Kapitel 4

Die Konstruktion der reellen Zahlen

Wir wollen in diesem Kapitel die am Anfang verschobene Konstruktion der reellen Zahlen nachholen und zeigen, dass diese eindeutig dadurch charakterisiert sind, dass $\mathbb{R}$ ein vollständig angeordneter Körper ist.

4.1 Existenz

4.1.1 Bemerkung. Hat man die reellen Zahlen als vollständig angeordneten Körper zur Verfügung – was ja noch nicht der Fall ist, so wissen wir aus Beispiel 3.3.4, dass sich jedes $x \in \mathbb{R}$ als Grenzwert einer Folge bestehend aus rationalen Zahlen darstellen lässt. Diese Folgen sind gemäß Proposition 3.5.4 auch Cauchy-Folgen.
Da $\mathbb{R}$ ein vollständig metrischer Raum ist, konvergiert andererseits jede Cauchy-Folge bestehend aus rationalen Zahlen gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Dabei konvergieren offenbar zwei solche Folgen genau dann gegen dieselbe reelle Zahl, wenn die Differenzenfolge eine Nullfolge ist.

Die Überlegung in Bemerkung 4.1.1 legt es nahe, einen vollständig angeordneten Körper als Menge von rationalen Cauchy-Folgen zu konstruieren, wobei zwei solche Folgen identifiziert werden, wenn ihre Differenzenfolge eine Nullfolge ist.
Ein Problem dabei ist, dass wir die Begriffe Cauchy-Folge bzw. konvergente Folge in Definition 3.5.1 bzw. Definition 3.2.2 mit Hilfe der reellen Zahlen definiert haben, da in (3.9) bzw. (3.3) die $\epsilon > 0$ aus den reellen Zahlen sind. Wie wir in Bemerkung 3.5.2 gesehen haben, können wir diese $\epsilon > 0$ auch aus $\mathbb{Q}$ wählen, und erhalten denselben Begriff von Cauchy-Folge bzw. von konvergenter Folge.
Eine weitere Obstruktion ist die Tatsache, dass wir Konvergenztheorie immer von Folgen in metrischen Räumen betrieben haben. Die Metrik hat definitionsgemäß aber Werte in $\mathbb{R}$. Diesem Problem können wir dadurch begegnen, dass wir den Begriff des metrischen Raumes $\langle X, d\rangle$ leicht dadurch verändern, dass wir annehmen, dass d nur Werte in $\mathbb{Q}$ hat; siehe Definition 3.1.1 und Bemerkung 3.1.2. Ein solcher metrischer Raum ist klarerweise $\langle \mathbb{Q}, d\rangle$, wobei $d(x, y) = |x - y|$.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem solchen metrischen Raum X heißt dann konvergent gegen $x \in X$, wenn

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \ d(x_n, x) < \epsilon \ \text{ für alle } \ n \geq N\,,$$

und sie heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \ d(x_n, x_m) < \epsilon \ \text{ für alle } \ m, n \geq N\,.$$

Fasst man eine $\mathbb{Q}$-wertige Metrik wieder als $\mathbb{R}$-wertig auf, so wissen wir aus Bemerkung 3.5.2, dass diese Konvergenzbegriffe mit den schon bekannten übereinstimmen.
Die Konstruktion eines vollständig angeordneten Körpers erfolgt nun in einigen Schritten.

Schritt 1: Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller rationalen Cauchy-Folgen, und sei $\sim \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ die Relation

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \ :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0\,.$$

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Dabei ist Reflexivität und Symmetrie klar. Um die Transitivität nachzuweisen, seien $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Es ist $\lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = \lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0$, und somit gilt für die Summe dieser Folgen $\lim_{n\to\infty}(r_n - t_n) = 0$. Also ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es sei bemerkt, dass wir die verwendeten Regeln für Folgen in $\mathbb{Q}$-wertigen metrischen Räumen nicht hergeleitet haben, obwohl wir sie hier und im Folgenden des öfteren verwenden. Das zu tun ist aber nur eine Abschreibübung für die Ergebnisse aus Proposition 3.5.3, Lemma 3.3.1 und Satz 3.3.5, indem wir immer dann, wenn von $\mathbb{R}$ die Rede ist, diese durch $\mathbb{Q}$ ersetzen.

