = (E \cap f^{-1}(A)) \cup (E \cap f^{-1}(B)), \quad (E \cap f^{-1}(A)) \cap (E \cap f^{-1}(B)) = \emptyset.$$

Zu jedem $x \in c(E \cap f^{-1}(A)) \cap E \cap f^{-1}(B)$ gibt es wegen Lemma 5.1.12 eine gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $E \cap f^{-1}(A)$. Aus der Stetigkeit von f folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$, und somit $f(x) \in c(f(E \cap f^{-1}(A))) \subseteq c(A)$. Andererseits ist $f(x) \in f(E \cap f^{-1}(B)) \subseteq B$ im Widerspruch zu $c(A) \cap B = \emptyset$.

Also kann nur $c(E \cap f^{-1}(A)) \cap E \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Entsprechend gilt $c(E \cap f^{-1}(B)) \cap E \cap f^{-1}(A) = \emptyset$, und E wäre somit nicht zusammenhängend, was unserer Annahme widerspricht. \square

6.2.5 Beispiel. Die Einheitskreislinie $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ kann als das Bild von $[0, 2\pi)$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto \exp(ix)$ geschrieben werden, wie wir später sehen werden; vgl. Satz 6.9.3 und Satz 6.9.10. Nach Proposition 6.2.4 identifizieren wir damit \mathbb{T} als zusammenhängend.

6.2.6 Korollar (Zwischenwertsatz). Sei $I \subseteq D$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $f(I)$ ein Intervall. Also gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit

$$(-\infty \leq) \inf f(I) < c < \sup f(I) (\leq +\infty)$$

einen Punkt $x \in I$, sodass $f(x) = c$.

Beweis. Nach Satz 6.2.3 ist I zusammenhängend. Gemäß Proposition 6.2.4 ist daher auch $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, und wiederum wegen Satz 6.2.3 ein Intervall. Wählt man $\alpha, \beta \in f(I)$ mit $\inf_{x \in I} f(x) < \alpha < c < \beta < \sup_{x \in I} f(x)$, dann enthält $f(I)$ das ganze Intervall $[\alpha, \beta]$ (siehe Bemerkung 6.2.1). Also gibt es ein $x \in I$ mit $f(x) = c$. \square

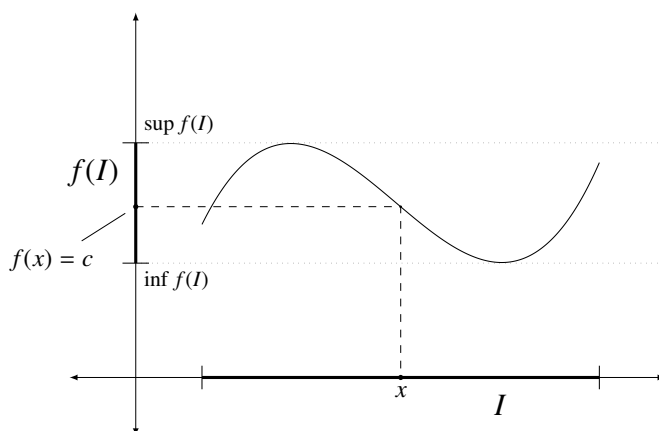


Abbildung 6.2: Veranschaulichung des Zwischenwertsatzes

6.2.7 Beispiel. Die Funktion $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = t^n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist stetig. In Bemerkung 2.9.7 hatten wir in Folge der Existenz von n -ten Wurzeln – vgl. Satz 2.9.5 – schon festgestellt, dass $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$.

Ohne Satz 2.9.5 zu verwenden, können wir das auch aus Korollar 6.2.6 herleiten. In der Tat folgt aus diesem, dass $f([0, +\infty))$ ein Intervall ist. Wegen $f(t) \geq 0$ für $t \in [0, +\infty)$ muss $f([0, +\infty)) \subseteq [0, +\infty)$. Aus $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = +\infty$ schließen wir, dass das Intervall $f([0, +\infty))$ beliebig große Zahlen enthält, also nicht beschränkt ist. Zusammen mit $f(0) = 0$ folgt daraus, dass $f([0, +\infty))$ nur von der Form $[0, +\infty)$ sein kann.

Da f streng monoton wachsend und somit $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ bijektiv ist, folgt somit auch ohne Satz 2.9.5, dass $t^n = x$ für jedes reelle $x \geq 0$ eine eindeutige Lösung in $[0, +\infty)$ hat – also dass es eindeutige n -te Wurzeln von Zahl aus $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$ gibt.

6.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Die Definition der Stetigkeit einer Funktion $f : D \rightarrow Y$ in logischen Formeln angeschrieben lautet

$$\forall x \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in D : d_X(t, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon. \quad (6.1)$$

Die Zahl δ , die es zu jedem ϵ geben muss, hängt im Allgemeinen nicht nur von ϵ , sondern auch von der Stelle x ab.

6.3.1 Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Ist $x \in \mathbb{R}^+$ und $\epsilon > 0$ gegeben, so berechnet man:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \delta} = \frac{\delta}{(x + \delta)x}.$$

Damit dieser Ausdruck $\leq \epsilon$ ist, darf δ höchstens $\frac{\epsilon x^2}{1 - \epsilon x}$ sein. Man sieht, dass diese größtmögliche Wahl von δ immer kleiner wird, je kleiner x ist, und tatsächlich für $x \rightarrow 0$ gegen 0

strebt. Man kann in diesem Beispiel also zu gegebenem $\epsilon > 0$ kein $\delta > 0$ finden, welches von x unabhängig ist.

Sollte eine Funktion nun so beschaffen sein, dass dieses Phänomen nicht auftritt, sollte also zu gegebenem $\epsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ existieren, welches für alle x funktioniert, so nennt man die Funktion gleichmäßig stetig.

6.3.2 Definition. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume und $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, t \in D : d_X(t, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon.$$

Vergleicht man diese Definition mit der Formel (6.1), so sieht man, dass man hier den Allquantor $\forall x \in D$ und den Existenzquantor $\exists \delta > 0$ vertauscht hat. Dies wird also nicht den gleichen, sondern einen stärkeren Begriff liefern.

Ist f gleichmäßig stetig, so ist f auch stetig. Wie wir in Beispiel 6.3.1 gesehen haben, gilt die Umkehrung nicht. Interessant in diesem Zusammenhang ist nun der folgende Satz.

6.3.3 Satz. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume und $D \subseteq X$ kompakt. Dann ist jede stetige Funktion $f : D \rightarrow Y$ sogar gleichmäßig stetig.

Beweis. Nehme man das Gegenteil an. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass es für alle $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in D$ gibt, sodass $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$.

Die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ haben wegen der Kompaktheit von D Häufungspunkte x bzw. y . Somit gilt

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)}, \quad y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n(k)}$$

für Teilfolgen $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(y_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$. Aus $d_X(x_{n(k)}, y_{n(k)}) < \frac{1}{n(k)}$ folgt mit Lemma 3.2.10, dass

$$d_X(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_X(x_{n(k)}, y_{n(k)}) = 0,$$

also $x = y$ und somit $f(x) = f(y)$. Andererseits folgt aus der Stetigkeit zusammen mit Lemma 3.3.1 der offensichtliche Widerspruch

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_Y(\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n(k)}), \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n(k)})) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_Y(f(x_{n(k)}), f(y_{n(k)})) \geq \epsilon. \quad \square$$

6.3.4 Beispiel. Für nicht kompaktes $E \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

- (i) Es gibt eine auf E stetige Funktion, die nicht beschränkt ist.
- (ii) Es gibt eine auf E stetige und beschränkte Funktion, die kein Maximum hat.
- (iii) Ist E beschränkt, so gibt es eine auf E stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktion.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass E beschränkt ist. Weil E als nicht kompakt vorausgesetzt wird, hat E einen Häufungspunkt x_0 , der nicht zu E gehört; vgl. Korollar 5.2.9.

Eine Funktion mit den in (i) geforderten Eigenschaften ist dann $x \mapsto \frac{1}{x-x_0}$. Ähnlich wie in Beispiel 6.3.1 zeigt man, dass diese Funktion auch nicht gleichmäßig stetig ist, womit sie

auch als Beispiel für (iii) herhält. Dagegen ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+(x-x_0)^2}$ zwar stetig auf E , aber wegen $0 < f(x) < 1$ beschränkt. Zudem nimmt f auf E wegen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ und infolge $\sup_{x \in E} f(x) = 1$ kein Maximum an. Also gilt auch (ii).

Im Fall, dass E nicht beschränkt ist, folgt (i) mit $f(x) = x$, und (ii) mit $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

In (iii) kann man die Forderung, dass E beschränkt ist, nicht ganz weglassen. Zum Beispiel betrachte $E = \mathbb{Z}$. Dann ist jede Funktion auf E gleichmäßig stetig.

6.3.5 Satz (*). Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, wobei $\langle Y, d_Y \rangle$ vollständig ist. Weiters sei $D \subseteq X$ und $f : D \rightarrow Y$ gleichmäßig stetig.

Dann existiert eine eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung $F : c(D) \rightarrow Y$.

Beweis.

↪ Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Punkten aus D . Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass

$$d_Y(f(y), f(z)) < \epsilon \text{ für alle } y, z \in D \text{ mit } d_X(y, z) < \delta. \quad (6.2)$$

Weiters wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $d_X(x_n, x_m) < \delta$ für alle $n, m \geq N$. Dann folgt

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

Somit ist $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y , und infolge existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

↪ Sei $x \in X$, und seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von Punkten in D mit $x_n \rightarrow x$ sowie $y_n \rightarrow x$. Ist $\epsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ wie in (6.2), so wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d_X(x_n, x) < \frac{\delta}{2}, \quad d_X(y_n, x) < \frac{\delta}{2} \text{ für alle } n \geq N.$$

Aus $d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x) + d_X(y_n, x) < \delta$ folgt dann $d_Y(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$ für alle $n \geq N$, und daher

$$d_Y\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)\right) \leq \epsilon.$$

Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$.

↪ Zu jedem $x \in c(D)$ gibt es definitionsgemäß eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x$. Wir definieren

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Wegen der obigen Punkte ist F eine wohldefinierte Funktion von X nach Y .

Für $x \in D$ konvergiert die konstante Folge $x_n := x$, $n \in \mathbb{N}$, gegen x , und infolge die konstante Folge $f(x_n) = f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $f(x)$, wodurch $F(x) = f(x)$. Also ist F eine Fortsetzung von f .

Es bleibt zu zeigen, dass F gleichmäßig stetig ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben, und wähle $\delta > 0$, sodass $d_Y(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x, y \in D$ mit $d_X(x, y) < \delta$.

Sind nun $x, y \in c(D)$ mit $d_X(x, y) < \frac{\delta}{3}$, so gibt es gegen x bzw. y konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus D . Wählt man $N \in \mathbb{N}$ mit

$$d_X(x_n, x) < \frac{\delta}{3}, \quad d_X(y_n, y) < \frac{\delta}{3}, \quad d_Y(F(x), f(x_n)) < \frac{\epsilon}{3}, \quad d_Y(F(y), f(y_n)) < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $n \geq N$, so folgt für diese n aus der Dreiecksungleichung $d_X(x_n, y_n) < \delta$. Gemäß unserer Wahl von $\delta > 0$ gilt dann $d_Y(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\epsilon}{3}$, und infolge $d_Y(F(x), F(y)) < \epsilon$.

↪ Die Eindeutigkeit erhalten wir aus Korollar 6.1.5. □

6.4 Unstetigkeitsstellen

Sei $\langle Y, d_Y \rangle$ ein metrischer Raum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow Y$ eine Funktion. f ist gemäß Proposition 6.1.4 genau dann bei einem $x \in I$ stetig, wenn $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$. In (5.25) haben wir gesehen, dass für ein $x \in I$, welcher kein Randpunkt ist, $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$ genau dann gilt, wenn die Grenzwerte

$$f(x-) := \lim_{t \rightarrow x-} f(t) \quad \text{und} \quad f(x+) := \lim_{t \rightarrow x+} f(t)$$

existieren und beide mit $f(x)$ übereinstimmen. Ist x rechter bzw. linker Randpunkt von I , so ist die Stetigkeit bei x zu $f(x) = f(x-)$ bzw. $f(x) = f(x+)$ äquivalent.

6.4.1 Bemerkung. Ist $x \in I$ nicht linker (nicht rechter) Randpunkt von I , und gilt zumindest $f(x) = f(x-)$ ($f(x) = f(x+)$), so spricht man von *Linksstetigkeit* bzw. *linksseitiger Stetigkeit* (*Rechtsstetigkeit* bzw. *rechtsseitiger Stetigkeit*) der Funktion f bei x .

Ist f nicht stetig, so unterscheidet man folgende Fälle.

6.4.2 Definition. Sei $f : I \rightarrow Y$ unstetig bei x .

- Ist x kein Randpunkt von I , existieren sowohl $f(x-)$ also auch $f(x+)$ und stimmen zumindest zwei der drei Zahlen $f(x-)$, $f(x)$, $f(x+)$ nicht überein, so hat f bei x eine *Unstetigkeit 1. Art*. Ist x rechter (linker) Randpunkt von I , so hat f bei x eine *Unstetigkeit 1. Art*, wenn $f(x-)$ und $f(x)$ ($f(x+)$ und $f(x)$) nicht übereinstimmen.

Ist x ist kein Randpunkt und gilt $f(x-) \neq f(x+)$, so spricht man von einer *Sprungstelle*. Anderenfalls spricht man von einer⁴*hebbarer Unstetigkeit*.

- Liegt keine Unstetigkeit 1. Art vor, so spricht man von einer *Unstetigkeit 2. Art*.

Wir wollen zeigen, dass im Allgemeinen alle möglichen Varianten von Unstetigkeiten auftreten können.

⁴ Den Begriff „hebbar“ hat man deswegen gewählt, weil man f an der Stelle x so abändern kann, dass die neue Funktion bei x stetig ist.

6.4.3 Beispiel.

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche bei allen rationalen Zahlen den Wert 1 und bei allen irrationalen Zahlen den Wert 0 annimmt, hat an jeder Stelle eine Unstetigkeit 2.Art.

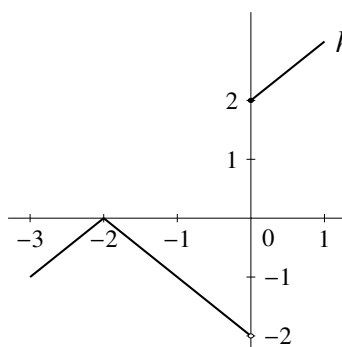
(ii) Sei

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

g ist stetig bei 0, hat aber an jeder Stelle $x \neq 0$ eine Unstetigkeit 2.Art. Es gibt nämlich eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q} \cap (x, +\infty)$ und eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap (x, +\infty)$, die beide gegen x konvergieren; vgl. Beispiel 3.3.4. Nun gilt aber $f(x_n) = 0 \rightarrow 0$ und $f(r_n) = r_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$. Nach (5.25) kann daher $\lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ nicht existieren. Ähnlich zeigt man, dass auch $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$ nicht existiert.

(iii) Sei

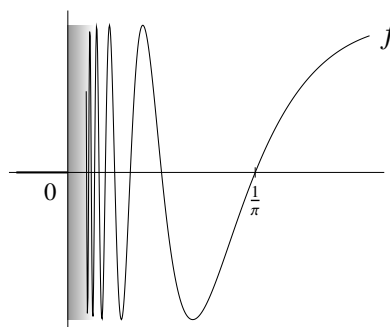
$$h(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{falls } x \in (-3, -2), \\ -x - 2, & \text{falls } x \in [-2, 0), \\ x + 2, & \text{falls } x \in [0, 1). \end{cases}$$



Dann ist h stetig auf $(-3, 1) \setminus \{0\}$ und hat bei 0 eine Sprungstelle.

(iv) Den Begriff der Sinusfunktion aus der Schule voraussetzend sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$



Dann ist f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und hat eine Unstetigkeit 2.Art bei 0.

Thematisch dazu passend wollen wir uns der Fortsetzbarkeit von stetigen Funktionen auf um einen Punkt größere Mengen zuwenden.

6.4.4 Bemerkung. Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume, $D \subseteq X$ und $f : D \rightarrow Y$ eine stetige Funktion. Sei weiters $x \in X \setminus D$. Wir fragen uns, ob wir eine Fortsetzung $\tilde{f} : D \cup \{x\} \rightarrow Y$ von f finden können, die die Eigenschaft stetig zu sein beibehält.

