Kapitel 5

Topologie metrischer Räume

5.1 ϵ-Kugeln, offene und abgeschlossene Mengen

Als erstes wollen wir uns dem anschaulich leicht verständlichen Begriff der Kugel in metrischen Räumen zuwenden.

5.1.1 Definition. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann heißt die Menge

$$U_\epsilon(x) := \{y \in X : \ d(y, x) < \epsilon\}$$

die offene *ϵ-Kugel* um den Punkt x, und die Menge

$$K_\epsilon(x) := \{y \in X : \ d(y, x) \leq \epsilon\}$$

die *ϵ-Kugel* um den Punkt x.

5.1.2 Beispiel.

(i) Ist $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik und $x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$U_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \quad \text{und} \quad K_\epsilon(x) = [x - \epsilon, x + \epsilon]\,.$$

(ii) Sei X eine Menge, und sei diese mit der diskreten Metrik aus Beispiel 3.1.5 versehen. Ist $\epsilon \leq 1$, so gilt in diesem Raum $U_\epsilon(x) = \{x\}$. Für $\epsilon > 1$ gilt $U_\epsilon(x) = X$.

(iii) Die Kugeln $U_\epsilon^{d_1}(0)$ bzgl. d_1 sowie $U_\epsilon^{d_2}(0)$ bzgl. d_2 bzw. $U_\epsilon^{d_\infty}(0)$ bzgl. d_∞ in $\mathbb{R}^2$ sind in Abbildung 5.1 dargestellt; siehe Beispiel 3.1.5.

5.1.3 Bemerkung. Die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in metrischen Räumen lässt sich durch obige Mengen folgendermaßen formulieren:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \{x_n : n \geq N\} \subseteq U_\epsilon(x)\,.$$

Wegen $U_\epsilon(x) \subseteq K_\epsilon(x) \subseteq U_{2\epsilon}(x)$ können wir hier genauso $K_\epsilon(x)$ anstatt $U_\epsilon(x)$ schreiben.

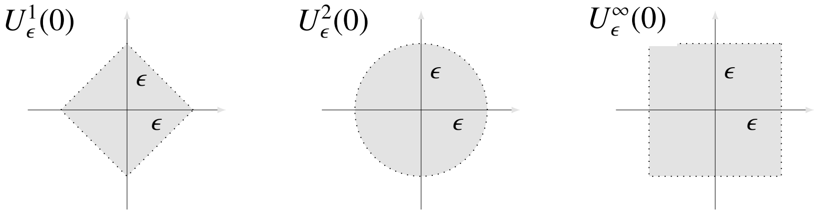

Abbildung 5.1: ϵ-Umgebungen von 0

Diese Sichtweise des Grenzwertbegriffes gewinnt zum Beispiel dann an Bedeutung, wenn man den Konvergenzbegriff bezüglich verschiedener Metriken vergleichen will. Betrachten wir etwa die Metriken d_2 und d^∞ aus Beispiel 5.1.2, (*iii*), so folgt aus (3.10), dass $U^{d_2}_\epsilon(x) \subseteq U^{d_\infty}_\epsilon(x) \subseteq U^{d_2}_{2\epsilon}(x)$. Nimmt man nun obiges Konvergenzkriterium her, so sieht man unmittelbar, dass eine Folge genau dann bzgl. d_2 konvergiert, wenn sie es bzgl. d^∞ tut; siehe Proposition 3.6.1.

5.1.4 Definition. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge O von X heißt *offen*, wenn es zu jedem Punkt $x \in O$ eine ϵ-Kugel mit $U_\epsilon(x) \subseteq O$ gibt.

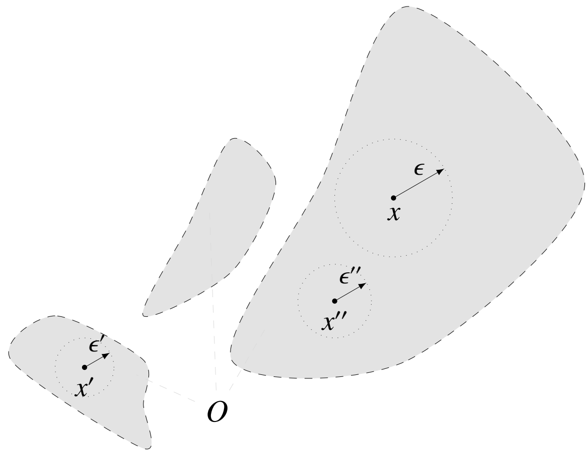

Abbildung 5.2: Offene Mengen

5.1.5 Beispiel.

(i) In $(\mathbb{R}, d_2)$ sind z.B. die Mengen (a, b) und $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen. Denn ist etwa $x \in (a, b)$, so folgt $\epsilon := \min(\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}) > 0$ und $U_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq (a, b)$.

(ii) Man überprüft unmittelbar, dass in jedem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ die Mengen $\emptyset$ und X offen sind.

(*iii*) Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Ist $y \in U_\epsilon(x)$, also $d(x,y) < \epsilon$, und ist $0 < \delta \leq \epsilon - d(x,y)$, dann folgt für $z \in U_\delta(y)$ aus $d(y,z) < \delta$ die Ungleichung

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \delta \leq d(x,y) + \epsilon - d(x,y) = \epsilon\,,$$

und somit $z \in U_\epsilon(x)$. Also gilt $U_\delta(y) \subseteq U_\epsilon(x)$. Insbesondere sind alle offenen Kugeln in metrischen Räumen offen.

5.1.6 Proposition. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Dann gilt*

- *Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $O_1, \dots, O_n$ offene Teilmengen von X, so ist auch $\bigcap_{i=1}^n O_i$ offen.*
- *Ist I eine beliebige Indexmenge, und sind O_i offene Teilmengen von X, so auch $\bigcup_{i\in I} O_i$.*

Beweis. Seien $O_1, \dots, O_n$ offen und $x \in O_1 \cap \dots \cap O_n$. Definitionsgemäß gibt es $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n > 0$ mit $U_{\epsilon_i}(x) \subseteq O_i$, $i = 1, \dots, n$. Es folgt

$$U_{\min\{\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\}}(x) = U_{\epsilon_1}(x) \cap \dots \cap U_{\epsilon_n}(x) \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_n\,.$$

Damit ist $O_1 \cap \dots \cap O_n$ offen.
Seien O_i, $i \in I$, offen, und $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $x \in O_i$, und daher ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq O_i$. Insgesamt folgt $U_\epsilon(x) \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. ❑

5.1.7 Definition. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, $E \subseteq X$ und $x \in X$.

- Man nennt x einen *Häufungspunkt* von E, wenn jede ϵ-Kugel um x einen Punkt aus $E \setminus \{x\}$ enthält, also
$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow U_\epsilon(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset\,,$$
oder anders formuliert,
$$\forall \epsilon > 0\ \exists y \in E, x \neq y:\ d(x,y) < \epsilon\,.$$
- Wenn $x \in E$ kein Häufungspunkt ist, so nennen wir ihn *isolierten Punkt* von E. Das ist also ein Punkt aus E, sodass
$$\exists \epsilon > 0,\ U_\epsilon(x) \cap E = \{x\}\,.$$
- Wir sagen eine Menge $A \subseteq X$ ist *abgeschlossen*, wenn jeder Häufungspunkt von A schon in A enthalten ist.

5.1.8 Bemerkung. Sei $E \subseteq X$. Für jedes $x \in X$ tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

(*i*) x ist isolierter Punkt von E.

(*ii*) $x \in E$ und x ist Häufungspunkt von E.

(iii) $x \notin E$ und x ist Häufungspunkt von E.

(iv) $x \notin E$ und x ist nicht Häufungspunkt von E.

5.1.9 Definition. Ist $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $E \subseteq X$, so wollen wir die Menge aller x, die eine der Bedingungen *(i)*, *(ii)* oder *(iii)* erfüllen, als *Abschluss* der Menge E bezeichnen, und $c(E)$ dafür schreiben. Sind $E \subseteq F \subseteq X$ derart, dass $c(E) \supseteq F$, so nennt man E *dicht* in F.

5.1.10 Fakta.

1. Man zeigt unmittelbar, dass aus $E \subseteq F$ die Inklusion $c(E) \subseteq c(F)$ folgt.
2. Klarerweise ist $E \subseteq c(E)$, wobei $c(E) = E$ genau dann, wenn E abgeschlossen ist.
3. Für ein $x \in X$ gilt $x \in c(E)$ genau dann, wenn
$$\forall \epsilon > 0\ \exists y \in E:\ d(x, y) < \epsilon$$
bzw. genau dann, wenn
$$\forall \epsilon > 0 \Rightarrow E \cap U_\epsilon(x) \neq \emptyset\,. \tag{5.1}$$
4. Ist $x \in c(c(E))$, so folgt aus dieser Bedingung angewandt auf $c(c(E))$, dass $c(E) \cap U_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ für beliebiges $\epsilon > 0$ ein y enthält. Nochmals diese Bedingung angewandt auf $c(E)$ ergibt $E \cap U_{\frac{\epsilon}{2}}(y) \neq \emptyset$, was zusammen mit $U_{\frac{\epsilon}{2}}(y) \subseteq U_\epsilon(x)$ (siehe Beispiel 5.1.5, (iii)) $E \cap U_\epsilon(x) \neq \emptyset$ nach sich zieht. Also gilt $x \in c(E)$ und somit $c(c(E)) \subseteq c(E)$. Die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin, womit insgesamt $c(c(E)) = c(E)$. Insbesondere ist $c(E)$ immer abgeschlossen.
5. In jeder ϵ-Kugel $U_\epsilon(x)$ um einen Häufungspunkt x von E liegen sogar unendlich viele Punkte von $E \setminus \{x\}$. Denn angenommen es wären nur endlich viele $x_1, \ldots, x_n$, so erhielten wir mit $\delta := \min\{\epsilon, d(x, x_1), \ldots, d(x, x_n)\} > 0$ den Widerspruch $U_\delta(x) \cap E \setminus \{x\} = \emptyset$.

5.1.11 Beispiel.

(i) Sei $E = [0, 1) \cup \{2\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann ist 1 ein Häufungspunkt von E, da jede ϵ-Kugel $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ um 1 sicherlich Punkte aus E enthält – etwa $\max(1 - \frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2})$. Da 1 nicht zu E gehört, ist E nicht abgeschlossen.

Für $x \in [0, 1)$ und jedes $\epsilon > 0$ gilt sicher
$$x < y := \min(\frac{x+1}{2}, x + \frac{1}{2}\epsilon) < \min(x + \epsilon, 1)\,,$$
also $y \in E \cap U_\epsilon(x) \setminus \{x\}$. Somit sind auch alle Punkte aus $[0, 1)$ Häufungspunkt von E.

Für $x \notin [0, 1]$ folgt mit $\epsilon = \min(|x|, |x - 1|)$ sicherlich $E \cap U_\epsilon(x) \setminus \{x\} = \emptyset$, womit $[0, 1]$ genau die Menge aller Häufungspunkte von E und 2 ein isolierter Punkt ist. Schließlich gilt $c(E) = [0, 1] \cup \{2\}$.

(*ii*) Ist $\langle X, d\rangle$ ein beliebiger metrischer Raum, so sind auch $\emptyset$ und X abgeschlossen. Erstere Menge hat offenbar keine Häufungspunkte und enthält somit trivialerweise alle solchen, und X enthält auch alle seine Häufungspunkte, da diese ja als Punkte von X definiert sind.

(*iii*) Ist $\langle X, d\rangle$ ein beliebiger metrischer Raum, und $E \subseteq X$ eine endliche Teilmenge, so hat E keine Häufungspunkte, besteht daher nur aus isolierten Punkten und ist daher immer abgeschlossen.

5.1.12 Lemma. *Ein Punkt x ist ein Häufungspunkt einer Menge E genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $E \setminus \{x\}$ gibt mit $x_n \to x$.*
Ein Punkt x liegt genau dann in $c(E)$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus E gibt mit $x_n \to x$.

Beweis. Ist x Häufungspunkt von E, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E \setminus \{x\}$ mit $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$, also $x_n \to x$. Ist x isolierter Punkt von E, so konvergiert die identische Folge $x = x_n, n \in \mathbb{N}$ gegen x. Diese Folge ist klarerweise aus E.
Sei nun umgekehrt $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ für eine Folge aus E. Ist für ein $n \in \mathbb{N}$, $x_n = x$, so folgt trivialerweise $x = x_n \in E \subseteq c(E)$. Im Fall $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sicher in $E \setminus \{x\}$ enthalten, und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\emptyset \neq \{x_n : n \geq N\} \subseteq U_\epsilon(x)$. Jedes Element der Menge auf der linken Seite ist in $U_\epsilon(x) \cap E \setminus \{x\}$ enthalten, womit sich x als Häufungspunkt von E herausstellt. ❑

5.1.13 Beispiel.

(*i*) Ist $\langle X, d\rangle$ ein beliebiger metrischer Raum, so ist jede abgeschlossene Kugel $K_\epsilon(x)$ abgeschlossen. Ist nämlich y im Abschluss $c(K_\epsilon(x))$ von $K_\epsilon(x)$, so gibt es gemäß Lemma 5.1.12 eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $K_\epsilon(x)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wegen Lemma 3.2.10 und Lemma 3.3.1 folgt

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) \leq \epsilon\,,$$

womit $y \in K_\epsilon(x)$. Daher gilt $c(K_\epsilon(x)) = K_\epsilon(x)$, und $K_\epsilon(x)$ ist abgeschlossen; vgl. Fakta 5.1.10.

(*ii*) Für ein nach oben beschränktes $\emptyset \neq F \subseteq \mathbb{R}$ existiert das Supremum $\sup F \in \mathbb{R}$. Nach Beispiel 3.3.4 gibt es eine Folge in F, die gegen $\sup F$ konvergiert. Ist $F \subseteq \mathbb{R}$ dabei abgeschlossen, so bedingt die Abgeschlossenheit von F, dass der Grenzwert $\sup F$ dieser Folge in F liegt, wodurch $\sup F = \max F$. Entsprechendes gilt für nach unten beschränkte Mengen und deren Infimum.

(*iii*) Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$. In der Tat haben wir in Beispiel 3.3.4 für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ eine Folge aus $\mathbb{Q} \setminus \{x\}$ konstruiert, die gegen x konvergiert. Wegen Lemma 5.1.12 ist x somit Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

5.1.14 Proposition. *Ist $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$, so sind folgende Aussagen äquivalent.*

(*i*) *$A^c (= X \setminus A)$ ist offen.*

(*ii*) *A ist abgeschlossen.*

(*iii*) *Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus A und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so liegt auch ihr Grenzwert in A.*

Beweis.