Schritt 2: Unser Ziel soll sein, $\mathcal{X}/_\sim$ zu einem vollständig angeordneten Körper zu machen. Dazu brauchen wir Operationen, die wir zunächst auf $\mathcal{X}$ definieren:

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (s_n)_{n\in\mathbb{N}} := (r_n + s_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

$$-(r_n)_{n\in\mathbb{N}} := (-r_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s_n)_{n\in\mathbb{N}} := (r_n \cdot s_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Mit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind auch $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $-(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen. Um das etwa für die Multiplikation zu zeigen, sei $C \in \mathbb{Q}, C > 0$, sodass $|r_n|, |s_n| \leq C,\ n \in \mathbb{N}$ (siehe Proposition 3.5.3), und rechne

$$|r_n s_n - r_m s_m| \leq |r_n s_n - r_n s_m| + |r_n s_m - r_m s_m| \leq C|s_n - s_m| + C|r_n - r_m|\,.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als ein vorgegebenes rationales $\epsilon > 0$, wenn man N so groß wählt, dass $|s_n - s_m|, |r_n - r_m| < \frac{\epsilon}{2C}$ für $m, n \geq N$.

Schritt 3: Da die Verknüpfungen + und $\cdot$ gliedweise definiert sind, folgt aus den Rechenregeln auf $\mathbb{Q}$, dass für + und $\cdot$ das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz gelten. Klarerweise gilt auch

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (0)_{n\in\mathbb{N}} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ -(r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (r_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (1)_{n\in\mathbb{N}} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \,.$$

Wir können aber $\mathcal{X}$ nicht zu einem Körper machen, denn zu $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (0)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir im Allgemeinen kein multiplikativ Inverses finden.

Schritt 4: Die Äquivalenzrelation $\sim$ lässt sich nun mit Hilfe obiger Verknüpfungen charakterisieren:

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow (r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (-(s_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ ist Nullfolge}\,,$$

und

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge } \Leftrightarrow (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}} \,.$$

Daraus schließen wir, dass oben eingeführte Operationen mit $\sim$ verträglich sind: Aus $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (r'_n)_{n\in\mathbb{N}} + (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $-(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim -(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Letztere Relation etwa erhält man aus

$$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s_n)_{n\in\mathbb{N}} + (-(r'_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \big(r_n(s_n - s'_n) + s'_n(r_n - r'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}} \,,$$

da mit $(s_n - s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(r_n - r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $\big(r_n(s_n - s'_n) + s'_n(r_n - r'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen sind.

Schritt 5: Setzt man[1]

$$\mathcal{P} = \{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X} : \exists \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0, r_n \geq \delta \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}\,,$$

und $-\mathcal{P} = \{(-r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X} : (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}\}$, so gehört jede Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ zu genau einer der drei Teilmengen $\mathcal{P}$, $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$, $-\mathcal{P}$. Ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so gehört $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zur selben Teilmenge.

Beweis. Da nicht gleichzeitig $-r_n \geq \delta$ und $r_n \geq \delta$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ sein kann, folgt $-\mathcal{P} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Aus $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (0)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $r_n \to 0$. Also unterschreitet $|r_n|$ jedes vorgegebene $\delta > 0$, wenn nur n hinreichend groß ist. $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann damit weder in $\mathcal{P}$ noch in $-\mathcal{P}$ liegen.

Seien $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ äquivalent, aber beide nicht äquivalent zu $(0)_{n\in\mathbb{N}}$. Also sind beide keine Nullfolgen. Für $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bedeutet das

$$\exists \delta \in \mathbb{Q},\ \delta > 0 :\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists : m(N) \geq N :\ |r_{m(N)}| \geq \delta \,. \tag{4.1}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, sodass $|r_n - r_m| < \frac{\delta}{4}, |\rho_n - r_n| < \frac{\delta}{4},\ m, n \geq N$. Aus der Dreiecksungleichung folgt unmittelbar $|\rho_n - r_m| < \frac{\delta}{2}$ und weiter

$$|r_n| \geq |r_m| - |r_n - r_m| > |r_m| - \frac{\delta}{4},\ \ |\rho_n| \geq |r_m| - |\rho_n - r_m| > |r_m| - \frac{\delta}{2} \,. \tag{4.2}$$

[1] Fast alle bedeutet hier „alle bis auf endlich viele“.

Wählt man hier $m = m(N)$ wie in (4.1), so folgt wegen $|r_m| \geq \delta$ aus $|r_n - r_m| < \frac{\delta}{4}$ und $|\rho_n - r_m| < \frac{\delta}{2}$, dass

$$\operatorname{sgn}(r_n) = \operatorname{sgn}(r_m) = \operatorname{sgn}(\rho_n)\,.$$

Aus (4.2) folgt $|r_n|, |\rho_n| \geq \frac{\delta}{2}$. Also liegen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemeinsam in $\mathcal{P}$ bzw. $-\mathcal{P}$ je nach dem Vorzeichen von r_m. ❑

Schritt 6: Man sieht auch ganz leicht, dass aus $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ folgt, dass $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (s_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$.