Wenn x kein Häufungspunkt von D ist, so sieht man leicht, dass x ein isolierter Punkt von $D \cup \{x\}$ ist, und daher jede Fortsetzung \tilde{f} stetig ist.

Sei also x ein Häufungspunkt von D . Gibt es eine stetige Fortsetzung \tilde{f} , so muss nach Proposition 6.1.4 $\tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$. Existiert umgekehrt $\lim_{t \rightarrow x} f(t)$, und setzt man

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x} f(t), & \text{falls } s = x, \\ f(s), & \text{falls } s \in D, \end{cases}$$

so ist \tilde{f} eine Fortsetzung von f . Wegen Proposition 6.1.4, (ii), ist \tilde{f} bei x stetig. Andererseits ist wegen Fakta 6.1.3 mit f auch \tilde{f} bei allen $t \in D$ stetig. Also ist \tilde{f} eine auf $D \cup \{x\}$ stetige Fortsetzung.

6.4.5 Beispiel.

- (i) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \leq 0$, $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = a$ für $x < 0$ und $f(x) = \frac{b}{x-c}$ für $x > 0$. Dann gilt $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = a$ und

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \begin{cases} -\frac{b}{c}, & \text{falls } b \neq 0, c < 0, \\ \operatorname{sgn}(b) \cdot \infty, & \text{falls } b \neq 0, c = 0, \\ 0, & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

Gemäß Bemerkung 6.4.4 lässt sich f genau dann zu einer Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ existiert. Nach (5.25) existiert dieser Grenzwert genau dann, wenn $a = b = 0$ oder $b \neq 0, c \neq 0, a = -\frac{b}{c}$. Dabei muss $\tilde{f}(0) = 0$ bzw. $\tilde{f}(0) = a = -\frac{b}{c}$.

- (ii) Die komplexwertige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{iz + 1}{z^3 + z}$$

ist zunächst definiert auf $D = \{z \in \mathbb{C} : z^3 + z \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$. Wir haben in Beispiel 6.1.10 gesehen, dass f auf D stetig ist. Zudem gilt wegen Fakta 5.3.8

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{i(z-i)}{z(z+i)(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{i}{z(z+i)} = \frac{i}{\lim_{z \rightarrow i} z(z+i)} = \frac{i}{2i^2} = -\frac{i}{2}.$$

Somit lässt sich f stetig auf $\tilde{D} = D \cup \{i\}$ durch $f(i) = -\frac{i}{2}$ fortsetzen.

Eine Fortsetzung auf eine noch größere Menge – etwa auf $\tilde{D} \cup \{-i\}$ – ist nicht möglich, da dann auch $\lim_{z \rightarrow -i} f(z)$ und wegen (5.9) auch $\lim_{z \rightarrow -i} |f(z)|$ existieren müsste. Nun gilt aber (vgl. Bemerkung 5.3.9)

$$\lim_{z \rightarrow -i} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{|z| \cdot |z+i|} = +\infty,$$

da für den Nenner rechts $\lim_{z \rightarrow -i} |z| \cdot |z+i| = (\lim_{z \rightarrow -i} |z|) \cdot (\lim_{z \rightarrow -i} |z+i|) = 0$ gilt.

6.5 Monotone Funktionen

6.5.1 Definition. Man sagt, dass für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ *monoton wachsend* ist, falls

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Gilt sogar $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, so nennt man f *streng monoton wachsend*.

Analog heißt f *monoton fallend*, falls $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Sollte $x < y$ sogar $f(x) > f(y)$ implizieren, so spricht von einer *streng monoton fallenden* Funktion.

Klarerweise ist eine streng monotone Funktion stets injektiv. Nun kommen wir zur Diskussion der Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen.

6.5.2 Proposition. Sei f monoton wachsend auf einem reellen Intervall I , wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a < b$, die Intervallränder bezeichnet.

Dann existieren für jeden Punkt $x \in (a, b)$ sowohl $f(x-) := \lim_{s \rightarrow x-} f(s)$ als auch $f(x+) := \lim_{t \rightarrow x+} f(t)$, wobei⁵

$$\sup_{a < s < x} f(s) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x < t < b} f(t). \quad (6.3)$$

Ist $x = a \in I$ ($x = b \in I$), so gilt die rechte (linke) Seite von (6.3). Schließlich folgt aus $x < y$ immer $f(x+) \leq f(y-)$.

Entsprechende Aussagen gelten für monoton fallende Funktionen.

Beweis. Wir beschränken uns auf $x \in (a, b)$. Den Fall der Intervallränder betrachtet man in analoger Weise.

Der Beweis folgt unmittelbar aus (5.10), da die Grenzwerte in (6.3) ja Grenzwerte monotoner und beschränkter Netze sind.

Ungleichung (6.3) folgt aus der Tatsache, dass jeder Punkt aus $\{f(s) : s \in (a, x)\}$ kleiner oder gleich $f(x)$ und $f(x)$ kleiner oder gleich jedem Punkt aus $\{f(t) : t \in (x, b)\}$ ist. Schließlich gilt

$$f(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} f(t) = \inf_{x < t < y} f(t) \leq \sup_{x < s < y} f(s) = \lim_{s \rightarrow y-} f(s) = f(y-). \quad \square$$

6.5.3 Korollar. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion und $J = f(I)$.

- (i) Das Bild J ist genau dann ein Intervall, wenn f stetig ist.
- (ii) Ist f streng monoton wachsend, so ist $f^{-1} : J \rightarrow I$ auch streng monoton wachsend. Dabei enthält I genau dann seinen linken (rechten) Intervallrand, wenn J sein Infimum (Supremum) enthält – also J ein Minimum (Maximum) hat.

⁵ Insbesondere können in (a, b) nur Unstetigkeitsstellen 1. Art auftreten.

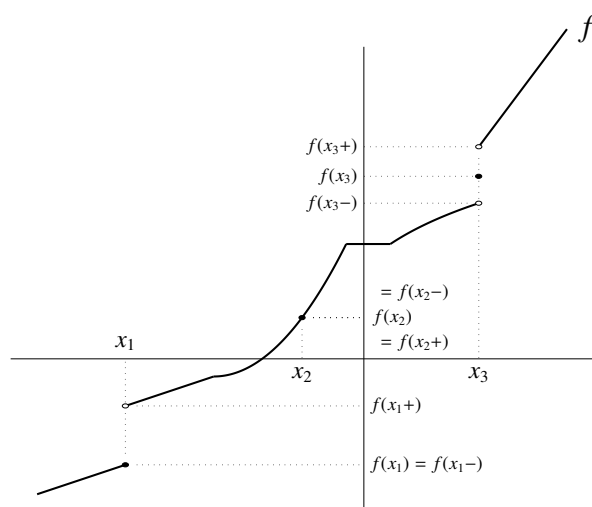


Abbildung 6.3: Veranschaulichung monotoner Funktionen

(iii) Ist f streng monoton wachsend und stetig, so ist auch $f^{-1} : J \rightarrow I$ streng monoton wachsend und stetig.

Entsprechende Aussagen gelten für (streng) monoton fallende Funktionen.

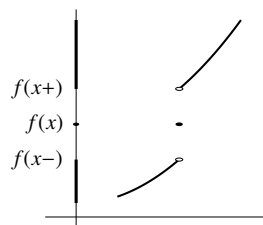
Beweis.

(i) Ist f stetig, so ist wegen Korollar 6.2.6 auch $f(I)$ ein Intervall.

Angenommen f ist nicht stetig an einem $x \in I$, das zunächst nicht ein Intervallrand von I sei. Wegen (6.3) muss $\lim_{s \rightarrow x^-} f(s) < \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$. Es folgt

$$f(\tau) \leq \lim_{s \rightarrow x^-} f(s) = f(x-), \quad \tau < x \quad \text{und} \quad f(\tau) \geq \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) = f(x+), \quad \tau > x.$$

Also kann f keine Werte im Intervall $(f(x-), f(x+))$ bis auf unter Umständen einen, nämlich $f(x)$, annehmen.



Ist x der linke Intervallrand von I , so muss nach (6.3) $f(x) < \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$. Somit folgt $(f(x), \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)) \cap J = \emptyset$. Entsprechend argumentiert man im Fall des rechten Randes. Jedenfalls ist J kein Intervall.

(ii) Wegen der strengen Monotonie ist f injektiv. Ist $x, y \in J, x < y$, und gilt $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$, so folgt wegen der vorausgesetzten Monotonie von f der Widerspruch $x =$

$f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y)) = y$; also gilt $f(x) < f(y)$, womit $f^{-1} : J \rightarrow I$ streng monoton wachsend ist.

Enthält I seinen linken Rand⁶ a , so folgt aus der Monotonie, dass $f(a) \leq f(t)$, $t \in I$, und somit dass $f(a)$ Minimum von J ist.

Hat $J = f(I)$ das Minimum y , so folgt aus der Monotonie von f^{-1} , dass $f^{-1}(y) \leq f^{-1}(x)$, $x \in J$, und somit dass $f^{-1}(y)$ Minimum von I ist; also $a = f^{-1}(y) \in I$.

(iii) Für stetiges f ist J ein Intervall, und die streng monoton wachsende Funktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ hat als Bild genau das Intervall I . Nach dem ersten Punkt muss daher auch f^{-1} stetig sein. \square

Wir werden später dieses Korollar verwenden, um z.B. zu zeigen, dass der Logarithmus eine stetige Funktion ist.

6.5.4 Beispiel. Die Funktion $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = t^n$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist stetig und streng monoton wachsend. Korollar 6.5.3 bietet uns nun eine weitere Möglichkeit, einzusehen, dass $f^{-1} = \sqrt[n]{\cdot}$ von $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ nach $[0, +\infty)$ ($\subseteq \mathbb{R}$) stetig ist; vgl. Beispiel 6.1.16 und Beispiel 6.2.7.

Thematisch zu obigem Ergebnis passt das nächste Lemma, das aus dem Zwischenwertsatz folgt.

6.5.5 Lemma. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle und $f : I \rightarrow J$ stetig und bijektiv. Dann ist f streng monoton wachsend oder fallend.

Beweis. Wäre f weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend, so gibt es $x_1 < x_2$ aus I mit $f(x_1) \geq f(x_2)$ und $x_3 < x_4$ aus I mit $f(x_3) \leq f(x_4)$. Weil f injektiv ist, muss sogar $f(x_1) > f(x_2)$ und $f(x_3) < f(x_4)$. Daraus folgt, dass $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ zumindest drei Elemente hat.

Durch Fallunterscheidungen je nachdem, wie diese Punkte angeordnet sind, findet man immer $a < b < c$ aus $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, sodass entweder $f(a) < f(b)$, $f(b) > f(c)$ oder $f(a) > f(b)$, $f(b) < f(c)$. Man beachte, dass dabei wegen der Injektivität alle drei Werte $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ untereinander verschieden sein müssen.

Im ersten Fall ist entweder $f(a) \in (f(c), f(b))$ oder $f(c) \in (f(a), f(b))$. Aus Korollar 6.2.6 folgt daher $f(a) = f(t)$ für ein $t \in (b, c)$ bzw. $f(c) = f(t)$ für ein $t \in (a, b)$, was jedenfalls der Injektivität widerspricht.

Im zweiten Fall argumentiert man entsprechend. \square

6.6 Gleichmäßige Konvergenz

Für eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen, die zum Beispiel alle eine Menge E nach \mathbb{R} abbilden, würden wir gerne erklären, was es bedeutet, dass diese Folge gegen eine Funktion $f : E \rightarrow$

⁶ I ist daher von der Form $[a, a]$, $[a, b]$, $[a, b)$, $[a, +\infty)$ mit $b \in \mathbb{R}$, $b > a$.

\mathbb{R} konvergiert. Der offensichtlichste Zugang ist, für jedes $x \in E$ die Konvergenz der reellen Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ zu verlangen. Wir werden sehen, dass diese Herangehensweise zwar Sinn macht, sich aber viele Eigenschaften der Folge, wie etwa die Stetigkeit der f_n , bei dieser Art von Grenzübergang nicht auf f übertragen. Ein anderer, fruchtbringenderer Zugang ist, eine geeignete Metrik auf einer Menge von Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ zu definieren, und dann die Konvergenz bezüglich dieser Metrik zu studieren.

6.6.1 Definition. Sei $\emptyset \neq E$ eine Menge und $\langle Y, d_Y \rangle$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : E \rightarrow Y$ heißt *punktweise konvergent* gegen die Funktion $f : E \rightarrow Y$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Entsprechend definiert man die punktweise Konvergenz von Netzen von Funktionen.

Die folgenden Beispiele illustrieren, dass sich die fundamentale Eigenschaft der Stetigkeit der Funktionen f_n nicht auf die Grenzfunktion f übertragen muss.

6.6.2 Beispiel.

- (i) Betrachte die Funktionen $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Bekannterweise gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Jede der Funktionen g_n ist eine stetige Funktionen auf $[0, 1]$, nicht jedoch die Grenzfunktion.

- (ii) Betrachte die Funktionen $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

Für jedes $x \neq 0$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ eine konvergente geometrische Reihe, deren Summe $1+x^2$ ist. Im Falle $x = 0$ verschwinden alle Summanden und damit auch die Summe der Reihe. Also erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} 1+x^2, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Alle Funktionen s_n sind stetige Funktionen auf \mathbb{R} , nicht jedoch die Grenzfunktion.

Wir wollen nun einen stärkeren Konvergenzbegriff für Folgen von Funktionen einführen, welcher unter anderem die Stetigkeit erhält.

6.6.3 Definition. Sei $\emptyset \neq E$ eine Menge und $\langle Y, d_Y \rangle$ ein metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}(E, Y)$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f : E \rightarrow Y$, also

$$\mathcal{B}(E, Y) := \{ f : E \rightarrow Y : \exists R > 0, y \in Y : \forall x \in E \Rightarrow d_Y(f(x), y) \leq R \}.$$

Weiters definieren wir die Funktion

$$d_\infty : \begin{cases} \mathcal{B}(E, Y) \times \mathcal{B}(E, Y) & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (f, g) & \mapsto \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in E\}, \end{cases}$$

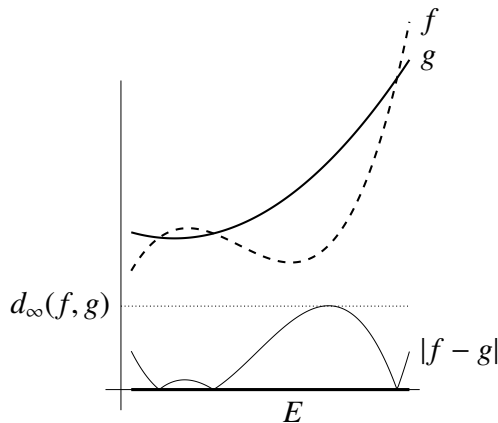
und sprechen von der *Supremumsmetrik*⁷.

$d_\infty(f, g)$ ist in der Tat eine reelle Zahl, da es wegen $f, g \in \mathcal{B}(E, Y)$ reelle $R_1, R_2 > 0$ und $y_1, y_2 \in Y$ gibt, sodass $d_Y(f(x), y_1) \leq R_1, d_Y(g(x), y_2) \leq R_2$ und infolge

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), y_1) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, g(x)) \leq R_1 + d_Y(y_1, y_2) + R_2$$

für alle $x \in E$ gilt. Also ist die nichtleere Teilmenge $\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in E\}$ von \mathbb{R} nach oben beschränkt.

Für reellwertige Funktionen $f, g : E \rightarrow \mathbb{R} = Y$ ist $d_Y(x, y) = |x - y|$ und daher $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$.



6.6.4 Lemma. Die Supremumsmetrik d_∞ ist eine Metrik auf der Menge $\mathcal{B}(E, Y)$.

Beweis. Für $f, g \in \mathcal{B}(E, Y)$ ist $\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in E\}$ eine nichtleere Teilmenge von $[0, +\infty)$, wodurch $d_\infty(f, g) \geq 0$. Dabei gilt offenbar $d_\infty(f, g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in E\} = 0$ genau dann, wenn $\{d_Y(f(x), g(x)) : x \in E\} = \{0\}$ – also genau dann, wenn $d_Y(f(x), g(x)) = 0$ für jedes $x \in E$. Letzteres ist aber zu $f(x) = g(x), x \in E$ – also $f = g$ äquivalent.