(*i*) ⇒ (*ii*)**:** Ein Punkt $x \in c(A)$ kann nicht in A^c liegen, denn anderenfalls folgt aus A^c offen, dass $U_\epsilon(x) \subseteq A^c$ für ein $\epsilon > 0$, und damit der Widerspruch $U_\epsilon(x) \cap A = \emptyset$ zu (5.1). Also muss $x \in A$ und daher $A = c(A)$.

(*ii*) ⇒ (*i*)**:** Da A abgeschlossen ist, ist jedes $x \in A^c$ kein Häufungspunkt von A. Also gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \cap A = U_\epsilon(x) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$. Das ist aber gleichbedeutend mit $U_\epsilon(x) \subseteq A^c$. Also ist A^c offen.

(*ii*) ⇔ (*iii*)**:** Folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass A genau dann abgeschlossen ist, wenn $c(A) = A$, und aus Lemma 5.1.12. ❑

Diese einfache Charakterisierung von abgeschlossenen Mengen zusammen mit

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i^c), \quad (\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} (A_i)^c ,$$

und Proposition 5.1.6 liefert uns sofort das folgende

5.1.15 Korollar. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Dann gilt*

- *Sind $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen, so auch $\bigcup_{i=1}^n A_i$.*
- *Ist I eine beliebige Indexmenge, und sind alle Mengen $A_i, i \in I$, abgeschlossen, so folgt, dass auch $\bigcap_{i\in I} A_i$ abgeschlossen ist.*

5.1.16 Beispiel.

(*i*) Korollar 5.1.15 gestattet uns z.B. die *Einheitskreislinie*

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ zu identifizieren. In der Tat ist $\mathbb{T} = K_1(0) \cap (U_1(0))^c$, und damit Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen.

(*ii*) Man betrachte $M = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M, die gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, so muss nach Proposition 3.6.1 die Folge $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen $\mathrm{Re}\, z$ konvergieren. Wegen Lemma 3.3.1 folgt aus $\mathrm{Re}\, z_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass auch $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ und damit $z \in M$. Nach Proposition 5.1.14 ist M abgeschlossen.

(*iii*) Die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ von $\mathbb{C}$ lässt sich als Durchschnitt von $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ schreiben. Nach dem vorhergehenden Beispiel ist die erste Menge abgeschlossen. Entsprechendes gilt für die zweite Menge. Also ist $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$ der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen und damit selber abgeschlossen.

(*iv*) Das Quadrat $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0,1],\ \operatorname{Im} z \in [0,1]\}$ ist der Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$, und daher auch abgeschlossen.

(*v*) Da die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ abgeschlossen ist, folgt, dass ihr Komplement $M := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ in $\mathbb{C}$ offen ist. Das kann man auch direkt nachweisen:

Ist $z \in M$ beliebig, so wähle $\epsilon = -\operatorname{Re} z > 0$. Ist $w \in U_\epsilon(z)$, so folgt aus $-\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w \leq |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w| \leq |z - w|$ und infolge

$$-\operatorname{Re} w \geq -\operatorname{Re} z - |z - w| > -\operatorname{Re} z - \epsilon = 0\,,$$

dass auch $w \in M$, und daher $U_\epsilon(z) \subseteq M$.

(*vi*) Das Quadrat $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (0,1),\ \operatorname{Im} z \in (0,1)\}$ lässt sich als Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen schreiben:

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 1\}\,.$$

Sie ist daher selber offen.

(*vii*) Um sich $c(M)$ für M aus dem vorherigen Beispiel auszurechnen, sei zunächst bemerkt, dass $c(M) \subseteq c(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0,1],\ \operatorname{Im} z \in [0,1]\}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0,1],\ \operatorname{Im} z \in [0,1]\}$; vgl. Fakta 5.1.10.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z \in [0,1],\ \operatorname{Im} z \in [0,1]$. Im Fall $\operatorname{Re} z \in (0,1),\ \operatorname{Im} z \in (0,1)$ gilt offenbar $z \in M \subseteq c(M)$. Anderenfalls muss $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 0$ oder $\operatorname{Im} z = 1$ sein.

Sollte $\operatorname{Re} z = 0$ und $\operatorname{Im} z \in (0,1)$ sein, so ist $(\frac{1}{n+1} + i \operatorname{Im} z)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M, die gegen z konvergiert. Wenn $\operatorname{Re} z = 0$ und $\operatorname{Im} z = 0$, dann ist $(\frac{1}{n+1} + i\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M, die gegen z konvergiert. Entsprechend baut man eine Folge aus M, die gegen z konvergiert in allen verbleibenden Fällen. Also liegt z in $c(M)$. Insgesamt gilt also

$$c(M) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in [0,1],\ \operatorname{Im} z \in [0,1]\}\,.$$

(*viii*) Betrachte die Teilmenge M von $\mathbb{R}$ definiert durch

$$M = \bigcup_{n\in 2\mathbb{N}} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\,.$$

Diese Menge ist als Vereinigung von offenen Mengen offen.

Um alle Häufungspunkte zu ermitteln, sei zunächst $x \in \bigcup_{n\in 2\mathbb{N}} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, also $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$ für ein $n \in 2\mathbb{N}$. Für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} M \cap U_\epsilon(x) \setminus \{x\} &\supseteq (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) \setminus \{x\} \\ &= (\,\max(x - \epsilon, \frac{1}{n+1}), \min(x + \epsilon, \frac{1}{n})\,) \setminus \{x\}\,. \end{aligned}$$

Da für $\frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}$ immer $\max(x-\epsilon, \frac{1}{n+1}) < \min(x+\epsilon, \frac{1}{n})$, folgt $M \cap U_\epsilon(x) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Somit ist x ein Häufungspunkt. Da die Folge $\left(\frac{1}{2}(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ aus M heraus gegen 0 konvergiert, muss auch 0 ein Häufungspunkt sein; vgl. Lemma 5.1.12. Also ist die Menge

$$H = \{0\} \cup \bigcup_{n\in 2\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

in der Menge aller Häufungspunkte von M enthalten.

Ist andererseits x ein Häufungspunkt von M und $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M mit Grenzwert x, so gibt es zwei Möglichkeiten:

Falls für jedes $n \in 2\mathbb{N}$ nur endlich viele $j \in \mathbb{N}$ mit $x_j \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ existieren, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2K+2} < \epsilon$ und in Folge nur endlich viele $j \in \mathbb{N}$ mit $x_j \in \bigcup_{k\in\{1,\dots,K\}}(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$. Insbesondere gibt es ein $J \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} x_j \in M \setminus \bigcup_{k\in\{1,\dots,K\}} (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}) &\subseteq \bigcup_{k\in\{K+1,k+2,\dots\}} (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}) \\ &\subseteq (-\frac{1}{2K+2}, \frac{1}{2K+2}) \subseteq (-\epsilon, \epsilon)\,, \end{aligned}$$

für alle $j \ge J$, womit $x = \lim_{j\to\infty} x_j = 0$.

Falls es ein $n \in 2\mathbb{N}$ gibt, sodass $x_j \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$, so liegt eine Teilfolge von $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ganz in $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \subseteq [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Wegen Satz 3.2.8 ist x auch Grenzwert dieser Teilfolge, der wegen Lemma 3.3.1 auch in $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ liegt.

Also haben wir gezeigt, dass jeder Häufungspunkt von M in H liegt, und damit H genau die Menge der Häufungspunkte von M ist. Schließlich gilt noch $c(M) = M \cup H = H$.

Um zu zeigen, dass es außerhalb von H keine anderen Häufungspunkte von M gibt, kann man alternativ auch

$$\mathbb{R} \setminus H = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n\in 2\mathbb{N}} (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$$

nachweisen und damit $\mathbb{R} \setminus H$ als offen bzw. H als abgeschlossen identifizieren. Als abgeschlossene Teilmenge enthält H daher alle Häufungspunkte von H und damit auch von M.

5.2 Kompaktheit

Wir wollen auch Häufungspunkte für Folgen einführen.

5.2.1 Definition. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Dann heißt ein $x \in X$ *Häufungspunkt* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine gegen x konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt.

5.2.2 Lemma. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$.*

(*i*) *Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, so ist x der einzige Häufungspunkt.*

(*ii*) *Ist $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist die Menge aller Häufungspunkte von $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilmenge von der Menge aller Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(*iii*)* *x ist Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn für jedes $N \in \mathbb{N}$ der Punkt x in $c(\{x_n : n \geq N\})$ liegt.*

Beweis.

(*i*) Das folgt unmittelbar aus Satz 3.2.8, da Teilfolgen konvergenter Folgen auch gegen den Grenzwert der Folge streben.

(*ii*) Da jede Teilfolge von $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ erst recht eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, muss jeder Häufungspunkt von $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ auch einer von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein.

(*iii*) Ist x Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt $x = \lim_{j\to\infty} x_{n(j)}$. Wir halten N fest und wählen $J \in \mathbb{N}$, sodass $n(J) \geq N$. Dann ist $(x_{n(j+J)})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\{x_n : n \geq N\}$, die gegen x konvergiert. Es folgt $x \in c(\{x_n : n \geq N\})$ nach Lemma 5.1.12.

Ist umgekehrt $x \in c(\{x_n : n \geq N\})$ für alle $N \in \mathbb{N}$, so sei $n(1) \in \mathbb{N}$, sodass $d(x, x_{n(1)}) < 1$. Haben wir $n(1) < \cdots < n(k)$ gewählt, so sei $n(k+1) \in \mathbb{N}$ mit $n(k+1) > n(k)$ derart, dass $d(x, x_{n(k+1)}) < \frac{1}{k+1}$. So ein $n(k+1)$ existiert, weil $x \in c(\{x_n : n \geq n(k)+1\})$. Wir haben somit eine Teilfolge konstruiert, die gegen x konvergiert. x ist somit Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ❑

Bezüglich Häufungspunkte von Folgen aus $\mathbb{R}$ haben wir

5.2.3 Proposition. *Für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der größte Häufungspunkt und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Insbesondere hat jede beschränkte Folge reeller Zahlen mindestens einen Häufungspunkt. Außerdem ist eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ genau dann konvergent, wenn ihr Limes Inferior mit dem Limes Superior übereinstimmt, bzw. genau dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau einen Häufungspunkt hat.*

Beweis. Dass $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\limsup_{n\to\infty} x_n$ Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, folgt aus Lemma 3.4.5. Ist y ein weiterer Häufungspunkt samt dazugehöriger Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$, so folgt

$$\sup\{x_n : n \geq n(j)\} \geq x_{n(j)}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, und daher

$$y = \lim_{j\to\infty} x_{n(j)} \leq \lim_{j\to\infty} \sup\{x_n : n \geq n(j)\} = \lim_{N\to\infty} \sup\{x_n : n \geq N\} = \limsup_{n\to\infty} x_n\,.$$

Entsprechend zeigt man $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq y$.
Dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$, haben wir in Fakta 3.4.6 gesehen. Da $\liminf_{n\to\infty} x_n$ der kleinste und $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der größte Häufungspunkt ist, gibt es genau einen solchen, wenn der kleinste und der größte übereinstimmen. ❑

5.2.4 Beispiel. Man betrachte die Folge $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Die Teilfolge $x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen 1, und die Teilfolge $x_{2k-1} = -1 - \frac{1}{2k-1}$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen -1. Also sind -1 und 1 Häufungspunkte unserer Folge. Angenommen $x \in \mathbb{R}$ wäre ein weiterer Häufungspunkt. Dann gäbe es eine Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergierte. Setze

$$J_1 = \{j \in \mathbb{N} : n(j) \text{ ist ungerade}\} \quad \text{und} \quad J_2 = \{j \in \mathbb{N} : n(j) \text{ ist gerade}\}\,.$$

Klarerweise ist $\mathbb{N} = J_1 \dot\cup J_2$, und somit ist zumindest eine dieser Mengen unendlich. Ist J_1 unendlich, so gibt es eine streng monoton wachsende Bijektion $j : \mathbb{N} \to J_1$; vgl. Lemma 2.3.18. Also ist $(x_{n(j(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ und somit ebenfalls gegen x konvergent. Andererseits konvergiert aber

$$x_{n(j(k))} = -1 - \frac{1}{n(j(k))}$$

wegen $n(j(k)) \geq k$ gegen -1. Also muss $x = -1$. Ist J_2 unendlich, so folgt analog $x = 1$. Jedenfalls haben wir gezeigt, dass $-1, 1$ die einzigen Häufungspunkte sind. Aus Proposition 5.2.3 folgt schließlich

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = 1\,.$$

Folgender Satz ist ein fundamentales Ergebnis der Analysis.

5.2.5 Satz (Bolzano-Weierstraß). *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^p$ (versehen mit der euklidischen Metrik). Dann hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt.*

Beweis. Wir zeigen den Satz durch vollständige Induktion nach p. Für Folgen in $\mathbb{R}$, also $p = 1$, folgt der Satz aus Proposition 5.2.3.
Angenommen der Satz gilt für $p \in \mathbb{N}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^{p+1}$, wobei $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p+1})$. Aus der Definition von d_2 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n,p+1}| \leq d_2(0, x_n) \quad \text{und} \quad d_2(0, \underbrace{(x_{n,1}, \dots, x_{n,p})}_{\in\mathbb{R}^p})_2 \leq d_2(0, x_n)\,.$$

Mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{p+1}$ sind auch $(x_{n,p+1})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und $((x_{n,1}, \dots, x_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^p$ beschränkt. Weil wir den Satz im Fall $p = 1$ schon gezeigt haben, gibt es eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(x_{n(j),p+1})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_{n,p+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Laut Induktionsvoraussetzung hat dann $((x_{n(j),1}, \dots, x_{n(j),p}))_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $((x_{n(j(k)),1}, \dots, x_{n(j(k)),p}))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^p$.
Man beachte, dass $(x_{n(j(k)),p+1})_{k\in\mathbb{N}}$ als Teilfolge der konvergenten Folge $(x_{n(j),p+1})_{j\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergiert. Nach Proposition 3.6.1 konvergiert daher auch $(x_{n(j(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^{p+1}$. ❑

5.2.6 Definition. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge K von X heißt *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus K einen Häufungspunkt in K hat.

5.2.7 Beispiel.

(*i*) Die Teilmenge $\mathbb{N}$ von $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik ist nicht kompakt, da die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt.

(*ii*) Für ein $c \in \mathbb{R}$ ist auch das Intervall $(-\infty, c]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ nicht kompakt, da die Folge $(c-n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(-\infty, c]$ keine konvergente Teilfolge besitzt.

(*iii*) Das Intervall $(0,1]$ ist auch nicht kompakt, da die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und somit in $(0,1]$ keinen Häufungspunkt besitzt.