Schritt 7: Nun betrachten wir $\mathcal{X}/_\sim$ und definieren

$$[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim + [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim := [(r_n)_{n\in\mathbb{N}} + (s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim\,,$$

$$[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \cdot [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim := [(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim\,,$$

$$-[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = [-(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim\,,$$

$$\mathcal{P}/_\sim = \{[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim : (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}\}\,.$$

Wegen Schritt 4 sind die Verknüpfungen wohldefiniert, und wegen Schritt 5 sind $\mathcal{P}/_\sim$, $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$, $-\mathcal{P}/_\sim$ paarweise disjunkte Mengen, deren Vereinigung $\mathcal{X}/_\sim$ ist.

Nun übertragen sich das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz für $+$ und $\cdot$. Die Restklasse $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ ist das additiv neutrale Element, und $[(1)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ ist das multiplikativ neutrale Element. Weiters ist $-[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ das additiv Inverse von $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$.

Was $\mathcal{X}/_\sim$ noch fehlt, ein Körper zu sein, ist die Existenz einer multiplikativ Inversen. Dazu sei $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$.

Wegen Schritt 5 gilt $|r_n| \geq \delta$ für ein rationales $\delta > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Also erhalten wir für $m, n \geq N$

$$\left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_m}\right| \leq \frac{|r_n - r_m|}{\delta^2}\,,$$

und sehen, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $q_n = \frac{1}{r_n}$ für $n \geq N$, und $q_n = 0$ für $n < N$, eine Cauchy-Folge ist. Zudem gilt $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \cdot [(q_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$.

Schließlich ist $\langle \mathcal{X}/_\sim, +, \cdot, \mathcal{P}/_\sim \rangle$ wegen Schritt 6 sogar ein angeordneter Körper. Wir bemerken noch, dass wegen Schritt 5 für die Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{X}/_\sim$ gilt, dass

$$[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim < [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \Leftrightarrow r_n + \delta \leq s_n,\ n \geq N\,,$$

für ein $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt aus $r_n \leq s_n,\ n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, dass $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \leq [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$.

Schritt 8: Die Abbildung $r \mapsto [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ von $\mathbb{Q}$ nach $\mathcal{X}/_\sim$ ist offenbar nicht identisch gleich $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ und mit der Addition und Multiplikation verträglich. Somit ist dies die eindeutige Abbildung $\phi : \mathbb{Q} \to \mathcal{X}/_\sim$ aus Proposition 2.7.8, die für jeden angeordneten Körper existiert. Wegen Proposition 2.7.8 ist diese Abbildung auch injektiv und mit $-$, $<$ und $\leq$ verträglich.

Schritt 9: $\langle \mathcal{X}/\!\sim, +, \cdot, \mathcal{P}/\!\sim\rangle$ ist ein archimedisch angeordneter Körper, denn für jedes $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathcal{X}/\!\sim$, ist $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und daher beschränkt. Da $\mathbb{Q}$ archimedisch angeordnet ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $r_n \le N,\ n \in \mathbb{N}$. Das bedingt aber $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \le [(N)]_\sim < [(N+1)]_\sim$, womit $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ keine obere Schranke von $\{[(k)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim : k \in \mathbb{N}\}$ sein kann.

Schritt 10: Nun wollen wir zeigen, dass unser Körper vollständig angeordnet ist. Dazu sei $A \subseteq \mathcal{X}/\!\sim$ eine nach oben beschränkte, nicht leere Menge. Wegen dem vorherigen Punkt gilt somit $A \le [(N_+)]_\sim$ für ein festes $N_+ \in \mathbb{N}$. Wegen $A \neq \emptyset$ existiert ebenfalls nach dem vorherigen Punkt auch ein $N_- \in \mathbb{Z}$, sodass $[(N_-)]_\sim$ keine obere Schranke von A ist.