Aus $d_Y(f(x), g(x)) = d_Y(g(x), f(x))$ folgt $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$. Ist h eine weitere Funktion, so gilt für festes $x \in E$

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq d_Y(f(x), h(x)) + d_Y(h(x), g(x)),$$

⁷Identifiziert man \mathbb{R}^p mit der Menge aller Funktionen von $\{1, \dots, p\}$ nach \mathbb{R} , so stimmt auf \mathbb{R}^p die Supremumsmetrik hier mit der aus Beispiel 3.1.5, (ii), überein.

und daher auch

$$d_Y(f(x), g(x)) \leq \sup_{t \in E} d_Y(f(t), h(t)) + \sup_{t \in E} d_Y(h(t), g(t)) = d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g).$$

Da diese Beziehung für jedes $x \in E$ gilt, erhalten wir $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} d_Y(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$. \square

6.6.5 Definition. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{B}(E, Y)$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ bezüglich d_∞ , daher wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d_\infty(f_n, f) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq N. \quad (6.4)$$

Entsprechend definiert man die gleichmäßige Konvergenz von Netzen von Funktionen.

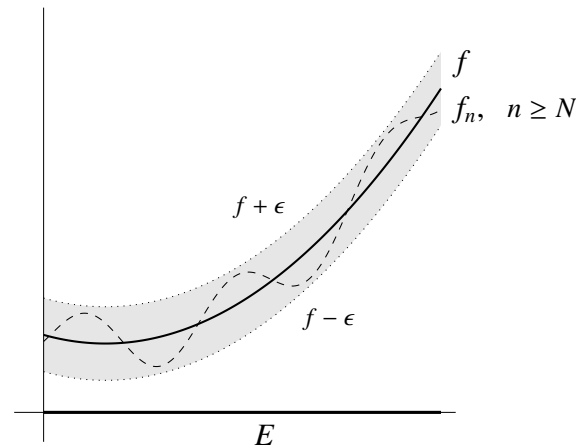


Abbildung 6.4: Veranschaulichung der gleichmäßigen Konvergenz

6.6.6 Bemerkung. Ist $f \in \mathcal{B}(E, Y)$ und g irgendeine Funktion von E nach Y mit der Eigenschaft, dass $\sup_{t \in E} d_Y(f(t), g(t)) < \infty$, so folgt aus der Dreiecksungleichung, dass auch g eine beschränkte Funktion ist.

Ist daher $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{B}(E, Y)$, und gilt $\sup_{t \in E} d_Y(f_n(t), g(t)) \rightarrow 0$, so folgt $g \in \mathcal{B}(E, Y)$ und $f_n \rightarrow g$ gleichmäßig.

Im Unterschied zur punktweisen Konvergenz muss man bei der gleichmäßiger Konvergenz zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden, welches, salopp gesagt, für alle $x \in E$ funktioniert. In der Tat gilt

$$d_\infty(f_n, f) \leq \epsilon \Leftrightarrow d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } x \in E,$$

wodurch (6.4) zu

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in E : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq N$$

äquivalent ist. Die punktweise Konvergenz dagegen bedeutet

$$\forall x \in E \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Insbesondere sehen wir, dass jede gleichmäßig konvergente Folge auch punktweise konvergiert, und zwar gegen die gleiche Grenzfunktion.

6.6.7 Beispiel. Betrachte nochmals die reellwertigen Funktionen $g_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, nun definiert für $x \in [0, 1)$, vgl. Beispiel 6.6.2. Wir wissen schon, dass g_n punktweise gegen die Nullfunktion auf $[0, 1)$ konvergiert. Dabei gilt wegen $x^n < 1$ für $x \in [0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, und wegen $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1$, dass

$$d_\infty(g_n, 0) = \sup_{x \in [0, 1)} d_2(g_n(x), 0) = \sup_{x \in [0, 1)} |x^n| = 1.$$

Also $d_\infty(g_n, 0) \not\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, womit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 1)$ nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

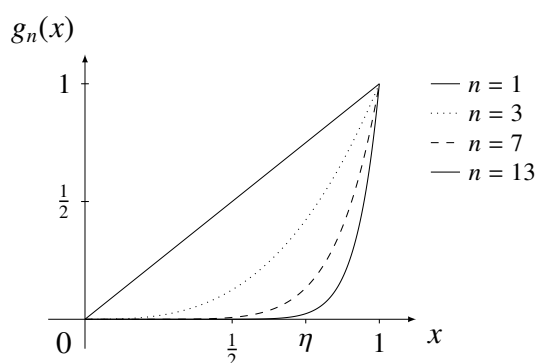


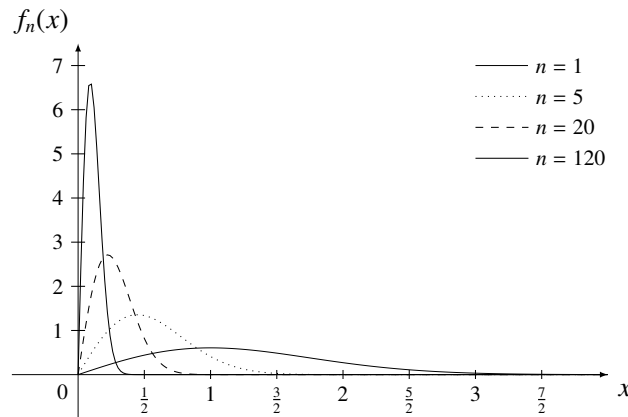
Abbildung 6.5: Graph der Funktionen g_n für ausgewählte $n \in \mathbb{N}$

6.6.8 Beispiel. Sei $\eta \in (0, 1)$ fest, und betrachte die Funktionenfolge $g_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, auf dem Intervall $[0, \eta]$. Klarerweise konvergiert auch diese eingeschränkte Funktionenfolge punktweise gegen die Nullfunktion auf $[0, \eta]$. Nun folgt aber wegen

$$d_\infty(g_n, 0) = \sup_{x \in [0, \eta]} d_2(g_n(x), 0) = \sup_{x \in [0, \eta]} |x^n| = \eta^n,$$

dass $d_\infty(g_n, 0) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Also konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, \eta]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

6.6.9 Beispiel. Wir untersuchen die Funktionenfolge $f_n(x) := nxe^{-\frac{1}{2}nx^2}$, $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, auf gleichmäßige Konvergenz. Dabei greifen wir der Definition der Funktion $x \mapsto e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ weiter hinten vor. Wir verwenden auch die Tatsache, dass $ye^{-y} \rightarrow 0$ für $y \rightarrow +\infty$. Weiters verwenden wir die Differentialrechnung zur Bestimmung von Extrema. Da dieses

Abbildung 6.6: Graph der Funktionen f_n für ausgewählte $n \in \mathbb{N}$

Beispiel nur zum besseren Verständnis des Begriffes der gleichmäßigen Konvergenz dient und später nicht verwendet wird, sind diese Vorgriffe gerechtfertigt.

Zunächst sei bemerkt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x)$ stetig ist und $f_n(x) \geq 0$ für $x \in [0, \infty)$. Eine getrennte Untersuchung der Fälle $x \neq 0$ und $x = 0$ liefert punktweise Konvergenz $f_n(x) \rightarrow f(x) \equiv 0$ für $n \rightarrow \infty$. Um $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf gleichmäßige Konvergenz gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$ zu untersuchen, berechnen wir

$$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{x \in [0, \infty)} d_2(f_n(x), 0) = \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)|.$$

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n(x)$ nicht negativ ist, $f_n(0) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ gilt, folgt, dass $f_n(x)$ sogar ein Maximum in $[0, \infty)$ annimmt. Um das Maximum zu berechnen, ist Lemma 7.2.2 hilfreich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(x)$ beliebig oft differenzierbar, und setzt man die erste Ableitung gleich Null, so erhält man

$$f'_n(x) = ne^{-\frac{1}{2}nx^2} - n^2x^2e^{-\frac{1}{2}nx^2} = e^{-\frac{1}{2}nx^2}(n - n^2x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Also ist $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ die einzige Nullstelle der ersten Ableitung, die in $[0, \infty)$ enthalten ist. Somit hat $f_n(x)$ ein einziges Maximum und zwar an der Stelle $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Wir erhalten

$$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)| = \max_{x \in [0, \infty)} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}e^{-\frac{1}{2}},$$

und sehen, dass $d_\infty(f_n, 0) \not\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, womit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

6.6.10 Beispiel. Sei $\eta > 0$ und betrachte die Funktionenfolge $f_n(x) := nxe^{-\frac{1}{2}nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$, auf dem Intervall $[\eta, \infty)$. Aus $f'_n(x) = e^{-\frac{1}{2}nx^2}(n - n^2x^2)$ erkennt man mit Korollar 7.2.9, dass

Funktion $f_n(x)$ auf $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty)$ monoton fallend ist. Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{\sqrt{n}} \notin [\eta, \infty)$ für alle $n \geq N$. Daher ergibt sich für $n \geq N$

$$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{x \in [\eta, \infty)} |f_n(x)| = \max_{x \in [\eta, \infty)} |f_n(x)| = f_n(\eta) = n\eta e^{-\frac{1}{2}n\eta^2}.$$

Also folgt $d_\infty(f_n, 0) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $[\eta, \infty)$.

6.6.11 Satz. Ist $\emptyset \neq E$ eine Menge und $\langle Y, d_Y \rangle$ ein vollständig metrischer Raum, so ist $\langle \mathcal{B}(E, Y), d_\infty \rangle$ ebenfalls ein vollständig metrischer Raum.

Somit konvergiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{B}(E, Y)$ genau dann gleichmäßig, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n, m \geq N$ und beliebiges $x \in E$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon. \quad (6.5)$$

Beweis. Klarerweise ist eine konvergente Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{B}(E, Y)$ eine Cauchy-Folge. Diese Tatsache gilt ja in allen metrischen Räumen.

Sei nun umgekehrt die Cauchy-Bedingung erfüllt. Man beachte, dass (6.5) für alle $x \in E$ zu $d_\infty(f_n, f_m) \leq \epsilon$ äquivalent ist.

Es folgt, dass insbesondere für jedes einzelne x die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y und daher konvergent ist. Also existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ punktweise auf E .

Wir setzen

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Wir müssen noch zeigen, dass f beschränkt ist und dass die Konvergenz sogar gleichmäßig stattfindet. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben und wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in E$. Hält man x fest und bildet den Grenzwert für $m \rightarrow \infty$, so folgt für $n \geq N$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon.$$

Da x beliebig war, erhalten wir $\sup_{x \in E} d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$. Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f , wobei f gemäß Bemerkung 6.6.6 beschränkt ist. \square

Die gleichmäßige Konvergenz sichert nun, dass sich Grenzübergänge gutmütig punkto Stetigkeit verhalten.

6.6.12 Lemma. Sei $\langle Y, d_Y \rangle$ ein vollständig metrischer Raum, $\emptyset \neq E$ und $f, f_n \in \mathcal{B}(E, Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Weiters sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E .

Ist die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf E gleichmäßig konvergent gegen f , und existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = A_n,$$

dann konvergieren die Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in Y und zwar gegen denselben Grenzwert. Also gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k).$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f bezüglich d_∞ konvergiert, ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}(E, Y)$ eine Cauchy-Folge. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n, m \geq N$ und alle $t \in E$ gilt

$$d_Y(f_n(t), f_m(t)) \leq \epsilon.$$

Hält man n und m fest, und lässt man t die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durchlaufen, so folgt mit Lemma 3.2.10 und Lemma 3.3.1 die Beziehung $d_Y(A_n, A_m) \leq \epsilon$. Damit ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y und infolge konvergent. Setzen wir $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, so gilt

$$d_Y(f(x_k), A) \leq d_Y(f(x_k), f_n(x_k)) + d_Y(f_n(x_k), A_n) + d_Y(A_n, A). \quad (6.6)$$

Wähle n so groß, dass für alle $t \in E$ und insbesondere für alle $t = x_k$

$$d_Y(f(t), f_n(t)) < \epsilon \quad \text{und} \quad d_Y(A_n, A) < \epsilon.$$

Wegen $f_n(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A_n$ existiert zu diesem n ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass aus $k \geq k_0$ die Ungleichung $d_Y(f_n(x_k), A_n) < \epsilon$ folgt. Aus (6.6) erhalten wir

$$d_Y(f(x_k), A) < 3\epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0. \quad \square$$

6.6.13 Bemerkung. Wir werden später eine Verallgemeinerung dieses Lemmas für Netze zeigen. Der Beweis davon wird im Wesentlichen derselbe sein.

6.6.14 Korollar. Sei $\langle X, d_X \rangle$ ein metrischer Raum und $\langle Y, d_Y \rangle$ ein vollständig metrischer Raum, $\emptyset \neq E \subseteq X$ und $f, f_n \in \mathcal{B}(E, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, sodass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf E gleichmäßig gegen f konvergiert.

Sind die Funktionen f_n alle stetig bei einem $x \in E$, so ist es auch f . Sind alle f_n auf ganz E stetig, so ist es auch f .

Beweis. Sei $x \in E$ und sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Aus Lemma 6.6.12 folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_n(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Gemäß Proposition 6.1.4 ist f bei x stetig. □

6.6.15 Bemerkung. Nach Lemma 5.1.12 erhält man, dass die Menge $C_b(E, Y)$ aller beschränkten und stetigen Funktionen von $E \rightarrow Y$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}(E, Y)$ versehen mit der Metrik d_∞ ist. Dabei ist E Teilmenge eines metrischen Raumes.

6.7 Vervollständigung*

6.7.1 Definition. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum. Ein Paar $(\langle Y, d_Y \rangle, \iota)$ heißt *Vervollständigung* von $\langle X, d \rangle$, wenn $\langle Y, d_Y \rangle$ ein vollständig metrischer Raum ist, und wenn $\iota : X \rightarrow Y$ eine isometrische Abbildung mit dichtem Bild, also $c(\iota(X)) = Y$, ist.

Wegen $d_Y(\iota(x_1), \iota(x_2)) = d(x_1, x_2)$ ist die isometrische Abbildung ι auch injektiv, wodurch bei einer Vervollständigung $(\langle Y, d_Y \rangle, \iota)$ der Raum Y als Obermenge von X betrachtet werden kann.

6.7.2 Satz. *Jeder metrische Raum $\langle X, d \rangle$ hat eine Vervollständigung.*

Beweis. Der Raum $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen versehen mit d_∞ ist nach Satz 6.6.11 ein vollständig metrischer Raum.

Sei $a \in X$ festgehalten. Die Abbildung ι auf X , die einem $x \in X$ die Funktion $y \mapsto d(y, x) - d(y, a)$ zuweist, ist wegen (Dreiecksungleichung)

$$|d(y, x) - d(y, a)| \leq d(x, a), \quad y \in X,$$

eine Abbildung nach $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ hinein, also $\iota : X \rightarrow \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Wegen

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &= |d(x_1, x_1) - d(x_1, a) - d(x_1, x_2) + d(x_1, a)| = |\iota(x_1)(x_1) - \iota(x_2)(x_1)| \\ &\leq d_\infty(\iota(x_1), \iota(x_2)) = \sup_{y \in X} |d(y, x_1) - d(y, a) - d(y, x_2) + d(y, a)| \leq d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

ist ι isometrisch. Bezeichnet nun Y den Abschluss von $\iota(X)$ in $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ bezüglich der Metrik d_∞ und d_Y die Einschränkung von d_∞ auf Y , so ist $(\langle \hat{X}, \hat{d} \rangle, \iota)$ offenbar eine Vervollständigung von $\langle X, d \rangle$. \square

6.7.3 Proposition. *Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum. Sind $(\langle Y, d_Y \rangle, \iota)$ und $(\langle Z, d_Z \rangle, \zeta)$ zwei Vervollständigungen, so sind diese isomorph in dem Sinne, dass es eine isometrische Bijektion $\varphi : Y \rightarrow Z$ gibt mit $\zeta = \varphi \circ \iota$.*

Beweis. Die beiden Abbildungen $\zeta \circ \iota^{-1} : \iota(X) (\subseteq Y) \rightarrow \zeta(X) (\subseteq Z)$ und $\iota \circ \zeta^{-1} : \zeta(X) (\subseteq Z) \rightarrow \iota(X) (\subseteq Y)$ sind isometrisch und daher insbesondere gleichmäßig stetig; vgl. Definition 6.3.2. Nach Satz 6.3.5 existiert eine eindeutige, gleichmäßig stetige Fortsetzung $\varphi : Y \rightarrow Z$ von $\zeta \circ \iota^{-1}$ und eine eindeutige, gleichmäßig stetige Fortsetzung $\psi : Z \rightarrow Y$ von $\iota \circ \zeta^{-1}$.

