Kapitel 12

Topologische Grundlagen

12.1 Topologische Grundbegriffe

Wir wollen in diesem und in den nächsten Abschnitten die Konvergenztheorie, wie wir sie für metrische Räume entwickelt haben, verallgemeinern. Dabei werden wir Räume betrachten, die gerade noch soviel Struktur tragen, dass wir von stetigen Funktionen, Grenzwerten, Kompaktheit etc. sprechen können.

12.1.1 Beispiel (Metrische Räume)**.** Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum; vgl. Definition 3.1.1. Weiters sei $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X. Dabei haben wir eine Teilmenge O von X gemäß Definition 5.1.4 offen genannt, wenn es zu jedem $x \in O$ ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass die ϵ-Kugel $U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$ ganz in O enthalten ist.
Wir haben in Beispiel 5.1.5 bzw. in Proposition 5.1.6 gesehen, dass $\emptyset, X \in \mathcal{O}$, dass für $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ auch $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$, und dass mit $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$ für eine beliebige Indexmenge I auch $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Wir nehmen diese aufgezählten Eigenschaften als Ausgangspunkt unserer angestrebten Verallgemeinerung.

12.1.2 Definition. Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. Erfülle $\mathcal{T}$ die Eigenschaften:

(01) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$.

(02) Aus $O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ folgt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$.

(03) Aus $O_i \in \mathcal{T}, i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge I folgt $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Dann heißt $\mathcal{T}$ eine *Topologie* auf X. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*, und man nennt $(X, \mathcal{T})$ einen *topologischen Raum*.

12.1.3 Bemerkung. Mittels Vollständiger Induktion sieht man sofort, dass ($O2$) äquivalent zu der Tatsache ist, dass aus $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ auch $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$ folgt.

12.1.4 Beispiel.

(i) Wir haben oben daran erinnert, dass die Menge $\mathcal{O}$ aller offenen Mengen eines metrischen Raumes $\langle X, d\rangle$ die Axiome (01)-(03) erfüllt. Damit ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Man sagt, $\mathcal{O}$ ist die *von der Metrik d induzierte Topologie*. Wir schreiben auch $\mathcal{T}(d)$ für $\mathcal{O}$.

(ii) Ist $Y = \mathbb{R}^p$ versehen mit der Metrik d_2, so heißt die von d_2 induzierte Topologie $\mathcal{T}(d_2)$ *Euklidische Topologie*. Die Metriken d_1 und d_∞ induzieren ebenfalls die Euklidische Topologie.

(iii) Das Mengensystem $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ erfüllt klarerweise (01)-(03), und ist somit eine Topologie auf X. Man spricht von der *diskreten Topologie*. Diese Topologie wird übrigens von der diskreten Metrik induziert; siehe Beispiel 3.1.5.

(iv) Sei $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$. Wieder sind (01)-(03) trivialerweise erfüllt. Man spricht von der *Klumpentopologie*.

(v) $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T}_< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ ist ebenfalls ein topologischer Raum, wie man sich leicht überzeugen kann.

Eines unserer Ziele wird es sein, Konvergenz gegen einen Punkt oder Stetigkeit bei einem Punkt für unsere Räume zu verallgemeinern. Dazu benötigen wir ein Analogon zum Begriff der ϵ-Kugel.

12.1.5 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von x, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$ gibt. $\mathfrak{U}(x)$ bezeichne die Menge aller Umgebungen von x, also den sogenannten *Umgebungsfilter von x*.

Der Begriff *Filter* ist ein allgemeines mengentheoretisches Konzept.

12.1.6 Definition. Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt ein Mengensystem $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein *Filter*, wenn

(F1) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(F2) $F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$,

(F3) $F_1 \in \mathfrak{F},\ F_1 \subseteq F_2 \subseteq M \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}$.

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so ist der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ tatsächlich ein Filter:

(F1): Es gilt $X \in \mathfrak{U}(x)$, und jede Menge $U \in \mathfrak{U}(x)$ enthält x und ist damit nicht leer.

(F2): Aus $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(x)$ folgt die Existenz von $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_1 \subseteq U_1$ und $x \in O_2 \subseteq U_2$, und somit $x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U_1 \cap U_2$, wobei wegen ($O2$) sicherlich $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$, und daher $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}(x)$.

(F3): Aus $U_1 \in \mathfrak{U}(x)$ und $U_1 \subseteq U_2 \subseteq X$ folgt die Inklusion $x \in O \subseteq U_1$ für ein gewisses $O \in \mathcal{T}$, und somit $x \in O \subseteq U_2$ bzw. $U_2 \in \mathfrak{U}(x)$.

Die passende Verallgemeinerung des Systems aller ϵ-Kugeln um einen festen Punkt in einem metrischen Raum für topologische Räume ist der Begriff der Filterbasis des Umgebungsfilters.

12.1.7 Definition. Sei M eine nichtleere Menge und $\mathfrak{F}$ ein Filter. Dann heißt ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ eine *Filterbasis* von $\mathfrak{F}$, wenn man zu jeder Menge $F \in \mathfrak{F}$ ein $B \in \mathfrak{B}$ findet, sodass $B \subseteq F$.

12.1.8 Definition. Man sagt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* (*ABI*), wenn für jedes $x \in X$ der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ eine Filterbasis bestehend aus abzählbar vielen Mengen hat.

12.1.9 Beispiel.

(*i*) Klarerweise ist ein Filter eine Filterbasis von sich selbst.

(*ii*) Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $x \in X$ ist $\{O \in \mathcal{T} : x \in O\}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$.

(*iii*) Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $\mathcal{T}(d)$ die von der Metrik erzeugte Topologie. Für $x \in X$ ist $\{U_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$:

$U_\epsilon(x)$ ist eine Umgebung, weil alle offene ϵ-Kugeln offen sind; vgl. Beispiel 5.1.5, (iii). Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ beliebig, so gibt es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}(d)$, sodass $x \in O \subseteq U$. Aus der Definition offener Mengen in metrischen Räumen folgt $U_\epsilon(x) \subseteq O \subseteq U$ für ein gewisses $\epsilon > 0$. Damit ist obiges Mengensystem eine Filterbasis.

Auf ähnliche Weise sieht man, dass $\{K_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ oder auch $\{U_{\epsilon_n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$, wenn $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $(0, +\infty)$ ist, eine Basis des Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ ist. Insbesondere erfüllt jeder metrische Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom.

12.1.10 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei für jeden Punkt $x \in X$ eine Filterbasis $\mathfrak{W}(x)$ von $\mathfrak{U}(x)$*[1] *gegeben. Eine Menge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, also $O \in \mathcal{T}$, wenn*

$$\forall x \in O \Rightarrow O \in \mathfrak{U}(x)\,, \tag{12.1}$$

bzw. genau dann, wenn

$$\forall x \in O\ \exists W \in \mathfrak{W}(x) : W \subseteq O\,. \tag{12.2}$$

Beweis. Für feste $x \in X$ und $O \subseteq X$ bedeutet die Tatsache $\exists W \in \mathfrak{W}(x) : W \subseteq O$ gemäß der Definition einer Filterbasis nicht anderes als $O \in \mathfrak{U}(x)$. Also sind (12.1) und (12.2) äquivalent.

[1] Es ist nicht ausgeschlossen, dass $\mathfrak{W}(x) = \mathfrak{U}(x)$.

Ist $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$, so folgt daraus $O \in \mathfrak{U}(x)$; vgl. Beispiel 12.1.9, (ii). Gilt umgekehrt $O \in \mathfrak{U}(x)$ für alle $x \in O$, so gibt es wegen der Definition von $\mathfrak{U}(x)$ zu jedem $x \in O$ eine offene, x enthaltende Teilmenge O_x von O, und daher

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in O} O_x \subseteq O\,.$$

Als Vereinigung der offenen Mengen O_x muss O nach $(O3)$ selber offen sein. ❑

Nun können wir den Grenzwert eines Netzes auch für topologische Räume definieren.

12.1.11 Definition. Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X, wobei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist. Man sagt, dass dieses Netz gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, in Zeichen $x_i \xrightarrow{i \in I} x$, falls

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x)\ \exists i_0 \in I:\ \forall i \succeq i_0 \Rightarrow x_i \in U\,,$$

also falls in jeder beliebigen Umgebung ab einem gewissen Index alle Glieder x_i des Netzes enthalten sind.

12.1.12 Fakta.

1. Offenbar konvergieren in jedem topologischen Raum konstante Netze $(x_i)_{i \in I}$, $x_i = x$ für alle $i \in I$, gegen x.

2. Ist $\mathfrak{W}(x)$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$, so ist die Konvergenzbedingung aus Definition 12.1.11 äquivalent zu

$$\forall W \in \mathfrak{W}(x)\ \exists i_0 \in I:\ \forall i \succeq i_0 \Rightarrow x_i \in W\,,$$

da einerseits wegen $\mathfrak{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ diese Bedingung sicherlich eine Konsequenz aus der in Definition 12.1.11 ist, und da andererseits aus $U \in \mathfrak{U}(x)$ die Existenz eines $W \in \mathfrak{W}(x)$ mit $W \subseteq U$ folgt, und dann mit der gegenwärtigen Bedingung, dass $x_i \in W \subseteq U$ für alle $i \succeq i_0$ mit einem gewissen $i_0 \in I$.

3. Ist $(x_{i(j)})_{j \in J}$ ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$, also $i : J \to I$, wobei auch $(J, \preceq_J)$ eine gerichtete Menge ist, mit

$$\forall i \in I\ \exists j_0 \in J:\ \forall j \succeq_J j_0 \Rightarrow i(j) \succeq i\,,$$

und konvergiert $(x_i)_{i \in I}$ gegen x, so konvergiert auch $(x_{i(j)})_{j \in J}$ gegen x. Um das zu sehen, sei $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $i_0 \in I$, sodass $i \succeq i_0 \Rightarrow x_i \in U$. Ist nun $j_0 \in J$, sodass $j \succeq_J j_0 \Rightarrow i(j) \succeq i_0$, so folgt auch $x_{i(j)} \in U$ für alle $j \succeq_J j_0$.

12.1.13 Bemerkung. Wir sehen nun aus Fakta 12.1.12, dass diese Definition der Konvergenz mit der in metrischen Räumen konform geht. In der Tat haben wir $x = \lim_{i \in I} x_i$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists i_0 \in I : \forall i \succeq i_0 \Rightarrow x_i \in U_\epsilon(x)\,.$$

Da $\{U_\epsilon(x) : \epsilon > 0\}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$ ist, stimmt diese Bedingung mit der aus Fakta 12.1.12, 2, überein.
Wir sehen insbesondere, dass die Konvergenz nicht von der konkreten Metrik, sondern nur von der von ihr erzeugten Topologie abhängt; vgl. Beispiel 12.3.11.

Wir haben in der Definition der Konvergenz absichtlich nicht die Schreibweise $x = \lim_{i\in I} x_i$ verwendet, denn es kann sein, dass x nicht der einzige Grenzwert ist.

12.1.14 Beispiel.

(*i*) Man betrachte eine Menge X mit mindestens zwei Elementen versehen mit der Klumpentopologie. Dann ist $\mathfrak{U}(x) = \{X\}$ für alle $x \in X$. Damit konvergiert aber jedes Netz gegen jeden Punkt $x \in X$.

(*ii*) Sei $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_< = \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$; vgl. Beispiel 12.1.4, (v). Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus $[-\infty, +\infty)$ konvergiert gegen ein $x \in [-\infty, +\infty)$ bzgl. $\mathcal{T}_<$ genau dann, wenn $x \geq \limsup_{i\in I} x_i$, wobei

$$\limsup_{i\in I} x_i = \inf_{k\in I} \sup_{I\ni i\geq k} x_i \quad (\in [-\infty, +\infty])\,.$$

Insbesondere sind mit x auch alle $t \geq x$ Grenzwerte von $(x_i)_{i\in I}$. Also sind auch auf diesem Raum Grenzwert nicht eindeutig.

Man muss eine zusätzliche Eigenschaft vom gegebenen topologischen Raum fordern, damit Grenzwerte eindeutig sind.

12.1.15 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt T_2-*Raum* (oder *Hausdorff-Raum*), wenn gilt:

(T_2) Zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es disjunkte offene Mengen O_x und O_y, sodass $x \in O_x$, $y \in O_y$.

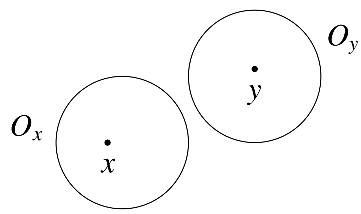

Abbildung 12.1: Zweites Trennungsaxiom (T_2)

Man sieht unmittelbar, dass diese Eigenschaft zu der Tatsache äquivalent ist, dass es zu zwei verschiedenen Punkten x, y zwei Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x)$, $V \in \mathfrak{U}(y)$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$.

12.1.16 Beispiel. Die von einer Metrik d auf einer Menge X induzierte Topologie ist Hausdorff. Sind nämlich $x, y \in X$, $x \neq y$, so gilt $d(x,y) > 0$. Setze $\epsilon := \frac{1}{3} d(x,y)$ und betrachte die Umgebungen

$$U := U_\epsilon(x), \quad V := U_\epsilon(y) .$$

Angenommen es wäre $z \in U \cap V$, dann erhielten wir den Widerspruch

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{1}{3} d(x,y) + \frac{1}{3} d(x,y) = \frac{2}{3} d(x,y) .$$

Der Beweis der Eindeutigkeit des Grenzwertes eines Netzes wird nun fast wörtlich vom metrischen Fall übertragen.

12.1.17 Lemma. *Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein konvergentes Netz in einem topologischen (T_2)-Raum. Dann ist der Grenzwert von $(x_i)_{i \in I}$ eindeutig.*

Beweis. Wären x, y zwei verschiedene Grenzwerte, so wähle man disjunkte Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(y)$. Dann wähle man $i_1 \in I$ und $i_2 \in I$ mit $i \geq i_1 \Rightarrow x_i \in U$ und $i \geq i_2 \Rightarrow x_i \in V$. Da I gerichtet ist, gibt es ein $i \in I$, $i \geq i_1, i \geq i_2$, und somit $x_i \in U \cap V$, was aber ein Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$ ist. ❑

12.2 Abgeschlossene Mengen

12.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn A^c offen ist.