Für $j \in \mathbb{N}$ sei $\frac{1}{j!}\mathbb{Z}$ die Menge aller rationalen Zahlen der Form $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q = j!$. Weiters sei

$$D_j = \{r \in \frac{1}{j!}\mathbb{Z} : A \le [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim\},$$

womit

$$\frac{1}{j!}\mathbb{Z} \setminus D_j = \{r \in \frac{1}{j!}\mathbb{Z} : \exists a \in A,\ [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim < a\}.$$

Aus $\frac{1}{j!}\mathbb{Z} \subseteq \frac{1}{(j+1)!}\mathbb{Z}$ folgt

$$D_j \subseteq D_{j+1} \ \text{ und } \ \frac{1}{j!}\mathbb{Z} \setminus D_j \subseteq \frac{1}{(j+1)!}\mathbb{Z} \setminus D_{j+1}. \tag{4.3}$$

Man erkennt sofort, dass $N_+ \in D_j$ und $N_- \in \frac{1}{j!}\mathbb{Z} \setminus D_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $D_j \neq \emptyset$ und $N_- < r$ für alle $r \in D_j$, weil aus $N_- \ge r$ für ein $r \in D_j$ auch $N_- \in D_j$ folgen würde. Somit ist $(j!)(D_j - N_-) + 1$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ und hat somit ein Minimum. Also existiert auch das Minimum x_j von D_j.

Die Zahl $y_j := x_j - \frac{1}{j!}$ liegt dann aber in $\frac{1}{j!}\mathbb{Z} \setminus D_j$ und ist sogar das Maximum von $\frac{1}{j!}\mathbb{Z} \setminus D_j$, da sich aus $r \in \frac{1}{j!}\mathbb{Z}$ mit $r > y_j$ offenbar $r \ge x_j$ und damit $r \in D_j$ ergibt. Aus (4.3) erhalten wir dann

$$y_j \le y_{j+1} = x_{j+1} - \frac{1}{(j+1)!} < x_{j+1} \le x_j,$$

woraus

$$0 \le x_m - x_n < x_m - y_n \le x_m - y_m = \frac{1}{m!}$$

und

$$0 \le y_n - y_m < x_n - y_m \le x_m - y_m = \frac{1}{m!}$$

für alle $m < n$ folgt. Also gilt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und somit $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim =: s$.

Dabei gilt $A \le s$, denn anderenfalls gäbe es ein $a \in A$ mit $s < a$ und gemäß Satz 2.8.3 weiter ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $s < [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim < a$. Für $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $r \in \frac{1}{j_0!}\mathbb{Z}$ – ein solches gibt es offenbar – gilt $r \in \frac{1}{j!}\mathbb{Z} \setminus D_j$ und somit $r \leq y_j$ für alle $j \geq j_0$. Es folgt der Widerspruch $[(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \leq [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = s$.

Nun ist s sogar die kleinste obere Schranke von A, da aus $A \leq b < s$ wieder mit Satz 2.8.3 die Existenz eines $r \in \mathbb{Q}$ mit $A \leq b < [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim < s$ folgte. Für $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $r \in \frac{1}{j_0!}\mathbb{Z}$ gilt $r \in D_j$ und somit $x_j \leq r$ für alle $j \geq j_0$. Das ergibt aber den Widerspruch $s = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \leq [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$.

Also können wir uns nun sicher sein, dass es vollständig angeordnete Körper gibt.

4.2 Eindeutigkeit

4.2.1 Satz. *Ist $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein vollständig angeordneter Körper und $\langle \mathcal{X}/\sim, +, \cdot, \mathcal{P}/\sim\rangle$ der soeben konstruierte Körper, dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\omega : \mathcal{X}/\sim \;\to K$, die nicht identisch gleich 0_K und mit Addition und Multiplikation verträglich ist. Diese Abbildung ist dann auch bijektiv, mit $-$ und mit der Ordnung $<$ (und daher auch mit $\leq$) verträglich.*

Beweis. Nach Proposition 2.7.8 gibt es eine verknüpfungs- und ordnungstreue, injektive Abbildung $\phi : \mathbb{Q} \to K$. Wegen Bemerkung 3.5.2 sind die Bilder von Nullfolgen bzw. Cauchy-Folgen wieder Nullfolgen bzw. Cauchy-Folgen.
Ist $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathcal{X}/\sim$, so definieren wir

$$\omega([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) := \lim_{n\to\infty} \phi(r_n)\,.$$

Man beachte, dass der Grenzwert existiert, da K wegen Satz 3.5.8 ein vollständig angeordneter Körper ist, und dass der Grenzwert nicht von der Wahl des Repräsentanten $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Restklasse $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ abhängt. Ist nämlich $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \phi(r_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n) + \lim_{n\to\infty} \phi(r_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n)\,.$$

ω ist injektiv, da

$$\begin{aligned}[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(r_n - s_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \phi(r_n - s_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \phi(r_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n)\,.\end{aligned}$$