Weil $\varphi \circ \psi$ auf der dichten Teilmenge $\iota(X)$ mit der Identität übereinstimmt, folgt aus Korollar 6.1.5, dass $\varphi \circ \psi = \text{id}_Z$. Genauso erkennt man, dass $\psi \circ \varphi = \text{id}_Y$. Wegen Satz 1.2.19 sind φ und ψ bijektiv mit $\psi = \varphi^{-1}$. Nach unserer Konstruktion gilt für jedes $x \in X$

$$\varphi \circ \iota(x) = \zeta \circ \iota^{-1}(\iota(x)) = \zeta(x),$$

wodurch $\zeta = \varphi \circ \iota$. Schließlich ist φ isometrisch, da für $u, v \in Y$ und Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\iota(X)$ mit Grenzwerten u bzw. v (vgl. Lemma 5.1.12)

$$\begin{aligned} d_Z(\varphi(u), \varphi(v)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_Z(\varphi(u_n), \varphi(v_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_Z(\zeta \circ \iota^{-1}(u_n), \zeta \circ \iota^{-1}(v_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(\iota^{-1}(u_n), \iota^{-1}(v_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(u_n, v_n) = d_Y(u, v). \end{aligned} \quad \square$$

6.7.4 Bemerkung. Die Voraussetzung in Korollar 6.6.14, dass der Zielraum Y der Funktionen $f_n, f : E \rightarrow Y$ vollständig ist, ist nicht notwendig. Nimmt man nämlich eine Vervollständigung $(\langle V, d_V \rangle, \iota)$ von $\langle Y, d_Y \rangle$, identifiziert Y mit $\iota(Y) \subseteq V$, und wendet Korollar 6.6.14 auf $f_n, f : E \rightarrow V$ an, so bedingt die Stetigkeit der f_n auch die von f .

6.8 Reell- und komplexwertige Folgen und Reihen von Funktionen

6.8.1 Definition. Ist $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{C}$ und $\emptyset \neq E$ eine Menge, dann setzt man für $f : E \rightarrow Y$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in E} |f(x)| \quad (\in [0, +\infty])$$

und spricht von der *Supremumsnorm*.

Unmittelbar überprüft man, dass für $f : E \rightarrow Y$

- $\|f\|_\infty < +\infty$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ bzw. $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{C})$
- $\|f\|_\infty \geq 0$ und $\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

Für $f, g \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ bzw. $f, g \in \mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ gilt zudem

- $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ und $\|f\|_\infty = d_\infty(f, 0)$, wobei 0 hier die Nullfunktion ist.
- $\|\lambda \cdot f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$,
- $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

6.8.2 Korollar. Sind $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Funktionen aus $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$, die gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren, und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n + g_n = f + g, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \cdot f_n = \lambda \cdot f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \cdot g_n = f \cdot g,$$

und zwar gleichmäßig.

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die dritte Grenzwertaussage. Zunächst ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als konvergente Folge beschränkt: Es gibt ein $C \geq 0$, sodass $\|g_n\|_\infty = d_\infty(g_n, 0) \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$d_\infty(f_n g_n, f g) = \|f_n g_n - f g\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \cdot \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \cdot \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

6.8.3 Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : E \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ eine Funktion.

- Man sagt, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert *punktweise*, wenn für jedes $x \in E$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ in $\mathbb{R} (\mathbb{C})$ konvergiert.
- Ist $f_k \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R}) (\in \mathcal{B}(E, \mathbb{C}))$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so heißt $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig konvergent*, wenn die Folge $(\sum_{k=1}^n f_k(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ von Partialsummen gleichmäßig konvergiert.
- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert *absolut als Funktionenreihe*, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < +\infty$.

Klarerweise impliziert die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ als Funktionenreihe die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ für jedes $x \in E$. Wir haben aber auch folgendes Ergebnis:

6.8.4 Korollar (Weierstraß-Kriterium). *Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten reell- bzw. komplexwertigen Funktionen auf einer Menge $E \neq \emptyset$. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut konvergent als Funktionenreihe, so ist diese Funktionenreihe auch gleichmäßig konvergent.*

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ist sicher dann absolut konvergent, und somit auch gleichmäßig konvergent, wenn es $M_k \in [0, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$ gibt, für die $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergiert, sodass

$$\|f_k\|_{\infty} \leq M_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach dem Majorantenkriterium in Lemma 3.9.8 folgt aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ die von $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$.

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} < +\infty$, dann ist die Folge $(\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ von Partialsummen eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Es gibt somit zu $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq m \geq N$ gilt, dass $\sum_{k=m+1}^n \|f_k\|_{\infty} \leq \epsilon$. Für solche $n \geq m \geq N$ folgt auch

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=m+1}^n \|f_k\|_{\infty} \leq \epsilon.$$

Also ist $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ ($\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$), und gemäß Satz 6.6.11 bezüglich d_{∞} konvergent. \square

Ein bedeutendes Beispiel für Reihen von Funktionen sind die sogenannten Potenzreihen.

6.8.5 Definition. Sind $a_k \in \mathbb{C}$ oder auch nur $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, und ist $z \in \mathbb{C}$, so nennt man die komplexwertige Reihe – ob konvergent oder nicht –

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

eine *Potenzreihe*⁸. Als *Konvergenzradius* wollen wir die Zahl $R \in [0, +\infty]$ mit

$$R = \sup \left\{ |z| : z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ ist konvergent} \right\} \quad (6.7)$$

bezeichnen⁹.

6.8.6 Beispiel. Wir sind solchen Reihen schon begegnet, z.B. sind die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ und die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ Potenzreihen.

Erstere konvergiert genau für $|z| < 1$ und hat somit Konvergenzradius 1. Die Exponentialreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ und hat somit Konvergenzradius $+\infty$.

⁸ Praktischerweise ist hier bei den Potenzreihen in Analogie zu den Polynomen z^0 als 1 definiert auch wenn z Null sein sollte.

⁹ Da für $z = 0$ die Reihe immer absolut konvergiert, ist diese Menge nicht leer.

6.8.7 Satz. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius.

(i) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ divergent.

(ii) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ sogar absolut konvergent. Insbesondere gilt

$$R = \sup \left\{ |z| : z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ ist absolut konvergent} \right\}. \quad (6.8)$$

(iii) Für jedes $r \in [0, R)$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf dem abgeschlossenen Kreis $K_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ absolut konvergent als Funktionenreihe. Die Funktion

$$z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in K_r(0),$$

ist dabei stetig und beschränkt auf $K_r(0)$.

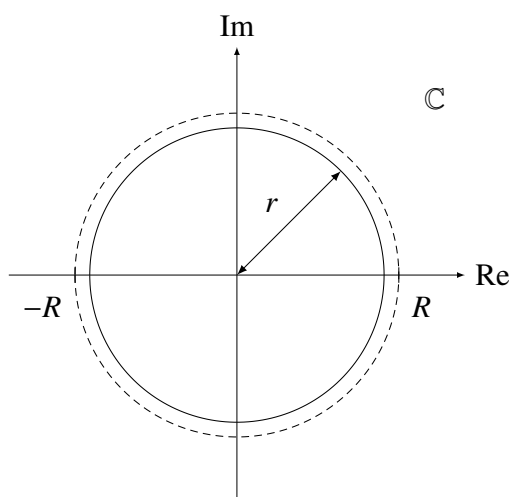


Abbildung 6.7: Konvergenzradius

(iv) Auf $U_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ist $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine stetige Funktion¹⁰.

(v) Der Konvergenzradius lässt sich mittels der Koeffizienten a_k bestimmen durch¹¹

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Falls $a_k \neq 0$ für alle hinreichend großen k , so gilt auch

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} \leq R \leq \frac{1}{\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}. \quad (6.9)$$

¹⁰ Im Allgemeinen ist sie aber nicht mehr beschränkt

¹¹ Ist die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})_{k \in \mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt, so sei $\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = 0$.

Beweis.

- (i) Folgt sofort aus (6.7).
 (ii) Folgt aus dem nächsten Punkt.
 (iii) Nach (6.7) gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $r < |w| \leq R$, sodass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ konvergiert. Somit ist die Summandenfolge eine Nullfolge; insbesondere gilt $|a_k z_0^k| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$. Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq r < |w|$, so erhalten wir die Abschätzung

$$|a_k z^k| = |a_k z_0^k| \cdot \left| \frac{z}{w} \right|^k \leq C \cdot \left| \frac{r}{w} \right|^k =: M_k.$$

Wegen $\left| \frac{r}{w} \right| < 1$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$.

Die Partialsummen $\sum_{k=0}^n a_k z^k$, $n \in \mathbb{N}$, sind Polynome und damit stetig. Da $K_r(0)$ kompakt ist (vgl. Beispiel 5.2.7), sind diese Partialsummen auf $K_r(0)$ beschränkt.

Aus dem Weierstraß Kriterium, Korollar 6.8.4, angewandt auf $E = K_r(0)$ folgt die absolute Konvergenz als Funktionenreihe und somit die gleichmäßige Konvergenz der entsprechenden Funktionenfolge von Partialsummen auf $K_r(0)$ gegen eine beschränkte Funktion. Nach Korollar 6.6.14 ist die Grenzfunktion sogar stetig auf $E = K_r(0)$.

- (iv) Betrachtet man $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf $U_R(0)$, so ist auch dies eine stetige Funktion. In der Tat ist die Stetigkeit gemäß Fakta 6.1.3 eine lokale Eigenschaft, und man kann zu jedem komplexen z mit $|z| < R$ ein $\delta > 0$ und ein $r \in [0, R)$ finden, sodass $U_\delta(z) \subseteq K_r(0)$.

- (v) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium, Satz 3.10.1, konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, woraus mit (6.7)

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \leq R$$

folgt. Wäre $\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} < R$, so wähle $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} < |z| < R$.

Wegen (ii) konvergiert die Potenzreihe. Andererseits gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, und mit dem Wurzelkriterium, Satz 3.10.1, folgt die Divergenz der Potenzreihe. Also muss auch

$$\frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \geq R.$$

Analog beweist man (6.9) mit Hilfe des Quotientenkriteriums. □

6.8.8 Beispiel. Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe ist durch den obigen Satz relativ gut abgeklärt. Einzig über die Punkte mit $|z| = R$, wo R der Konvergenzradius ist, hat man keine Aussage. Es können hier tatsächlich auch alle Fälle eintreten. Betrachte dazu die Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

Alle haben Konvergenzradius 1. Jedoch ist $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ für $|z| = 1$ divergent, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ absolut konvergent und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ bedingt konvergent, außer bei $z = 1$, wo sie divergiert.

6.8.9 Korollar. Sei $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

- Verschwinden nicht alle a_k , so gibt es ein $\delta \in (0, R)$, sodass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$.
- Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius $\tilde{R} > 0$. Gibt es eine Menge $E \subseteq U_{\min(R, \tilde{R})}(0)$, die Null als Häufungspunkt hat und sodass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ für alle $z \in E$, so folgt $a_k = b_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und damit $R = \tilde{R}$.

Beweis. Sei $k_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ der erste Index, sodass $a_{k_0} \neq 0$. Wegen den Rechenregeln für Reihen konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ genau dann, wenn $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+k_0} z^k$ es tut, wobei im Fall der Konvergenz $z^{k_0} g(z) = f(z)$. $g(z)$ ist also auch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Wegen $g(0) = a_{k_0} \neq 0$ und wegen der Stetigkeit von g auf $U_R(0)$ gibt es ein $\delta \in (0, R)$, sodass $|g(z) - g(0)| < |a_{k_0}|$ und somit $g(z) \neq 0$ für $z \in U_\delta(0)$. Also ist auch $f(z) \neq 0$ für $z \in U_\delta(0) \setminus \{0\}$.

Bezüglich der zweiten Aussage betrachte die Potenzreihe $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) z^k$, welche zumindest für $|z| < \min(R, \tilde{R})$ konvergiert und damit einen Konvergenzradius größer oder gleich $\min(R, \tilde{R})$ hat. Nach Voraussetzung und den Rechenregeln für Reihen folgt $h(z) = 0$, $z \in E$. Da 0 ein Häufungspunkt von E ist, widerspricht das aber der ersten Aussage, außer es gilt $a_k - b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. \square

6.8.10 Bemerkung. Ist $|z| < R$, so erhalten wir aus Korollar 3.9.3

$$\overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\bar{z})^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k z^k. \quad (6.10)$$

Insbesondere folgt zieht $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die Tatsache nach sich, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$.

Ist umgekehrt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R$, so folgt aus (6.10), dass die Potenzreihen (beide mit Konvergenzradius R)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k z^k$$

für $z \in \mathbb{R} \cap U_R^{\mathbb{C}}(0) = (-R, R)$ übereinstimmen. Aus Korollar 6.8.9 bekommen wir dann $a_k = \bar{a}_k$, also $a_k \in \mathbb{R}$, für alle $k \in \mathbb{N}$.

6.8.11 Bemerkung. Üblicherweise werden auch Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-w)^k \quad (6.11)$$

für ein festes w als Potenzreihen bezeichnet. Die hergeleiteten Aussagen für Potenzreihen stimmen sinngemäß offensichtlich auch für solche Reihen. Dabei ist z.B. der Bereich der Konvergenz $U_R(w)$ mit entsprechend definiertem Konvergenzradius.

Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$ heißen *analytisch in einem Punkt* $w \in D$, falls es eine offene Kugel $U_r(w) \subseteq D$ mit $r > 0$ und eine Potenzreihe der Form (6.11) gibt, sodass r kleiner oder gleich dem Konvergenzradius der Reihe ist und sodass $f(z)$ für alle $z \in U_r(w)$ mit dem Grenzwert der Reihe (6.11) übereinstimmt, f also lokal um w als Grenzwert einer Potenzreihe dargestellt werden kann.

Ist f um jedes $w \in D$ analytisch, so heißt f *analytisch*.

6.9 Die Exponentialfunktion

Ausgangspunkt für viele, sogenannte elementare Funktionen ist die Exponentialfunktion

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6.12)$$

Wir haben schon gesehen, dass diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Sie ist also eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $+\infty$. Insbesondere ist $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Weitere wichtige elementare Funktionen sind Sinus und Cosinus.

6.9.1 Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ seien

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2},$$

die sogenannten *trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus*.

Als Zusammensetzung von stetigen Funktionen sind $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf \mathbb{C} stetig (siehe Lemma 6.1.6 und Korollar 6.1.8).

6.9.2 Lemma. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Also sind \cos und \sin Grenzfunktionen von Potenzreihen¹² mit Konvergenzradius $+\infty$.

¹² Ganz genau genommen ist eine Reihe der Bauart $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k}$ keine Potenzreihe, da sie nicht von der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist. Setzt man aber $a_{2k} = c_k$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $a_n = 0$ für ungerade n , so überzeugt man sich leicht davon, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k}$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es tut, wobei die Grenzwerte dieser Reihen dann übereinstimmen. Entsprechendes gilt für Reihen der Bauart $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k+1}$.

Beweis. Für gerade $n = 2k$ gilt $i^n + (-i)^n = 2i^{2k} = 2(-1)^k$, und für ungerade $n = 2k + 1$ gilt $i^n + (-i)^n = 0$. Aus den Rechenregeln für Reihen folgt somit

$$\frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Analog leitet man die Potenzreihenentwicklung für $\sin z$ her. □

6.9.3 Satz. Sei $z, w \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $\exp(z) \neq 0$, $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$. Schließlich ist $(\exp z)^n = \exp(nz)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Die Formel von de Moivre:

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos(nz) + i \sin(nz) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$, $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)}$.

Insbesondere sind $\exp|_{\mathbb{R}}$, $\cos|_{\mathbb{R}}$, $\sin|_{\mathbb{R}}$ Funktionen, die \mathbb{R} nach \mathbb{R} abbilden.

(iv) $\cos y = \operatorname{Re} \exp(iy)$, $\sin y = \operatorname{Im} \exp(iy)$ und $\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$, wobei $\exp(x) \in \mathbb{R}$.