12.2.2 Lemma. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Menge aller abgeschlossenen Mengen in $(X, \mathcal{T})$, so gilt:*

(A1) $\emptyset \in \mathfrak{A}, X \in \mathfrak{A}$.

(A2) Aus $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ folgt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathfrak{A}$.

(A3) Aus $A_i \in \mathfrak{A}$, $i \in I$, folgt $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Die Axiome $(A1)$ - $(A3)$ gehen bei Komplementbildung genau in die Axiome $(O1)$ - $(O3)$ über. ❑

12.2.3 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei $B \subseteq X$. Die Menge

$$\overline{B} := \bigcap \Big\{ A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen}, \ A \supseteq B \Big\} \tag{12.3}$$

heißt der *Abschluss* von B. Wenn man explizit klarstellen will, bezüglich welcher Topologie der Abschluss gebildet wird, dann schreibt man für $\overline{B}$ auch $\overline{B}^{\mathcal{T}}$.
Gilt $C \subseteq B \subseteq X$ und $B \subseteq \overline{C}$, so heißt C *dicht in* B. Ist C dicht in X, so sagt man kurz, C ist *dicht*.

12.2.4 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $B \subseteq X$. Dann ist $\overline{B}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die B umfasst.*

Beweis. Wegen $(A1)$ ist die Menge, über die in (12.3) der Durchschnitt gebildet wird, nicht leer. Wegen $(A3)$ ist $\overline{B}$ abgeschlossen. Ist A abgeschlossen und $A \supseteq B$, so kommt A auf der rechten Seite von (12.3) vor, also gilt $A \supseteq \overline{B}$. ❑

12.2.5 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) *Für $B \subseteq X$ gilt $B \subseteq \overline{B}$.*

(ii) *Ist $C \subseteq B \subseteq X$, so folgt $\overline{C} \subseteq \overline{B}$.*

(iii) *Für $C, B \subseteq X$ folgt $\overline{C \cup B} = \overline{C} \cup \overline{B}$.*

(iv) *Eine Menge $B \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $B = \overline{B}$.*

Beweis.

(i) Folgt unmittelbar aus der Definition.

(ii) Wegen $\overline{B} \supseteq B \supseteq C$ ist $\overline{B}$ eine abgeschlossene Menge, die C umfasst, und da $\overline{C}$ die kleinste derartige Menge ist, gilt $\overline{B} \supseteq \overline{C}$.

(iii) Die Menge $\overline{C} \cup \overline{B}$ ist eine abgeschlossene Menge, die $C \cup B$ umfasst. Also gilt $\overline{C \cup B} \subseteq \overline{C} \cup \overline{B}$.

Andererseits folgt aus $C \subseteq C \cup B$, dass $\overline{C} \subseteq \overline{C \cup B}$, und genauso $\overline{B} \subseteq \overline{C \cup B}$. Damit gilt auch $\overline{C} \cup \overline{B} \subseteq \overline{C \cup B}$.

(iv) $B = \overline{B}$ gilt genau dann, wenn B die kleinste abgeschlossene Menge ist, die B enthält. Somit ist das genau dann der Fall, wenn B abgeschlossen ist. ❑

Wenn man sich an die Definition von Abschluss und abgeschlossener Menge in metrischen Räumen zurück erinnert, so haben wir dort einen Zugang über Häufungspunkte gewählt. In Proposition 12.2.7 werden wir sehen, dass auch in allgemeinen topologischen Räumen der Abschluss bzw. der Begriff der abgeschlossenen Menge auf ähnliche Weise charakterisiert werden kann. Davor wollen wir ein kanonisches Netz konstruieren, das gegen einen gegebenen Punkt konvergiert.

12.2.6 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $B \subseteq X$ und $x \in X$, sodass $U \cap B \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$. Wir versehen die Menge*

$$I = \{(y, U) : U \in \mathfrak{U}(x),\ y \in U \cap B\},$$

mit der Relation $(y_1, U_1) \leq (y_2, U_2) :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$. Ist $(x_i)_{i \in I}$ das Netz definiert durch $x_i := y$, wenn $i = (y, U)$, so konvergiert es gegen x.

Beweis. Die Relation $\preceq$ ist offensichtlich reflexiv und transitiv. Sind $(z, V), (y, U) \in I$, so folgt $U \cap V \in \mathfrak{U}(x)$. Voraussetzungsgemäß gibt es ein $b \in U \cap V \cap B$, und daher $(z, V), (y, U) \preceq (b, U \cap V)$. Somit ist $(I, \preceq)$ gerichtet.
Definitionsgemäß ist immer $x_i \in B$. Da zu $U \in \mathfrak{U}(x)$ und beliebigen $y \in U \cap B$ aus $i = (z, V) \succeq (y, U)$ folgt, dass $x_i = z \in V \subseteq U$, sehen wir, dass $(x_i)_{i\in I}$ gegen x konvergiert. ❑

12.2.7 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $B \subseteq X$, $x \in X$ und $\mathfrak{W}(x)$ eine beliebige Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(*i*) $x \in \overline{B}$.

(*ii*) *Für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $B \cap U \neq \emptyset$.*

(*iii*) *Für alle $W \in \mathfrak{W}(x)$ gilt $B \cap W \neq \emptyset$.*

(*iv*) *Es gibt ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in B$, sodass x ein Grenzwert davon ist.*

Beweis. Laut Definition ist $x \notin \overline{B}$ zur Existenz einer abgeschlossenen Menge A mit $x \notin A,\ A \supseteq B$ äquivalent. Da die offenen Mengen genau die Komplemente der abgeschlossenen sind, ist das äquivalent zur Existenz einer Menge $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O,\ O \cap B = \emptyset$. Geht man zu den Negationen über, so erhalten wir, dass

$$(x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (\forall O \in \mathcal{T}, x \in O \Rightarrow B \cap O \neq \emptyset)\,.$$

Man erkennt sofort, dass die rechte Seite zu (*ii*) äquivalent ist. (*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*) folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $\mathfrak{W}(x)$ eine Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$ ist, und (*ii*) $\Rightarrow$ (*iv*) erhalten wir aus Lemma 12.2.6.
Gilt schließlich (*iv*) und ist $U \in \mathfrak{U}(x)$, so folgt $x_i \in U \cap B$ für alle $i \succeq i_0$ mit einem gewissen i_0. Also haben wir $U \cap B \neq \emptyset$. ❑

In Analogie zum Begriff des Häufungspunktes / isolierten Punktes einer Menge in metrischen Räumen in Definition 5.1.7 definieren wir:

12.2.8 Definition (*)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $B \subseteq X$. Ein $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von B, wenn

$$(B \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad U \in \mathfrak{U}(x)\,.$$

Ein $x \in B$ heißt *isolierter Punkt* von B, wenn es ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt, sodass $U \cap B = \{x\}$.

Man erkennt leicht, dass $x \in X$ genau dann isoliert ist, wenn $\{x\} \in \mathcal{T}$.

12.2.9 Bemerkung (*)**.** Aus Proposition 12.2.7 erkennt man sofort, dass x genau dann Häufungspunkt von B ist, wenn $x \in \overline{B \setminus \{x\}}$, bzw. wenn $(x_i)_{i\in I} \to x$ für ein Netz aus $B \setminus \{x\}$; vgl. Lemma 5.1.12.
Man erkennt auch leicht aus Proposition 12.2.7, dass $\overline{B}$ mit der Vereinigung von B und der Menge aller Häufungspunkte von B übereinstimmt.

12.2.10 Bemerkung. Ist $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, $B \subseteq X$ und nimmt man als $\mathfrak{W}(x)$ die Menge aller offenen ϵ-Kugeln um x, so sieht man durch einen Vergleich von Proposition 12.2.7 und (5.1), dass $x \in \overline{B}$ genau dann, wenn $x \in c(B)$. Also stimmt der Abschluss in metrischen Räumen mit dem topologischen Abschluss überein.
Der Grund, warum man in metrischen Räumen das Auslangen mit Folgen findet, daher $x \in \overline{B}$ genau dann, wenn $x_n \to x$ für eine Folge aus B, ist die Gültigkeit des ersten Abzählbarkeitsaxioms. In der Tat, kann man unter der Voraussetzung (ABI) die Konstruktion in Lemma 12.2.6 folgendermaßen abändern:
Ist $\mathfrak{W}(x) = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$, und wählen wir $x_n \in B \cap W_1 \cap \cdots \cap W_n$, so erhält man eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B, sodass zu vorgegebenem $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $W_N \subseteq U$ existiert, und daher

$$x_n \in W_1 \cap \cdots \cap W_N \cap \cdots \cap W_n \subseteq U \quad \text{für alle} \quad n \geq N\,.$$

Also konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen x.

Genauso wie die abgeschlossenen Mengen via Komplementbildung den offenen Mengen entsprechen, ist das duale Analogon des Abschlusses das sogenannte Innere.

12.2.11 Definition. Das *Innere* B° einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$B^\circ = \bigcup \{O \in \mathcal{T} : O \subseteq B\}\,.$$

12.2.12 Fakta.

1. Man sieht unmittelbar, dass $x \in B^\circ \Leftrightarrow B \in \mathfrak{U}(x)$. Ähnlich wie beim Abschluss sieht man, dass B° die größte in B enthaltene offene Menge ist. Damit ist B genau dann offen, wenn $B = B^\circ$.

2. Da die Komplemente von den offenen Mengen genau die abgeschlossenen Mengen sind, besteht folgender Zusammenhang mit dem Abschluss von Mengen.

$$\begin{aligned}\left(\overline{B^c}\right)^c &= \left(\bigcap \left\{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen}, \ A \supseteq B^c\right\}\right)^c \\ &= \left(\bigcap \left\{O^c \subseteq X : O \text{ offen}, \ O \subseteq B\right\}\right)^c = B^\circ\,.\end{aligned}$$

Die Begriffsbildung, welche der des Häufungspunktes einer Folge entspricht, ist die des Häufungspunktes eines Netzes.

12.2.13 Definition (*)**.** Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Dann heißt $x \in X$ *Häufungspunkt* von $(x_i)_{i\in I}$, falls

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \forall i \in I\ \exists j \in I : \ i \leq j \wedge x_j \in U\,.$$

Man beachte, dass im Allgemeinen die Menge der Häufungspunkte eines Netzes $(x_i)_{i\in I}$ nicht mit der Menge der Häufungspunkte der Bildmenge $\{x_i : i \in I\}$ übereinstimmt; vgl. Definition 12.2.8. Als Beispiel betrachte man dazu einfach konstante Netze.

12.2.14 Bemerkung (*). Vergleicht man das mit Proposition 12.2.7, so ist x Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn er im Schnitt aller Mengen der Form

$$\overline{\{x_j : j \in I,\ i \preceq j\}}\,,$$

also in

$$\bigcap_{i\in I} \overline{\{x_j : j \in I,\ i \preceq j\}} \tag{12.4}$$

enthalten ist.
Offenbar ist ein Limes eines Netzes auch Häufungspunkt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie man z. B. bei Folgen in $\mathbb{R}$ schon unschwer erkennen kann.

Eine alternative Charakterisierung von Häufungspunkten verwendet das Konzept von Teilnetzen.

12.2.15 Lemma (*). *Der Punkt x ist Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn x Limes eines Teilnetzes $(x_{i(k)})_{k\in K}$ ist.*

Beweis. Ist $(x_{i(k)})_{k\in K}$ ein Teilnetz, so gibt es zu $i_0 \in I$ ein $k_0 \in K$, sodass $i_0 \preceq i(k)$ für alle $k \succeq k_0$. Also gilt

$$\{x_i : i \in I,\ i_0 \preceq i\} \supseteq \{x_{i(k)} : k \in K,\ k_0 \preceq k\}\,,$$

und damit

$$\bigcap_{i_0\in I} \overline{\{x_i : i \in I,\ i_0 \preceq i\}} \supseteq \bigcap_{k_0\in K} \overline{\{x_{i(k)} : k \in K,\ k_0 \preceq k\}}\,. \tag{12.5}$$

Ist nun x Limes von $(x_{i(k)})_{k\in K}$, so ist er insbesondere Häufungspunkt dieses Teilnetzes, und wegen (12.5) ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$.
Ist umgekehrt x Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$, so betrachte die Menge

$$K = \{(j, U) : j \in I, U \in \mathfrak{U}(x), x_j \in U\}$$

versehen mit der Relation $(j_1, U_1) \preceq (j_2, U_2) :\Leftrightarrow j_1 \preceq j_2 \wedge U_1 \supseteq U_2$.
Sind $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \in K$, und ist $j' \in I$ mit $j_1, j_2 \preceq j'$, so gibt es wegen der Voraussetzung zu der Umgebung $U_3 = U_1 \cap U_2$ von x ein $j_3 \in I$ mit $j' \preceq j_3$ und $x_{j_3} \in U_3$. Also gilt $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \preceq (i_3, U_3)$, und wir sehen, dass $(K, \preceq)$ eine gerichtete Menge ist.
Setzen wir $i(j, U) = j$, so ist $(x_{i(j,U)})_{(j,U)\in K}$ ein gegen x konvergentes Teilnetz von $(x_i)_{i\in I}$. ❑

12.2.16 Lemma (*). *Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ konvergiert genau dann gegen x, wenn x Häufungspunkt eines jeden Teilnetzes von $(x_i)_{i\in I}$ ist.*

Beweis. Konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ gegen x, so auch jedes Teilnetz, und daher ist x Häufungspunkt dieses Teilnetzes.
Ist $(x_i)_{i\in I}$ nicht gegen x konvergent, so gibt es eine Umgebung U von x, sodass

$$\forall i \in I\ \exists j \in I, i \preceq j : x_j \notin U\,.$$

Dieses Faktum stellt sicher, dass $(K, \preceq|_{K\times K})$ mit $K = \{i \in I : x_i \notin U\}$ eine gerichtete Menge ist, wobei das Teilnetz $(x_i)_{i\in K}$ den Punkt x offenbar nicht als Häufungspunkt hat. ❑

12.3 Stetige Abbildungen

12.3.1 Definition. Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{O})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ist $x \in X$, so heißt f *stetig im Punkt* x, wenn gilt:

$$\text{Für alle } \; V \in \mathfrak{U}(f(x)) \; \text{ existiert ein } \; U \in \mathfrak{U}(x) \; \text{ mit } \; f(U) \subseteq V\,.$$

Die Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

12.3.2 Beispiel.

(*i*) Sei $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum. Die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T})$ ist stetig, denn ist $x \in X$ und $V \in \mathfrak{U}(\mathrm{id}_X\, x) = \mathfrak{U}(x)$, so erfüllt $U = V \in \mathfrak{U}(x)$ die Bedingung $\mathrm{id}_X(U) = V \subseteq V$.