(*iv*) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^p$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge, so hat nach Satz 5.2.5 jede Folge aus K einen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}^p$, der nach Proposition 5.1.14 sogar zu K gehört.

Insbesondere sind alle abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ und allgemeiner alle abgeschlossenen Kugeln $K_r(x)$ in $\mathbb{R}^p$ kompakt.

Wir sammeln einige elementare Eigenschaften von kompakten Teilmengen.

5.2.8 Proposition. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Dann gilt:*

(*i*) *Ist $K \subseteq X$ kompakt, dann ist K abgeschlossen.*

(*ii*) *Ist $K \subseteq X$ kompakt, und $F \subseteq X$ abgeschlossen, sodass $F \subseteq K$, dann ist auch F kompakt.*

(*iii*) *Kompakte Teilmengen sind beschränkt.*

Beweis.

(*i*) Wir verwenden Proposition 5.1.14. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ für eine Folge aus K. Nun gibt es definitionsgemäß eine gegen ein $y \in K$ konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Andererseits konvergieren Teilfolgen von gegen x konvergenten Folgen ebenfalls gegen x. Nun sind aber Grenzwerte eindeutig. Also gilt $x = y \in K$.

(*ii*) Sei $F \subseteq K$ abgeschlossen. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus F, so ist sie trivialerweise auch eine Folge aus K. Also gilt $x = \lim_{j\to\infty} x_{n(j)}$ für eine Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in K$. Nun ist aber F abgeschlossen, und somit folgt aus Proposition 5.1.14, dass $x \in F$. Also enthält jede Folge in F eine gegen einen Punkt in F konvergente Teilfolge.

(*iii*) Sei $y \in X$. Wäre K nicht beschränkt, so wäre auch $\{d(y,x) : x \in K\} \subseteq \mathbb{R}$ nicht beschränkt. Also könnten wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ finden mit $d(y, x_n) \geq n$.

Aus der Kompaktheit folgt die Existenz einer gegen ein $x \in K$ konvergenten Teilfolge $(x_{n(j)})_{j\in\mathbb{N}}$. Aus Lemma 3.2.10 folgt $d(y, x_{n(j)}) \to d(y,x)$. Das widerspricht aber $d(y, x_{n(j)}) \geq n(j)$ für $j \in \mathbb{N}$. ❑

Aus Proposition 5.2.8 und Beispiel 5.2.7 erhalten wir folgende Charakterisierung für die Kompaktheit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^p$. Diese Charakterisierung der Kompaktheit gilt jedoch nicht in allen metrischen Räumen.

5.2.9 Korollar. *Eine Teilmenge K von $\mathbb{R}^p$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

5.2.10 Beispiel. Wir wollen zeigen, dass die Teilmenge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4x + y^2 - y - 3 \in [7, 13]\}$$

von $\mathbb{R}^2$ kompakt ist. Dafür müssen wir gemäß Korollar 5.2.9 nachweisen, dass M abgeschlossen und beschränkt ist.
Sei $((\xi_n, \eta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus M mit Grenzwert $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Können wir zeigen, dass $(\xi, \eta) \in M$, so ist M gemäß Proposition 5.1.14 abgeschlossen. Wegen $(\xi_n, \eta_n) \in M$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$7 \leq 2\xi_n^2 + 4\xi_n + \eta_n^2 - \eta_n - 3 \leq 13\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt mit Proposition 3.6.1 und Lemma 3.3.1

$$7 \leq 2\xi^2 + 4\xi + \eta^2 - \eta - 3 \leq 13\,,$$

und somit tatsächlich $(\xi, \eta) \in M$.
Um die Beschränktheit zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x + y^2 - y - 3 &= 2(x + 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - 3 - 2 - \frac{1}{4} \\ &\geq (x + 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{21}{4}\,. \end{aligned}$$

Damit ist M in der Menge

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{21}{4} \leq 13\Big\}\,,$$

also in der abgeschlossenen Kugel $K^{d_2}_{\frac{\sqrt{73}}{2}}((-1, \frac{1}{2}))$ in $\mathbb{R}^2$ bzgl. d_2 enthalten.

Wir wollen diesen Abschnitt mit einem Konvergenzkriterium für Folgen beenden.

5.2.11 Lemma. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $x \in X$, wenn jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Punkt x als Häufungspunkt hat – oder äquivalent, wenn jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wiederum eine Teilfolge hat, die gegen x konvergiert.*
Gilt $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ für eine kompakte Teilmenge K von X, so ist die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x sogar dazu äquivalent, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens x als Häufungspunkt hat.

Beweis. Falls $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, so ist x nach Lemma 5.2.2 der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und auch von allen ihren Teilfolgen.
Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen x konvergiert, so bedeutet das

$$\exists \epsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\; \exists n \geq N : \quad d(x_n, x) \geq \epsilon\,.$$

Wir definieren induktiv eine Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $n(1) \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_{n(1)}, x) \geq \epsilon$. Ist $n(k) \in \mathbb{N}$ definiert, so sei $n(k + 1)$ die kleinste Zahl größer $n(k)$ in $\mathbb{N}$, sodass $d(x_{n(k+1)}, x) \geq \epsilon$.

Nun kann $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ den Punkt x nicht als Häufungspunkt haben, da wir sonst für die entsprechende Teilfolge den Widerspruch

$$0 = d(x, x) = \lim_{j\to\infty} d(x, x_{n(k(j))}) \geq \epsilon\,.$$

erhielten. Somit haben wir den ersten Teil des Lemmas gezeigt.
Gilt $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ für eine kompakte Teilmenge K von X, so hat jede Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ immer mindestens einen Häufungspunkt y, der auch Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens x als Häufungspunkt hat, so muss $y = x$ sein, und wir erhalten $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ aus dem ersten Teil. ❑

5.3 Gerichtete Mengen und Netze

Bei der Motivation des Grenzwertbegriffes für Folgen haben wir gesagt, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solle konvergent gegen x heißen, wenn für alle hinreichend großen Indizes das Folgenglied x_n beliebig nahe an x herankommt.
Für den weiteren Aufbau der Analysis verwenden wir ähnliche Grenzwertbegriffe z.B. für Funktionen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dabei soll $f(t)$ konvergent für $t \to b$ gegen x heißen, wenn $f(t)$ beliebig nahe an x herankommt, sobald t nur hinreichend nahe an b zu liegen kommt.
Um nicht jedes Mal eine neue Konvergenztheorie aufbauen zu müssen, wollen wir einen allgemeinen Grenzwertbegriff einführen, von dem alle von uns benötigten Grenzwertbegriffe Spezialfälle sind. Was bei den Folgen die natürlichen Zahlen waren, ist bei unserem allgemeinen Konzept die gerichtete Menge.

5.3.1 Definition. Sei I eine nicht leere Menge, und sei $\preceq$ eine Relation auf I. Dann heißt $(I, \preceq)$ eine *gerichtete Menge*, wenn $\preceq$ folgender drei Bedingungen genügt.

- Reflexivität:
$$\forall i \in I : i \preceq i\,.$$
- Transitivität:
$$\forall i, j, k \in I : i \preceq j \wedge j \preceq k \Rightarrow i \preceq k\,.$$
- Richtungseigenschaft:
$$\forall i, j \in I\ \exists k \in I : i \preceq k \wedge j \preceq k\,. \tag{5.2}$$

An dieser Stelle sei explizit herausgehoben, dass wir hier weder Symmetrie noch Antisymmetrie fordern. Im Allgemeinen muss $(I, \preceq)$ auch keine Totalordnung sein.

5.3.2 Beispiel.

(*i*) Neben $(\mathbb{N}, \leq)$ ist jede Totalordnung eine gerichtete Menge. Also etwa $((0, +\infty), \leq)$, $((a, b), \geq)$, $((a, b), \leq)$, wobei $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

Die Eigenschaft (5.2) wird bei einer Totalordnung zum Beispiel vom Maximum zweier Elemente erfüllt.

(*ii*) Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. Setze $I := [a, b) \cup (b, c]$ und definiere eine Relation $\preceq$ auf I durch

$$x \preceq y \;:\Leftrightarrow\; |y - b| \leq |x - b| \,.$$

Dann ist $\preceq$ reflexiv, transitiv, und je zwei Punkte sind vergleichbar. Infolge ist $\langle I, \preceq\rangle$ eine gerichtete Menge. Man beachte, dass $\preceq$ nicht antisymmetrisch und somit keine Halbordnung ist.

(*iii*) Die gerichtete Menge aus dem letzten Beispiel ist ein Spezialfall des folgenden Konzeptes.

Sei $\langle X, d_X\rangle$ ein metrischer Raum, $D \subseteq X$ und z ein Häufungspunkt von D. Auf $D \setminus \{z\}$ definieren wir $\preceq$ durch

$$x \preceq y \;:\Leftrightarrow\; d_X(y, z) \leq d_X(x, z) \,.$$

Mit dieser Relation wird $D \setminus \{z\}$ zu einer gerichteten Menge, wobei – salopp gesagt – ein Punkt bezüglich der Relation weiter oben als ein anderer ist, wenn er näher an z liegt.

(*iv*) Ist M eine nichtleere Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ versehen mit $\subseteq$ eine gerichtete Menge.

Die Menge $\mathcal{E}(M)$ aller endlichen Teilmengen von M versehen mit $\subseteq$ ist ebenfalls eine gerichtete Menge.

(*v*) Wir nennen eine endliche Teilmenge $\mathcal{Z}$ eines Intervalls $[a, b]$ eine *Zerlegung* dieses Intervalls, wenn $a, b \in \mathcal{Z}$. Die Menge aller solchen Zerlegungen wird mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet. Versieht man $\mathfrak{Z}$ mit der Relation $\subseteq$, so erhalten wir eine gerichtete Menge.

(*vi*) Wir nennen das Paar $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\eta_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine *Riemann-Zerlegung* eines Intervalls $[a, b]$, falls

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{R})} = b;\; \eta_j \in [\xi_{j-1}, \xi_j],\; j = 1, \ldots, n(\mathcal{R}) \,,$$

und nennen $|\mathcal{R}| := \max\{(\xi_j - \xi_{j-1}) : j = 1, \ldots, n(\mathcal{R})\}$ die Feinheit der Zerlegung. Weiters sei $\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 :\Leftrightarrow |\mathcal{R}_2| \leq |\mathcal{R}_1|$. Ist $\mathfrak{R}$ die Menge aller solcher Zerlegungen, dann ist $(\mathfrak{R}, \preceq)$ eine gerichtete Menge. In diesem Beispiel ist $\preceq$ sicher nicht antisymmetrisch.

Dieser gerichteten Menge und der aus dem letzten Beispiel werden wir bei der Einführung das Integrals wieder begegnen.

(*vii*) Sei $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und

$$(n_1, m_1) \preceq (n_2, m_2) \;:\Leftrightarrow\; n_1 \leq n_2 \wedge m_1 \leq m_2 \,. \tag{5.3}$$

Dann ist $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge. Diese gerichtete Menge dient für Konvergenzbetrachtungen bei Doppelfolgen.

(*viii*) Sind allgemeiner I und J gerichtete Mengen versehen mit Relationen $\preceq_I$ bzw. $\preceq_J$, dann ist $(I \times J, \preceq)$ ebenfalls eine gerichtete Menge, wenn wir

$$(i_1, j_1) \preceq (i_2, j_2) \;:\Leftrightarrow\; i_1 \preceq_I i_2 \wedge j_1 \preceq_J j_2\,, \tag{5.4}$$

definieren.

5.3.3 Definition. In Analogie zu den Folgen nennen wir eine Abbildung $x : I \to X$ ein *Netz* bzw. eine *Moore-Smith-Folge* in der Menge X über der gerichteten Menge $(I, \preceq)$, und schreiben $(x_i)_{i\in I}$ dafür.
Entsprechend Definition 3.2.2 sagen wir, dass ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists i_0 \in I :\ d(x_i, x) < \epsilon\ \text{ für alle }\ i \succeq i_0\,. \tag{5.5}$$

In diesem Falle schreiben wir $x = \lim_{i\in I} x_i$.

5.3.4 Beispiel.

(*i*) Wie bei den Folgen sieht man, dass konstante Netze $x_i = x,\ i \in I$, immer gegen x konvergieren.

(*ii*) Als konkreteres Beispiel betrachte man die gerichtete Menge $([-1, 0) \cup (0, 1], \preceq)$, wobei $x \preceq y \Leftrightarrow |y| \leq |x|$, und $f(t) = t^2$. Dann konvergiert das Netz $(f(t))_{t\in[-1,0)\cup(0,1]}$ gegen Null:
Zu gegebenem $\epsilon > 0$ sei $t_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$. Aus $t \succeq t_0$ folgt $|0 - f(t)| = |t^2| \leq |t_0^2| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

(*iii*) Hat eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ mindestens ein maximales Element, also gibt es ein $j \in I$ mit $j \succeq i$ für alle $i \in I$ – das ist wegen (5.2) sicher der Fall, wenn I endlich ist –, so konvergiert ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn $x_j = x_k$ für alle maximalen $j, k \in I$. Der Grenzwert ist dann x_j, wobei $j \in I$ ein solch maximales Element ist. Insbesondere konvergiert $(x_i)_{i\in I}$, wenn es genau ein maximales Element j in I gibt, und zwar gegen x_j.

(*iv*) Man überzeugt sich leicht, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $\lim_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_m, x_n) = 0$, wobei $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie in (5.3) gerichtet ist.

Für Netze gelten viele der für Folgen hergeleiteten Ergebnisse. Die Beweise sind im Wesentlichen dieselben, wie für Folgen. Meist muss nur $\leq$ durch $\preceq$ ersetzt werden.

5.3.5 Fakta.

1. Der Grenzwert ist eindeutig – vgl. Satz 3.2.8, (*i*) :
   Für ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ sei angenommen, dass $x_i \to x$ und $x_i \to y$ mit $x \neq y$. Setze $\epsilon := \frac{d(x,y)}{3} > 0$. Dann gibt es wegen $x_i \to x$ einen Index i_1, sodass $d(x_i, x) < \epsilon$ für alle $i \in I$ mit $i_1 \preceq i$. Wegen $x_i \to y$ gibt es auch $i_2 \in I$, sodass $d(x_i, y) < \epsilon$ für alle $i \in I$

mit $i_2 \leq i$. Für $i \in I$ mit $i_1 \leq i$ und $i_2 \leq i$ – ein solches gibt es gemäß (5.2) – erhalten wir den Widerspruch

$$d(x,y) \leq d(x,x_i) + d(x_i,y) < 2\frac{d(x,y)}{3}.$$

2. Die Tatsache, dass es bei Folgen auf endlich viele Glieder nicht ankommt, hat auch eine Verallgemeinerung für Netze; siehe Satz 3.2.8, (*ii*). Ist nämlich $k \in I$, so ist auch $(I_{\geq k}, \leq)$ mit $I_{\geq k} = \{i \in I : k \leq i\}$ eine gerichtete Menge und
$$\lim_{i\in I} x_i = \lim_{i\in I_{\geq k}} x_i\,, \tag{5.6}$$
wobei der rechte Grenzwert genau dann existiert, wenn der linke existiert.