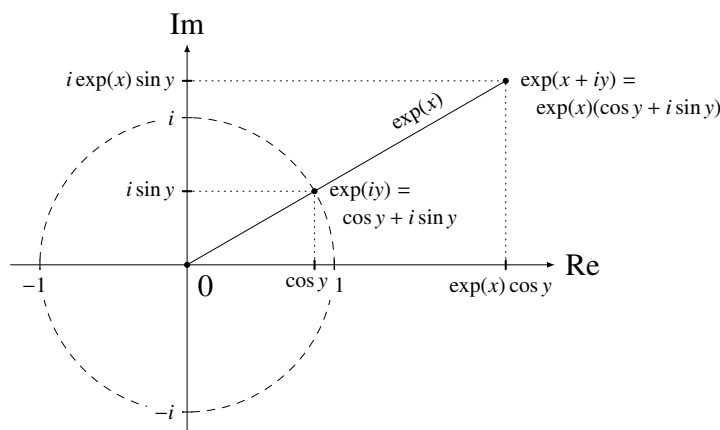


Abbildung 6.8: Darstellung der Lage von $\exp(x + iy)$

(v) Die Funktion \exp eingeschränkt auf die reelle Achse ist eine streng monoton wachsende, bijektive Funktion von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^+ mit $\exp(0) = 1$. Insbesondere gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0. \quad (6.13)$$

(vi) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$. Insbesondere gilt $(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = 1$ und $|\exp(z)| = 1$ genau dann, wenn $\operatorname{Re} z = 0$.

(vii) $\cos(-z) = \cos z$ und $\sin(-z) = -\sin z$.

(viii) *Es gelten die Sumsätze für Sinus und Cosinus*

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad \sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Beweis.

(i) $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$ haben wir in Beispiel 5.4.12 gesehen. $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ folgen aus $\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(0) = 1$. Schließlich zeigt man $(\exp z)^n = \exp(zn)$ für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion, und für $n \in \mathbb{Z}$ mit Hilfe von $\exp(-zn) = \frac{1}{\exp(zn)}$.

(ii) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$ folgt leicht durch Nachrechnen, und daraus

$$(\cos z + i \sin z)^n = (\exp iz)^n = \exp(inz) = \cos(nz) + i \sin(nz).$$

(iii) Da die Koeffizienten in den Potenzreihenentwicklungen reell sind, folgt die Aussage sofort aus Bemerkung 6.8.10.

(iv) Diesen Punkt erhalten wir aus (i) und (ii), da nach dem letzten Punkt $\exp(x), \cos y, \sin y \in \mathbb{R}$.

(v) Für $x > 0$ folgt aus der Tatsache, dass alle Koeffizienten in der Potenzreihe (6.12) von \exp strikt positiv sind, immer $\exp(x) > 1 + x > 1$. Klarerweise ist $\exp(0) = 1$. Für $x < 0$ erhalten wir aus $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x) > 1 - x > 1$, dass $\exp(x) \in (0, 1)$ sowie $\exp(x) < \frac{1}{1-x}$.

Aus diesen Abschätzungen schließen wir sofort auf (6.13). Für $x < y$ ergibt sich wegen

$$\exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \cdot \exp(y - x) > \exp(x)$$

die Tatsache, dass $\exp(x)$ streng monoton wachsend ist.

Schließlich folgt aus der Stetigkeit von $\exp(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ zusammen mit Korollar 6.5.3, dass $\exp(\mathbb{R})$ ein offenes Intervall ist. Wegen (6.13) muss selbiges mit $(0, +\infty) = \mathbb{R}^+$ übereinstimmen.

(vi) Aus

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z) \overline{\exp(z)} = \exp(z) \exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2 \operatorname{Re} z) = \exp(\operatorname{Re} z)^2$$

und aus der Tatsache, dass $|\exp(z)|$ und $\exp(\operatorname{Re} z)$ positive reelle Zahlen sind, folgt $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$. Wegen dem vorherigen Punkt ist dieser Ausdruck 1 genau dann, wenn $\operatorname{Re} z = 0$. Weiters gilt

$$(\cos y)^2 + (\sin y)^2 = |\cos y + i \sin y|^2 = |\exp(iy)|^2 = \exp(0) = 1.$$

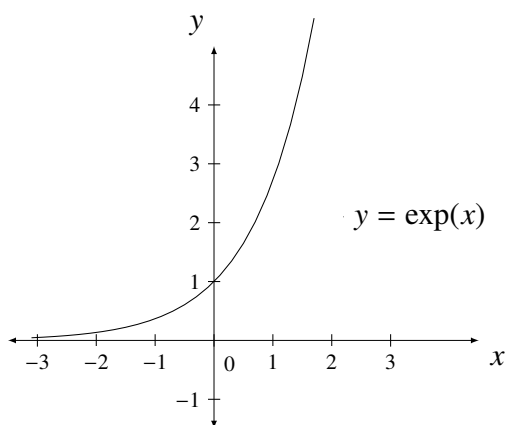


Abbildung 6.9: Funktionsgraph der reellen Exponentialfunktion

(vii) Folgt aus der jeweiligen Potenzreihenentwicklung, da nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen vorkommen.

(viii) Man setze die Definition von $\sin z$ und $\cos z$ ein und rechne die Gleichheit nach. \square

Wie wir unter anderem gerade gesehen haben, ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Bijektion.

6.9.4 Definition. Mit $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ wollen wir die Inverse von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ bezeichnen und sprechen vom *natürlichen Logarithmus* bzw. vom *Logarithmus naturalis*.

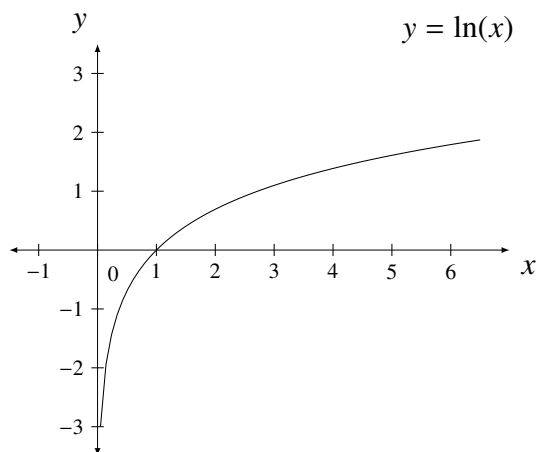


Abbildung 6.10: Logarithmus naturalis

Aus Satz 6.9.3, Korollar 6.5.3 und durch elementares Nachrechnen folgt sofort

6.9.5 Korollar. Die Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige und streng monoton wachsende Bijektion. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

sowie

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{und} \quad \ln(x^n) = n \ln x \quad \text{für alle } x, y > 0, n \in \mathbb{Z}.$$

Beachte, dass wir den Logarithmus nur für reelle Werte definiert haben. Dies ist kein Zufall, da $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zwar surjektiv aber nicht injektiv ist. Weiters ist es nicht klar, auf welche Teilmenge von \mathbb{C} man \exp einschränken soll, um Injektivität zu gewährleisten; vgl. Satz 6.9.10.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion können wir den bisher nur für rationale b definierten Ausdrücke a^b auch für beliebige $b \in \mathbb{R}$ einen Sinn geben.

6.9.6 Korollar. Ist $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{Q}$, so gilt $a^b = \exp(b \ln a)$.

Setzen wir a^b durch $\exp(b \ln a)$ auf ganz $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ fort, dann gilt für $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$, $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$$a^{b_1+b_2} = a^{b_1} \cdot a^{b_2}, \quad (a_1 a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b.$$

Beweis. Schreiben wir $b = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, so ist $\exp(b \ln a)$ nach Satz 6.9.3 eine positive reelle Zahl mit der Eigenschaft

$$(\exp(b \ln a))^q = \exp(bq \ln a) = \exp(p \ln a) = \exp(\ln a^p) = a^p.$$

Also gilt $\exp(b \ln a) = \sqrt[q]{a^p}$.

Die Funktionalgleichungen folgen aus denen von \exp und \ln durch Nachrechnen. \square

6.9.7 Bemerkung.

\rightsquigarrow Als Zusammensetzung der stetigen Funktionen \exp, \ln und \cdot ist $(a, b) \mapsto a^b$ auf $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ stetig; vgl. Beispiel 6.1.7.

\rightsquigarrow Die Funktion \exp selbst kann mit dieser Notation als allgemeine Potenz angeschrieben werden. Dazu definieren wir die *Eulersche Zahl* $e := \exp(1)$. Nach der Definition der allgemeinen Potenz gilt dann für $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp \left(\underbrace{x \ln \exp(1)}_{=1} \right) = \exp(x).$$

\rightsquigarrow Neben ihrer Definition als $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ kann man die Eulersche Zahl auch in vielfacher Weise anders charakterisieren. Zum Beispiel ist e Grenzwert der Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$; vgl. Beispiel 3.4.3. Allgemeiner kann man zeigen, dass

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

↪ Ausgehend von der Definition $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ kann man für reelles x die Funktion $\exp(x)$ durch e^x erklären. Dafür muss man allerdings die allgemeine Potenz zuerst – ohne Verwendung von \exp – definieren. Dies kann so geschehen, dass man von der Funktion $\sqrt[p]{a^p} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ausgeht und diese mittels stetiger Fortsetzung zu einer Funktion auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ mit Werten in \mathbb{R}^+ macht.

Wie aus der Schule bekannt, ist eine der wichtigsten Naturkonstanten die Zahl π . Mit Hilfe der Funktion \cos kann man die Existenz dieser Zahl mit all ihren wichtigen Eigenschaften herleiten. Dazu benötigen wir zuerst folgende Hilfsaussage.

6.9.8 Lemma.

↪ Für $t \in [0, 2]$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{t^n}{n!} \geq \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}$.

↪ Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine kleinste positive Nullstelle x_0 , die im Intervall $(0, 2)$ liegt.

↪ Für x_0 gilt $\sin x_0 = 1$.

Beweis.

↪ Durch Umformen ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zu $(n+2)(n+1) \geq t^2$ und somit richtig.

↪ Wir betrachten die Potenzreihenentwicklung von $\cos z$ in Lemma 6.9.2 und stellen sofort $\cos 0 = 1$ fest. Da man in Reihen Klammern setzen darf, folgt aus dem letzten Punkt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2^{4l+2}}{(4l+2)!} - \frac{2^{4l+4}}{(4l+4)!} \right) \leq 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}.$$

Nach dem Zwischenwertsatz Korollar 6.2.6 hat $t \mapsto \cos t$ im Intervall $(0, 2)$ sicher eine Nullstelle x .

Nach Proposition 6.1.12 ist die Menge $N = \{t \in \mathbb{R} : \cos t = 0\} = (\cos|_{\mathbb{R}})^{-1}(\{0\})$ und daher auch $N \cap [0, +\infty)$ abgeschlossen. In Beispiel 5.1.13 haben wir gesehen, dass $N \cap [0, +\infty)$ ein Minimum hat, welches wegen $\cos 0 = 1$ sicher nicht 0 ist. Also gibt es eine kleinste positive Nullstelle x_0 von $t \mapsto \cos t$.

↪ $(\sin x_0)^2 = 1$ folgt aus $(\cos x_0)^2 + (\sin x_0)^2 = 1$; vgl. Satz 6.9.3. Nun ist aber wegen des ersten Punktes

$$\sin x_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x_0^{4l+1}}{(4l+1)!} - \frac{x_0^{4l+3}}{(4l+3)!} \right) \geq 0,$$

also $\sin x_0 = 1$. □

6.9.9 Definition. Die Zahl π sei jene positive reelle Zahl, sodass $\frac{\pi}{2}$ die kleinste positive Nullstelle von $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

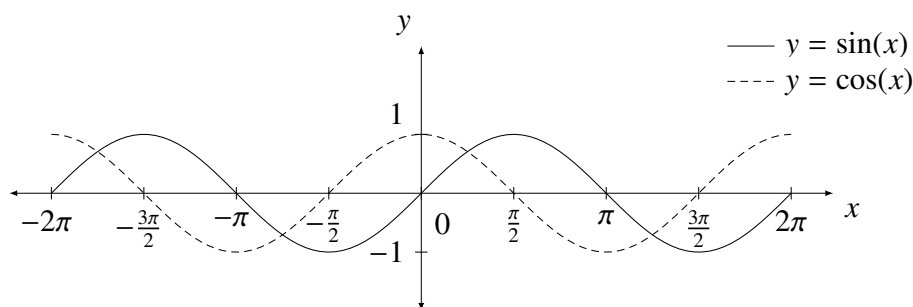


Abbildung 6.11: Funktionsgraphen des reellen Sinus und Cosinus

6.9.10 Satz. Für $z, \zeta \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Aussagen.

- (i) $\exp(\pm i\frac{\pi}{2}) = \pm i$, $\exp(\pm i\pi) = -1$, $\exp(\pm 2i\pi) = 1$.
- (ii) $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\pm\pi) = -1$, $\cos(\pm 2\pi) = 1$,
 $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$, $\sin(\pm\pi) = 0$, $\sin(\pm 2\pi) = 0$.
- (iii) $\exp(z + 2m\pi i) = \exp(z)$, $\sin(z + 2m\pi) = \sin(z)$, $\cos(z + 2m\pi) = \cos(z)$.
- (iv) $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i$ ($\Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$).
- (v) $\cos z = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\sin z = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = \pi k$.
- (vi) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\exp(z) = \exp(\zeta) \Leftrightarrow z - \zeta \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Beweis.

- (i) Wegen Satz 6.9.3 und Lemma 6.9.8 gilt $\exp(i\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$. Der Rest folgt aus Satz 6.9.3, (i).
- (ii) Folgt aus (i), indem man Real- und Imaginärteil betrachtet.
- (iii) $\exp(z + 2m\pi i) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi i)^m = \exp(z)$. Daraus folgen durch Einsetzen von Definition 6.9.1 die restlichen Aussagen.
- (iv) Aus $\exp(z) = 1$ folgt zunächst mit Satz 6.9.3, dass $\operatorname{Re} z = 0$. Also gilt $z = 0 + iy$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Klarerweise ist $y = \eta + 2l\pi$ für ein eindeutiges $l \in \mathbb{Z}$ und $\eta \in [0, 2\pi)^{13}$. Aus (iii) folgt $\exp(i\eta) = \exp(iy) = 1$. Wäre nun $\eta \neq 0$, so erhielte man für

$$\exp(i\frac{\eta}{4}) = \cos\frac{\eta}{4} + i\sin\frac{\eta}{4} =: u + iv \quad \text{mit } u, v \in \mathbb{R},$$

¹³ Für l nehme man das Maximum von $\{k \in \mathbb{Z} : 2k\pi \leq y\}$.

wegen $0 < \frac{\eta}{4} < \frac{\pi}{2}$, und der Definition von $\frac{\pi}{2}$, sicherlich $u \neq 0$. Im Fall $v = 0$ wäre $\exp(i\frac{\eta}{4}) = u = \pm 1$ und somit

$$\exp(i(\frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{4})) = \frac{\exp(i\frac{\pi}{2})}{\exp(i\frac{\eta}{4})} = \frac{i}{\pm 1} = \pm i.$$

Also ist $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{4}$ eine reelle Nullstelle von \cos mit $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ im Widerspruch zur Definition von $\frac{\pi}{2}$. Also muss auch $v \neq 0$. Nun gilt

$$1 = \exp(i\eta) = (u + iv)^4 = (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + i(4uv(u^2 - v^2)).$$

Wegen $u \neq 0, v \neq 0$ ist die rechte Zahl genau dann reell, wenn $u^2 - v^2 = 0$. Aus $u^2 + v^2 = 1$ folgt dann $u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$, was aber den Widerspruch $u^4 - 6u^2v^2 + v^4 = -1 \neq 1$ ergibt.

(v) Es gilt $\cos z = 0$ genau dann, wenn $\exp(iz) = -\exp(-iz) = \exp(i\pi - iz)$, also wenn $\exp(2iz - i\pi) = 1$. Dieses tritt genau dann ein, wenn $\frac{2iz - i\pi}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$, bzw. $z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Analog bestimmt man die Nullstellen des Sinus.

(vi) Sei $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, gegeben. Da $\exp(x)$ eine Bijektion von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^+ ist, gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = |w|$. Schreibe $\frac{w}{\exp(x)} = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$.

Klarerweise ist $u^2 + v^2 = 1$. Insbesondere gilt $u \in [-1, 1]$. Wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos \pi = -1$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz, Korollar 6.2.6, ein $t \in [0, \pi]$ mit $u = \cos t$.