(*ii*) Seien $(X,\mathcal{T}), (Y,\mathcal{O})$ topologische Räume und sei $a \in Y$. Die konstante Abbildung

$$f : \begin{cases} (X,\mathcal{T}) & \to & (Y,\mathcal{O})\,, \\ x & \mapsto & a\,. \end{cases}$$

ist stetig, denn ist $x \in X$ und $V \in \mathfrak{U}(f(x)) = \mathfrak{U}(a)$, so erfüllt $U = X \in \mathfrak{U}(x)$ die Bedingung $f(U) = \{a\} \subseteq V$.

(*iii*) Sei X versehen mit der diskreten Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, und sei $(Y,\mathcal{O})$ irgendein topologischer Raum. Dann ist jede Abbildung $f : (X,\mathcal{P}(X)) \to (Y,\mathcal{O})$ stetig. In der Tat gilt für $x \in X$, $V \in \mathfrak{U}(f(x))$, dass $U = \{x\} \in \mathfrak{U}(x)$ die geforderte Inklusion $f(U) = \{f(x)\} \subseteq V$ erfüllt.

Zieht man in Betracht, dass in einem metrischen Raum die ϵ-Kugeln eine Umgebungsbasis um einen Punkt bilden, so ist das im folgenden Lemma auftretende Kriterium (*ii*) für die Stetigkeit eine unmittelbare Verallgemeinerung des wohlbekannten ϵ - δ Kriteriums aus Definition 6.1.1.
Bei Funktionen auf metrischen Räumen haben wir auch gesehen, dass die Stetigkeit in einem Punkt x auch durch die Implikation

$$x_n \to x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

charakterisiert werden kann. Man hat in allgemeinen topologischen Räumen eine ähnliche Charakterisierung, wobei man jedoch nicht mehr mit Folgen das Auslangen findet, siehe (*iii*) im folgenden Lemma.

12.3.3 Lemma. *Seien $(X,\mathcal{T}), (Y,\mathcal{O})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $x \in X$, und seien $\mathfrak{W}(x)$ bzw. $\mathfrak{W}(f(x))$ beliebige Umgebungsbasen von x in $(X,\mathcal{T})$ bzw. von $f(x)$ in $(Y,\mathcal{O})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(*i*) *f ist im Punkt x stetig.*

(*ii*) *Für jedes $V \in \mathfrak{W}(f(x))$ existiert ein $U \in \mathfrak{W}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$.*

(*iii*) *Für jedes gegen x konvergente Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X folgt, dass das Netz $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $V \in \mathfrak{W}(f(x))$. Dann ist auch $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ und daher gibt es $U' \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U') \subseteq V$; vgl. Definition 12.3.1. Nun ist $\mathfrak{W}(x)$ Umgebungsbasis von x. Gemäß Definition 12.1.7 gibt es ein $U \in \mathfrak{W}(x)$ mit $U \subseteq U'$ und infolge $f(U) \subseteq V$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $V \in \mathfrak{U}(f(x))$, und wähle $W \in \mathfrak{W}(f(x))$ mit $W \subseteq V$. Dann gibt es $U \in \mathfrak{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq W \subseteq V$. Nach Definition 12.3.1 ist f somit in x stetig.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ gegen x, und ist $V \in \mathfrak{U}(f(x))$, so existiert wegen der Stetigkeit ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$. Wegen der Konvergenz findet man ein ein $i_0 \in I$, sodass $i \geq i_0 \Rightarrow x_i \in U$ und damit auch $f(x_i) \in V$. Also konvergiert $(f(x_i))_{i\in I}$ gegen $f(x)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wäre f nicht bei x stetig, so gäbe es eine Umgebung V von $f(x)$, sodass $f(U) \cap V^c \neq \emptyset$, oder äquivalent $U \cap f^{-1}(V^c) \neq \emptyset$, für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$. Nach Lemma 12.2.6 gibt es ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $f^{-1}(V^c)$, welches gegen x konvergiert. Andererseits ist aber $f(x_i) \in V^c$ für alle $i \in I$, womit $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ sicherlich nicht gegen $f(x)$ konvergieren kann. ❑

12.3.4 Bemerkung. Mit einer Konstruktion ähnlich wie in Bemerkung 12.2.10 sieht man, dass, wenn X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, also insbesondere in metrischen Räumen, die Stetigkeit bei x mit Hilfe von Folgen dadurch charakterisiert werden kann, dass aus $x_n \to x$ auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ folgt.

12.3.5 Beispiel. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to [-\infty, +\infty)$ heißt in einem Punkt $x \in X$ *halbstetig von oben* oder *oberhalbstetig*, falls f im Punkt x stetig ist, wenn man $[-\infty, +\infty)$ mit der Topologie $\mathcal{T}_< = \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ versieht; vgl. Beispiel 12.1.4, (v). f heißt halbstetig von oben bzw. oberhalbstetig auf X, wenn f bei allen $x \in X$ halbstetig von oben ist, also wenn $f : X \to [-\infty, +\infty)$ stetig ist, wobei $[-\infty, +\infty)$ die Topologie $\mathcal{T}_<$ trägt.
In Beispiel 12.1.14, (ii), haben wir gesehen, dass ein Netz $(\xi_i)_{i\in I}$ in $[-\infty, +\infty)$ gegen ein $\xi \in [-\infty, +\infty)$ bezüglich $\mathcal{T}_<$ genau dann konvergiert, wenn $\xi \geq \limsup_{i\in I} \xi_i$. Aus Lemma 12.3.3 erkennen wir somit, dass f in x genau dann von oben halbstetig ist, wenn

$$f(x) \geq \limsup_{i\in I} f(x_i)$$

für alle gegen x konvergente Netze $(x_i)_{i\in I}$ aus X.
Eine Funktion $f : X \to (-\infty, +\infty]$ heißt in einem Punkt $x \in X$ *halbstetig von unten* oder *unterhalbstetig*, falls f im Punkt x stetig ist, wenn man $(-\infty, +\infty]$ mit der Topologie $\mathcal{T}_> = \{(a, +\infty] : a \in [-\infty, +\infty]\}$ versieht. Offenbar ist diese Eigenschaft zur Halbstetigkeit von oben der Funktion $-f$ bei x und somit auch zu $f(x) \leq \liminf_{i\in I} f(x_i)$ für alle gegen x konvergente Netze $(x_i)_{i\in I}$ aus X äquivalent.

12.3.6 Satz. *Seien $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{O})$ topologische Räume, und sei $f : X \to Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *$f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ für jede offene Menge $O \in \mathcal{O}$; also die Urbilder von offenen Mengen sind offen.*

(iii) *Die Urbilder von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.*

(iv) *Für jede Teilmenge $B \subseteq X$ gilt $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$.*

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $O \in \mathcal{O}$. Ist $x \in f^{-1}(O)$, so gilt $f(x) \in O$. Da O offen ist, erhalten wir $O \in \mathfrak{U}(f(x))$. Infolge gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq O$, bzw. äquivalent dazu $U \subseteq f^{-1}(O)$. Mit Lemma 12.1.10 folgt $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei A abgeschlossene Teilmenge von Y. Dann ist $(A)^c$ offen und wegen (ii) gilt
$$\left(f^{-1}(A)\right)^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{T} .$$
Also ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Wegen $\overline{f(B)} \supseteq f(B)$ gilt $f^{-1}(\overline{f(B)}) \supseteq B$. Da nach Voraussetzung $f^{-1}(\overline{f(B)})$ abgeschlossen in $(X,\mathcal{T})$ ist, folgt $f^{-1}(\overline{f(B)}) \supseteq \overline{B}$ und daher $\overline{f(B)} \supseteq f(\overline{B})$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sei $x \in X$ und $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ gegeben. Wir müssen ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$ konstruieren. Dazu setze man $W := f^{-1}(V)$. Dann gilt $f(W^c) = f(f^{-1}(V^c)) \subseteq V^c$ und daher $f(\overline{W^c}) \subseteq \overline{f(W^c)} \subseteq \overline{V^c}$.

Aus Proposition 12.2.7 erhalten wir wegen $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ und $V \cap V^c = \emptyset$, dass $f(x) \notin \overline{V^c}$ und wegen obiger Inklusion infolge $x \notin \overline{W^c}$. Also gilt $x \in (\overline{W^c})^c = W^\circ$, womit $U := W^\circ \in \mathfrak{U}(x)$. Dabei ist $U \subseteq W = f^{-1}(V)$ und daher $f(U) \subseteq f(W) \subseteq V$. ❑

Bedingung (ii) in Satz 12.3.6 lässt sich kurz durch $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$ beschreiben, wobei wir für eine Abbildung $f : X \to Y$ die Schreibweise
$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \left\{f^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\right\} \ (\subseteq \mathcal{P}(X)) ,$$
und später auch
$$f(\mathcal{B}) := \left\{f(B) : B \in \mathcal{B}\right\} \ (\subseteq \mathcal{P}(Y)) ,$$
für $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bzw. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ verwenden.

12.3.7 Lemma. *Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{O})$ topologische Räume, wobei $(Y,\mathcal{O})$ das Hausdorffsche Axiom (T_2) erfülle. Ist D eine dichte Teilmenge von X, und sind f,g zwei stetige Funktionen von X nach Y, sodass $f|_D = g|_D$, dann folgt $f = g$.*

Beweis. Angenommen $f(x) \neq g(x)$ für ein $x \in X \setminus D$. Wegen der Hausdorff-Voraussetzung gibt es $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ und $f(x) \in O_1,\ g(x) \in O_2$. Da f und g stetig sind, gibt es $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(x)$, sodass $f(U_1) \subseteq O_1, g(U_2) \subseteq O_2$. Wegen $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}(x)$ folgt $U_1 \cap U_2 \cap D \neq \emptyset$, und wir erhalten den Widerspruch

$$\emptyset \neq f(U_1 \cap U_2 \cap D) = g(U_1 \cap U_2 \cap D) \subseteq O_1 \cap O_2 = \emptyset\,. \qquad \square$$

Alternativ kann man argumentieren, dass es zu $x \in X \setminus D$ wegen Proposition 12.2.7 ein gegen x konvergentes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in D gibt. Die Netze $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ und $\big(g(x_i)\big)_{i\in I}$ konvergieren wegen Lemma 12.3.3 gegen $f(x)$ bzw. $g(x)$. Andererseits sind $\big(f(x_i)\big)_{i\in I}$ und $\big(g(x_i)\big)_{i\in I}$ identisch und haben wegen Lemma 12.1.17 denselben Grenzwert; also $f(x) = g(x)$.

12.3.8 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$, $(Z, \mathcal{R})$ topologische Räume und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen. Ist f stetig in einem Punkt $x \in X$ und ist g stetig im Punkt $f(x)$, so ist $g \circ f$ stetig im Punkt x. Insbesondere ist $g \circ f$ stetig, wenn f, g es sind.*

Beweis. Sei $W \in \mathfrak{U}((g \circ f)(x))$. Da g stetig im Punkt $f(x)$ ist, gibt es $V \in \mathfrak{U}(f(x))$ mit $g(V) \subseteq W$. Da f stetig im Punkt x ist, gibt es $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $f(U) \subseteq V$. Insgesamt gilt

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W\,. \qquad \square$$

12.3.9 Definition. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, und sei $f : X \to Y$. Dann heißt f ein *Homöomorphismus* von $(X, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{O})$, wenn f bijektiv ist und wenn $f(\mathcal{T}) = \mathcal{O}$ gilt. Zwei topologische Räume $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ heißen *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus von $(X, \mathcal{T})$ nach $(Y, \mathcal{O})$ gibt.

12.3.10 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$, $(Z, \mathcal{R})$ topologische Räume.*

(i) *Eine Bijektion $f : X \to Y$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.*

(ii) *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Homöomorphismen, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ ein Homöomorphismus.*

(iii) *Für eine weitere Topologie $\mathcal{T}'$ auf X ist die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.*

Beweis.

(i) Für ein bijektives f gilt $f(\mathcal{T}) = \mathcal{O}$ genau dann, wenn $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$ und $f(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{O}$.

(ii) Folgt unmittelbar aus (i) und Lemma 12.3.8.

(iii) Das folgt unmittelbar aus $\mathrm{id}_X(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$. $\square$

12.3.11 Beispiel.

(i) Die Abbildung $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist ein Homöomorphismus, wenn man $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\mathbb{R}$ jeweils mit der Euklidischen Topologie versieht.

(*ii*) Ist eine gegebene Menge X mit zwei verschiedenen Metriken d_1 und d_2 versehen, die aber *äquivalent* sind, also es gibt $\alpha, \beta > 0$, sodass für alle $x, y \in Y$

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_1(x,y)\,, \tag{12.6}$$

so zeigt man leicht mit Hilfe der Charakterisierung der Stetigkeit in metrischen Räumen durch Folgen (siehe Proposition 6.1.4), dass dann $\mathrm{id}_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ und $\mathrm{id}_X : (X, d_2) \to (X, d_1)$ beide stetig sind. Also induzieren diese Metriken dieselbe Topologie: $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$. Siehe dazu auch Übungsbeispiel 5.1.

(*iii*) Sei X ein Vektorraum versehen mit zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$. Sind diese äquivalent (vgl. Definition 9.2.1), so sieht man sofort, dass die jeweils induzierten Metriken ebenfalls äquivalent sind. Somit stimmen die Topologien, die von den zu $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ gehörigen Metriken erzeugt werden, überein.