3. Im Allgemeinen sind konvergente Netze nicht beschränkt. Aber da ein gegen ein x konvergentes Netz $\{x_i : i \geq i_0\} \subseteq U_\epsilon(x)$ für ein $i_0 \in I$ erfüllt, ist zumindest das Netz $(x_i)_{i\in I_{\geq i_0}}$ beschränkt.

4. Man betrachte zwei Netze $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ über derselben gerichteten Menge $(I, \leq)$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$, die gegen x bzw. y konvergieren. Dann gilt (siehe Lemma 3.2.10)
$$\lim_{i\in I} d(x_i, y_i) = d(x,y)\,. \tag{5.7}$$

Eine genauere Betrachtung verdient das Analogon von Teilfolgen.

5.3.6 Definition. Sind $(I, \leq_I)$ und $(J, \leq_J)$ zwei gerichtete Mengen, ist X eine Menge und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X, so heißt $(x_{i(j)})_{j\in J}$ ein *Teilnetz* von $(x_i)_{i\in I}$, wenn $i : J \to I$ derart ist, dass[1]
$$\forall i_0 \in I\ \exists j_0 \in J:\ \forall j \succeq_J j_0 \Rightarrow i(j) \succeq_I i_0\,.$$
Ist $(J, \leq_J) = (\mathbb{N}, \leq)$, so heißt $(x_{i(j)})_{j\in J} = (x_{i(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge [2].

5.3.7 Lemma. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X.*
Ist $(J, \leq_J)$ eine weitere gerichtete Menge derart, dass $(x_{i(j)})_{j\in J}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$ ist, so folgt aus $x = \lim_{i\in I} x_i$, dass auch $x = \lim_{j\in J} x_{i(j)}$.

Beweis. Ist $x = \lim_{i\in I} x_i$, und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $i_0 \in I$, sodass $d(x, x_i) < \epsilon$ für alle $i \in I$ mit $i \succeq i_0$. Ist nun $j_0 \in J$, sodass $i(j) \succeq i_0$ für alle $j \succeq_J j_0$, so folgt $d(x, x_{i(j)}) < \epsilon$ wenn $j \succeq_J j_0$. Also gilt $x = \lim_{j\in J} x_{i(j)}$. ❑

5.3.8 Fakta. Wir zählen einige Sätze, Rechenregeln, etc. auf, die wir für Folgen hergeleitet haben, und die sich auf Netze mit praktisch denselben Beweisen übertragen lassen.

[1] Dies ist eigentlich eine Bedingung an die Abbildung $i : J \to I$ und nicht an $(x_{i(j)})_{j\in J}$.
[2] Im Gegensatz zu Teilfolgen von Folgen verlangen wir hier nicht, dass $i : \mathbb{N} \to I$ streng monoton ist.

1. Sind $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_i)_{i\in I}$[3] konvergente Netze in $\mathbb{R}$, und gilt $x_i \leq y_i$ für alle i mit $i \geq k$ für ein $k \in I$, so folgt (vgl. Lemma 3.3.1)

$$\lim_{i\in I} x_i \leq \lim_{i\in I} y_i \,. \tag{5.8}$$

Ist umgekehrt $\lim_{i\in I} x_i < \lim_{i\in I} y_i$, so gilt $x_i < y_i$ für alle $i \geq k$ mit einem gewissen $k \in I$.

2. Seien $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ und $(a_i)_{i\in I}$ Netze in $\mathbb{R}$ über derselben gerichteten Menge, sodass $x_i \leq a_i \leq y_i$ für alle $i \geq i_0$ mit einem gewissen $i_0 \in I$. Gilt

$$\lim_{i\in I} x_i = \lim_{i\in I} y_i \,,$$

so existiert auch der Grenzwert $\lim_{i\in I} a_i$ und stimmt mit dem gemeinsamen Grenzwert von $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_i)_{i\in I}$ überein; vgl. Satz 3.3.2.

3. Für zwei konvergente Netze $(z_i)_{i\in I}$ und $(w_i)_{i\in I}$ über derselben gerichteten Menge $(I, \preceq)$ in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{i\in I}(z_i + w_i) = (\lim_{i\in I} z_i) + (\lim_{i\in I} w_i)\,,\ \lim_{i\in I}(z_i \cdot w_i) = (\lim_{i\in I} z_i) \cdot (\lim_{i\in I} w_i)\,, \tag{5.9}$$

$$\lim_{i\in I} -z_i = -\lim_{i\in I} z_i\,,\ \lim_{i\in I} |z_i| = \left|\lim_{i\in I} z_i\right|\,.$$

Da Netze im Allgemeinen nicht beschränkt sind, verläuft der Beweis für $\cdot$ eine Spur anders, als im Beweis von Satz 3.3.5:

Sei $\epsilon > 0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit derart, dass auch $\epsilon \leq 1$. Seien i_1, i_2 so groß, dass $i \succeq i_1 \Rightarrow |z_i - z| < \epsilon$ und $i \succeq i_2 \Rightarrow |w_i - w| < \epsilon$. Insbesondere gilt für solche i auch $|w_i| \leq |w| + \epsilon \leq |w| + 1$. Gemäß Definition 5.3.1 gibt es ein $i_0 \succeq i_1, i_2$. Für $i \succeq i_0$ folgt

$$\begin{aligned} |z_i w_i - zw| &= |(z_i - z)w_i + z(w_i - w)| \leq |z_i - z| \cdot |w_i| + |z| \cdot |w_i - w| \\ &< \epsilon|w_i| + |z|\epsilon \leq (|w| + 1 + |z|)\epsilon \,. \end{aligned}$$

In Analogie zu (3.4) folgt daraus $\lim_{i\in I} z_i w_i = zw$.

4. Ist $(z_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, sodass $z_i \neq 0,\ i \in I$, und $\lim_{i\in I} z_i = z \neq 0$. Dann folgt $\lim_{i\in I} \frac{1}{z_i} = \frac{1}{z}$; vgl. Satz 3.3.5.

5. Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz in $\mathbb{R}$, also $i \preceq j \Rightarrow x_i \leq x_j$, und ist $\{x_i : i \in I\}$ nach oben beschränkt, so folgt (vgl. Satz 3.4.2)

$$\lim_{i\in I} x_i = \sup\{x_i : i \in I\}\,. \tag{5.10}$$

Entsprechende Aussagen gelten für monoton fallende Netze.

[3] Klarerweise ist dabei nicht ausgeschlossen, dass eines dieser Netze konstant ist.

Zum Nachweis von (5.10) wollen wir hier den Beweis angeben, der fast wörtlich derselbe wie für Satz 3.4.2 ist.

Da $(x_i)_{i\in I}$ nach oben beschränkt ist, existiert $x := \sup\{x_i : i \in I\}$. Wir zeigen, dass $\lim_{i\in I} x_i = x$. Sei $\epsilon > 0$. Wegen $x - \epsilon < x$ kann $x - \epsilon$ keine obere Schranke der Menge $\{x_i : i \in I\}$ sein. Es gibt also ein $i_0 \in I$ mit $x_{i_0} > x - \epsilon$. Wegen der Monotonie folgt auch $x_i > x - \epsilon$ für alle $i \geq i_0$. Da stets $x \geq x_i$ gilt, erhält man für $i \geq i_0$

$$0 \leq x - x_i < \epsilon\,,$$

und damit $|x_i - x| < \epsilon$.

6. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz von Punkten $x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p}) \in \mathbb{R}^p$, und $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$. Dann gilt $\lim_{i\in I} x_i = y$ bezüglich einer der Metriken d_1, d_2 oder d_∞ genau dann, wenn

$$\lim_{i\in I} x_{i,k} = y_k \quad \text{für alle} \quad k = 1, \dots, p\,. \tag{5.11}$$

5.3.9 Bemerkung. Genauso wie für Folgen kann man definieren, was es heißt, dass ein reellwertiges Netz $(x_i)_{i\in I}$ gegen $\pm\infty$ konvergiert:

$$\forall M > 0\, \exists i_0 \in I : \pm x_i > M \quad \text{für alle} \quad i \geq i_0\,.\,.$$

Offenbar schließt sich die Konvergenz von $(x_i)_{i\in I}$ gegen $+\infty$ und gegen $-\infty$ gegenseitig aus. Genauso kann $(x_i)_{i\in I}$ nicht gleichzeitig gegen $\pm\infty$ und gegen eine reelle Zahl konvergieren. Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ oder $x = \pm\infty$, so kann man $x = \lim_{i\in I} x_i$ einheitlich folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}&(\forall \xi \in \mathbb{R}, \xi < x\, \exists i_0 \in I : \forall i \geq i_0 \Rightarrow x_i > \xi) \wedge \\ &\qquad\qquad (\forall \eta \in \mathbb{R}, \eta > x\, \exists i_0 \in I : \forall i \geq i_0 \Rightarrow x_i < \eta)\,.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Es gelten sinngemäß die Aussagen in Satz 3.7.3 auch für reellwertige Netze $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$:

(*i*) $\lim_{i\in I} x_i = +\infty \Leftrightarrow \lim_{i\in I}(-x_i) = -\infty$.

(*ii*) Gilt $y_i \geq K$ für alle $i \geq k$ mit festen $K \in \mathbb{R},\ k \in I$, so folgt aus $\lim_{i\in I} x_i = +\infty$ auch $\lim_{i\in I}(x_i + y_i) = +\infty$.

(*iii*) Gilt $y_i \geq C$ für alle $i \geq k$ mit festen $C > 0,\ k \in I$, so folgt aus $\lim_{i\in I} x_i = +\infty$ auch $\lim_{i\in I}(x_i \cdot y_i) = +\infty$.

(*iv*) Ist $x_i \leq y_i$ für alle $i \geq k$ mit festem $k \in I$, so folgt aus $\lim_{i\in I} x_i = +\infty$ auch $\lim_{i\in I} y_i = +\infty$.

(*v*) Gilt $y_i > 0$ bzw. $y_i < 0$ für alle $i \geq k$ mit festem $k \in I$, so folgt $\lim_{i\in I} y_i = +\infty$ bzw. $\lim_{i\in I} y_i = -\infty$ genau dann, wenn $\lim_{i\in I} \frac{1}{y_i} = 0$.

(vi) Sei $(y_i)_{i\in I}$ monoton wachsend (fallend). Ist $(y_i)_{i\in I}$ nach oben (nach unten) beschränkt, so ist dieses Netz konvergent gegen eine reelle Zahl. Anderenfalls gilt $\lim_{i\in I} y_i = +\infty$ $(\lim_{i\in I} y_i = -\infty)$.

In der Tat gibt es zu jedem $M > 0$ ein $i_0 \in I$ mit $y_{i_0} > M$. Wegen der Monotonie folgt auch $y_i \geq y_{i_0} > M$ für alle $i \geq i_0$.

Schließlich wollen wir das Analogon zur Cauchy-Folge betrachten.

5.3.10 Definition. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge. Dann heißt ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X *Cauchy-Netz*, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists i_0 \in I:\ \forall i, j \succeq i_0 \Rightarrow d(x_i, x_j) < \epsilon\,. \tag{5.13}$$

Die Bedingung (5.13) ist ähnlich wie bei Folgen zu $\lim_{(i,j)\in I\times I} d(x_i, x_j) = 0$ äquivalent, wenn man $I \times I$ wie in (5.4) zu einer gerichteten Menge macht.
Für Folgen ist (5.13) genau die Cauchy-Folgen-Bedingung. Also liegt die Aussage des nächsten Lemma nahe.

5.3.11 Lemma. *In einem metrischen Raum ist jedes konvergente Netz auch ein Cauchy-Netz. In einem vollständigen metrischen Raum ist ein Netz genau dann konvergent, wenn es ein Cauchy-Netz ist.*

Beweis. Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz, und konvergiert dieses gegen $x \in X$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $i_0 \in I$, sodass $d(x_i, x) < \frac{\epsilon}{2}$ für $i \succeq i_0$. Wegen der Dreiecksungleichung folgt $d(x_i, x_j) < \epsilon$ für $i, j \succeq i_0$; also (5.13).
Gilt umgekehrt (5.13) in einem vollständigen metrischen Raum, so definieren wir induktiv eine Folge $i_n \in I, n \in \mathbb{N}$, durch die Forderung, dass

$$i_{n+1} \succeq i_n \text{ und } d(x_i, x_j) < \frac{1}{n},\ i, j \succeq i_n\,,$$

indem wir zuerst $i_1 \in I$ so wählen, dass $d(x_i, x_j) < 1$ für $i, j \succeq i_1$. Zu gegebenem $i_n \in I$ wähle dann gemäß (5.13) $j_{n+1} \in I$, sodass $d(x_i, x_j) < \frac{1}{n+1}$ für $i, j \succeq j_{n+1}$. Nun sei $i_{n+1} \in I$ gemäß (5.2) so gewählt, dass $i_{n+1} \succeq i_n, j_{n+1}$.
Offensichtlich ist $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent gegen ein $x \in X$. Ist $n \leq m$, so folgt aus $d(x_{i_m}, x_{i_n}) < \frac{1}{n}$ durch Grenzübergang $m \to \infty$

$$d(x, x_{i_n}) \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Ist nun $\epsilon > 0$, so wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{2}{n} \leq \epsilon$. Für $i \succeq i_n$ folgt

$$d(x, x_i) \leq d(x, x_{i_n}) + d(x_{i_n}, x_i) < \frac{2}{n} \leq \epsilon\,,$$

bzw. $x_i \in U_\epsilon(x)$, und somit konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ gegen x. ❑

5.4 Unbedingte Konvergenz und Umordnen von Reihen

Ist M irgendeine Menge und ist jedem $j \in M$ eine Zahl a_j aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zugeordnet, so eröffnet uns der Begriff des Netzes eine Möglichkeit, Ausdrücken wie $\sum_{j\in M} a_j$ sogar einen Sinn zu geben, wenn M nicht endlich und nicht abzählbar unendlich ist.
Ist M abzählbar unendlich, so könnten wir einfach eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to M$ hernehmen und $\sum_{j\in M} a_j$ als $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ definieren. Das hat aber den Schönheitsfehler, dass diese Definition von der Bijektion σ abhängt.