Aus $u^2 + v^2 = 1 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2$ folgt $v^2 = (\sin t)^2$. Ist $v = \sin t$, so setze $y = t$. Sonst muss $v = -\sin t$, und dann setze man $y = -t$. In jedem Falle ist $\cos y = u$ und $\sin y = v$ und somit

$$w = \exp(x)(\cos y + i \sin y) = \exp(x + iy).$$

Ist $\exp(z) = \exp(\zeta)$, so folgt $1 = \exp(z - \zeta)$, also $z - \zeta \in 2\pi i\mathbb{Z}$. □

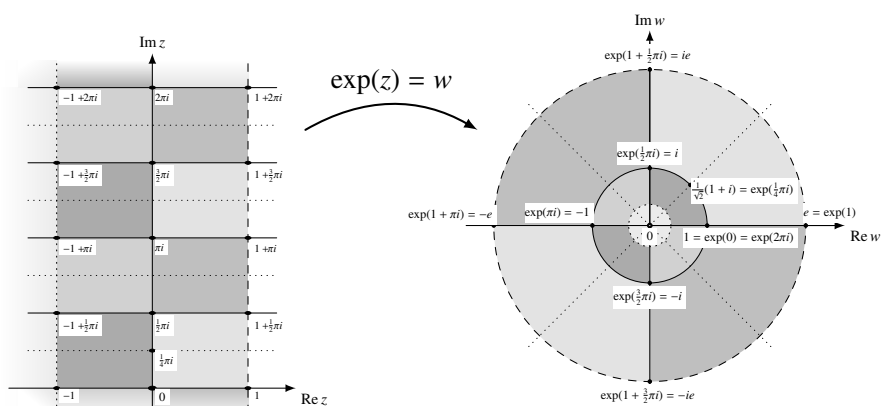
Jede komplexe Zahl $w \neq 0$ lässt sich gemäß Satz 6.9.10 als $\exp(z)$ schreiben. Wählt man z so, dass $0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi$, so ist nach Satz 6.9.10, (v), z eindeutig bestimmt. Also ist $\exp : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bijektiv.

Ist zu einem gegebenen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ das komplexe $z \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \subseteq (\mathbb{C})$ die eindeutige Lösung von $\exp(z) = w$, und setzt man $r = \exp(\operatorname{Re} z)$ und $t = \operatorname{Im} z$, so erhält man

$$w = \exp(\operatorname{Re} z) \exp(i \operatorname{Im} z) = r(\cos t + i \sin t). \quad (6.14)$$

Somit ist $(r, t) \mapsto r(\cos t + i \sin t)$ eine Bijektion $T : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6.9.11 Definition. Das Paar (r, t) in (6.14) nennt man die *Polarkoordinaten* von w , und die Bijektion $T : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *Polarkoordinatenfunktion*.

Abbildung 6.12: Exponentialfunktion als Abbildung von \mathbb{C} auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **6.9.12 Bemerkung.**

- ↪ Betrachtet man $(r, t) \mapsto r(\cos t + i \sin t)$ als Abbildung von $[0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, so erreicht man alle komplexen w – auch $w = 0$ – zu dem Preis, dass diese Abbildung dann nicht mehr injektiv ist.
- ↪ Wegen Satz 6.9.10, (iii), kann dabei auch das Intervall $[0, 2\pi)$ durch irgendein halboffenes Intervall der Länge 2π , z.B. $(-\pi, \pi]$, ersetzen.
- ↪ Offensichtlich ist $T : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ als Zusammensetzung von stetigen Funktionen selbst stetig. Die Umkehrung ist nicht stetig: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-i\frac{1}{n}) = 1$, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^{-1}(\exp(-i\frac{1}{n})) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1, 2\pi - \frac{1}{n}) = (1, 2\pi) \neq (1, 0) = T^{-1}(1).$$

Nimmt man statt $[0, 2\pi)$ z.B. das Intervall $[a, a + 2\pi)$, so treten entsprechende Probleme beim Winkel a auf.

Nimmt man den kritischen Winkel aus, so sind die Polarkoordinaten in beide Richtungen stetig.

6.9.13 Proposition (*). Die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^+ \times (a, a + 2\pi) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{r \exp(ia) : r \in [0, +\infty)\}, \quad (r, t) \mapsto r(\cos t + i \sin t),$$

ist bijektiv, und T sowie T^{-1} sind stetig.

Beweis. Es bleibt die Stetigkeit von $T^{-1} : D := \mathbb{C} \setminus \{r \exp(ia) : r \in [0, +\infty)\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times (a, a + 2\pi)$ zu zeigen. Dazu sei $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in D$ für eine Folge aus D . Wir schreiben

$$z = T(r, \alpha) = r \exp(i\alpha) \quad \text{und} \quad z_n = T(r_n, \alpha_n) = r_n \exp(i\alpha_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

mit eindeutigen $r_n, r \in (0, +\infty)$ und $\alpha_n, \alpha \in (a, a + 2\pi)$. Wegen $r_n = |z_n|$, $r = |z|$ folgt $r_n \rightarrow r$.

Ist $(\alpha_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge, so hat diese wegen der Kompaktheit von $[a, a + 2\pi]$ eine gegen ein $\beta \in [a, a + 2\pi]$ konvergente Teilfolge $(\alpha_{n(k(l))})_{l \in \mathbb{N}}$. Somit gilt wegen der Stetigkeit von T

$$\exp(i\beta) = \lim_{l \rightarrow \infty} \exp(i\alpha_{n(k(l))}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{z_{n(k(l))}}{r_{n(k(l))}} = \frac{z}{r} = \exp(i\alpha).$$

Nach Satz 6.9.10 erhalten wir $\beta - \alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ und infolge $\alpha = \beta$. Gemäß Lemma 5.2.11 können wir daher auf $\alpha_n \rightarrow \alpha$ schließen. \square

6.9.14 Bemerkung. Mit Hilfe der Exponentialfunktion und ihrer Eigenschaften können wir auch hergeleitet, dass es für $n \in \mathbb{N}$ immer n viele n -te *Wurzeln* einer jeden Zahl $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in \mathbb{C} gibt. Dazu schreiben wir w in Polarkoordinaten $w = r(\cos t + i \sin t)$ mit $(r, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$. Dann gilt für ein $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\exp(\zeta)^n = w \Leftrightarrow \exp(n\zeta) = r(\cos t + i \sin t) = \exp(\ln(r) + it).$$

Wegen Satz 6.9.10 ist das genau dann der Fall, wenn $n\zeta = \ln(r) + i(t + 2j\pi)$ für ein $j \in \mathbb{Z}$. Somit sind

$$\eta_j = \exp\left(\frac{\ln(r) + i(t + 2j\pi)}{n}\right) = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{t + 2j\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2j\pi}{n}\right) \in \mathbb{C}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

genau die Lösungen der Gleichung $z^n = w$. Wieder wegen Satz 6.9.10 sind aber nur $\eta_0, \dots, \eta_{n-1}$ paarweise verschieden, und für $j \notin \{0, \dots, n-1\}$ stimmt η_j mit einem der $\eta_0, \dots, \eta_{n-1}$ überein.

6.10 Fundamentalsatz der Algebra

Als Anwendung der bisher entwickelten Stetigkeitstheorie wollen wir den Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Zunächst benötigen wir ein Lemma.

6.10.1 Lemma. *Ist $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad n , also $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, ein komplexes Polynom, so hat $z \mapsto |p(z)|$ ein Minimum: Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit $|p(c)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Wie aus Beispiel 5.5.14 bekannt, gilt $\lim_{z \rightarrow \infty} |a_n z^n + \dots + a_0| = +\infty$. Insbesondere gibt es eine Zahl $R > 0$, sodass $|p(z)| \geq |a_0| = |p(0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Die Kreisscheibe $K_R(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ ist kompakt, und $|p(z)|$ ist, als Zusammensetzung der stetigen Funktionen p und $|\cdot|$, stetig auf $K_R(0)$. Gemäß Korollar 6.1.14 wird dann darauf ein Minimum angenommen; also existiert ein $c \in K_R(0)$ mit $|p(c)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in K_R(0)$. Unsere Wahl von R sichert schließlich, dass $|p(c)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. \square

6.10.2 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). Sei $p(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ ein komplexes Polynom vom Grad n . Dann existieren n nicht notwendigerweise verschiedene Zahlen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k). \quad (6.15)$$

Beweis.

↪ Sei $h(z)$ ein Polynom der Form $h(z) = 1 + bz^k + z^k g(z)$ mit $k \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und einem Polynom g , wobei $g(0) = 0$. Wir zeigen die Existenz eines $u \in \mathbb{C}$ mit $|h(u)| < 1$.

Dazu wählen wir gemäß Bemerkung 6.9.14 eine k -te Wurzel von $-\frac{1}{b}$, also eine Zahl $d \in \mathbb{C}$ mit $bd^k = -1$. Für $t \in (0, 1]$ gilt

$$|h(td)| \leq |1 - t^k| + |t^k d^k g(td)| = 1 - t^k + t^k |d^k g(td)| = 1 - t^k (1 - |d^k g(td)|).$$

Wegen $|d^k g(td)| = 0$ für $t = 0$ folgt aus der Stetigkeit dieses Ausdruckes bei 0, dass $|d^k g(td)| \leq \frac{1}{2}$ für $t \in (0, \delta)$ mit einem $\delta > 0$. Für jedes solche t gilt $|h(td)| \leq 1 - t^k \frac{1}{2} < 1$.

↪ Nun zeigen wir, dass jedes nichtkonstante Polynom $f(z)$ eine Nullstelle in \mathbb{C} hat.

Nach Lemma 6.10.1 gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, sodass $|f(c)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$. Wäre $f(c) \neq 0$, so betrachte

$$h(z) := \frac{f(z+c)}{f(c)} = 1 + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0.$$

Nach dem ersten Beweisschritt existiert ein $u \in \mathbb{C}$ mit $|h(u)| < 1$ und daher

$$|f(u+c)| = |h(u)| \cdot |f(c)| < |f(c)|$$

im Widerspruch zu $|f(c)| = \min_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$.

↪ Wir zeigen schließlich (6.15) durch Induktion nach dem Grad von $p(z)$. Ist der Grad eins, also $p(z) = a_1 z + a_0$ mit $a_1 \neq 0$, so gilt $p(z) = a_1(z - (-\frac{a_0}{a_1}))$.

Stimme (6.15) für alle Polynome vom Grad kleiner als n , und sei $p(z)$ vom Grad n . Nach dem vorigen Beweisschritt hat p eine Nullstelle z_1 . Mittels Polynomdivision und Einsetzen von $z = z_1$ erhält man $p(z) = s(z)(z - z_1)$. Das Polynom s hat den gleichen Führungskoeffizienten wie p und lässt sich nach Induktionsvoraussetzung in der angegebenen Weise faktorisieren. \square

6.10.3 Bemerkung. Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Bauart

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \exp(itn),$$

für ein $N \in \mathbb{N}$ und $c_n \in \mathbb{C}$, $n = -N, \dots, N$ nennt man *trigonometrische Polynome*.

Man sieht sofort, dass $f(t) = \exp(-iNt) \cdot p(\exp(it))$ mit einem komplexen Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$

$$p(z) = \sum_{n=0}^{2N} c_{n-N} z^n.$$

f ist stetig und 2π -periodisch. Weiters stimmen zwei trigonometrische Polynome genau dann überein, wenn das ihre Koeffizienten tun. Ist nämlich

$$\sum_{n=-N}^N c_n \exp(itn) = \sum_{n=-M}^M d_n \exp(itn),$$

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N \geq M$, so folgt $\sum_{n=-N}^N (c_n - d_n) \exp(itn) = 0$. Hier setzen wir $d_j = 0$ für $M < j \leq N$. Es folgt $q(\exp(it)) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $q(z) = \sum_{n=0}^{2N} (c_{n-N} - d_{n-N}) z^n$. Somit hat das Polynom $q(z)$ unendlich viele Nullstellen und ist infolge das Nullpolynom. Also gilt $c_n = d_n$ für $n = -N, \dots, N$.

Schließlich lässt sich jedes trigonometrische Polynom wegen

$$\sum_{n=-N}^N c_n \exp(itn) = \sum_{n=-N}^N c_n (\cos nt + i \sin nt) = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n + c_{-n}) \cos nt + \sum_{n=1}^N (c_n - ic_{-n}) \sin nt,$$

in der Form

$$a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + \sum_{n=1}^N b_n \sin nt, \quad (6.16)$$

schreiben. Umgekehrt lässt sich jede Funktion der Bauart (6.16) schreiben als

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \frac{\exp(int) + \exp(-int)}{2} + \sum_{n=1}^N b_n \frac{\exp(int) - \exp(-int)}{2i} \\ = \sum_{n=-N}^{-1} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \exp(itn) + a_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n - ib_n}{2} \exp(itn). \end{aligned}$$

Somit ist (6.16) eine zweite Art trigonometrische Polynome darzustellen, wobei die Koeffizienten in (6.16) ebenfalls eindeutig sind.

6.11 Weitere wichtige elementare Funktionen

Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x},$$

wird als *Tangens* und

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{ \pi n : n \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

als *Cotangens* bezeichnet.

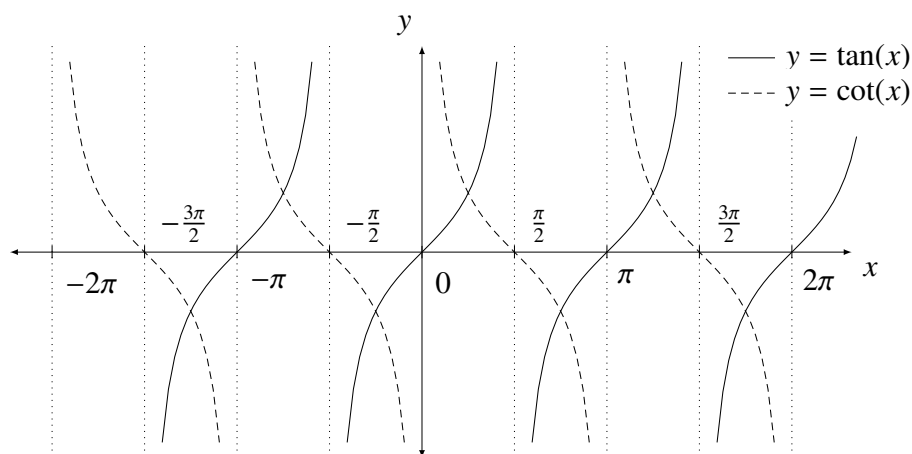


Abbildung 6.13: Tangens und Cotangens

Betrachtet man \tan eingeschränkt auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, so zeigt man elementar, dass \tan dieses Intervall bijektiv auf \mathbb{R} abbildet. Entsprechend bildet \cot das Intervall $(0, \pi)$ bijektiv auf \mathbb{R} ab. Die jeweiligen Umkehrfunktionen heißen \arctan (*Arcustangens*) bzw. arccot (*Arcuscotangens*).

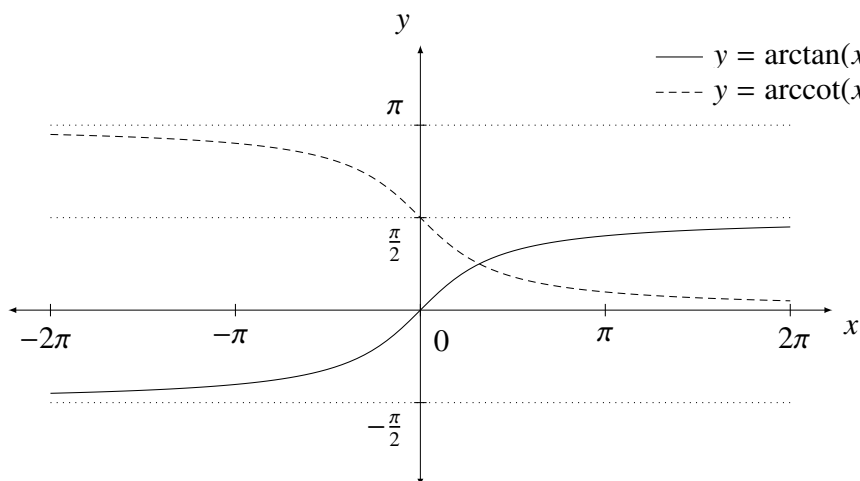


Abbildung 6.14: Arcustangens und Arcuscotangens

Man kann auch \sin auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ einschränken, und erhält eine Bijektion von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ auf $[-1, 1]$. Die Umkehrfunktion davon heißt \arcsin (*Arcussinus*). Entsprechend bildet \cos das Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion davon heißt \arccos (*Arcuscosinus*).