Die Surjektivität folgt aus der Tatsache, dass jede Zahl aus K durch eine Folge rationaler Zahlen approximiert werden kann; vgl. Beispiel 3.3.4. Die Verträglichkeit mit + folgt aus (siehe Satz 3.3.5)

$$\begin{aligned}\omega([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim + [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) &= \lim_{n\to\infty} \phi(r_n + s_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(r_n) + \lim_{n\to\infty} \phi(s_n) \\ &= \omega([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) + \omega([(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim)\,,\end{aligned}$$

und die für $-$ sowie $\cdot$ zeigt man genauso. Um die Verträglichkeit mit der Ordnung zu zeigen, sei bemerkt, dass wegen Lemma 3.3.1 und Satz 2.8.3

$$\omega([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) \in P \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \phi(r_n) > 0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0,\ \phi(r_n) \geq \delta \text{ für alle } n \geq N\,.$$

Da ϕ ordnungstreu ist, bedeutet das aber genau $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathcal{P}/_\sim$.
Sei $\psi : \mathcal{X}/_\sim \to K$ eine weitere, mit $+$ und $\cdot$ verträgliche Abbildung mit $\psi \not\equiv 0_K$. Aus $\psi(x) \cdot \psi([(1)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = \psi(x \cdot [(1)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = \psi(x)$ für ein $x \in \mathcal{X}/_\sim$ mit $\psi(x) \neq 0_K$ folgt $\psi([(1)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = 1_K$. Insbesondere ist die Abbildung $r \mapsto \psi([(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim)$ auf $\mathbb{Q}$ nicht identisch gleich 0_K und offenbar mit $+$ und $\cdot$ verträglich.
Die Eindeutigkeitsaussage in Proposition 2.7.8 impliziert $\psi([(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = \phi(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$, woraus wegen $\psi(a) + \psi(-a) = \psi([(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = 0_K$ und somit $\psi(-a) = -\psi(a)$ für jedes $a \in \mathcal{X}/_\sim$ auch die Verträglichkeit mit $-$ folgt. Für $a \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ gilt $\psi(a) \cdot \psi(a^{-1}) = \psi(a \cdot a^{-1}) = 1_K$, also $\psi(a) \neq 0_K$.
Für $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathcal{X}/_\sim$ folgt aus $[(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim > [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ wegen Satz 2.9.5

$$\exists [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \in \mathcal{X}/_\sim,\ [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim :\ [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim^2 = [(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim\,.$$

Weil $\psi([(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) \neq 0_K$ äquivalent zu $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ ist, folgt daraus $\psi([(r_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = \psi([(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim)^2 > 0_K$. Somit ist ψ mit $<$ und daher auch mit $\leq$ verträglich.
Wäre nun $\psi(x) < \omega(x)$ für ein $x \in \mathcal{X}/_\sim$, und sind $r, \rho \in \mathbb{Q}$ gemäß Satz 2.8.3 so gewählt, dass $\psi(x) < \phi(r) < \phi(\rho) < \omega(x)$, so erhielten wir

$$x < [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim \quad \text{und} \quad [(\rho)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim < x\,, \tag{4.4}$$

da aus $x \geq [(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ ($x \leq [(\rho)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$) wegen der Ordnungstreue von ψ (ω) die Beziehung $\psi(x) \geq \psi([(r)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = \phi(r)$ ($\omega(x) \leq \omega([(\rho)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim) = \phi(\rho)$) folgt. (4.4) impliziert $\rho < r$, wogegen $\phi(r) < \phi(\rho)$ die Ungleichung $r < \rho$ nach sich zieht.
Da man genauso aus $\psi(x) > \omega(x)$ einen Widerspruch erhält, muss $\psi = \omega$. ❑

Somit haben wir die Existenz und die Eindeutigkeit eines vollständig angeordneten Körpers und damit auch Satz 2.9.3 bewiesen.

4.2.2 Bemerkung. Die in diesem Abschnitt angegebene Vorgangsweise aus $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen zu konstruieren, lässt sich auch anwenden, um zu zeigen, dass es zu jedem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ einen vollständigen metrischen Raum $\langle \hat{X}, \hat{d}\rangle$ gibt, sodass $\langle X, d\rangle$ isometrisch und dicht in $\langle \hat{X}, \hat{d}\rangle$ enthalten ist.
In der Tat nimmt man auch hier die Menge $\mathcal{X}$ aller Cauchy-Folgen in $\langle X, d\rangle$, betrachtet genauso die Äquivalenzrelation $\sim$, die zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ identifiziert, falls $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, und beweist, dass $\mathcal{X}/_\sim$ versehen mit einer geeigneten Metrik der gesuchte metrische Raum ist.