5.4.1 Beispiel. Sei $M = \mathbb{N}$ und $a_j = \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ für $j \in M$. Ist $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ so erhalten wir die alternierende harmonische Reihe

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

welche nach dem Leibnizkriterium, Korollar 3.10.7, konvergiert. Wir ordnen die Summanden in einer anderen Reihenfolge an. Dazu betrachten wir die Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $\sigma(3k-2) = 2k-1, \sigma(3k-1) = 4k-2, \sigma(3k) = 4k$ für $k \in \mathbb{N}$, und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)+1}}{\sigma(n)} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{=\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{=\frac{1}{14}} - \frac{1}{16} + \ldots =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots) = \frac{S}{2}.$$

Die Summe einer Reihe kann also von der Reihenfolge der Summanden abhängen. Tatsächlich kann man eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe stets so umordnen, dass jede beliebige Summe einschließlich $\pm\infty$, oder gar eine divergente Reihe, herauskommt, vgl. Satz 5.4.6.

Wir wollen nun $\sum_{j\in M} a_j$ für beliebige Mengen $M \neq \emptyset$ einen Sinn geben. Als erstes sei bemerkt, dass für jede endliche Teilmenge A von M klarerweise $\sum_{j\in A} a_j$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ definiert ist. Bezeichnet man mit $\mathcal{E}(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M, so hat man zu jedem $A \in \mathcal{E}(M)$ die Zahl

$$S_A := \sum_{j\in A} a_j .$$

Setzt man $A \preceq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$, so ist $(\mathcal{E}(M), \preceq)$ eine gerichtete Menge, denn die Reflexivität und die Transitivität von $\preceq$ sind offenbar erfüllt, und (5.2) gilt, da mit $A, B \in \mathcal{E}(M)$ auch $A \cup B \in \mathcal{E}(M)$, wobei $A, B \preceq A \cup B$. Insbesondere ist $(S_A)_{A\in\mathcal{E}(M)}$ ein Netz.

5.4.2 Definition. Sei $M \neq \emptyset$ und sei a_j für jedes $j \in M$ eine reelle bzw. komplexe Zahl. Falls das Netz $(\sum_{j\in A} a_j)_{A\in\mathcal{E}(M)}$ in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ konvergiert, so sagen wir, dass $\sum_{j\in M} a_j$ *unbedingt konvergiert* und setzen[4]

$$\sum_{j\in M} a_j = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} \sum_{j\in A} a_j .$$

[4] Die Summe über die leere Indexmenge sei dabei per definitionem Null.

Ist s dieser Grenzwert, so bedeutet das also

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists A_0 \subseteq M, A_0 \text{ endlich} : \; \forall A \supseteq A_0, A \text{ endlich } \Rightarrow \left| \sum_{j \in A} a_j - s \right| < \epsilon . \tag{5.14}$$

Wenn man die Vorgangsweisen in Definition 5.4.2 und bei den klassischen Reihen in Definition 3.9.1 vergleicht, so erkannt man, dass bei den klassischen Reihen für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Partialsumme $\sum_{k=1}^n a_k$ berechnet und dann den Grenzwert der Folge $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildet wird. In Definition 5.4.2 berechnet man für jede endliche Teilmenge A von M die Summe $\sum_{j\in A} a_j$ und bildet den Grenzwert des Netzes $(\sum_{j\in A} a_j)_{A\in\mathcal{E}(M)}$.
Der Ausdruck "unbedingte Konvergenz„ rührt daher, dass es im Gegensatz zu den klassischen Reihen bei der Vorgangsweise in Definition 5.4.2 nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge aufsummiert wird; siehe auch Fakta 5.4.3, 4.

5.4.3 Fakta.

1. Man zeigt ganz einfach, dass für unbedingt konvergente Reihen Rechenregeln gelten, die denen in Korollar 3.9.3 entsprechen, also $(\lambda, \mu, a_j, b_j \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ j \in M)$

$$\sum_{j\in M} (\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda \left(\sum_{j\in M} a_j \right) + \mu \left(\sum_{j\in M} b_j \right)$$

   in dem Sinn, dass die linke Seite unbedingt konvergiert, wenn die Summen rechts es tun.

2. Das Netz $(\sum_{j\in A} |a_j|)_{A\in\mathcal{E}(M)}$ ist offenbar monoton wachsend. Gemäß (5.10) ist es also genau dann konvergent, falls es beschränkt ist:

$$\sum_{j\in A} |a_j| \le C \;\text{ für alle }\; A \in \mathcal{E}(M) \tag{5.15}$$

   mit einem festen $C > 0$. Dabei gilt

$$\sum_{j\in M} |a_j| = \sup_{A\in\mathcal{E}(M)} \sum_{j\in A} |a_j| .$$

   Falls (5.15) nicht gilt, so konvergiert $(\sum_{j\in A} |a_j|)_{A\in\mathcal{E}(M)}$ im Sinne von Bemerkung 5.3.9 gegen $+\infty$. Wir schreiben $\sum_{j\in M} |a_j| = +\infty$ dafür.

   Gilt (5.15), so konvergiert auch $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt, denn ist $A_0 \in \mathcal{E}(M)$ so groß, dass $\left|\sum_{j\in A} |a_j| - \sum_{j\in B} |a_j|\right| < \epsilon$ für alle $A, B \in \mathcal{E}(M)$ mit $A_0 \subseteq A, B$ (vgl. Lemma 5.3.11), so gilt für $A_0 \subseteq A, B \in \mathcal{E}(M)$ und damit $A_0 \subseteq A \cap B, A \cup B$ auch[5]

$$\left| \sum_{j\in A} a_j - \sum_{j\in B} a_j \right| = \left| \sum_{j\in A\setminus B} a_j - \sum_{j\in B\setminus A} a_j \right| \le \sum_{j\in A\triangle B} |a_j| = \left| \sum_{j\in A\cup B} |a_j| - \sum_{j\in A\cap B} |a_j| \right| < \epsilon .$$

   Als Cauchy-Netz konvergiert das Netz $(\sum_{j\in A} a_j)_{A\in\mathcal{E}(M)}$ gemäß Lemma 5.3.11.

[5] $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ist die *symmetrische Mengendifferenz* von A und B.

3. Ist $P \subseteq M$ eine nichtleere Teilmenge und konvergiert $\sum_{j \in M} a_j$ unbedingt, so tut es auch $\sum_{j \in P} a_j$, denn aus der Konvergenz von $(\sum_{j \in A} a_j)_{A \in \mathcal{E}(M)}$ folgt, dass dieses Netz auch ein Cauchy-Netz ist. Ist nun $\epsilon > 0$ und $A_0 \in \mathcal{E}(M)$, sodass aus $A_0 \subseteq A, B \in \mathcal{E}(M)$ die Ungleichung
$$\left| \sum_{j \in A} a_j - \sum_{j \in B} a_j \right| < \epsilon$$
folgt, so folgt aus $A_0 \cap P \subseteq C, D \in \mathcal{E}(P)$ zunächst $A_0 \subseteq C \cup A_0, D \cup A_0 \in \mathcal{E}(M)$ und damit
$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in C} a_j - \sum_{j \in D} a_j \right| &= \left| \sum_{j \in C} a_j + \sum_{j \in A_0 \setminus P} a_j - \sum_{j \in D} a_j - \sum_{j \in A_0 \setminus P} a_j \right| \\ &= \left| \sum_{j \in C \cup A_0} a_j - \sum_{j \in D \cup A_0} a_j \right| < \epsilon \,. \end{aligned}$$
Also ist auch $(\sum_{j \in A} a_j)_{A \in \mathcal{E}(P)}$ ein Cauchy-Netz und wegen Lemma 5.3.11 konvergent.

4. Ist $\tilde{M}$ eine weitere Menge – es kann auch $\tilde{M} = M$ sein – und $\sigma : \tilde{M} \to M$ eine Bijektion, so konvergiert $\sum_{j \in M} a_j$ genau dann unbedingt gegen s, wenn $\sum_{j \in \tilde{M}} a_{\sigma(j)}$ es tut. Denn ist $\epsilon > 0$ und A_0, sodass (5.14) gilt, und ist $\sigma^{-1}(A_0) \subseteq A \in \mathcal{E}(\tilde{M})$, so folgt wegen $A_0 \subseteq \sigma(A) \in \mathcal{E}(M)$
$$\left| \sum_{j \in A} a_{\sigma(j)} - s \right| = \left| \sum_{\sigma(j) \in \sigma(A)} a_{\sigma(j)} - s \right| = \left| \sum_{k \in \sigma(A)} a_k - s \right| < \epsilon \,.$$
Also gilt (5.14) für $\sum_{j \in \tilde{M}} a_{\sigma(j)}$. Die Umkehrung ergibt sich durch dasselbe Argument angewendet auf σ^{-1}.

5. Im Falle $M = \mathbb{N}$ folgt aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j$ die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ im Sinne von Definition 3.9.1 gegen den gleichen Grenzwert. Es ist nämlich $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{j \in A(n)} a_j)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $A(n) := \{1, \dots, n\}$ eine Teilfolge des Netzes $(\sum_{j \in A} a_j)_{A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})}$ im Sinne von Definition 5.3.6, da es zu jedem $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt sodass
$$\{1, \dots, n\} \supseteq A \;\text{ für alle }\; n \geq N \,.$$

6. Angenommen $\sum_{k=1}^{\infty} k_n$ konvergiert absolut, also $C := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$ konvergiert im Sinne von Definition 3.9.1. Dann konvergiert $\sum_{j \in \mathbb{N}} |a_j|$ auch unbedingt, denn für jedes $A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \{1, \dots, n\}$. Wegen
$$\sum_{j \in A} |a_j| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq C$$
ist das Netz $(\sum_{j \in A} |a_j|)_{A \in \mathcal{E}(\mathbb{N})}$ beschränkt.

   Aus 2 folgt dann auch die unbedingte Konvergenz von $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j$. Aus dem vorherigen Punkt folgt schließlich $\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aus Fakta 5.4.3, 6 und 5 erkennen wir insbesondere, dass für $M = \mathbb{N}$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ äquivalent zu der unbedingten Konvergenz von $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|$ ist. Nun gilt sogar

5.4.4 Satz. *Für reelle oder komplexe Koeffizienten a_j, $j \in M$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\sum_{j\in M} |a_j|$ *konvergiert unbedingt.*
- $\sum_{j\in M} a_j$ *konvergiert unbedingt.*

Für $M = \mathbb{N}$ ist das zur absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ äquivalent.

Beweis. Wegen Fakta 5.4.3, 2, folgt aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{j\in M} |a_j|$ auch die von $\sum_{j\in M} a_j$.
Für die Umkehrung seien die a_j zunächst reell. Wir schreiben M als

$$M = \underbrace{\{j \in M : a_j \geq 0\}}_{=:M_+} \dot\cup \underbrace{\{j \in M : a_j < 0\}}_{=:M_-} .$$

Wegen Fakta 5.4.3, 3 und 1, folgt aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{j\in M} a_j$ auch die von $\sum_{j\in M_+} a_j =: C_1$ und $C_2 := \sum_{j\in M_-}(-a_j) =: C_2$. Wegen

$$\sum_{j\in A} |a_j| = \sum_{j\in A\cap M_+} a_j + \sum_{j\in A\cap M_-} (-a_j) \leq C_1 + C_2$$

für jedes $A \in \mathcal{E}(M)$ folgt die unbedingte Konvergenz von $\sum_{j\in M} |a_j|$ aus Fakta 5.4.3, 2.
Sind die a_j komplex, so erhalten wir aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{j\in M} a_j$ mit (5.11) auch die von $\sum_{j\in M} \operatorname{Re} a_j$ und $\sum_{j\in M} \operatorname{Im} a_j$. Nach dem schon Gezeigten konvergieren dann $\sum_{j\in M} |\operatorname{Re} a_j|$ und $\sum_{j\in M} |\operatorname{Im} a_j|$ unbedingt, was wegen $|a_j| \leq |\operatorname{Re} a_j| + |\operatorname{Im} a_j|$ und Fakta 5.4.3, 2, die unbedingte Konvergenz von $\sum_{j\in M} |a_j|$ nach sich zieht.
Die Äquivalenz zur absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ haben wir schon oben gesehen. ❑

Da für reell- bzw. komplexwertige Reihen absolute und unbedingte Konvergenz dasselbe bedeuten, nennen wir Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, auch *bedingt konvergent*.

5.4.5 Korollar. *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit reellen oder komplexen Summanden sei absolut konvergent. Dann ist für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auch die Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und hat die gleiche Summe.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 5.4.4 und Fakta 5.4.3, 4. ❑

Nun wollen wir Korollar 5.4.5 umkehren.

5.4.6 Satz. *Sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ reeller Zahlen konvergent mit der Summe S, aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl $S' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $b_k = a_{\sigma(k)}$, mit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S'$. Weiters gibt es Umordnungen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ die divergieren, aber nicht bestimmt divergieren.*

Beweis. Wir setzen $a_k^+ := \max(a_k, 0)$ und $a_k^- := \min(a_k, 0)$ und überlegen uns zuerst, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = -\infty \tag{5.16}$$

gelten muss. Zunächst sind die Partialsummen dieser Reihen monotone Folgen und haben somit einen Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Angenommen einer der beiden wäre endlich, z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = S^+ < \infty$. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^- = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k^+ \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S^- := S - S^+ > -\infty\,.$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{n} | a_k |= \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^- \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S^+ - S^- < \infty\,,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergiert.
Sei nun $S' \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir konstruieren eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, die gegen S' konvergiert. Zuerst addiert man Summanden $a_1^+, a_2^+, a_3^+, \dots, a_{n_1}^+$ bis man ihre Summe das erste Mal größer als S' ist. Dann addiert man dazu Summanden $a_1^-, a_2^-, \dots, a_{l_1}^-$ bis die Gesamtsumme das erste mal wieder kleiner als S' ist. Hierauf addiert man dazu $a_{n_1+1}^+, a_{n_1+2}^+, \dots, a_{n_2}^+$ bis man das erste Mal wieder größer als S' ist. So verfährt man weiter. Wegen (5.16) ist das stets möglich.
Man erhält in dieser Weise eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Ist S'_n eine Partialsumme, so ist $S'_n - S'$ nach oben durch das letzte aufgetretene a_k^+ und nach unten durch das letzte aufgetretene a_k^- beschränkt. Wegen $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} (S'_n - S') = 0\,.$$

Ähnlich verfährt man, wenn man eine Umordnung konstruieren möchte, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ bestimmt divergiert bzw. divergiert, aber nicht bestimmt divergiert. ❑

Obiger Beweis verwendet bei der Definition der Umordnung implizit den Rekursionssatz. Die Tatsache, dass die dadurch definierte Funktion bijektiv auf $\mathbb{N}$ ist und dass sie das Gewünschte leistet, bedarf eigentlich eines strengeren Beweises.