(*iv*) Man betrachte $\mathbb{C}$ versehen mit der euklidischen Metrik d_2 und mit der chordalen Metrik χ. Es ist wohlbekannt, dass $z_n \to z$ in $\mathbb{C}$ bezüglich d_2 genau dann, wenn $z_n \to z$ bezüglich χ. Also ist die Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ als Abbildung von $(\mathbb{C}, d_2)$ nach $(\mathbb{C}, \chi)$ und auch als Abbildung von $(\mathbb{C}, \chi)$ nach $(\mathbb{C}, d_2)$ stetig. Somit gilt $\mathcal{T}(d_2) = \mathcal{T}(\chi)$, obwohl die beiden Metriken nicht äquivalent im Sinne von (12.6) sind.

(*v*) Man betrachte einerseits $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versehen mit der chordalen Metrik χ. Andererseits sei S die Oberfläche der Kugel mit Durchmesser 1 im $\mathbb{R}^3$, die so auf die Ebene $\mathbb{R}^2$ zu liegen kommt, dass ihr Südpol den Nullpunkt berührt. Wir versehen S mit d_2:

$$d_2((\alpha, \beta, \gamma)^T, (\xi, \eta, \zeta)^T) = \sqrt{(\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2 + (\gamma - \zeta)^2}\,.$$

Die Stereographische Projektion $\sigma : S \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist bekannterweise eine Isometrie, also $\chi(\sigma(x), \sigma(y)) = d_2(x, y)$. Somit sind σ und σ^{-1} stetig, und σ ist infolge ein Homöomorphismus.

12.4 Basis, Subbasis

Wir betrachten nun eine feste Menge X und die Menge $\mathbb{T}(X)$ aller möglichen Topologien auf X. Die Elemente $\mathcal{T}$ von $\mathbb{T}(X)$ sind also Teilmengen von $\mathcal{P}(X)$, und daher $\mathbb{T}(X) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Wir sagen eine Topologie $\mathcal{T}_1$ ist *gröber* als eine Topologie $\mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_2$ *feiner* als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Aus Satz 12.3.6 erkennt man leicht, dass $\mathcal{T}_1$ genau dann gröber als $\mathcal{T}_2$ ist, wenn $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ stetig ist.

12.4.1 Lemma. *Ist $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, eine Familie von Topologien, so ist auch $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie. In der Tat, ist dieser Schnitt die feinste Topologie, die gröber als alle $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, ist.*
Für ein Mengensystem $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist

$$\mathcal{T}(C) = \bigcap \{\mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) : C \subseteq \mathcal{T}\} \tag{12.7}$$

die gröbste Topologie, die C enthält.

Beweis. Wir müssen nachweisen, dass $\cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ die Axiome $(O1)$ - $(O3)$ erfüllt. Die Mengen $\emptyset, X$ sind in allen $\mathcal{T}_i$ enthalten, da diese ja Topologien sind. Also sind diese Mengen auch im Schnitt enthalten. Es folgt $(O1)$. Aus $O_1, O_2 \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ folgt $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_i,\ i \in I$, und somit $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_i,\ i \in I$. Also gilt $O_1 \cap O_2 \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$, und daher $(O2)$; vgl. Bemerkung 12.1.3. Sind $O_j \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i,\ j \in J$, so folgt für jedes $i \in I$, dass $O_j \in \mathcal{T}_i,\ j \in J$, und weiter $\bigcup_{j\in J} O_j \in \mathcal{T}_i$. Nun gilt das wieder für alle $i \in I$, also $\bigcup_{j\in J} O_j \in \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$, und somit $(O3)$.
Klarerweise ist $\cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ in allen $\mathcal{T}_i$ enthalten. Ist andererseits $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i,\ i \in I$, so auch $\mathcal{T} \subseteq \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$. Also ist der Schnitt die feinste in allen $\mathcal{T}_i$ enthaltene Topologie.
Offenbar enthält der Schnitt $\mathcal{T}(C)$ von Mengensystemen, die alle C enthalten, wieder C. Ist andererseits $\mathcal{T} \supseteq C$ eine Topologie, so gehört $\mathcal{T}$ zur Menge auf der linken Seite von (12.7) und daher $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}(C)$. Also ist $\mathcal{T}(C)$ die gröbste Topologie, die C enthält. ❑

12.4.2 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

- Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Basis* von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ und wenn es für alle $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq O$ gibt.
- Ein Mengensystem $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Subbasis* von $\mathcal{T}$, wenn $C \subseteq \mathcal{T}$ und wenn es für alle $O \in \mathcal{T}, O \neq X$, und $x \in O$ endlich viele $C_1, \dots, C_n \in C$ mit $x \in C_1 \cap \dots \cap C_n \subseteq O$ gibt.
- Man sagt ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* $(ABII)$, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

12.4.3 Bemerkung. Sei $O \subseteq X$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Die Tatsache, dass es zu jedem $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subseteq O$, lässt sich kurz folgendermaßen anschreiben:

$$O = \bigcup_{B\in\mathcal{B},\, B\subseteq O} B\,.$$

12.4.4 Bemerkung. Offensichtlich ist $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau dann eine Subbasis von $\mathcal{T}$, wenn das Mengensystem $\mathcal{E}$ aller endlichen Schnitte von C samt X, also

$$\mathcal{E} := \{X\} \cup \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i : n \in \mathbb{N},\ C_1, \dots, C_n \in C \Big\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}$ abgibt. Klarerweise enthält $\mathcal{E}$ das Mengensystem C. Der Grund, warum man X extra in $\mathcal{E}$ hineingeben muss, ist der, dass wir in Definition 12.4.2 für Subbasis nur verlangen, dass es zu jedem offenen O ungleich X und $x \in O$ Mengen $C_1, \dots, C_n \in C$ gibt mit $x \in C_1 \cap \dots \cap C_n \subseteq O$.

12.4.5 Beispiel.

(*i*) Ist (Y, d) ein metrischer Raum, so folgt aus der Definition der von d induzierten Topologie $\mathcal{T}(d)$ sofort, dass

$$\{U_\epsilon(x) : x \in Y,\ \epsilon > 0\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}(d)$ ist.

(*ii*) Die Euklidische Topologie $\mathcal{T}(d_2)$ auf $\mathbb{R}$ hat die Menge aller offenen Intervalle

$$\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

als Basis. Da man zu $a < x < b$ aus $\mathbb{R}$ wegen der Dichteeigenschaft von $\mathbb{Q}$ (siehe Satz 2.8.3) sicherlich $s, t \in \mathbb{Q}$ findet, sodass $a < s < x < t < b$, ist auch

$$\{(s,t) \subseteq \mathbb{R} : s, t \in \mathbb{Q}, s < t\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}(d_2)$. Also erfüllt $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(d_2))$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom (*ABII*).

(*iii*) Ähnlich zeigt man, dass $\{[-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ auf $[-\infty, +\infty)$ ist; vgl. Beispiel 12.1.4, (v). Insbesondere gilt auch hier das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(*iv*) Wegen $(a,b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b)$ folgt damit unmittelbar, dass

$$\{(a, +\infty) \subseteq \mathbb{R} : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) \subseteq \mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\}$$

eine Subbasis von $\mathcal{T}(d_2)$ auf $\mathbb{R}$ ist.

(*v*) Betrachte den $\mathbb{R}^p$ versehen mit d_∞. Da dort für die ϵ-Kugeln

$$U_\epsilon(x) = (\xi_1 - \epsilon, \xi_1 + \epsilon) \times \cdots \times (\xi_p - \epsilon, \xi_p + \epsilon)$$

gilt, wobei $x = (\xi_j)_{j=1}^p$, folgt, dass die Menge

$$\{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_p, b_p) : a_j, b_j \in \mathbb{R}, a_j < b_j,\ j = 1, \dots, p\}$$

aller p-dimensionalen Quader eine Basis von $\mathcal{T}(d_\infty)$ abgibt. Wegen $\mathcal{T}(d_\infty) = \mathcal{T}(d_2)$ (siehe Beispiel 12.3.11) ist diese Menge trivialerweise auch eine Basis von $\mathcal{T}(d_2)$.

Ähnlich wie für $\mathbb{R}$ sieht man, dass auch

$$\{(s_1, t_1) \times \cdots \times (s_p, t_p) : s_j, t_j \in \mathbb{Q}, s_j < t_j,\ j = 1, \dots, p\}$$

eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}(d_2)$ ist.

12.4.6 Satz. *Ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Basis einer gegebenen Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so erfüllt $\mathcal{B}$:*

(B1) Ist $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, so existiert $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(B2) $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$.

Außerdem ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, die $\mathcal{B}$ enthält, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$.
Ist $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ Subbasis einer gegebenen Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, die C enthält, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(C)$.

Beweis. Wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ muss $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{T}$. Ist andererseits $O \in \mathcal{T}$, so folgt aus der Tatsache, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist, zusammen mit Bemerkung 12.4.3

$$O = \bigcup_{B \in \mathcal{B},\ B \subseteq O} B \,. \tag{12.8}$$

Wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B})$ und wegen $(O3)$ ist jede dieser Mengen auch in $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, also $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B})$. Aus (12.8) angewandt auf $O = X$ sieht man unmittelbar, dass (B2) erfüllt ist. Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ gilt $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Aus $B_1 \cap B_2 = \bigcup\{B \in \mathcal{B} : B \subseteq B_1 \cap B_2\}$ folgt für jedes $x \in B_1 \cap B_2$ die Existenz eines $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Also gilt auch (B1).
Ist schließlich $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$, so folgt aus Bemerkung 12.4.4, dass $\mathcal{E}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist, und daher $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Wegen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ gilt $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Ist andererseits $E \in \mathcal{E}$, so gilt $E = X$ oder $E = C_1 \cap \cdots \cap C_n$ für $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{C})$. Aus $(O1)$ bzw. $(O2)$ folgt dann $E \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$, und daher $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{C})$. Somit gilt auch $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{C})$, und insgesamt $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$. ❑

12.4.7 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Ist $\mathcal{C}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}$, so ist f genau dann stetig, wenn $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}$.*

Beweis. Aus der Stetigkeit folgt unmittelbar $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$.
Ist umgekehrt $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}$, so prüft man leicht nach, dass

$$\mathcal{O}' := \{O' \subseteq Y : f^{-1}(O') \in \mathcal{T}\}$$

die Axiome $(O1)$ - $(O3)$ erfüllt, also eine Topologie ist. Da laut Voraussetzung $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}'$, muss auch $\mathcal{O} = \mathcal{T}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{O}'$, und daher $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ für alle $O \in \mathcal{O}$. ❑

Wir wollen nun den umgekehrten Weg wie in Satz 12.4.6 gehen.

12.4.8 Satz. *Erfüllt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Axiome (B1) und (B2), so ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}(\mathcal{B})$. Außerdem stimmt $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ mit dem System $\mathcal{T}$ aller Mengen $O \subseteq X$ der Bauart*

$$O = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B$$

mit einem (von O abhängigen) Teilsystem $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}$ überein; also $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}$, wobei

$$\mathcal{T} = \{O \subseteq X : \exists \mathcal{V} \subseteq \mathcal{B},\ O = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B\} \,. \tag{12.9}$$

Für $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist $\mathcal{C}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{C})$. Außerdem stimmt $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ mit dem System

$$\{O \subseteq X : \exists \mathcal{V} \subseteq \mathcal{E},\ O = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B\} \tag{12.10}$$

überein, wobei

$$\mathcal{E} := \{X\} \cup \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i : n \in \mathbb{N},\ C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C} \Big\}$$

die Axiome (B1) und (B2) erfüllt.

Beweis.

⇝ Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{T}$ definiert in (12.9) eine Topologie auf X ist. In der Tat gilt
$$\emptyset = \bigcup_{B\in\emptyset} B \in \mathcal{T},$$
und wegen (B2)
$$X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \in \mathcal{T}.$$
Also ist $(O1)$ erfüllt. Die Bedingung $(O3)$ folgt aus
$$\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{V}_i} B\Big) = \bigcup_{B\in\bigcup_{i\in I}\mathcal{V}_i} B.$$
Es bleibt $(O2)$ zu zeigen. Seien also $O_1 = \bigcup_{B\in\mathcal{V}_1} B,\ O_2 = \bigcup_{B\in\mathcal{V}_2} B$ gegeben. Jedes $x \in O_1 \cap O_2$ liegt somit in einem $B_1 \in \mathcal{V}_1$ und einem $B_2 \in \mathcal{V}_2$. Nach (B1) gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq O_1 \cap O_2$. Wir erhalten (vgl. Bemerkung 12.4.3)
$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{B\in\mathcal{V}} B,$$
wobei $\mathcal{V} := \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq O_1 \cap O_2\}$; also $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

⇝ Offensichtlich gilt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Ist $x \in O \in \mathcal{T}$, so folgt aus (12.9), dass $x \in B \subseteq O$ für ein gewisses $B \in \mathcal{B}$. Also ist $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{T}$, und wegen Satz 12.4.6 ist damit $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{B})$, die $\mathcal{B}$ umfasst.

⇝ Für $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ sieht man unmittelbar, dass $X \in \mathcal{E}$ und dass mit $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ auch $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$. Insbesondere erfüllt $\mathcal{E}$ (B1) und (B2). Nach dem oben gezeigten ist $\mathcal{E}$ Basis von $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, wobei $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ mit der Topologie in (12.10) übereinstimmt. Wegen Bemerkung 12.4.4 bedeutet das, dass C eine Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ ist, und aus Satz 12.4.6 folgt damit schließlich $\mathcal{T}(C) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. ❑

12.5 Initiale Topologie

Mit dem Konzept Basis und Subbasis können wir auf einer gegebenen Menge ausgezeichnete Topologien definieren, die gewisse Eigenschaften haben.

12.5.1 Satz. *Seien X eine Menge, $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen.*

$$\begin{tikzcd}
 & (Y_i, \mathcal{T}_i) \arrow[d, dash, dotted] \\
X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "f_k"'] & (Y_j, \mathcal{T}_j) \arrow[d, dash, dotted] \\
 & (Y_k, \mathcal{T}_k)
\end{tikzcd}$$

Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit folgender Eigenschaft:

(IN_1) *$\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X, sodass $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist.*

Diese Topologie heißt initiale Topologie *bezüglich der f_i. Für sie gelten auch folgende beiden Eigenschaften:*

(IN_2) *$\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ ist eine Subbasis von $\mathcal{T}$.*

(IN_3) *Ist $(Y, \mathcal{O})$ ein beliebiger topologischer Raum und $f : Y \to X$, so ist $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$ genau dann stetig, wenn alle Abbildungen $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, stetig sind.*

Beweis.