Ähnlich wie \sin und \cos sind *Sinus Hyperbolicus* \sinh und *Cosinus Hyperbolicus* \cosh

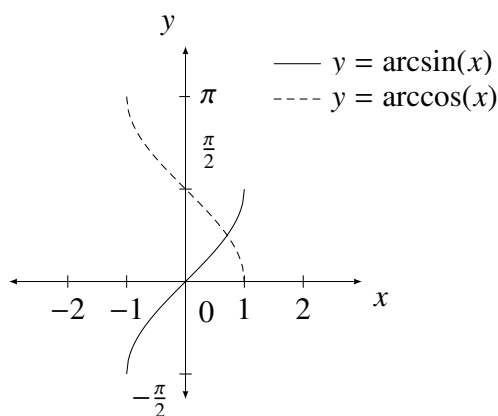


Abbildung 6.15: Arcussinus und Arcuscosinus

definiert:

$$\cosh z := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh z := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Werte von $\cosh z$ und $\sinh z$ liegen im allgemeinen in \mathbb{C} . Für reelle $z = x$ liegen $\cosh x$ und $\sinh x$ offensichtlich in \mathbb{R} .

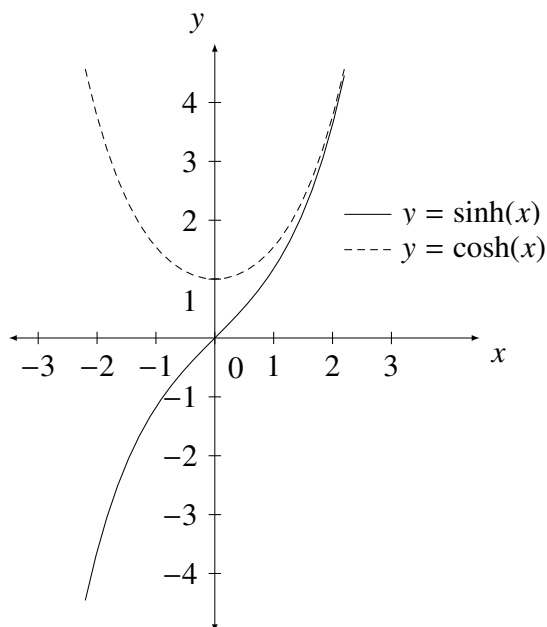


Abbildung 6.16: Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

Da $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv ist, hat er eine Inverse, die mit arsinh (*Areasinus Hyperbolicus*) bezeichnet wird. Die Funktion \cosh eingeschränkt auf $[0, +\infty)$ bildet dieses Intervall

bijektiv auf $[1, +\infty)$ ab. Die entsprechende Umkehrfunktion von $[1, +\infty)$ auf $[0, +\infty)$ heißt *areacosh* (*Areacosinus Hyperbolicus*).

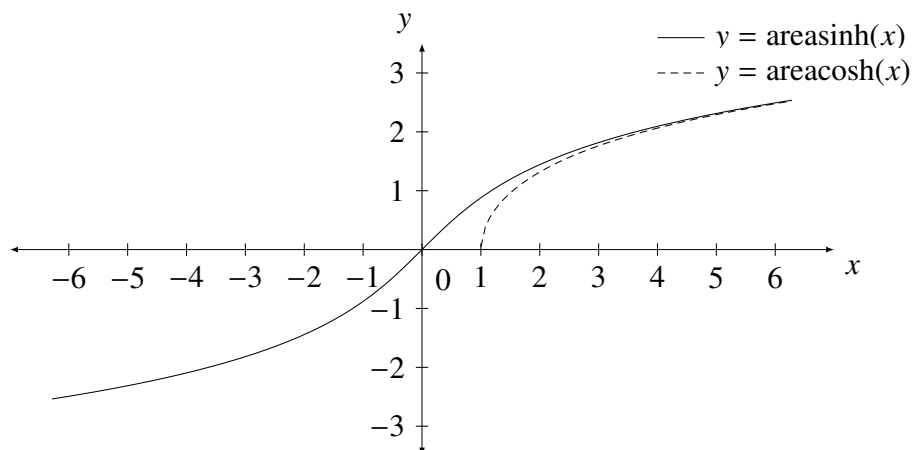


Abbildung 6.17: Areasinus Hyperbolicus und Areacosinus Hyperbolicus

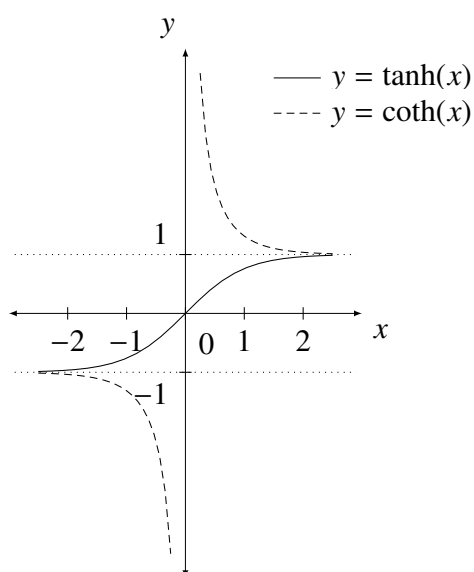


Abbildung 6.18: Tangens Hyperbolicus und Cotangens Hyperbolicus

Schließlich ist $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, und $\operatorname{coth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\operatorname{coth} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.

Dabei bildet \tanh die reellen Zahlen bijektiv auf $(-1, 1)$ und coth die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv auf $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ ab. Die entsprechenden Umkehrfunktion heißen *areatanh* (*Areatangens Hyperbolicus*) und *areacoth* (*Areacotangens Hyperbolicus*).

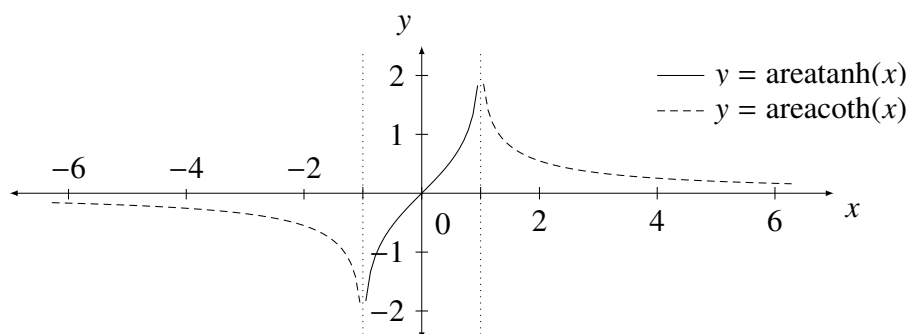


Abbildung 6.19: Areatangens Hyperbolicus und Areacotangens Hyperbolicus

6.12 Abelscher Grenzwertsatz*

Thematisch passt zu diesem Kapitel – insbesondere zum Begriff der Potenzreihe – der sogenannte *Abelsche Grenzwertsatz*.

6.12.1 Satz. Sei $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ eine Potenzreihe und R ihr Konvergenzradius mit $R \in (0, +\infty)$. Weiters sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = R$. Ist die Zahlenreihe $s := \sum_{j=0}^{\infty} a_j w^j$ konvergent, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} P(tw) = s. \quad (6.17)$$

Beweis. Zunächst bezeichne $s_n := \sum_{j=0}^n a_j w^j$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n -te Partialsumme. Laut Voraussetzung gilt $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Aus Lemma 3.10.5 folgt für $|z| < R$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n a_j z^j &= \sum_{j=0}^n (a_j w^j) \left(\frac{z}{w}\right)^j = \left(\frac{z}{w}\right)^n s_n - \sum_{j=0}^{n-1} s_j \left(\left(\frac{z}{w}\right)^{j+1} - \left(\frac{z}{w}\right)^j\right) \\ &= \left(\frac{z}{w}\right)^n s_n + \left(1 - \frac{z}{w}\right) \sum_{j=0}^{n-1} s_j \left(\frac{z}{w}\right)^j. \end{aligned}$$

Weil (s_j) also konvergente Folge beschränkt ist, konvergiert $\sum_{j=0}^{n-1} s_j \left(\frac{z}{w}\right)^j$ für $n \rightarrow \infty$ nach dem Majorantenkriterium aus Lemma 3.9.8. Wir erhalten

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = \left(1 - \frac{z}{w}\right) \sum_{j=0}^{\infty} s_j \left(\frac{z}{w}\right)^j.$$

Andererseits folgt aus $\sum_{j=0}^{\infty} \zeta^j = \frac{1}{1-\zeta}$ für $|\zeta| < 1$, dass

$$s = \left(1 - \frac{z}{w}\right) \sum_{j=0}^{\infty} s \left(\frac{z}{w}\right)^j.$$

Also erhalten wir für $|z| < R$ und $N \in \mathbb{N}$

$$|P(z) - s| \leq \left|1 - \frac{z}{w}\right| \sum_{j=0}^N |s - s_j| \left(\frac{z}{w}\right)^j + \left|1 - \frac{z}{w}\right| \sum_{j=N+1}^{\infty} |s - s_j| \left(\frac{z}{w}\right)^j.$$

Zu $\epsilon > 0$ sei nun N so groß, dass $|s - s_j| < \epsilon$ für alle $j \geq N$. Dann ist $|P(z) - s|$ kleiner oder gleich

$$\left|1 - \frac{z}{w}\right| \sum_{j=0}^N |s - s_j| \left(\frac{z}{w}\right)^j + \epsilon \frac{\left|1 - \frac{z}{w}\right|}{1 - \left|\frac{z}{w}\right|}. \quad (6.18)$$

Für $z = tw$, $t \in (0, 1)$, sieht man, dass es ein $t_0 \in (0, 1)$ gibt, sodass für $t > t_0$ dieser Ausdruck kleiner oder gleich 2ϵ ist. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt (6.17). \square

6.12.2 Bemerkung. Mit einer etwas feineren Argumentationsweise lässt sich (6.17) folgendermaßen verallgemeinern:

Nähert sich z nichttangentiell dem Punkt w an, so konvergiert $P(z)$ gegen s . Das bedeutet, dass

$$\lim_{\tau \in N_\alpha, \tau \rightarrow 0} P((1 - \tau)w) = s, \quad (6.19)$$

wobei N_α , $0 < \alpha < \pi$, den Winkelraum

$$N_\alpha = \{re^{i\beta} \in \mathbb{C} : r > 0, \beta \in [-\alpha, \alpha]\}$$

bezeichnet.

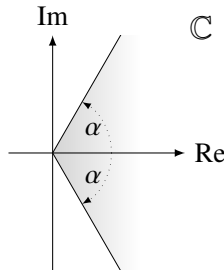


Abbildung 6.20: Winkelraum N_α

Um das einzusehen, bemerke man zunächst, dass für $\tau = re^{i\beta} \in N_\alpha$ mit $r = |\tau| \leq \cos \alpha$

$$\frac{|\tau|}{1 - |1 - \tau|} = \frac{|\tau|(1 + |1 - \tau|)}{1 - |1 - \tau|^2} \leq \frac{2}{2 \cos \beta - r} \leq \frac{2}{2 \cos \alpha - r} \leq \frac{2}{\cos \alpha}.$$

Nun folgt man dem Beweis von Satz 6.12.1 bis (6.18). Mit $z = (1 - \tau)w$, $|\tau| \leq \cos \alpha$, $\tau \in N_\alpha$, erhalten wir

$$|P(z) - s| \leq \left|1 - \frac{z}{w}\right| \sum_{j=0}^N |s - s_j| \left(\frac{z}{w}\right)^j + \epsilon \frac{2}{\cos \alpha}.$$

Für $|\tau| \rightarrow 0$ konvergiert der erste Summand gegen Null. Also gibt es ein $t_0 \in (0, \cos \alpha)$, sodass $|P(z) - s| \leq \epsilon \frac{3}{\cos \alpha}$, wenn nur $|\tau| \leq t_0$, $\tau \in N_\alpha$. Da ϵ beliebig war, folgt (6.19).

6.13 Übungsaufgaben

6.1 Seien \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ und \mathbb{R}^m versehen mit der euklidischen Metrik.

Zeigen Sie: Ist A eine $m \times n$ -Matrix, so ist die lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ (hier betrachte man x als 'stehenden' und nicht als 'liegenden' Vektor) stetig. Man zeige auch, dass $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x + y$ und $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ (skalare Multiplikation) stetig sind.

6.2 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } x \text{ rational, } x = \frac{m}{n} \text{ mit } \text{ggT}\{m, n\} = 1. \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem irrationalen Punkt stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass es zu jeder irrationalen Zahl x und vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein Intervall $(x - \delta, x + \delta)$ gibt, sodass wenn $\frac{p}{q} \in (x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{Q}$ sicher $\frac{1}{|q|} < \epsilon$.

6.3 Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die definiert ist als $f(x, y) := \max\{x, y\}$. Hierbei ist \mathbb{R}^2 versehen mit der euklidischen Metrik. Man zeige: f ist stetig.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, zunächst zu zeigen, dass $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

6.4 Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $x \mapsto d(x, A)$ eine stetige Abbildung von X nach \mathbb{R} ist; vgl. 5.20. Weiters zeige man, dass in jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq X$ wenigstens ein x liegt, sodass $d(K, A) = d(x, A)$.

6.5 An welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig und welche Art von Unstetigkeit liegt an den Unstetigkeitsstellen vor?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \in [-1, 1], \\ x + 1, & \text{falls } x < -1, \\ x - 1, & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

Weiters bestimme man, für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} (x - a)^2, & \text{falls } x < -1, \\ 1 - x^2, & \text{falls } x \in [-1, 2], \\ bx^3 + x, & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

6.6 An welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig und welche Art von Unstetigkeit liegt an den Unstetigkeitsstellen vor?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{falls } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiters bestimme man, für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{falls } x \leq 1, \\ ax - x^3, & \text{falls } 1 < x \leq 2, \\ bx^2, & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

6.7 Man betrachte folgende Funktion als Funktion von $\mathbb{C} \setminus N$ nach \mathbb{C} (beide mit der euklidischen Metrik versehen), wobei N die Menge der Nullstellen des Nenners ist.

$$f(z) = \frac{z^3 - 13z - 12}{z^3 + z^2 + z + 1}.$$

Man zeige, dass f stetig ist, und man gebe die maximale Teilmenge von \mathbb{C} an, auf die sich f stetig fortsetzen lässt.

6.8 Man betrachte folgende Funktion als Funktion von $\mathbb{C} \setminus N$ nach \mathbb{C} (beide mit der euklidischen Metrik versehen), wobei N die Menge der Nullstellen des Nenners ist.

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 13z + 10}{z^4 + 5z^3 - z^2 - 5z}.$$

Man zeige, dass f stetig ist, und man gebe die maximale Teilmenge von \mathbb{C} an, auf die sich f stetig fortsetzen lässt.

6.9 Weisen Sie nach, dass eine Teilmenge I von \mathbb{R} genau dann

$$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq I.$$

erfüllt, wenn I eine der folgenden Formen hat

$$\emptyset, (a, b), [a, b], (a, b], [a, b), (a, +\infty), (-\infty, a), [a, +\infty), (-\infty, a], \mathbb{R}.$$

Hinweis: Für die \Rightarrow Richtung unterscheiden Sie, ob I nach oben (unten) beschränkt ist, und ob in diesem Fall die Menge ihr Supremum (Infimum) enthält oder nicht.

6.10 Gegeben sei ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ mit reellen Koeffizienten und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie:

Ist n ungerade, so hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

Ist n gerade und $a_0a_n < 0$, so hat p mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

6.11 Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und x in X . Zeigen Sie mit Hilfe der Folgen-Charakterisierung der Stetigkeit, dass eine Abbildung $f = (f_1, \dots, f_p) : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ genau dann in x stetig ist, wenn alle Komponentenfunktionen $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, p$, im Punkt x stetig sind.

6.12 Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(0, 0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0).$$

Zeigen Sie, dass für jeden eindimensionalen Unterraum $D := \{\lambda(x_0, y_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Funktion $f|_D$ stetig ist.