5.4.7 Bemerkung. Korollar 5.4.5 zusammen mit Satz 5.4.6 wird auch *Riemannscher Umordnungssatz* genannt. Für komplexwertige Reihen gilt Satz 5.4.6 nicht.

Für den folgenden Satz nehmen wir an, dass sich unsere nichtleere Menge M als disjunkte Vereinigung

$$M = \dot{\bigcup}_{i\in I} M_i$$

mit nichtleerer Indexmenge I und nichtleeren Mengen $M_i,\ i \in I$, schreiben lässt.

5.4.8 Proposition. *Sind die a_j, $j \in M$, reelle oder komplexe Zahlen, und konvergiert $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt, so konvergieren alle Ausdrücke $\sum_{j\in M_i} a_j$, $i \in I$, unbedingt genauso wie $\sum_{i\in I} \big(\sum_{j\in M_i} a_j\big)$, und es gilt*

$$\sum_{i\in I} \Big(\sum_{j\in M_i} a_j \Big) = \sum_{j\in M} a_j \,. \tag{5.17}$$

Beweis. Wegen Fakta 5.4.3, 3, konvergieren alle Ausdrücke $s_i = \sum_{j\in M_i} a_j$, $i \in I$, unbedingt. Um die Konvergenz von $\sum_{i\in I} s_i$ gegen $s := \sum_{j\in M} a_j$ zu zeigen, sei $\epsilon > 0$, und wähle $A_0 \in \mathcal{E}(M)$, sodass aus $A_0 \subseteq A \in \mathcal{E}(M)$ die Ungleichung

$$\Big| s - \sum_{j\in A} a_j \Big| < \epsilon$$

folgt. Dann ist $K_0 := \{i \in I : M_i \cap A_0 \neq \emptyset\}$ sicherlich auch endlich.
Für jedes endliche $K \supseteq K_0$ bezeichne $\#K$ seine Mächtigkeit. Wähle nun für jedes $i \in K$ ein $B_i \in \mathcal{E}(M_i)$, sodass

$$\Big| s_i - \sum_{j\in B} a_j \Big| < \frac{\epsilon}{\#K}, \quad \text{wenn } \; B_i \subseteq B \in \mathcal{E}(M_i) \,.$$

Da man B_i sicherlich größer machen kann, ohne diese Bedingung zu verlieren, können wir annehmen, dass auch $B_i \supseteq M_i \cap A_0$.
Mit $A := \bigcup_{i\in K} B_i \supseteq \bigcup_{i\in K_0} M_i \cap A_0 = A_0$ folgt

$$\Big| s - \sum_{i\in K} s_i \Big| \le \Big| s - \sum_{j\in A} a_j \Big| + \sum_{i\in K} \Big| s_i - \sum_{j\in B_i} a_j \Big| < 2\epsilon \,.$$

Also gilt $s = \lim_{K\in\mathcal{E}(I)} \sum_{i\in K} s_i$. ❑

Im Allgemeinen kann man aber nicht von der Existenz von $\sum_{i\in I} \sum_{j\in M_i} a_j$ auf die unbedingte Konvergenz von $\sum_{j\in M} a_j$ schließen; vgl. Beispiel 5.4.10. Es gilt jedoch

5.4.9 Lemma. *Sind die a_j, $j \in M$, reelle oder komplexe Zahlen, und konvergieren alle Ausdrücke $\sum_{j\in M_i} |a_j|$, $i \in I$, unbedingt genauso wie $\sum_{i\in I} \big(\sum_{j\in M_i} |a_j|\big)$, so konvergiert auch $\sum_{j\in M} |a_j|$ unbedingt. In dem Fall gilt $\sum_{i\in I} \big(\sum_{j\in M_i} |a_j|\big) = \sum_{j\in M} |a_j|$ sowie $\sum_{i\in I} \big(\sum_{j\in M_i} a_j\big) = \sum_{j\in M} a_j$.*

Beweis. Konvergieren alle Ausdrücke $\sum_{j\in M_i} |a_j|$, $i \in I$, unbedingt genauso wie $C := \sum_{i\in I} \sum_{j\in M_i} |a_j|$, so folgt für jedes $A \in \mathcal{E}(M)$ mit $K := \{i \in I : M_i \cap A \neq \emptyset\}$

$$\sum_{j\in A} |a_j| = \sum_{i\in K} \sum_{j\in A\cap M_i} |a_j| \le \sum_{i\in K} \sum_{j\in M_i} |a_j| \le C \,.$$

Aus Fakta 5.4.3, 2, folgt somit die unbedingte Konvergenz von $\sum_{j\in M} |a_j|$. Die behaupteten Gleichungen folgen aus Proposition 5.4.8. ❑

Die beiden letzten Resultate lassen sich zum Beispiel auf so genannte *Doppelreihen* anwenden. Dazu sei $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und sei zu jedem $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine reelle bzw. komplexe Zahl $a_{m,n}$ gegeben.
Wegen Satz 5.4.4 sind die unbedingte Konvergenz von $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |a_{m,n}|$ und von $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{m,n}$ äquivalent. Wegen Proposition 5.4.8 und Lemma 5.4.9 angewandt auf die Zerlegung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup}_{i\in\mathbb{N}}\{i\} \times \mathbb{N}$ ist das auch zur unbedingten Konvergenz aller Ausdrücke $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{i,j}|$, $i \in \mathbb{N}$, und von $\sum_{i\in\mathbb{N}} \big(\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_{i,j}|\big)$ äquivalent. Wegen Fakta 5.4.3, 6, bedeuten diese unbedingten Konvergenzen genau, dass $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| < +\infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}|\Big) < +\infty . \tag{5.18}$$

Analoges gilt für die vertauschte Reihenfolge. Trifft eine dieser äquivalenten Bedingungen zu, so konvergieren folgende Ausdrücke unbedingt und es gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j}\Big) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{m,n} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j}\Big) . \tag{5.19}$$

Zerlegt man schließlich $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \dot{\bigcup}_{d\in\mathbb{N}_{\geq 2}}\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k + l = d\}$ – also in die Diagonalen $\{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k + l = d\}$ mit $d = 2, 3, \ldots$ –, so erhalten wir aus Proposition 5.4.8, dass auch folgender Ausdruck unbedingt konvergiert und (5.19) mit

$$\sum_{d\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \Big(\sum_{k=1}^{d-1} a_{k,d-k}\Big) \tag{5.20}$$

übereinstimmt.
Dass die unbedingte Konvergenz von $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{m,n}$ notwendig dafür ist, dass die Ausdrücke ganz links und ganz rechts in (5.19) übereinstimmen, zeigt

5.4.10 Beispiel. Seien die Zahl $a_{i,j}$ der (i, j)-te Eintrag von

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & -1 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & & & \\
0 & + & 1 & + & -1 & + & 0 & + & \ldots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & & & \\
0 & + & 0 & + & 1 & + & -1 & + & \ldots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & & & \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & + & \ldots & = & 0 \\
+ & & + & & + & & + & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
= & & = & & = & & = & & & & = \\
1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & = & 1 \setminus 0
\end{array}$$

Dann gilt $\sum_{i\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j}\Big) = 0$ und $\sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j}\Big) = 1$.

5.4.11 Korollar. *Sind die beiden Reihen $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so konvergiert*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_m b_n$$

unbedingt, wobei

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_m b_n = \sum_{i=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{i-1} a_k b_{i-k}\Big) = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

Der mittlere Ausdruck konvergiert dabei auch absolut.

Beweis. Wegen[6]

$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_m b_n|\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\Big(|a_m|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\Big)}_{<+\infty} = \Big(\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\Big) < +\infty$$

folgt aus der Bedingung (5.18), dass $S := \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_m \cdot b_n$ unbedingt konvergent. Nach (5.19) und Fakta 5.4.3, 1, gilt

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_i\cdot b_j\Big) = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}\sum_{i\in A}\Big(\lim_{B\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}\sum_{j\in B} a_i\cdot b_j\Big) = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}\sum_{i\in A} a_i\cdot\Big(\lim_{B\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}\sum_{j\in B} b_j\Big) \\ &= \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}\sum_{i\in A} a_i\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big) = \left(\lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})}\sum_{i\in A} a_i\right)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big) = \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big). \end{aligned}$$

$S = \sum_{i=2}^{\infty}\big(\sum_{k=1}^{i-1} a_k b_{i-k}\big)$ ergibt sich sofort aus (5.20). Diese Reihe konvergiert absolut, da aus der unbedingten die absolute Konvergenz folgt. ❑

5.4.12 Beispiel. Definiere eine Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad z\in\mathbb{C}.$$

Zunächst müssen wir diese Definition rechtfertigen, also zeigen, dass diese Reihe konvergiert. Für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{z}{(n+1)} = 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

[6] Diese Gleichung ist am besten von rechts nach links zu lesen. In dieser Reihenfolge erkennt man am besten, dass alle vorkommenden Reihen konvergieren.

Wir wollen für zwei Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ das Produkt $\exp(z)\exp(w)$ ausrechnen. Dazu verwenden wir Summation längs der Diagonalen. Wir erhalten aus Korollar 5.4.11 unter Beachtung einer Indexverschiebung

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{z^{k-j}}{(k-j)!} \frac{w^j}{j!} \Big) .$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{z^{k-j}}{(k-j)!} \frac{w^j}{j!} = \frac{1}{k!}(z+w)^k ,$$

und wir erhalten

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z+w)^k = \exp(z+w) .$$

Die Funktion exp heißt auch die *Eulersche Exponentialfunktion*. Sie ist eine der wichtigsten Funktionen in der Mathematik. Wir werden sie zum Beispiel auch dafür benützen, um Funktionen wie $\sin z$ oder $\cos z$ zu definieren, vgl. den Abschnitt über elementare Funktionen.

5.5 Grenzwerte von Funktionen

Zunächst bringen wir ein Resultat, mit Hilfe dessen wir die Konvergenz eines Netzes auf die Konvergenz von Teilfolgen zurückführen können.

5.5.1 Lemma. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Falls $(I, \preceq)$ die Eigenschaft hat, dass es eine Teilfolge von $(x_i)_{i\in I}$ im Sinne von Definition 5.3.6 gibt[7], so gilt $x = \lim_{i\in I} x_i$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} x_{i(n)} = x$ für jede Teilfolge $(x_{i(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_i)_{i\in I}$.*

Beweis. Falls $x = \lim_{i\in I} x_i$, so folgt aus Lemma 5.3.7, dass auch $\lim_{n\to\infty} x_{i(n)} = x$ für alle Teilfolgen von $(x_i)_{i\in I}$.
Konvergiert umgekehrt $(x_i)_{i\in I}$ nicht gegen x, so gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass

$$\forall i \in I \; \exists k \in I, k \succeq i : \; d(x_k, x) \geq \epsilon . \tag{5.21}$$

Daraus konstruieren wir eine Teilfolge, die nicht gegen x konvergiert. Dafür bezeichnen wir mit $j : \mathbb{N} \to I$ zunächst eine Abbildung, sodass $(x_{j(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_i)_{i\in I}$ ist, welche voraussetzungsgemäß existiert.
Sei $i(1) \in I$, $i(1) \succeq j(1)$ mit $d(x_{i(1)}, x) \geq \epsilon$; vgl. (5.21). Sind $i(1) \preceq \cdots \preceq i(m) \in I$ definiert, so sei $i \in I$, $i \succeq i(m), i \succeq j(m+1)$. Gemäß (5.21) gibt es ein $i(m+1) \succeq i$, sodass $d(x_{i(m+1)}, x) \geq \epsilon$.

[7] Diese Eigenschaft ist in der Tat eine Eigenschaft von $(I, \preceq)$ und somit unabhängig vom konkreten Netz $(x_i)_{i\in I}$.

Da $(x_{j(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge ist, gibt es zu jedem $i \in I$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass $j(m_0) \geq i$. Wegen $i(m) \geq j(m),\ m \in \mathbb{N}$, folgt $i(m) \geq i(m_0) \geq j(m_0) \geq i$ für alle $m \geq m_0$. Also ist auch $(x_{i(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, für die zudem $d(x_{i(n)}, x) \geq \epsilon$ gilt. Insbesondere kann diese Teilfolge nicht gegen x konvergieren. ❑

Sei $\langle X, d_X\rangle$ ein metrischer Raum, $D \subseteq X$, z ein Häufungspunkt von D und $\preceq$ auf $D \setminus \{z\}$ definiert als

$$x \preceq y \ :\Leftrightarrow d_X(x,z) \geq d_X(y,z)$$

wie in Beispiel 5.3.2, (*iii*). $(D \setminus \{z\}, \preceq)$ ist dann eine gerichtete Menge. Weiters sei $f : D \setminus \{z\} \to Y$ eine Funktion, wobei $\langle Y, d_Y\rangle$ ein weiterer metrischer Raum ist.

5.5.2 Definition. Konvergiert das Netz $(f(t))_{t\in D\setminus\{z\}}$, so schreiben wir für den Grenzwert auch

$$\lim_{t\to z} f(t) := \lim_{t\in D\setminus\{z\}} f(t)\,, \tag{5.22}$$

und nennen ihn *Grenzwert der Funktion f für $t \to z$.*

5.5.3 Lemma. *Für ein Netz $(t_i)_{i\in I}$ aus $D \setminus \{z\}$ ist $(f(t_i))_{i\in I}$ ein Teilnetz von $(f(t))_{t\in D\setminus\{z\}}$ im Sinne von Definition 5.3.6 genau dann, wenn $\lim_{i\in I} t_i = z$. Insbesondere gibt es Teilfolgen von $(f(t))_{t\in D\setminus\{z\}}$.*

Beweis. Gemäß Definition 5.3.6 ist $(f(t_i))_{i\in I}$ genau dann ein Teilnetz ist, wenn

$$\forall t_0 \in D \setminus \{z\}\ \exists i_0 \in I :\ d_X(t_i, z) \leq d_X(t_0, z) \quad \text{für alle} \quad i \succeq i_0\,. \tag{5.23}$$

Setzt man $\lim_{i\in I} t_i = z$ voraus, so gibt es zu $t_0 \in D \setminus \{z\}$ wegen $\epsilon := d_X(t_0, z) > 0$ ein $i_0 \in I$ mit $d_X(t_i, z) < \epsilon = d_X(t_0, z)$ für alle $i \succeq i_0$. Insbesondere gilt (5.23).
Gilt umgekehrt (5.23) und ist $\epsilon > 0$, so gibt es – da z Häufungspunkt von D ist – ein $t_0 \in D \setminus \{z\}$ mit $d_X(t_0, z) < \epsilon$ und eben wegen (5.23) ein $i_0 \in I$ mit $d_X(t_i, z) \leq d_X(t_0, z) < \epsilon$ für alle $i \succeq i_0$, also $\lim_{i\in I} t_i = z$.
Die letzte Aussage folgt aus Lemma 5.1.12, da es wegen dieses Lemmas gegen z konvergente Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D \setminus \{z\}$ gibt, womit dann $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f(t))_{t\in D\setminus\{z\}}$ ist. ❑

5.5.4 Korollar. *Für ein $y \in Y$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

(*i*) $\lim_{t\to z} f(t) = y$,

(*ii*) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall t \in D \setminus \{z\},\ d_X(t,z) < \delta \Rightarrow d_Y(f(t), y) < \epsilon$,

(*iii*) $\forall (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $D \setminus \{z\},\ \lim_{n\to\infty} t_n = z\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(t_n) = y$.