⇝ Ist $\mathcal{T}'$ eine beliebige Topologie auf X, so ist $f_i : (X, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ genau dann stetig, wenn $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'$. Also sind alle f_i genau dann stetig, wenn

$$\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}' . \tag{12.11}$$

Nach Lemma 12.4.1 gibt es eine gröbste Topologie $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i))$, die (12.11) erfüllt. Damit ist aber auch $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, sodass alle f_i stetig sind. Also gilt (IN_1).

Wegen Satz 12.4.8 ist $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ Subbasis von $\mathcal{T}$, und es gilt auch (IN_2).

⇝ Sei $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie der $f_i, i \in I$, ist. Im Falle der Stetigkeit von f sind auch alle $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig.

Seien umgekehrt alle $f_i \circ f$ stetig, es gelte also $(f_i \circ f)^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{O}$. Dann folgt $f^{-1}(f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) \subseteq \mathcal{O}$ und damit

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)) \subseteq \mathcal{O} .$$

Da $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist, folgt aus Lemma 12.4.7, dass f stetig ist. Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ hat also die Eigenschaft (IN_3). ❑

12.5.2 Bemerkung (*). Die initiale Topologie $\mathcal{T}$ ist in der Tat die einzige Topologie $\mathcal{T}'$ mit der Eigenschaft (IN_3). Um das einzusehen, sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf X mit dieser Eigenschaft.
Da die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ trivialerweise stetig ist, folgt aus (IN_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$, dass alle $f_i \circ \mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind. Aus (IN_1) folgt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$. Für $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ sind andererseits alle $f_i \circ \mathrm{id}_X = f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig. Mit (IN_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$ folgt die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$, und daher gilt auch $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.

12.5.3 Lemma. *Mit der Notation aus Satz 12.5.1 sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X. Dieses konvergiert bzgl. $\mathcal{T}$ gegen ein $x \in X$ genau dann, wenn $\big(f_i(x_j)\big)_{j\in J}$ für alle $i \in I$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.*

Beweis. Konvergiert $(x_j)_{j\in J}$ gegen x bzgl. $\mathcal{T}$, so folgt aus der Stetigkeit der f_i mit Lemma 12.3.3, dass $\big(f_i(x_j)\big)_{j\in J}$ gegen $f_i(x)$ konvergiert.
Konvergiere umgekehrt $\big(f_i(x_j)\big)_{j\in J}$ gegen $f_i(x)$ für alle $i \in I$. Für ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ mit $U \neq X$ und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$ folgt aus der Tatsache, dass $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist (vgl. (IN_2) aus Satz 12.5.1), und Definition 12.4.2, dass

$$x \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O\,,$$

wobei $i_1, \ldots, i_m \in I,\ O_1 \in \mathcal{T}_{i_1}, \ldots, O_m \in \mathcal{T}_{i_m}$. Also folgt $f_{i_k}(x) \in O_k$ für $k = 1, \ldots, m$. Laut Voraussetzung gibt es zu jedem $k = 1, \ldots, m$ einen Index $j_k \in J$, sodass $j \succeq j_k$ immer $f_{i_k}(x_j) \in O_k$ nach sich zieht. Ist nun $j_0 \in J$ derart, dass $j_0 \succeq j_k,\ k = 1, \ldots, m$, so folgt für $j \succeq j_0$ jedenfalls $f_{i_k}(x_j) \in O_k,\ k = 1, \ldots, m$, und daher

$$x_j \in f_{i_1}^{-1}(O_1) \cap \cdots \cap f_{i_m}^{-1}(O_m) \subseteq O \subseteq U\,. \qquad \square$$

Die Konstruktion der Initialen Topologie ist assoziativ.

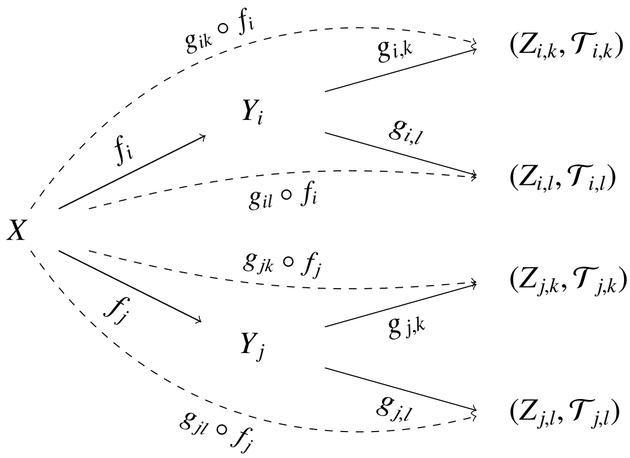

Abbildung 12.2: Veranschaulichung der Assoziativität der Initialtopologiebildung

12.5.4 Korollar. *Seien X, Y_i, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen. Weiters seien zu jedem $i \in I$ eine Indexmenge J_i und topologische Räume $(Z_{i,j}, \mathcal{T}_{i,j})$ und Abbildungen $g_{i,j} : Y_i \to Z_{i,j}$ gegeben. Für jedes $i \in I$ versehen wir Y_i mit der initialen Topologie $\mathcal{T}_i$ bezüglich der Abbildungen $g_{i,j},\ j \in J_i$.*
Unter diesen Voraussetzungen stimmt die initiale Topologie $\mathcal{T}_1$ auf X bezüglich der Abbildungen $f_i : X \to Y_i,\ i \in I$, mit der initialen Topologie $\mathcal{T}_2$ auf X bezüglich der Abbildungen $g_{i,j} \circ f_i : X \to Z_{i,j},\ i \in I, j \in J_i$, überein.

Beweis. Ist $\mathcal{T}$ irgendeine Topologie auf X, so ist wegen (IN_3) angewandt auf die $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ die Tatsache, dass alle Abbildungen $f_i : X \to Y_i,\ i \in I$, stetig sind, dazu äquivalent, dass alle Abbildungen $g_{i,j} \circ f_i : X \to Z_{i,j},\ i \in I, j \in J_i$, stetig sind.
Also stimmt die gröbste aller Topologien, welche die erste Bedingung erfüllen, – wegen (IN_1) ist das $\mathcal{T}_1$ – mit der gröbsten aller Topologien, welche die zweite Bedingung erfüllen, – wegen (IN_1) ist das $\mathcal{T}_2$ – überein. ❑

12.6 Spur- und Produkttopologie

12.6.1 Definition. Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $X \subseteq Y$. Weiters sei $\iota : X \to Y$ die kanonische Einbettung, $\iota(x) = x$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Abbildung ι heißt die *Spurtopologie* von $\mathcal{T}$ auf X und wird bezeichnet als $\mathcal{T}|_X$. Man spricht von $(X, \mathcal{T}|_X)$ als einem *Teilraum* von $(Y, \mathcal{T})$.

12.6.2 Fakta.

1. Wegen Satz 12.5.1 ist $\iota^{-1}(\mathcal{T}) = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Subbasis für $\mathcal{T}|_X$. Nun erfüllt diese Menge selbst schon $(O1) - (O3)$, also gilt

$$\mathcal{T}|_X = \{O \cap X : O \in \mathcal{T}\}\,. \tag{12.12}$$

   Daraus erhält man leicht, dass der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}|_X(x)$ eines Elementes $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}|_X$ übereinstimmt mit

$$\mathfrak{U}|_X(x) = \{U \cap X : U \in \mathfrak{U}(x)\}\,.$$

2. Aus (12.12) erhält man auch, dass das System $\mathfrak{A}|_X$ der in $(X, \mathcal{T}|_X)$ abgeschlossenen Mengen gegeben ist durch $\mathfrak{A}|_X = \{A \cap X : A \in \mathfrak{A}\}$. Somit gilt für $B \subseteq X$

$$\overline{B}^{\mathcal{T}|_X} = \overline{B}^{\mathcal{T}} \cap X\,. \tag{12.13}$$

3. Erfüllt $(Y, \mathcal{T})$ das Axiom (T_2), so folgt aus (12.12), dass auch $(X, \mathcal{T}|_X)$ dieses Axiom erfüllt.

4. Aus (IN_3) erhalten wir, dass eine Funktion $f : (Z, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{T}|_X)$ genau dann stetig ist, wenn $f : (Z, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{T})$ stetig ist.

5. Ist $(x_j)_{j \in J}$ ein Netz in X und $x \in X$, so folgt aus Lemma 12.5.3, dass $(x_j)_{j \in J}$ genau dann gegen x bzgl. $\mathcal{T}$ konvergiert, wenn $(x_j)_{j \in J}$ bzgl. $\mathcal{T}|_X$ gegen x konvergiert.

6. Ist schließlich $X \subseteq Z \subseteq Y$, so gilt wegen Korollar 12.5.4

$$\mathcal{T}|_X = (\mathcal{T}|_Z)|_X\,. \tag{12.14}$$

12.6.3 Beispiel. Sei $\langle Y, d\rangle$ ein metrischer Raum, und sei $X \subseteq Y$ versehen mit der Einschränkung von $d|_{X\times X}$. Klarerweise ist $\langle X, d|_{X\times X}\rangle$ ein metrischer Raum. Wir wollen uns vergewissern, dass die von $d|_{X\times X}$ auf X erzeugte Topologie genau die Spurtopologie ist, die von $\mathcal{T}(d)$ auf X induziert wird.
Ist nämlich $O \in \mathcal{T}(d)$ und $x \in O \cap X$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U^Y_\epsilon(x) \subseteq O$. Daraus folgt, dass die ϵ-Kugel $U^X_\epsilon(x) = U^Y_\epsilon(x) \cap X$ um x bezüglich $d|_{X\times X}$ in $O \cap X$ enthalten ist. Also ist jede Menge aus $\mathcal{T}(d)|_X$ offen bezüglich $d|_{X\times X}$.
Ist umgekehrt $P \in \mathcal{T}(d|_{X\times X})$, so wähle man für jedes $x \in P$ ein $\epsilon_x > 0$, sodass die ϵ_x-Kugel $U^X_{\epsilon_x}(x) = X \cap U^Y_{\epsilon_x}(x)$ in X in P enthalten ist. Es folgt

$$P = \bigcup_{x\in P} (X \cap U^Y_{\epsilon_x}(x)) = X \cap \bigcup_{x\in P} U^Y_{\epsilon_x}(x)\,.$$

Somit ist P der Schnitt einer in Y offenen Menge und X, also $P \in \mathcal{T}(d)|_X$.

12.6.4 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ Teilmengen mit $A_1 \cup \dots \cup A_m = X$, wobei entweder alle A_k, $k = 1, \dots, m$, abgeschlossen oder alle diese Teilmengen offen sind.*
Sind $f_k : A_k \to Y$ für $k = 1, \dots, m$ stetige Funktionen, wobei die A_k mit der Spurtopologie versehen sind, sodass f_j und f_k auf $A_j \cap A_k$ für alle $j, k \in \{1, \dots, m\}$ übereinstimmen, dann ist auch die Funktion $f_1 \cup \dots \cup f_m : X \to Y$[2] stetig.

Beweis. Seien $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ alle abgeschlossen. Der offene Fall ist ähnlich zu beweisen. Für ein abgeschlossenes $F \subseteq Y$ gilt zunächst

$$(f_1 \cup \dots \cup f_m)^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \cup \dots \cup f_m^{-1}(F)\,.$$

Wegen der Stetigkeit von $f_k : A_k \to Y$ ist $f_k^{-1}(F)$ abgeschlossen in der Spurtopologie $\mathcal{T}|_{A_k}$, und somit von der Bauart $C \cap A_k$ für eine in X abgeschlossene Menge C. Als Schnitt zweier in X abgeschlossener Mengen ist $f_k^{-1}(F)$ in X abgeschlossen.
Als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist dann auch $(f_1 \cup \dots \cup f_m)^{-1}(F)$ abgeschlossen. Da F beliebig war, ist somit $f_1 \cup \dots \cup f_m$ stetig. ❑

12.6.5 Definition. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, und sei $X := \prod_{i\in I} X_i$. Die initiale Topologie auf X bezüglich der Familie $\pi_i : X \to X_i$ der kanonischen Projektionen

$$\pi_i((x_k)_{k\in I}) = x_i$$

nennt man die *Produkttopologie* der $\mathcal{T}_i$ auf X und wird bezeichnet mit $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$.

12.6.6 Fakta.

1. Für ein $O \subseteq X_i$ gilt
$$\pi_i^{-1}(O) = \prod_{k\in I} O_k\,,$$

[2] Das ist die (wohldefinierte) Funktion, die für $k = 1, \dots, m$ auf A_k mit f_k übereinstimmt.

wobei $O_k = X_k, k \neq i$, und $O_i = O$ ist. Wieder mit (IN_2) und Bemerkung 12.4.4 erhält man daraus, dass die Mengen der Gestalt

$$\prod_{k\in I} O_k\,, \tag{12.15}$$

wobei $O_k \in \mathcal{T}_k, k \in I$, und für alle $k \in I$ bis auf endlich viele $O_k = X_k$ gilt, eine Basis für $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

2. Die kanonischen Projektionen $\pi_i : X \to X_i$ bilden offene Mengen aus $\prod_{k\in I} \mathcal{T}_k$ auf offene Mengen aus $\mathcal{T}_i$ ab, also sind sie *offene Abbildungen*.

   Um das einzusehen, sei zunächst $i \in I$ fest. Dann gilt für Basismengen der Gestalt (12.15) offenbar $\pi_i(\prod_{k\in I} O_k) = O_i$. Also ist das Bild unter π_i einer jeden Menge aus dieser Basis offen in $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Da jede offene Menge in $\prod_{k\in I} \mathcal{T}_k$ Vereinigung von Basismengen ist, folgt die Behauptung.