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, zuerst zu zeigen, dass eine Folge $(\lambda_n(x_0, y_0))_{n \in \mathbb{N}}$ in D genau dann bzgl. d_2 konvergiert, wenn (λ_n) in \mathbb{R} konvergiert!

6.13 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nicht stetig ist.

Hinweis: Suchen Sie spezielle, gegen $(0, 0)$ konvergente Folge aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, für welche die Bildfolge nicht gegen $f(0, 0)$ konvergiert!

6.14 An welchen Punkten des Definitionsbereiches sind $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und warum bzw. warum nicht?

$$f(u, v) = (e^{-u}, e^v, \sin(uv)),$$

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \quad g(0, 0) = 0.$$

6.15 Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n(x)$ auf $(0, 1)$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x + 2n^2, & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{2n}, \\ \frac{n}{n+1}, & \text{falls } \frac{1}{2n} \leq x < 1. \end{cases}$$

Skizzieren Sie diese Funktionenfolge! Konvergiert diese Folge von Funktionen punktweise oder sogar gleichmäßig? Wenn ja, wogegen? Berechnen Sie weiters die Fläche a_n zwischen der Funktion f_n und der x -Achse! Wohin konvergiert die Folge dieser Flächen?

6.16 Bestimmen Sie für die unten stehenden Funktionenfolgen (f_n) die jeweilige Grenzfunktion $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Konvergieren die Funktionenfolgen gleichmäßig auf D ?

$$\text{a) } f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}, \quad D = \mathbb{R} \quad \text{b) } f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad D = [0, \infty).$$

6.17 Man zeige mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von \cos und \sin , dass $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$ und $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$. Weiters berechne man $\lim_{t \rightarrow 0^+} t(\cos \frac{1}{t} + 1)$. Hier ist t immer so zu verstehen, dass es in \mathbb{R} läuft.

Hinweis: Hat eine Potenzreihe $f(z)$ bei Null eine Nullstelle, so ist auch $\frac{f(z)}{z}$ eine Potenzreihe und daher stetig.

6.18 Zeigen Sie für $E \neq \emptyset$ und für beschränkte Abbildungen $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$, dass $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ sowie $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

6.19 Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf E mit Werten in $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ nur punktweise, gleichmäßig oder absolut als Funktionenreihe konvergent? Dabei ist

$$(i) \quad E = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f_n = \frac{\cos nx + \sin nx}{n^2}.$$

$$(ii) \quad E = [-1, 1], Y = \mathbb{R}, f_n = (-1)^n \frac{x}{n}.$$

$$(iii) \quad E = [0, 1], Y = \mathbb{R}, f_n = x^n.$$

6.20 Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $E = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| > 2\}$ mit $f_n(z) = \frac{z}{(z-1)^n}$ und mit Werten in $Y = \mathbb{C}$ punktweise, gleichmäßig oder absolut als Funktionenreihe konvergent?

Hinweis: Um $\|f_n\|_\infty$ nach unten abzuschätzen, setze man $z = -\frac{1}{n}$ ein.

6.21 Geben Sie die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n z^n$, von $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ sowie von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})^n z^n$ an.

6.22 Man beweise mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Tatsachen folgende Gleichungen ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$\cos(z + k\pi) = (-1)^k \cos z, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin(z + k\pi) = (-1)^k \sin z, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z,$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

$$\cos 2z = (\cos z)^2 - (\sin z)^2, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

6.23 Für $z \in \mathbb{C}$ seien $\cosh z := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$ und $\sinh z := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$. Man gebe die Potenzreihendarstellung dieser Funktionen und ihren Konvergenzradius an.

Für $x \in \mathbb{R}$ berechne man $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x$, und skizziere die Funktionsgraphen von $\cosh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sinh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Man stelle auch $\cosh z$ mit Hilfe der \cos Funktion und $\sinh z$ mit Hilfe der \sin Funktion dar ($z \in \mathbb{C}$). Weiters bestimme man die $z \in \mathbb{C}$, sodass $\cosh z = 0$ und die z mit $\sinh z = 0$.

6.24 Man zeige, dass $\sinh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, dass $\sinh|_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, und dass die Inverse $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ übereinstimmt und stetig ist.

Hinweis: Um $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ zu zeigen, setzen Sie unbestimmt $\sinh t = x$ und lösen sie diese Gleichung.

Anmerkung: $\cosh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat nicht diese Eigenschaft. Schränkt man diese Funktion auf $[0, +\infty)$ ein, dann gilt aber schon, dass $\cosh|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Ihre Inverse ist gegeben durch $\operatorname{arcosh}(x) := \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

6.25 Man rechne nach, dass $\sin s - \sin t = 2 \cos\left(\frac{s+t}{2}\right) \sin\left(\frac{s-t}{2}\right)$. Weiters verwende man diese Tatsache um zu zeigen, dass $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Man zeichne eine Skizze der Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (Arcussinus).

6.26 Man bestimme alle sechsten Wurzeln von 1 in \mathbb{C} auf zwei Arten: In Polarkoordinaten und in der Real- und Imaginärteil Schreibweise.

Man berechne daraus $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

6.27 Sei $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(t) = \exp(it)$. Ist f stetig?

Zeigen Sie mit den Resultaten aus der Vorlesung: Betrachtet als Abbildung von $[0, 2\pi)$ nach \mathbb{T} ist f bijektiv. Zeigen Sie auch, dass für jedes $\beta \in (0, 2\pi)$ die Abbildung $f|_{[0, \beta]}^{-1} : f([0, \beta]) \rightarrow [0, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ stetig ist! Ist auch $f^{-1} : \mathbb{T} \rightarrow [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ stetig? Begründung!

6.28 Sei $E = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $z \in \mathbb{C}$ fest! Betrachte $f_n : E \rightarrow \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert durch

$$f_n(k) = \frac{1}{k^n} \binom{k}{n} z^n.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ als Funktionenreihe absolut konvergiert! Berechnen Sie die Grenzfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Wenn Sie Lemma 6.6.12 (Vertauschung von Grenzwerten) auf die Funktionenfolge (mit Folgenindex $N \in \mathbb{N}$) der Partialsummen $s_N = \sum_{n=0}^N f_n$ und die Folge $x_k = k$ anwenden, welche Gleichheit erhalten Sie dann?

6.29 Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{x^2},$$

und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist.

Hinweis: Für die Stetigkeit betrachte man zunächst $x \in [-K, K]$ für ein $K \in \mathbb{N}$ und schreibe $f(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \sum_{k=-K}^K \frac{1}{(x-k)^2}$. Man zeige, dass man auf die beiden Reihen das Weierstraß Kriterium anwenden kann.

6.30 Sei $f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, die Funktion aus dem vorherigen Beispiel. Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$g(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - f(x),$$

und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist. Weiters zeige man, dass g eine stetige Fortsetzung auf \mathbb{R} hat, welche 1-periodisch ist. Man bezeichne auch die Fortsetzung mit g .

Weiters zeige man, dass g folgende Gleichung erfüllt:

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x),$$

und leite daraus ab, dass $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Hinweis zu $g = 0$: Wende diese Funktionalgleichung auf x_{max} an, wobei x_{max} Maximum von $|g|$ ist.

6.31 Man zeige mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von \exp , dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ für beliebiges $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man berechne daraus $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x)$, sowie $\lim_{y \rightarrow 0+} y(\ln y)^n$.

6.32 Man zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} - (1 + \frac{z}{n})^n) = 0$ gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge der Form $\{z : |z| \leq R\}$ von \mathbb{C} . Man leite daraus $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{z}{n})^n$ (gleichmäßig auf $\{z : |z| \leq R\}$) ab.

Hinweis: Zuerst zeige man, dass die Differenz gleich $\sum_{j=2}^n \frac{z^j}{j!} a_{j,n}$ mit $a_{j,n} = (1 - \prod_{l=0}^{j-1} (1 - \frac{l}{n}))$ ist, und beachte, dass $|a_{j,n}| \leq 1$ und somit $\sum_{j=m}^n \frac{z^j}{j!} a_{j,n} < \epsilon$ für $N(\epsilon) \leq m < n$, $|z| \leq R$ für $N(\epsilon)$ hinreichend groß. Beachte auch, dass $a_{j,n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und festes j .

6.33 Man betrachte $\mathcal{P} := \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : g(x + 2\pi k) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$, also alle 2π -periodischen, stetigen und komplexwertigen Funktionen. Weiters sei $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ die Menge aller stetigen und komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Seien $+$ und die Skalarmultiplikation punktweise auf diesen Räumen definiert.

Dann zeige man, dass \mathcal{P} und $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ Vektorräume sind. Weiters zeige man, dass genau dann $g \in \mathcal{P}$, wenn $g(x) = f(\exp(ix))$ für eine Funktion $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. Schließlich weise man nach, dass $\Phi : C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}$ mit $\Phi(f) = g$, wobei $g(t) = f(\exp(it))$, ein Vektorraumisomorphismus, also eine lineare Bijektion, ist.

- 6.34 Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $g_n(x) = \exp(nix)$. Man zeige, dass $g_n \in \mathcal{P}$ (Notation wie im vorherigen Beispiel). Weiters bestimme man $f_n \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, sodass $g_n(x) = f_n(\exp(ix))$. Schließlich zeige man, dass die Funktionen f_n , $n \in \mathbb{Z}$ in $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ und die Funktionen g_n , $n \in \mathbb{Z}$ in \mathcal{P} linear unabhängig sind.
- 6.35 Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ zwei Potenzreihen mit Konvergenzradius $R_a \in (0, +\infty]$ bzw. $R_b \in (0, +\infty]$ mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R_a \leq R_b$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man betrachte die Funktionen

$$f(z) + g(z), f(z) - g(z), \lambda f(z), f(z) \cdot g(z), z f(z), \frac{f(z) - a_0}{z}$$

auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_a\}$. Man zeige, dass es zu jeder dieser Funktionen eine Potenzreihe gibt, die die jeweilige Funktion als Grenzfunktion hat. Wie schauen die Koeffizienten dieser Potenzreihen aus, und was kann man über die jeweiligen Konvergenzradien sagen?

- 6.36 Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, +\infty]$. Weiters sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < R$. Zeigen Sie, dass es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ mit Konvergenzradius $\geq R - |w|$ gibt, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w)^n$$

für alle $z \in U_{R-|w|}(w)$.

Hinweis: Für $z \in U_{R-|w|}(w)$ fest betrachten Sie

$$\sum_{(n,k) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2} a_n \binom{n}{k} (z - w)^k w^{n-k}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_n \sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |a_n \binom{n}{k} (z - w)^k w^{n-k}|$ unbedingt konvergiert und wenden Sie Lemma 5.4.9 und dann Proposition 5.4.8 an!

Anmerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass Grenzfunktionen von Potenzreihen analytisch sind; vgl. Bemerkung 6.8.11.

- 6.37 Die *stereographische Projektion* σ ist folgendermaßen definiert:

Man betrachte die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{d_2}(0)$ im \mathbb{R}^3 um $(0, 0, 0)$ mit Radius 1 bzgl. der Metrik d_2 . Hat man einen Punkt P auf der Kugeloberfläche S gegeben, der verschieden vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ ist, so bilde man diesen auf einen Punkt der Ebene ab, indem man die Gerade, welche P und N verbindet, mit der xy -Ebene schneidet.

Zeige, dass die Abbildungsformeln von σ gegeben sind durch

$$\sigma(\xi, \eta, \zeta) = (x, y), \quad x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta},$$

Zeige auch, dass die so erhaltene Abbildung σ die Menge $S \setminus \{N\}$ bijektiv auf \mathbb{R}^2 abbildet, und dass ihre Inverse σ^{-1} mit τ übereinstimmt, wobei

$$\tau(x, y) = (\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Hinweis: Für $\tau = \sigma^{-1}$ zeigen Sie, dass tatsächlich $\tau(\mathbb{R}^2) \subseteq S \setminus \{N\}$, und dass $\tau \circ \sigma = \text{id}_{S \setminus \{N\}}$ sowie $\sigma \circ \tau = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ (verwenden Sie gegebenenfalls, dass für $(\xi, \eta, \zeta) \in S \setminus \{N\}$ immer $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$)!

- 6.38 Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeige man, dass $\sigma : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^3$ stetig sind, wobei \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 mit d_2 versehen sind. Zeigen Sie auch, dass $|(x, y)| := |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\lim_{(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow N} |\sigma(\xi, \eta, \zeta)| = +\infty,$$

sowie

$$\lim_{|(x, y)| \rightarrow +\infty} \tau(x, y) = N.$$

Hier ist $\lim_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \tau(x, y)$ gemeint, wobei \mathbb{R}^2 durch $(x, y) \leq (u, v) \Leftrightarrow |(x, y)| \leq |(u, v)|$ gerichtet ist.

- 6.39 Sei $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (∞ ist ein Element, das nicht in \mathbb{C} enthalten ist), wobei wir \mathbb{C} als Ebene \mathbb{R}^2 auffassen. Weiters sei σ die auf ganz S durch $\sigma(N) = \infty$ fortgesetzte Abbildung aus dem vorletzten Beispiel. Offenbar ist $\sigma : S \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ bijektiv.

Wir definieren eine Abbildung $\chi : \bar{\mathbb{C}} \times \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\chi(z, w) := d_2(\sigma^{-1}(z), \sigma^{-1}(w)), \quad z, w \in \bar{\mathbb{C}},$$

wobei d_2 für die euklidische Metrik auf $S \subseteq \mathbb{R}^3$ steht.

Man zeige, dass χ eine Metrik auf $\bar{\mathbb{C}}$ ist, sodass $z_n \rightarrow z$ in $\bar{\mathbb{C}}$ bezüglich χ genau dann wenn $\sigma^{-1}(z_n) \rightarrow \sigma^{-1}(z)$ in \mathbb{R}^3 bzgl. d_2 . χ wird als *chordale Metrik* bezeichnet.

Zeigen Sie schließlich, dass $\bar{\mathbb{C}}$ versehen mit χ kompakt ist.

- 6.40 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man:

Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so zeige man, dass $z_n \rightarrow \infty$, also $|z_n| \rightarrow +\infty$, genau dann, wenn $z_n \rightarrow \infty$ in $\bar{\mathbb{C}}$ bezüglich χ .

Ist $z \in \mathbb{C}$, so zeige man weiters, dass $z_n \rightarrow z$ bzgl. d_2 genau dann, wenn $z_n \rightarrow z$ bzgl. χ .

Schließlich zeige man, dass

$$\chi(a, b) = \frac{2|a - b|}{\sqrt{1 + |a|^2} \cdot \sqrt{1 + |b|^2}}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

- 6.41 Eine reellwertige Funktion f , die auf einem Intervall I definiert ist, heißt *konvex*, wenn sie für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in I$ und beliebige $\lambda \in [0, 1]$ immer folgende Ungleichung erfüllt:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Beweisen Sie, dass diese Bedingung zur folgenden äquivalent ist:

Für alle Punkte $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Weiters zeigen Sie, dass diese Gleichung wiederum äquivalent zu

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

für alle $x, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$.

Was bedeutet die Bedingung konvex zu sein geometrisch? Warum?

Bemerkung: Eine Funktion f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

6.42 Zeigen Sie, dass konvexe Funktionen auf offenen Intervallen I stetig sind! Hinweis: Für die Stetigkeit in einem Punkt $x \in I$ fixiere man $a, b \in I$ mit $x \in (a, b) \subseteq [a, b] \subseteq I$, und verwende letzte Charakterisierung im Übungsbeispiel 6.41.

6.43 Sind $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$, so zeige man

$$\prod_{j=1}^N (1 + |z_j|) \leq \exp\left(\sum_{j=1}^N |z_j|\right),$$

und

$$\left| \prod_{j=1}^N (1 + z_j) - 1 \right| \leq \prod_{j=1}^N (1 + |z_j|) - 1.$$

Hinweis für die zweite Ungleichung: Vollständige Induktion

6.44 Sei M eine Menge und $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ absolut auf M konvergiert. Man zeige, dass dann auch

$$f(m) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(m))$$

gleichmäßig auf M konvergiert. Weiters zeige man, dass $f(m) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 1 + f_n(m) = 0$.

Hinweis: Cauchy Kriterium.

6.45 Man zeige, dass $f(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ gleichmäßig auf jeder beliebigen Kugel $K_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert. Man bestimme die Nullstellen von f und zeige, dass $f(z+1) = -f(z)$.

Anmerkung: Man kann zeigen, dass $f(z) = \sin \pi z$.