Beweis. Die Äquivalenz von (*i*) und (*iii*) folgt wegen Lemma 5.5.3 aus Lemma 5.5.1. Falls (*i*) zutrifft, also

$$\forall \epsilon > 0\ \exists t_0 \in D \setminus \{z\} :\ \forall t \in D \setminus \{z\},\ d_X(t,z) \leq d_X(t_0,z) \Rightarrow d_Y(f(t), y) < \epsilon\,, \tag{5.24}$$

so setze für ein gegebenes $\epsilon > 0$ einfach $\delta = d_X(t_0, z)$. Offenbar gilt dann (*ii*).
Gilt umgekehrt (*ii*), und wählt man dem entsprechend zu $\epsilon > 0$ ein passendes $\delta > 0$, so gibt es ein $t_0 \in D \setminus \{z\} \cap U_\delta(z)$, da z ja Häufungspunkt von D ist. Für $t \succeq t_0$ folgt dann $d_X(t,z) < \delta$ und somit $d_Y(f(t), y) < \epsilon$. ❑

5.5.5 Bemerkung. Aus Korollar 5.5.4 erkennt man unmittelbar, dass für ein $C \subseteq D$, das z ebenfalls als Häufungspunkt hat, aus $\lim_{t\to z} f(t) = y$ auch $\lim_{t\to z} f|_{C\setminus\{z\}}(t) = y$ folgt. Dabei ist letzterer Grenzwert als $\lim_{t\in C\setminus\{z\}} f(t)$ zu verstehen, wobei für $s, t \in C \setminus \{z\}$ auch $s \preceq t \Leftrightarrow d_X(s, z) \geq d_X(t, z)$. Aus $\lim_{t\to z} f|_{C\setminus\{z\}}(t) = y$ folgt im Allgemeinen aber nicht $\lim_{t\to z} f(t) = y$, vgl. Beispiel 5.5.10.

5.5.6 Bemerkung. Ist $\rho > 0$ beliebig, so gilt wegen Bemerkung 5.5.5, dass aus $\lim_{t\to z} f(t) = y$ auch $\lim_{t\to z} f|_{U_\rho(z)\cap D}(t) = y$ folgt, da z ja auch ein Häufungspunkt von $U_\rho(z) \cap D$ ist. Nun gilt sogar

$$\lim_{t\to z} f(t) = y \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to z} f|_{U_\rho(z)\cap D}(t) = y\,.$$

Um von rechts auf links zu schließen, sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass aus $t \in U_\rho(z) \cap D \setminus \{z\}$, $d_X(t, z) < \delta$ immer $d_Y(f(t), y) < \epsilon$ folgt. Aus $t \in D \setminus \{z\}$ mit $d_X(t, z) < \min(\delta, \rho)$ ergibt sich dann $t \in U_\rho(z) \cap D \setminus \{z\}$, $d_X(t, z) < \delta$ und damit $d_Y(f(t), y) < \epsilon$. Also gilt $\lim_{t\to z} f(t) = y$.
Alternativ kann man obige Äquivalenz auch mit Hilfe von (5.6) herleiten, da beide Aussagen wegen

$$(D \setminus \{z\})_{\succeq s} = K_{d_X(s,z)}(z) \cap D \setminus \{z\} = (U_\rho(z) \cap D \setminus \{z\})_{\succeq s}$$

für ein $s \in U_\rho(z) \cap D \setminus \{z\}$ zu $\lim_{t\in D\setminus\{z\}_{\succeq s}} f(t) = y$ äquivalent sind.

5.5.7 Beispiel.

(*i*) Ist $X = Y = D$ ein beliebiger metrischer Raum, $z \in X$ ein Häufungspunkt davon, so gilt für $f(t) = t$ sicher $\lim_{t\to z} t = z$, wie man z.B. aus Korollar 5.5.4, (*iii*), sofort erkennt.

(*ii*) Wir wollen

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2}$$

berechnen, wobei das als der Limes $\lim_{t\in(-1,1)\setminus\{0\}} \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}$ mit der gerichteten Menge $((-1, 1) \setminus \{0\}, \preceq)$ gerichtet durch $s \preceq t \Leftrightarrow |s| \geq |t|$ zu verstehen ist.

Aus $1 - (1 - t^2) = (1 - \sqrt{1 - t^2})(1 + \sqrt{1 - t^2})$ folgt wegen der für Netze gültigen Rechenregeln

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - (1 - t^2)}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}}$$
$$= \frac{1}{1 + \lim_{t\to 0} \sqrt{1 - t^2}}\,.$$

Nun ist aber wegen der für Folgen gültigen Rechenregeln $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - t_n^2} = 1$ für jede gegen 0 konvergente Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aus Korollar 5.5.4 folgt $\lim_{t\to 0} \sqrt{1 - t^2} = 1$, und der zu berechnende Grenzwert ist $\frac{1}{2}$.

Betrachtet man $\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}$ als Funktion etwa auf $(-\frac{1}{8}, 0)$, so wissen wir, dass wegen Bemerkung 5.5.5 ebenfalls $\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} \to \frac{1}{2}$ für $t \in (-\frac{1}{8}, 0)$, $t \to 0$.

Die Schreibweise $\lim_{t\to z} f(t) = y$ aus Definition 5.5.2 besagt, dass der Funktionswert $f(t)$ beliebig nahe an y herankommt, wenn das Argument t nur hinreichend nahe bei z ist. Ist der Definitionsbereich D der Funktion f in $\mathbb{R}$ enthalten, so kann diese Annäherung auch nur von einer Seite stattfindet.

5.5.8 Definition. Sei $X = \mathbb{R}$ und $D = (a, b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ist nun f eine Funktion, die zumindest auf D definiert ist und Werte in einem metrischen Raum Y hat, so schreibt man für $\lim_{t\in D\setminus\{b\}} f(t) = y$ – hier ist $D \setminus \{b\}$ so gerichtet, dass $s \preceq t \Leftrightarrow |t - b| \leq |s - b| \Leftrightarrow s \leq t$ – auch

$$\lim_{t\to b-} f(t) = y\,.$$

Man spricht von dem *linksseitigen Grenzwert*.
Analog definiert man für $D = (a, b)$ den *rechtsseitigen Grenzwert* $\lim_{t\to a+} f(t) = y$ als $\lim_{t\in D\setminus\{a\}} f(t) = y$ – hier ist $D \setminus \{a\}$ so gerichtet, dass $s \preceq t \Leftrightarrow |t - a| \leq |s - a| \Leftrightarrow t \leq s$.

5.5.9 Bemerkung. Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, und ist $f : (a, b) \cup (b, c) \to Y$ eine Funktion, so gilt

$$y = \lim_{t\to b} f(t) \quad\Leftrightarrow\quad y = \lim_{t\to b-} f(t) \;\text{ und }\; y = \lim_{t\to b+} f(t)\,. \tag{5.25}$$

Dass aus $y = \lim_{t\to b} f(t)$ sich die beiden anderen Grenzwerte ergeben, folgt sofort aus Bemerkung 5.5.5.
Gelten umgekehrt $y = \lim_{t\to b-} f(t)$ und $y = \lim_{t\to b+} f(t)$, so gibt es zu einem $\epsilon > 0$ gemäß Korollar 5.5.4 Zahlen $\delta_+, \delta_- > 0$, sodass aus $t \in (b, c)$, $|t-b| < \delta_+$ oder $t \in (a, b)$, $|t-b| < \delta_-$ immer $d_Y(f(t), y) < \epsilon$ folgt. Mit $\delta := \min(\delta_-, \delta_+)$ folgt aus $t \in (a, b) \cup (b, c)$, $|t - b| < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f(t), y) < \epsilon$; also $y = \lim_{t\to b} f(t)$.

5.5.10 Beispiel.

(*i*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$. Dann gilt $\lim_{t\to 0+} f(t) = 1$, da $f|_{(0,+\infty)} \equiv 1$, und $\lim_{t\to 0-} f(t) = -1$, da $f|_{(-\infty,0)} \equiv -1$; vgl. Beispiel 5.3.4, (*i*). Wegen (5.25) kann dann $\lim_{t\to 0} f(t)$ gar nicht existieren.

(*ii*) Sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiert als $f(t) = t^2\lfloor\frac{1}{t}\rfloor$. Dabei bezeichnet für reelles x der Ausdruck $\lfloor x\rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Diese wird als *Gaußklammer* bezeichnet.

Wegen $\lim_{t\to 0+} t = 0$ (vgl. (5.9) und Beispiel 5.5.7) und mit Fakta 5.3.8, 2, folgt aus $0 \leq t^2\lfloor\frac{1}{t}\rfloor \leq t$ für $t > 0$, dass $\lim_{t\to 0+} f(t) = 0$.

5.5.11 Definition. Ist f eine auf $(a, +\infty)$ definierte Funktion mit Werten in einem metrischen Raum Y, und versieht man $(a, +\infty)$ mit der Relation $\leq$, so erhält man ebenfalls eine gerichtete Menge. Für den möglichen Grenzwert $\lim_{t\in(a,+\infty)} f(t)$ schreibt man auch $\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Entsprechend definiert man den Grenzwert für $t \to -\infty$.

Die hier zugrunde liegende gerichtete Menge ist derart, dass Netze darüber Teilfolgen besitzen, wobei $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine solche ist, wenn $t_n \to +\infty$ für $n \to \infty$. Also gilt Korollar 5.5.4, (*iii*), auch wenn $z = +\infty$. Entsprechendes gilt für $-\infty$.

5.5.12 Bemerkung. Sei $f : (a, b) \to Y$ eine Funktion, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $a < b$. Um $\lim_{t\to b-} f(t)$ – im Sinne von Definition 5.5.11 im Fall $b = +\infty$ und im Sinne Definition 5.5.2 im Falle $b \in \mathbb{R}$ – zu bestimmen, ist es manchmal zweckmäßig für eine gewisse bijektive, streng monotone Abbildung $\phi : (c, d) \to (a, b)$ mit $c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, c < d$, den Grenzwert

$$\lim_{s\to d-} f \circ \phi(s) \ \text{ für monoton wachsendes } \ \phi$$

bzw.

$$\lim_{s\to c+} f \circ \phi(s) \ \text{ für monoton fallendes } \ \phi$$

zu eruieren. Dieser Grenzwert stimmt dann mit dem ursprünglich gesuchten $\lim_{t\to b-} f(t)$ überein.

In der Tat kann man für monoton wachsendes ϕ das Netz $(f(t))_{t\in(a,b)}$ als das Teilnetz $\left(f \circ \phi(\phi^{-1}(t))\right)_{t\in(a,b)}$ des Netzes $\left(f \circ \phi(s)\right)_{s\in(c,d)}$ betrachten, da zu $s_0 \in (c, d)$ das Element $t_0 := \phi(s_0)$ ja derart ist, dass wegen der Monotonie von ϕ^{-1} aus $t \succeq t_0$ – hier bedeutet das $t \geq t_0$ – immer $\phi^{-1}(t) \geq \phi^{-1}(t_0) = s_0$, daher $\phi^{-1}(t) \succeq s_0$, folgt. Entsprechend argumentiert man für monoton fallendes ϕ.

Ähnlich kann man vorgehen, wenn $\lim_{t\to a+} f(t)$ zu bestimmen ist.

5.5.13 Beispiel. Betrachte $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiert als $g(t) = \frac{1}{t^2}[t]$. Um $\lim_{t\to+\infty} g(t)$ zu berechnen, betrachte die monoton fallende Bijektion $\phi(s) = \frac{1}{s}$ von $(0, +\infty)$ auf sich selbst. Aus Beispiel 5.5.10 ist bekannt, dass

$$\lim_{s\to 0+} g \circ \phi(s) = \lim_{s\to 0+} s^2 \left[\frac{1}{s}\right] = 0\,.$$

Gemäß Bemerkung 5.5.12 gilt dann auch $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

Schließlich wollen wir auch noch definieren, was $\lim_{z\to\infty} f(z) = y$ bedeutet. Hier ist $f : D \to Y$ mit einem nicht beschränkten $D \subseteq \mathbb{C}$ und einem metrischen Raum Y. Dazu versehen wir D mit der Richtung $z \preceq w \Leftrightarrow |z| \leq |w|$, und setzen

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \ := \ \lim_{z\in D} f(z)\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Manchmal schreibt man dafür auch $\lim_{|z|\to+\infty} f(z)$.

Die gerichtete Menge $(D, \preceq)$ ist ebenfalls derart, dass Netze darüber Teilfolgen besitzt, wobei $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine solche ist, wenn $|z_n| \to +\infty$ für $n \to \infty$. Somit gilt $\lim_{z\to\infty} f(z) = y$ genau dann, wenn $f(z_n) \to y$ für alle komplexen Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|z_n| \to +\infty$.

5.5.14 Beispiel. Man sieht leicht ein, dass $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$. Mit den Rechenregeln für Netze aus Fakta 5.3.8 folgt $(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$

$$\lim_{z\to\infty} a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n} = a_n\,.$$

Für $a_n \neq 0$ folgt daraus (siehe Bemerkung 5.3.9)

$$\lim_{z\to\infty} |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| = \lim_{z\to\infty} |z^n| \cdot |a_n + a_{n-1}z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n}| = +\infty\,.$$

5.6 Übungsaufgaben

5.1 Sei X eine nichtleere Menge und seien d und $\tilde{d}$ zwei Metriken auf X. d und $\tilde{d}$ heißen *äquivalent*, wenn es $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ gibt, sodass

$$ad(x,y) \leq \tilde{d}(x,y) \leq bd(x,y), \quad \text{für alle} \quad x,y \in X\,.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{U}_{a\epsilon}(x) \subseteq U_\epsilon(x)$ und $U_\epsilon(x) \subseteq \tilde{U}_{b\epsilon}(x)$, wobei $U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \epsilon\}$ und $\tilde{U}_\epsilon(x) = \{y \in X : \tilde{d}(x,y) < \epsilon\}$.