3. Weiters sieht man leicht mit Hilfe der Basis bestehend aus Mengen der Form (12.15), dass für einen Punkt $(x_i)_{i\in I} \in X$ die Mengen

$$\prod_{i\in I} U_i\,,$$

   wobei $U_i \in \mathfrak{U}(x_i), i \in I$, und $U_i = X_i$ für alle bis auf endlich viele i, eine Umgebungsbasis bezüglich $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ bilden.

4. Aus Lemma 12.5.3 folgt, dass für ein Netz $(x_j)_{j\in J}$ und einen Punkt x aus $\prod_{i\in I} X_i$, also $x_j = (\xi_{j,i})_{i\in I}$ und $x = (\xi_i)_{i\in I}$ mit $\xi_{j,i}, \xi_i \in X_i$,

$$x_j \xrightarrow{j\in J} x \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{j,i} \xrightarrow{j\in J} \xi_i \;\text{ für alle } i \in I\,. \tag{12.16}$$

5. Aus (12.16) folgt, dass für abgeschlossene $A_i \subseteq X_i,\; i \in I$, das Produkt $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ ebenfalls abgeschlossen ist. Alternativ kann man das auch daraus folgern, dass

$$\prod_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i)$$

   als Durchschnitt von Urbildern abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen selber wieder abgeschlossen ist.

12.6.7 Bemerkung. Wendet man diese Konstruktion der Produkttopologie etwa auf die zwei Räume $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ mit $I = \{1, 2\}$ an, so bilden insbesondere alle Mengen der Bauart $O_1 \times O_2$ mit $O_1 \subseteq X_1, O_2 \subseteq X_2$ eine Basis der Produkttopologie $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Außerdem sind alle Mengen $A_1 \times A_2$ für abgeschlossene $A_1 \subseteq X_1, A_2 \subseteq X_2$, ebenfalls abgeschlossen.

12.6.8 Beispiel. Seien $\langle X_1, d_1\rangle$ und $\langle X_2, d_2\rangle$ zwei metrische Räume, und sei $d : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ definiert als $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$, vgl. Fakta 8.7.8. Wir wissen schon, dass d eine Metrik auf $X_1 \times X_2$ ist, und dass $U_\epsilon((x_1, x_2)) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2)$.

Die von dieser Metrik erzeugte Topologie $\mathcal{T}(d)$ stimmt mit der Produkttopologie von $\mathcal{T}(d_1)$ und $\mathcal{T}(d_2)$ überein. Um das einzusehen, sei $O \subseteq X_1 \times X_2$. Diese Menge ist in $\mathcal{T}(d)$ genau dann, wenn

$$\forall (x_1, x_2) \in O \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon((x_1, x_2)) = U_\epsilon(x_1) \times U_\epsilon(x_2) \subseteq O\,,$$

was aber äquivalent zu

$$\forall (x_1, x_2) \in O \Rightarrow \exists O_1 \in \mathcal{T}(d_1), O_2 \in \mathcal{T}(d_2) : (x_1, x_2) \in O_1 \times O_2 \subseteq O$$

ist. Da die Mengen der Form $O_1 \times O_2$ eine Basis von $\mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$ darstellen, bedeutet das genau $O \in \mathcal{T}(d_1) \times \mathcal{T}(d_2)$.

Folgendes Korollar samt Beweis funktioniert übrigens auch für Funktionen mit Werten in einem normierten Raum.

12.6.9 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und $f, g : X \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$. Sind f und g stetig, so auch $\lambda f + \mu g$ und fg. Gilt zusätzlich $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\frac{1}{f}$ stetig.*

Beweis. Die Funktion $(x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bekannterweise stetig. Nach (IN_3) angewandt auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist $a \mapsto (f(a), g(a))$, $X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ebenfalls stetig. $\lambda f + \mu g$ ist nun als Zusammensetzung dieser Funktionen ebenfalls stetig.
Der Beweis für fg und $\frac{1}{f}$ verläuft analog. ❑

12.7 Finale Topologie*

12.7.1 Satz. *Seien X eine Menge, $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : Y_i \to X$, $i \in I$, Abbildungen.*

$$\begin{tikzcd}
(Y_i,\mathcal{T}_i) \arrow[dr, "f_i"] \arrow[d, dotted, no head] & \\
(Y_j,\mathcal{T}_j) \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, dotted, no head] & X \\
(Y_k,\mathcal{T}_k) \arrow[ur, "f_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft:

(FI_1) *$\mathcal{T}$ ist die feinste Topologie auf X, sodass alle Abbildungen $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$, $i \in I$, stetig sind.*

Diese Topologie heißt finale Topologie *bezüglich der f_i. Sie ist gegeben durch*

(FI_2) $\mathcal{T} = \{O \subseteq X : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ *für alle* $i \in I\}$,

und erfüllt:

(FI_3) *Ist* $(Y, \mathcal{O})$ *ein topologischer Raum und* $f : X \to Y$, *so ist* $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ *stetig genau dann, wenn alle Abbildungen* $f \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{O})$, $i \in I$, *stetig sind.*

Beweis.

⇝ Wir betrachten die durch (FI_2) definierte Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Es gilt

$$f_i^{-1}(O_1 \cap \ldots \cap O_n) = f_i^{-1}(O_1) \cap \ldots \cap f_i^{-1}(O_n)$$

und

$$f_i^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} O_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f_i^{-1}(O_j)\,.$$

Sind also $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$ bzw. $O_j \in \mathcal{T}$, $j \in J$, so folgt, da die $\mathcal{T}_i$ Topologien sind, $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{T}$ und $\bigcup_{j\in J} O_j \in \mathcal{T}$. Also erfüllt $\mathcal{T}$ die Axiome $(O2)$ und $(O3)$. Wegen $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f_i^{-1}(X) = Y_i$ gilt auch $(O1)$.

Definitionsgemäß gilt $f_i^{-1}(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}_i$, womit alle $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$ stetig sind. Ist $\mathcal{T}'$ eine Topologie auf X, sodass alle f_i stetig sind, so folgt $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ für alle $O \in \mathcal{T}'$, also $O \in \mathcal{T}$. Somit gilt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, und $\mathcal{T}$ erfüllt (FI_1). Klarerweise gibt es höchstens eine Topologie mit der Eigenschaft (FI_1).

⇝ Sei $\mathcal{T}$ die finale Topologie bezüglich der f_i, und sei $f : X \to Y$. Ist f stetig, so ist auch $f \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig. Ist umgekehrt $f \circ f_i$ stetig für alle i, so gilt

$$f_i^{-1}(f^{-1}(\mathcal{O})) = (f \circ f_i)^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}_i, \; i \in I\,,$$

und wir erhalten $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{T}$, womit f stetig ist. ❑

12.7.2 Bemerkung. Die Finale Topologie ist die einzige Topologie auf X, die (FI_3) erfüllt. Um das einzusehen, sei $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie auf X mit der Eigenschaft (FI_3).
Da die Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}')$ trivialerweise stetig ist, folgt aus (FI_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$, dass alle $\mathrm{id}_X \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T}')$ stetig sind. Aus (FI_1) folgt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Für $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ sind andererseits alle Abbildungen $\mathrm{id}_X \circ f_i = f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$ stetig. Mit (FI_3) angewandt auf $\mathcal{T}'$ folgt die Stetigkeit von $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$, und daher auch $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

12.7.3 Bemerkung. Das Finale Topologie Bilden ist assoziativ; also es gilt ein Korollar 12.5.4 entsprechendes Resultat.

12.7.4 Beispiel. Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Weiters sei $\pi : Y \to Y/_\sim$ die kanonische Projektion, $\pi(x) = [x]_\sim$. Die finale Topologie auf $Y/_\sim$ bezüglich π heißt *Quotiententopologie* und wird bezeichnet als $\mathcal{T}/_\sim$.

Ist $A \subseteq Y$, so heißt A *gesättigt* bezüglich $\sim$, wenn $x \in A$ die Inklusion $[x]_\sim \subseteq A$ nach sich zieht. Offenbar sind alle Mengen der Bauart $\pi^{-1}(B)$ mit $B \subseteq Y/_\sim$ gesättigt, und A ist genau dann gesättigt, wenn $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Somit stellt $A \mapsto \pi(A)$ eine bijektive Abbildung von allen gesättigten Teilmengen von Y auf alle Teilmengen von $Y/_\sim$ dar, wobei $B \mapsto \pi^{-1}(B)$ ihre Umkehrung ist.

Eine Menge $P \subseteq Y/_\sim$ ist per definitionem genau dann offen in $(Y/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$, wenn $\pi^{-1}(P)$ offen in $(Y, \mathcal{T})$ ist. Insbesondere ist $O \mapsto \pi(O)$ eine Bijektion von allen gesättigten offenen Teilmengen von Y auf $\mathcal{T}/_\sim$. Entsprechendes gilt für abgeschlossene Mengen.

12.7.5 Proposition. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ eine stetige Abbildung. Bezeichne mit $\sim$ die Äquivalenzrelation $x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$, und seien $\pi : X \to X/_\sim$, $\iota : f(X) \to Y$, die kanonische Projektion bzw. Einbettung. Weiters sei $g : X/_\sim \to f(X)$ die Bijektion mit $\iota \circ g \circ \pi = f$.*

Dann ist $g : (X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig, und folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *g ist ein Homöomorphismus von $(X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$ auf $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

(ii) *Für jede bezüglich $\sim$ gesättigte offene Menge $O \subseteq X$ ist $f(O)$ offen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

(iii) *Für jede bezüglich $\sim$ gesättigte abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ ist $f(A)$ abgeschlossen in $(f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$.*

Beweis. Nach Satz 12.5.1,(IN_3), bzw. Fakta 12.6.2 ist auch $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), \mathcal{V}|_{f(X)})$ stetig. Somit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y = f(X)$ und $\iota = \mathrm{id}_Y$ annehmen.

Jede Abbildung $g : X/_\sim \to Y$ mit $g \circ \pi = f$ muss $g([x]_\sim) = f(x)$ für $x \in X$ erfüllen. Betrachten wir das als Definition, so ist die Wohldefiniertheit davon zu zeigen. Diese folgt aber unmittelbar aus der Definition von von $\sim$, da $[x]_\sim = [y]_\sim$ immer $x \sim y$ und damit $f(x) = f(y)$ nach sich zieht. Also gibt es ein solches g und dieses ist eindeutig. Außerdem ist g injektiv, da aus $f(x) = g([x]_\sim) = g([y]_\sim) = f(y)$ per definitionem $x \sim y$ bzw. $[x]_\sim = [y]_\sim$ folgt. Wegen $g(X/_\sim) = f(X) = Y$ ist g sogar bijektiv.

Die Stetigkeit von g folgt unmittelbar aus Satz 12.7.1, (FI_3), da $X/_\sim$ die finale Topologie $\mathcal{T}/_\sim$ bzgl. π trägt und da $g \circ \pi = f$ stetig ist.

Die Funktion g ist nun genau dann Homöomorphismus, wenn noch g^{-1} stetig ist, also wenn $g(P) \in \mathcal{V}$ für alle $P \in \mathcal{T}/_\sim$. Nach Beispiel 12.7.4 durchläuft $\pi^{-1}(P)$ alle offenen und gesättigten Teilmengen von X. Zudem gilt

$$g(P) = g \circ \pi(\pi^{-1}(P)) = f(\pi^{-1}(P)),$$

woraus man sofort die Äquivalenz von (i) und (ii) erkennt. Die Äquivalenz von (i) und (iii) zeigt man genauso. ❑

12.8 Zusammenhang und Trennungseigenschaft $(T1)$*

Der Begriff der Getrenntheit zweier Teilmengen eines topologischen Raumes, welchen wir jetzt einführen wollen, entspricht dem der Disjunktheit zweier Mengen aus der Mengenlehre. Dabei gibt es eine schwächere und eine stärkere Version.

12.8.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien A, B Teilmengen von X. Dann heißen A und B *getrennt*, wenn $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.
A und B heißen in $(X, \mathcal{T})$ *getrennt durch offenen Mengen*, wenn es disjunkte offene Mengen O_A, O_B gibt, sodass $A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B$. Dazu sagen wir auch, dass sich A und B durch offene Mengen trennen lassen.

12.8.2 Fakta.

1. Offenbar sind getrennte Mengen und auch durch offenen Mengen getrennte Mengen disjunkt.

2. $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ ist äquivalent zu $B \subseteq \overline{A}^c$ und $A \subseteq \overline{B}^c$, und daher auch zur Existenz offener Mengen O_A und O_B, sodass $B \subseteq O_B,\ A \cap O_B = \emptyset$ und $A \subseteq O_A,\ B \cap O_A = \emptyset$.

3. Insbesondere sind A und B sicher dann getrennt, wenn sie durch offene Mengen getrennt sind. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

4. Für $A, B \subseteq X$ und $C := A \cup B$ gilt für den Abschluss von A in C bzgl. der Spurtopologie $\mathcal{T}|_C$ bekannterweise $\overline{A}^{\mathcal{T}|_C} = \overline{A} \cap C = A \cup (B \cap \overline{A})$. Entsprechendes gilt für B.

   Insbesondere sind disjunkte Mengen A und B genau dann getrennt, wenn A und B beide in $A \cup B$ bzgl. der Spurtopologie abgeschlossen sind. Durch Komplementbildung in $A \cup B$ erkennt man dann auch, dass disjunkte Mengen A und B genau dann getrennt sind, wenn A und B beide in $A \cup B$ bzgl. der Spurtopologie offen sind.

   Somit sehen wir auch, dass A und B in $C = A \cup B$ (versehen mit $\mathcal{T}|_C$) genau dann getrennt sind, wenn sie dort durch offene Mengen getrennt sind.

5. Aus dem letzten Punkt erkennen wir, dass die Eigenschaft getrennt zu sein, nur von der Spurtopologie auf $A \cup B$ abhängt. Insbesondere gilt für $A, B \subseteq Y \subseteq X$, dass A und B genau in $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ getrennt sind, wenn sie es in $(X, \mathcal{T})$ sind.

   Die Eigenschaft getrennt durch offene Mengen zu sein, hängt dagegen ganz wesentlich von dem betrachteten topologischen Raum ab.