Zeigen Sie weiters:

$x_n \to x$ bzgl. d genau dann, wenn $x_n \to x$ bzgl. $\tilde{d}$.

(x_n) ist Cauchy-Folge bzgl. d genau dann, wenn (x_n) Cauchy-Folge bzgl. $\tilde{d}$ ist.

Die Menge der Häufungspunkte von E sowie $c(E)$ bzgl. d und $\tilde{d}$ stimmen überein.

Ein $E \subseteq X$ ist E offen, abgeschlossen bzw. kompakt bezüglich d genau dann, wenn E offen, abgeschlossen bzw. kompakt bezüglich $\tilde{d}$ ist.

Anmerkung: Wegen (3.10) sind d_1, d_2, d_∞ äquivalent auf $\mathbb{R}^p$.

5.2 Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte sowie den Abschluss von $U_1(0)$ und von $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap U_1(0)$ in dem metrischen Raum $\langle \mathbb{C}, d_2 \rangle$, wobei $U_1(0)$ die offene Einheitskugel bezüglich d_2 ist.

5.3 Ist $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ offen und/oder abgeschlossen? Man beantworte dieselbe Frage auch für die Teilmenge $(2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}^3$ (versehen mit d_2).

5.4 Man zeige, dass ein reelles Intervall in $\mathbb{R}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn es von der Form $[a,b]$, $[a,+\infty)$ oder $(-\infty,a]$ für $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$ ist. Weiters zeige man die entsprechende Aussage für offene Intervalle.

5.5 Zeigen Sie, dass in dem metrischen Raum $\langle \mathbb{R}^p, d_2 \rangle$ für jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^p$ das orthogonale Komplement $M^\perp := \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) = 0,\ y \in M\}$ abgeschlossen ist, wobei $(x,y) = \sum_{j=1}^p x_j y_j$.

Zeigen Sie damit auch, dass $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist.

5.6 Man zeige, dass die Kugeloberfläche der Kugel S mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $(0,0,\frac{1}{2})$ im $\mathbb{R}^3$ kompakt ist.

5.7 Sei $\langle X, d \rangle$ ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $F \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn der metrische Raum $\langle F, d \rangle$ (hier ist d die Einschränkung der Metrik d von $X \times X$ auf die Teilmenge $F \times F$) vollständig ist.

5.8 Man zeige anhand eines Beispieles in $\mathbb{R}$, dass der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Teilmengen nicht mehr offen sein muss.

Weiters gebe man ein Beispiel einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die nur aus isolierten Punkten besteht, aber nicht abgeschlossen ist!

5.9 Sei M eine nichtleere Menge versehen mit der diskreten Metrik d. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge K genau dann kompakt bzgl. d ist, wenn K endlich ist.

5.10 Sind folgende Mengen M offen, abgeschlossen, beschränkt? Warum?

(*i*) $M = \mathbb{N}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

(*ii*) $M = \{x + y : x, y \in [0, 1]\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

(*iii*) $M = \{x + y : x \in [0, 1],\ y \in (0, 1)\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

(*iv*) $M = \{x + iy : x \in [0, 1],\ y \in [-1, 1]\}$, als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

5.11 Sind folgende Mengen M offen, abgeschlossen, beschränkt? Warum?

(*i*) $M = \{z : -\operatorname{Re}(z) + 1 \in (-1, 3)\}$, als Teilmenge von $\mathbb{C}$,

(*ii*) $M = \{x : x^2 - 3x + 2 > 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

(*iii*) $M = \{z : z^2 - z - 2 \neq 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{C}$,

(*iv*) $M = \{x : x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

5.12 Sind folgende Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt? Warum?

(*i*) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) \times (-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$

(*ii*) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, n + \frac{1}{2}]$ in $(\mathbb{R}, d_2)$

(*iii*) $\{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}]$ in $(\mathbb{R}, d_2)$

(*iv*) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2})\}$ in $(\mathbb{R}^2, d_2)$

5.13 Sind folgende Mengen M offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt? Warum?

(*i*) $M = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \in [0, 9]\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$,

(*ii*) $M = \{x : 3x^2 - 5x + 2 > 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

(*iii*) $M = \{z : z^2 - 2z + 2 \neq 0\}$, als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

5.14 Man bestimme die Häufungspunkte, die Menge der isolierten Punkte, sowie den Abschluss der Menge

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right)$$

als Teilmenge von $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik.

5.15 Man bestimme die Häufungspunkte, die Menge der isolierten Punkte, sowie den Abschluss der Menge

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2})$$

als Teilmenge von $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik.

5.16 Man bestimme die Menge aller Häufungspunkte der Folge

$$(n + i + (-1)^n(n - i^n))_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}$ versehen mit der euklidischen Metrik. Weiters bestimme man die Häufungspunkte der Menge

$$\{n + i + (-1)^n(n - i^n) : n \in \mathbb{N}\}$$

als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

5.17 Man bestimme die Menge aller Häufungspunkte der Folge

$$((-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(1 - \frac{1}{n}) - (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}(1 - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}$.

5.18 Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie Limes Superior und Limes Inferior der Folge

$$\left((-1)^{n+1}(\tfrac{1}{n^2} - 2) + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(2 - \tfrac{1}{n^2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}$.

5.19 Man zeige: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a < 0$, dann gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n b_n = a \limsup_{n\to\infty} b_n$.

Hinweis: Arbeiten Sie mit der Charakterisierung von $\liminf$ als kleinster und $\limsup$ als größter Häufungspunkt!

5.20 Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Sind $A, B \subseteq X$ nichtleer, so ist der Abstand von A und B definiert durch $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Für $x \in X$, $\emptyset \neq A \subseteq X$ setzt man $d(x, A) := d(\{x\}, A)$.

Man zeige $x \in c(A) \Leftrightarrow d(x, A) = 0$ sowie die Ungleichungen $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ und $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ für $x, y \in X$.

5.21 Seien $K, A \subseteq \mathbb{R}^p$ nichtleere Teilmengen, wobei K kompakt und A abgeschlossen ist. Dabei ist $\mathbb{R}^p$ mit der Metrik $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$ versehen. Man zeige, dass es $x \in K, y \in A$ gibt mit $d(x, y) = d(A, K)$. Weiters zeige man, dass $A \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow d(A, K) = 0$

Hinweis: Ist $x_n \in K$, $y_n \in A$, sodass $\lim d(x_n, y_n) = d(A, K)$, so zeige man zuerst, dass dann $d(0, y_n) \leq C$ für alle n und ein geeignetes $C > 0$. Also $y_n \in K_{\mathbb{R}^p}(0) \cap A$. Nun verwende man die Kompaktheit von K bzw. $K_{\mathbb{R}^p}(0) \cap A$ (warum?), um geeignete $x \in K$ und $y \in A$ zu finden.

5.22 Man finde in $\langle \mathbb{R}^2, d\rangle$ zwei abgeschlossene Teilmengen A, B mit $d(A, B) = 0$, wobei $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$.

5.23 Sind I und J gerichtete Mengen versehen mit Relationen $\preceq_I$ bzw. $\preceq_J$, so zeige man dass $(I \times J, \preceq)$ ebenfalls eine gerichtete Menge ist, wenn man

$$(i_1, j_1) \preceq (i_2, j_2) \;:\Leftrightarrow\; i_1 \preceq_I i_2 \wedge j_1 \preceq_J j_2$$

definiert; vgl. Beispiel 5.3.2.

5.24 Zeigen Sie: Hat eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ mindestens ein maximales Element, also es gibt ein $j \in I$ mit $j \succeq i$ für alle $i \in I$, so konvergiert ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn $x_j = x_k$ für alle maximalen $j, k \in I$, und zwar gegen x_j, wobei $j \in I$ ein solches maximales Element ist.

Führen sie auch aus, warum I mindestens ein maximales Element hat, wenn I endlich ist.

5.25 Weisen Sie nach, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $\lim_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_m, x_n) = 0$, wobei $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie in (5.3) gerichtet ist; vgl. Beispiel 5.3.4.

5.26 Weisen Sie alle in (5.9) erwähnten und noch nicht verifizierten Rechenregeln für konvergente Netze nach.

5.27 Seien $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ zwei reellwertige Netze über derselben gerichteten Menge $(I, \preceq)$. Gilt $y_i \geq K$ für alle $i \succeq k$ mit festen $K \in \mathbb{R}$, $k \in I$, so folgere man daraus $\lim_{i\in I} x_i = +\infty$ auch $\lim_{i\in I}(x_i + y_i) = +\infty$.

5.28 Man berechne $\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}$ und $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^{\lfloor x\rfloor}$, wobei $\lim_{x\to+\infty}$ für den Grenzwert des jeweiligen Netzes über die gerichtete Menge $I = (c, +\infty)$ mit $s \preceq t \Leftrightarrow s \leq t$ und einem hinreichend großen $c \in \mathbb{R}$ steht.

Hinweis $(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor})^{\lfloor x\rfloor} \geq (1 + \frac{1}{x})^{\lfloor x\rfloor} \geq (1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor+1})^{\lfloor x\rfloor}$.

5.29 Zeigen Sie, dass ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ genau dann ein Cauchy-Netz ist, wenn $\lim_{(i,j)\in I\times I} d(x_i, x_j) = 0$, wobei $I \times I$ wie in (5.4) zu einer gerichteten Menge gemacht wird.

5.30 Zeigen Sie, dass für unbedingt konvergente Reihen folgende Rechenregeln gelten ($\lambda, \mu, a_j, b_j \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $j \in M$):

$$\sum_{j\in M}(\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda\left(\sum_{j\in M} a_j\right) + \mu\left(\sum_{j\in M} b_j\right)$$

in dem Sinn, dass die linke Seite unbedingt konvergiert, wenn die Summen rechts es tun; vgl. Fakta 5.4.3.

5.31 Zeigen Sie, dass die Ausdrücke

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}_{\geq 2}\times\mathbb{N}_{\geq 2}} \frac{1}{j^k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^n}\Big)$$

unbedingt konvergieren und berechnen Sie den jeweiligen Grenzwert. Ist die erste Summe auch unbedingt konvergent, wenn man über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ summiert?

5.32 Betrachten Sie nichtleere Mengen $M, M_1, M_2 \neq \emptyset$ mit $M = M_1 \dot\cup M_2$. Zeigen Sie, dass $\sum_{j\in M} a_j$ genau dann unbedingt konvergiert, wenn $\sum_{j\in M_1} a_j$ und $\sum_{j\in M_2} a_j$ beide unbedingt konvergieren. Zeigen Sie auch, dass dann $\sum_{i\in\{1,2\}} \sum_{j\in M_i} a_j = \sum_{j\in M} a_j$.

Anmerkung: Das Ergebnis widerspricht nicht der Tatsache, dass sich Proposition 5.4.8 nicht umkehren lässt, da hier die Menge $I = \{1, 2\}$ als endliche Menge von spezieller Gestalt ist.

5.33 Man zeige mit Hilfe der Resultate über die Multiplikation von absolut konvergenten Reihen, dass für $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)z^n = (1 - z)^{-2}\,.$$

5.34 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\binom{\alpha}{0} = 1$, und für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - k + 1)}{k!}\,.$$

Man zeige, dass die Reihe ($|z| < 1$)

$$B(z, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

konvergiert. Wie ist das Konvergenzverhalten, wenn $|z| > 1$?

Hinweis: Unterscheiden Sie $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, und betrachten Sie für die letzte Frage jeweils die Folge der Summanden. Ist diese eine Nullfolge?

5.35 Man verwende

$$\binom{\alpha+\beta}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j}, \tag{5.26}$$

um zu zeigen, dass die obige Reihe ($|z| < 1$) der Gleichung

$$B(z, \alpha)\, B(z, \beta) = B(z, \alpha + \beta)$$

genügt.

Anmerkung: Um (5.26) nachzuweisen, zeigt man diese Gleichung zunächst für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, \alpha + \beta$.

Dazu betrachte man das Polynom $\sum_{k=0}^{\alpha+\beta} b_k x^k = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta - (1+x)^{\alpha+\beta}$, welches klarerweise identisch gleich Null für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Somit müssen auch alle Koeffizienten b_k verschwinden.

Multipliziert man dieses Polynom mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes aus, so erhält man

$$0 = b_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j} - \binom{\alpha+\beta}{k}.$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, \alpha + \beta\}$ sind beide Seiten von (5.26) Null.

Nun sei

$$F(\alpha, \beta) = \binom{\alpha+\beta}{k} - \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j}.$$

Man halte $\alpha \in \mathbb{N}$ fest, und betrachte das Polynom $F(\alpha, x)$, welches einen Grad kleiner oder gleich k hat. Weiters wissen wir, dass dieses Polynom Nullstellen bei $x = 1, 2, 3, \ldots$ hat, denn für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ haben wir (5.26) schon gezeigt. Nun kann ein Polynom, das nicht das Nullpolynom ist, höchstens Grad viele Nullstellen haben. Also ist $F(\alpha, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun halte man $\beta \in \mathbb{R}$ fest, und schließe wie eben von $F(x, \beta) = 0$ für $x = 1, 2, 3, \ldots$ auf $F(x, \beta) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also gilt (5.26).

5.36 Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, dass $B(z, \alpha) = (1 + z)^\alpha$, zuerst für $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und dann auch für $\alpha \in -\mathbb{N}$.

Für $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ zeige man $B(x, \alpha) = (1 + x)^\alpha$ auch für $\alpha = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}$, und schließlich für $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Anmerkung: Dies Resultat legt nahe Ausdrücke wie w^α für $w \in U_1^{\mathbb{C}}(1)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ durch $B(w - 1, \alpha)$ zu definieren.

5.37 Sei $f(r) = a^r$, wobei $a > 0$ eine feste reelle Zahl ist. Man zeige, dass $\lim_{r\to 0} f(r) = 1$.

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $a \geq 1$. Zeigen Sie, dass es zu $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|a^{\frac{\pm 1}{n}} - 1| < \epsilon$. Verwenden Sie dann die Monotonie von $r \mapsto a^r$.

5.38 Man bestimme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ und $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|+x^2}$. Weiters zeige man $\lim_{x\to\xi} \frac{x^k - \xi^k}{x-\xi} = k\xi^{k-1}$ für feste $\xi \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

5.39 Berechnen Sie

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

für reelle Polynome $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0,\ q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$.

5.40 Seien $f : (0, +\infty) \to Y$ und $g : (0, 1) \to Y$ mit einem metrischen Raum $\langle Y, d\rangle$. Es gelte $\lim_{t\to+\infty} f(t) = y_1$ und $\lim_{t\to 0+} g(t) = y_2$. Mann zeige, dass dann $\lim_{t\to+\infty} f(t^4) = y_1$ und $\lim_{t\to 0+} g(t^2) = y_2$.