Für eine weitere Charakterisierung der Eigenschaft durch offene Mengen zu sein, siehe Bemerkung 12.9.2.

12.8.3 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das erste Trennungsaxiom (T_1), wenn gilt:

(T_1) Je zwei verschiedene einpunktige Mengen lassen sich trennen.

Das schon bekannte Trennungsaxiom $(T2)$ bedeutet im Gegensatz dazu, dass sich je zwei verschiedene einpunktige Mengen durch offene Mengen trennen lassen. $(T2)$ ist somit stärker als $(T1)$.

12.8.4 Lemma. *Ein topologischer Raum* $(X, \mathcal{T})$ *erfüllt genau dann* (T_1)*, wenn einpunktige Mengen abgeschlossen sind.*

Beweis. Sei $x \in X$. Nach Fakta 12.8.2, 2, gibt es zu $y \in \{x\}^c$ eine offene Umgebung von y, die x nicht enthält, bzw. ganz in $\{x\}^c$ enthalten ist. Wegen Lemma 12.1.10 ist $\{x\}^c$ offen. Sind umgekehrt einpunktige Mengen abgeschlossen, so gilt für verschiedene $x, y \in X$, dass auch $\{x\}$ und $\{y\}$ in $\{x, y\}$ abgeschlossen sind. Gemäß Fakta 12.8.2, 4, sind diese Mengen dann getrennt. ❑

Eins zu eins kann man den Begriff einer zusammenhängenden Menge auf topologische Räume verallgemeinern; vgl. Definition 6.2.2.

12.8.5 Definition. Eine Teilmenge E eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt *zusammenhängend*, wenn man E nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen schreiben kann.

Aus Fakta 12.8.2, 5, erhalten wir

12.8.6 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raume und $E \subseteq X$. Die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein, hängt nur von der Spurtopologie auf E ab. Insbesondere gilt für $E \subseteq Y \subseteq X$, dass E genau dann in $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ zusammenhängend ist, wenn E es in $(X, \mathcal{T})$ ist.*

Das wichtige Resultat Proposition 6.2.4 lässt sich unmittelbar auf topologische Räume übertragen, wobei man fast denselben Beweis nehmen kann, man muss nur Folgen durch Netze ersetzen. Wir wollen diesen Beweis aber etwas anders führen.

12.8.7 Proposition. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Ist $E \subseteq X$ zusammenhängend, so auch $f(E)$.*

Beweis. Mit $f : X \to Y$ ist auch $f|_E : E \to f(E)$ stetig, wobei E und $f(E)$ jeweils mit der Spurtopologie versehen sind. Wäre $f(E)$ nicht zusammenhängend, so hätten wir $f(E) = A \cup B$ mit in $f(E)$ abgeschlossenen und disjunkten $A, B \neq \emptyset$. Daraus ergibt sich aber im Widerspruch zur Voraussetzung

$$E = f|_E^{-1}(A) \cup f|_E^{-1}(B),$$

wobei $f|_E^{-1}(A), f|_E^{-1}(B) \neq \emptyset$ in E abgeschlossenen und disjunkt sind. ❑

Folgender recht trivialer Sachverhalt ist jedoch sehr nützlich.

12.8.8 Lemma. *Sei E eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Weiters seien $A, B \subseteq X$ getrennt, sodass $E \subseteq A \cup B$. Dann folgt entweder $E \subseteq A$ oder $E \subseteq B$.*

Beweis. Offensichtlich sind $A \cap E$ und $B \cap E$ als Teilmengen zweier getrennter Mengen getrennt. Wegen $E = (A \cap E) \cup (B \cap E)$ und da E zusammenhängend ist, folgt $A \cap E = \emptyset$ oder $B \cap E = \emptyset$ bzw. $E \subseteq B$ oder $E \subseteq A$. Beides gleichzeitig kann nicht der Fall sein, da getrennte Mengen immer disjunkt sind. ❑

Damit können wir auch das im letzten Kapitel bewiesene Resultat Lemma 11.3.1 über die Vereinigung von zusammenhängenden Mengen in allgemeinen topologischen Räumen mit einem etwas kürzeren Beweis versehen.

12.8.9 Korollar. *Ist $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie bestehend aus zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes, sodass für ein gewisses $k \in I$ und allen $i \in I$ die Mengen E_k und E_i nicht getrennt sind*[3], *so ist auch $E := \bigcup_{i\in I} E_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $E = A \cup B$ mit getrennten A und B. Nach Lemma 12.8.8 folgt für jedes $i \in I$ immer entweder $E_i \subseteq A$ oder $E_i \subseteq B$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $E_k \subseteq A$. Wäre $E_i \subseteq B$ für nur ein $i \in I$, so wären E_k und E_i im Widerspruch zur Voraussetzung getrennt. Somit muss E ganz in A enthalten sein, und infolge $B = \emptyset$. ❑

12.8.10 Korollar. *Mit E ist auch jede Teilmenge C eines topologischen Raumes mit $E \subseteq C \subseteq \overline{E}$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $C = A \cup B$ mit getrennten A und B. Aus Lemma 12.8.8 erhalten wir $E \subseteq A$ oder $E \subseteq B$. Im ersten Fall folgt aus $C \cap B \subseteq \overline{E} \cap B \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset$, dass $E \subseteq A$ und daher $B = \emptyset$. Im zweiten Fall schließt man entsprechend auf $A = \emptyset$. ❑

Das folgende Korollar 12.8.11 ist eine unmittelbare Verallgemeinerung von Lemma 11.3.5 auf topologische Räume.

12.8.11 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $\sim \subseteq X \times X$ die Relation auf X definiert durch*

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, E \subseteq X : \ x, y \in E, \ E \text{ ist zusammenhängend},$$

so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Für ein $x \in X$ ist die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ die größte zusammenhängende Menge, die x enthält. Schließlich ist $[x]_\sim$ abgeschlossen.

Beweis. Da die einpunktige Menge $\{x\}$ zusammenhängend ist, ist $\sim$ reflexiv. Die Symmetrie ist klar. Aus $x \sim y, y \sim z$ folgt $x, y \in E$ und $y, z \in F$ für zusammenhängende E und F. Gemäß Korollar 12.8.9 ist dann $E \cup F$ zusammenhängend, wobei $x, z \in E \cup F$. Also ist $\sim$ ein Äquivalenzrelation. Schließlich ist für $x \in X$ die Menge

$$[x]_\sim = \bigcup_{\substack{x\in E \\ E \text{ ist zusammenhängend}}} E\,,$$

wegen Korollar 12.8.9 zusammenhängend. Klarerweise ist diese Menge dann auch die größte zusammenhängende Menge, die x enthält. Wegen Korollar 12.8.10 ist sie auch abgeschlossen. ❑

12.9 Trennungseigenschaften $(T3)$ und $(T4)$

Wir wollen dieses Kapitel mit der einfachen Bemerkung starten, dass in (T_2) Räumen einpunktige Mengen $\{x\}$ abgeschlossen sind. Das folgt aus der Beobachtung, dass es zu $y \in \{x\}^c$ wegen (T_2) eine Umgebung gibt, die x nicht enthält, bzw. ganz in $\{x\}^c$ enthalten ist. Wegen Lemma 12.1.10 ist $\{x\}^c$ offen.

[3] Diese Voraussetzung ist sicher dann erfüllt wenn E_k mit allen E_i einen nichtleeren Schnitt hat.

12.9.1 Definition. Man sagt, dass sich zwei disjunkte Mengen A und B in einem Topologischen Raum *getrennt durch offenen Mengen* sind, wenn es disjunkte offene Mengen O_A, O_B gibt, sodass $A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B$. Dazu sagen wir auch, dass sich A und B durch offene Mengen trennen lassen.
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *regulär*, falls er neben dem Axiom (T_2) noch das Trennungsaxiom (T_3) erfüllt:

(T_3) Abgeschlossene Mengen A und einpunktige Mengen $\{x\}$ mit $x \notin A$ lassen sich durch offene Mengen trennen, also $\exists O_x, O_A \in \mathcal{T} : x \in O_x, A \subseteq O_A,\ O_x \cap O_A = \emptyset$.

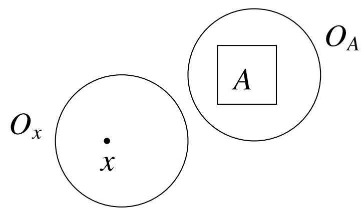

Abbildung 12.3: Drittes Trennungsaxiom (T_3)

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *normal*, falls er neben dem Axiom (T_2) noch das Trennungsaxiom (T_4) erfüllt:

(T_4) Disjunkte abgeschlossene Mengen A und B lassen sich durch offene Mengen trennen, also $\exists O_A, O_B \in \mathcal{T} : A \subseteq O_A, B \subseteq O_B,\ O_A \cap O_B = \emptyset$.

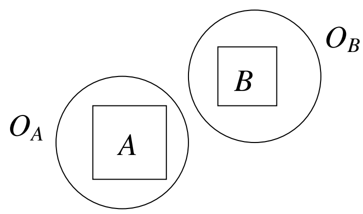

Abbildung 12.4: Viertes Trennungsaxiom (T_4)

Offenbar ist das Axiom ($T2$) äquivalent dazu, dass sich je zwei verschiedene einpunktige Mengen durch offene Mengen trennen lassen. Da einpunktige Mengen in ($T2$)-Räumen abgeschlossen sind, folgt aus normal auch regulär. Im Allgemeinen gilt aber nicht die Umkehrung.

12.9.2 Bemerkung. Zwei disjunkte Mengen A und B – die Disjunktheit ist äquivalent zu $A \subseteq B^c$ – lassen sich genau dann durch offene Mengen trennen, wenn es ein offenes O gibt, sodass

$$A \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq B^c\,. \tag{12.17}$$

In der Tat folgt aus $A \subseteq O_A,\ B \subseteq O_B,\ O_A \cap O_B = \emptyset$, dass $A \subseteq O_A \subseteq O_B^c \subseteq B^c$ und daraus $A \subseteq O_A \subseteq \overline{O_A} \subseteq O_B^c \subseteq B^c$. Andererseits folgt aus (12.17) unmittelbar $A \subseteq O,\ B \subseteq \overline{O}^c,\ O \cap \overline{O}^c = \emptyset$.

Zusammen mit Beispiel 12.1.9, (ii), folgt aus Bemerkung 12.9.2

12.9.3 Korollar. *Das Axiom (T_3) ist äquivalent zur Tatsache, dass man zu dem Punkt x und jedem offenen $O \ni x$ ein offenes P mit $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq O$ finden kann, bzw. äquivalent zur Tatsache, dass man zu einer beliebigen Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ eines beliebigen Punktes x eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}(x)$ mit $\overline{V} \subseteq U$ finden kann.*

12.9.4 Bemerkung. Im Gegensatz zu (T_4) vererben sich die Axiome (T_2) und (T_3) auf Teilräume: Ist $Y \subseteq X$ und $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, der (T_2) bzw. (T_3) erfüllt, so erfüllt $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ auch (T_2) bzw. (T_3).
Um das einzusehen, erfülle X zunächst das (T_2). Sind dann $x \neq y \in Y$ und $O_x, O_y \in \mathcal{T}$ disjunkt mit $x \in O_x$ bzw. $y \in O_y$, so folgt $x \in O_x \cap Y \in \mathcal{T}|_Y, y \in O_y \cap Y \in \mathcal{T}|_Y$. Also erfüllt Y auch das Axiom (T_2).
Gilt (T_3) auf X, und ist $x \in Y$ und W eine Umgebung von x in Y, so haben wir in Fakta 12.6.2 gesehen, dass $W = U \cap Y$ für eine Umgebung U von x in X. Wegen (T_3) gibt es eine Umgebung V von x in X mit $\overline{V} \subseteq U$. Infolge ist $V \cap Y$ eine Umgebung von x in Y mit

$$x \in \overline{V \cap Y}^{\mathcal{T}|_Y} = \overline{V \cap Y}^{\mathcal{T}} \cap Y \subseteq \overline{V} \cap Y \subseteq U \cap Y = W\,.$$

Also gilt (T_3) auch auf Y.

12.9.5 Bemerkung. Ähnlich zeigt man, dass sich die Axiome (T_2) und (T_3) von topologischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)$ auf den Produktraum $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ vererben.

12.9.6 Beispiel. Metrische Räume sind normal.
Dazu seien A und B zwei disjunkte, abgeschlossene Mengen. Zu $a \in A$ gibt es ein $\epsilon_a > 0$ mit $U_{2\epsilon_a}(a) \subseteq B^c$. Entsprechend wählt man ϵ_b für $b \in B$. Nun setze

$$O_A := \bigcup_{a \in A} U_{\epsilon_a}(a) \quad \text{und} \quad O_B := \bigcup_{b \in B} U_{\epsilon_b}(b)\,.$$

Ist $c \in O_A \cap O_B$, so gibt es $a \in A, b \in B$ mit $c \in U_{\epsilon_a}(a) \cap U_{\epsilon_b}(b)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\epsilon_a \geq \epsilon_b$. Es folgt $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < 2\epsilon_a$, was aber $b \in U_{2\epsilon_a}(a)$ implizieren würde. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von ϵ_a. Also gilt $A \subseteq O_A$, $B \subseteq O_B$ und $O_A \cap O_B = \emptyset$.

12.10 Das Lemma von Urysohn*

12.10.1 Lemma. *Sei $M_k = \{\frac{l}{2^k} : l = 0, \ldots, 2^k\}$ und $M = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$. Weiters sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und jedem $r \in M$ sei eine offene Menge $O_r \in \mathcal{T}$ zugeordnet, sodass aus $r, s \in M, r < s$ die Inklusion $\overline{O_r} \subseteq O_s$ folgt und $O_0 = \emptyset, O_1 = X$ gilt. Die durch*

$$f(x) := \inf\{r \in M :\ x \in O_r\}\,,$$

definierte Abbildung $f : X \to [0,1]$ *ist dann stetig, wobei* f *auf* $\bigcap_{r\in M, r>0} O_r$ *den Wert Null und auf* $X \setminus \bigcup_{r\in M, r<1} O_r$ *den Wert Eins annimmt.*

Beweis. Wegen $O_1 = X$ ist $\{r \in M : x \in O_r\}$ für jedes $x \in X$ eine nichtleere Teilmenge von $[0,1]$, wodurch $f(x)$ ein Element von $[0,1]$ ist. Wegen $O_0 = \emptyset$ ist $\{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\}$ für jedes $x \in X$ ebenfalls eine nichtleere Teilmenge von $[0,1]$, womit

$$g(x) := \sup\{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\} \in [0,1] .$$

Aus $s \in \{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\}$ und $t \in \{r \in M : x \in O_r\}$ folgt $s < t$, da $s \geq t$ die Beziehung $x \in \overline{O_s}^c \cap O_t \subseteq \overline{O_s}^c \cap O_s = \emptyset$ nach sich ziehen würde. Also gilt $g(x) \leq f(x)$. Wäre aber $g(x) < f(x)$, so folgte aus der Dichtheit von M in $[0,1]$, dass

$$g(x) < r < s < f(x) \quad \text{für} \quad s, r \in M .$$

Wegen $\overline{O_r} \subseteq O_s$ gilt für ein festes $x \in X$, dass $x \in O_s$ oder $x \in O_s^c \subseteq \overline{O_r}^c$, und damit $f(x) \leq s$ oder $g(x) \geq r$. Das ergibt in jedem Fall ein Widerspruch; also $f(x) = g(x)$.
Die Stetigkeit von $f : X \to [0,1]$ ist äquivalent zur Stetigkeit von f als Funktion nach $\mathbb{R}$ hinein; vgl. Fakta 12.6.2. Da die Mengen der Bauart $(t, +\infty)$ und $(-\infty, t)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Subbasis der Topologie auf $\mathbb{R}$ sind, reicht es gemäß Lemma 12.4.7 nachzuweisen, dass $f^{-1}(t, +\infty) \in \mathcal{T}$ und $f^{-1}(-\infty, t) \in \mathcal{T}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dafür zeigen wir

$$f^{-1}(-\infty, t) = \bigcup_{r\in M,\, r<t} O_r \ (\in \mathcal{T}) \quad \text{und} \quad f^{-1}(t, +\infty) = \bigcup_{r\in M,\, r>t} \overline{O_r}^c \ (\in \mathcal{T}) .$$

In der Tat gilt

$$f(x) = \inf\{r \in M : x \in O_r\} < t \Leftrightarrow \exists\, r \in M, r < t, x \in O_r \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r\in M, r<t} O_r ,$$

$$f(x) = g(x) = \sup\{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\} > t \Leftrightarrow \exists\, r \in M, r < t, x \in \overline{O_r}^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r\in M, r>t} \overline{O_r}^c .$$

Schließlich folgt $f(\bigcap_{r\in M, r>0} O_r) \subseteq \{0\}$ und $f(X \setminus \bigcup_{r\in M, r<1} O_r) \subseteq \{1\}$ unmittelbar aus der Definition von f. ❑

Wir erhalten im Folgenden das in der Literatur als *Lemma von Urysohn* bezeichnete Ergebnis für topologische Räume, welche $(T4)$ erfüllen; siehe Definition 12.9.1.

12.10.2 Korollar. *Gilt in* $(X, \mathcal{T})$ *das vierte Trennungsaxiom* $(T4)$*, so sind je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen* A, B *durch eine stetige Funktion* $f : X \to [0,1]$ *trennbar, also* $f(A) \subseteq \{0\}, f(B) \subseteq \{1\}$.

Beweis. Sind A, B zwei abgeschlossene und disjunkte Teilmengen von X, so gibt es wegen dem $(T4)$ zwei disjunkte offene Teilmengen $O \supseteq A, P \supseteq B$. Daraus folgt $A \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq P^c \subseteq B^c$. Für $k = 0$ setzen wir $O_0 := O$, $O_1 := B^c$ und erhalten $\overline{O_r} \subseteq O_s$ für alle $r < s,\ r, s \in M_0 = \{0, 1\}$.

Angenommen, wir haben für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $r \in M_k$ offene O_r definiert, sodass $\overline{O_r} \subseteq O_s$ für alle $r < s,\ r, s \in M_k$. Dann definieren wir für $t = \frac{l}{2^{k+1}} \in M_{k+1} \setminus M_k$, also $l \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N},\ l < 2^{k+1}$, die Menge O_t folgendermaßen:
Wegen $r := \frac{l-1}{2^{k+1}},\ s := \frac{l+1}{2^{k+1}} \in M_k$ folgt aus $\overline{O_r} \subseteq O_s$, dass die abgeschlossenen Mengen $\overline{O_r}, O_s^c$ disjunkt sind. Wie oben für A und B leiten wir aus dem $(T4)$ die Existenz einer offenen Menge O_t mit $\overline{O_r} \subseteq O_t \subseteq \overline{O_t} \subseteq O_s$ her.
Infolge haben wir induktiv für alle $r \in M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ offene Mengen definiert, sodass $\overline{O_r} \subseteq O_s$ für alle $r < s,\ r, s \in M$. Definieren wir nun noch O_0 und O_1 um, indem wir $O_0 := \emptyset$ sowie $O_1 := X$ setzen, so sind alle Voraussetzungen von Lemma 12.10.1 erfüllt.
Wegen $A \subseteq \bigcap_{r \in M, r > 0} O_r$ erfüllt die stetige Funktion aus diesem Lemma $f(A) \subseteq \{0\}$ und wegen $O_r \subseteq B^c,\ r < 1, r \in M$ bzw. $B \subseteq X \setminus \bigcup_{r \in M, r<1} O_r$ auch $f(B) \subseteq \{1\}$. ❑

Als Folgerung des Lemmas von Urysohn erhalten wir den *Fortsetzungssatz von Tietze*.

12.10.3 Satz (Fortsetzungssatz von Tietze). *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfülle (T_4). Ist $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert eine stetige Fortsetzung g von f auf X, also ein stetiges $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g|_A = f$, wobei* $\sup_{t \in A} |f(t)| = \sup_{t \in X} |g(t)|$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.

Der Beweis beruht auf dem folgenden Lemma.

12.10.4 Lemma. *Erfülle $(X, \mathcal{T})$ das Axiom T_4 und sei $u : A \to [-1, 1]$ stetig. Dann existiert eine stetige Funktion $v : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, sodass $|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$.*

Beweis. Sei $H := \{x \in A : -1 \leq u(x) \leq -\frac{1}{3}\}$ und $K := \{x \in A : \frac{1}{3} \leq u(x) \leq 1\}$. Dann sind H, K abgeschlossen in A bezüglich der Spurtopologie. Da A abgeschlossen in X ist, sind H, K auch abgeschlossen in X. Klarerweise gilt $H \cap K = \emptyset$. Nach dem Lemma von Urysohn, Korollar 12.10.2, gibt es eine stetige Funktion $v : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ mit $v(H) \subseteq \{-\frac{1}{3}\}, v(K) \subseteq \{\frac{1}{3}\}$. Diese hat offensichtlich die gewünschte Eigenschaft. ❑

Beweis. (Satz 12.10.3)

$\rightsquigarrow$ Habe f zunächst Werte in $[-1, 1]$ mit $\|f\|_\infty = 1$. Wir konstruieren eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ stetiger Funktionen $h_n : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$.

Wendet man Lemma 12.10.4 auf die Funktion f an, so erhält man $h_0 : X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ mit $|f(x) - h_0(x)| \leq \frac{2}{3}$ für $x \in A$.

Haben wir für $j = 0, \ldots, n$ stetige $h_j : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^j, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^j]$, sodass

$$\Big|f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_n(x)\Big| \leq (\frac{2}{3})^{n+1} \quad \text{für alle} \quad x \in A\,,$$

so wende man Lemma 12.10.4 auf $u(x) := (\frac{3}{2})^{n+1}(f(x) - \sum_{j=0}^n h_n(x))$ an. Die resultierende Funktion wird mit $(\frac{2}{3})^{n+1}$ multipliziert, und wir erhalten eine Funktion $h_{n+1} : X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}]$, sodass für $x \in A$

$$\Big|f(x) - \sum_{j=0}^{n+1} h_n(x)\Big| = \Big|\Big(f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_n(x)\Big) - h_{n+1}(x)\Big| \leq \frac{2}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n+1}\,.$$

$\rightsquigarrow$ Wir werden in Lemma 12.13.9 sehen, dass der Raum $C_b(X, \mathbb{R})$ aller reellwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen auf X versehen mit $\|.\|_\infty$ ein Banachraum ist. Wegen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|h_j\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^j = 1 \tag{12.18}$$

konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} h_j$ dort absolut; vgl. Definition 9.3.1. Gemäß Fakta 9.3.2 konvergiert somit $\sum_{j=0}^{\infty} h_j$ in $C_b(X, \mathbb{R})$ bzgl. $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig, gegen eine $g \in C_b(X, \mathbb{R})$, wobei aus (12.18) die Abschätzung $\|g\|_\infty \leq 1$ folgt.

Schließlich ist g eine Fortsetzung von f, denn für $x \in A$ gilt

$$\Big|f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_n(x)\Big| \leq \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

$\rightsquigarrow$ Ist allgemeiner $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt und nicht die Nullfunktion, so wenden wir das gezeigte auf $\frac{f}{\|f\|_\infty}$ an. Nach Multiplikation der resultierenden Funktion auf X mit $\|f\|_\infty$ erhalten wir die gewünschte Fortsetzung von f. Im Falle $f = 0$ setzen wir einfach $g = 0$.

$\rightsquigarrow$ Sei nun $f : A \to \mathbb{R}$ unbeschränkt. Da $\mathbb{R}$ vermöge $\phi : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ homöomorph zu $(-1, 1)$ ist, können wir das bewiesene auf $\phi \circ f : A \to (-1, 1)$ anwenden und erhalten eine Fortsetzung $r : X \to [-1, 1]$ davon.

Wegen $A \subseteq r^{-1}(-1, 1)$ sind die abgeschlossenen Mengen A und $r^{-1}\{-1, 1\}$ disjunkt. Eine Anwendung von Korollar 12.10.2 ergibt eine stetige Funktion $s : X \to [0, 1]$ mit $s(A) \subseteq \{1\}$ und $s(r^{-1}\{-1, 1\}) = \{0\}$.

Die ebenfalls stetige Funktion $r \cdot s : X \to [-1, 1]$ nimmt nun offensichtlich die Werte ± 1 nicht an, also $r \cdot s : X \to (-1, 1)$, und stimmt auf A mit $\phi \circ f$ überein. Die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ definiert durch $g = \phi^{-1} \circ (r \cdot s) : X \to \mathbb{R}$ ist die gesuchte Funktion. ❑

12.10.5 Bemerkung. Aus der Gültigkeit des Fortsetzungssatz von Tietze auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ folgt sofort das Lemma von Urysohn, Korollar 12.10.2, da für disjunkte und abgeschlossene Mengen A, B die Funktion $f : A \cup B \to [-1, 1]$ definiert durch $f = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$ wegen Lemma 12.6.4 stetig ist, und daher eine stetige Fortsetzung $g : X \to [-1, 1]$ hat. Die Funktion $\frac{1}{2}(g + 1)$ hat dann die in Korollar 12.10.2 verlangten Eigenschaften.
Andererseits folgt aus der Gültigkeit des Lemma von Urysohn, Korollar 12.10.2, auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, dass dieser das Axiom $(T4)$ erfüllt. Sind nämlich $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, und ist $f : X \to [0, 1]$ wie in Korollar 12.10.2, so folgt für die offenen Menge $f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$ und $f^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty)$, dass $A \subseteq f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2})$, $B \subseteq f^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty)$, $f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2}) \cap f^{-1}(\frac{1}{2}, +\infty) = \emptyset$.

12.11 Kompaktheit

Bei metrischen Räumen haben wir in Definition 5.2.6 den Begriff der Kompaktheit mit Hilfe von Folgen eingeführt. Für allgemeine topologische Räume wollen wir anders starten. Wir werden weiter unten sehen, dass dieser Zugang zur Kompaktheit in metrischen Räumen zu dem schon bekannten Konzept äquivalent ist.

12.11.1 Definition. Eine Teilmenge K eines topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K, also $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ mit

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq K\,,$$

eine endliche Teilüberdeckung besitzt, es also $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ gibt mit

$$V_1 \cup \ldots \cup V_n \supseteq K\,.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *relativ kompakt*, wenn $\overline{A} \subseteq X$ kompakt ist. Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt x eine kompakte Umgebung besitzt.

Sei C eine Familie von Teilmengen einer Mengen X, also $C \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir sagen, dass C die *endliche Durchschnittseigenschaft* hat, wenn für je endlich viele $C_1, \ldots, C_n \in C$ stets $C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$ gilt.

12.11.2 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(K_1) *K ist kompakt.*

(K_2) *K betrachtet als Teilmenge von $(K, \mathcal{T}|_K)$ ist kompakt.*

(K_3) *Jede Familie bzgl. $\mathcal{T}|_K$ abgeschlossener Teilmengen von K mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt.*

(K_4) *Jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in K hat ein gegen ein $x \in K$ konvergentes Teilnetz.*

Beweis.

(K_1) ⇒ (K_2): Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}|_K$ eine offene Überdeckung von K in $(K, \mathcal{T}|_K)$. Zu $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U_V \in \mathcal{T}$ mit $U_V \cap K = V$, womit $\mathcal{U} := \{U_V : V \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von K ist. Es gibt also $U_{V_1}, \ldots, U_{V_n}$ mit $U_{V_1} \cup \ldots \cup U_{V_n} \supseteq K$ und folglich

$$V_1 \cup \ldots \cup V_n = (U_{V_1} \cap K) \cup \ldots \cup (U_{V_n} \cap K) = (U_{V_1} \cup \ldots \cup U_{V_n}) \cap K = K\,.$$

(K_2) ⇒ (K_1): Sei K als Teilmenge von $(K, \mathcal{T}|_K)$ kompakt. Für eine Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ von K ist

$$\mathcal{V} := \{U \cap K : U \in \mathcal{U}\}$$

eine offene Überdeckung von $(K, \mathcal{T}|_K)$. Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1 \cap K, \ldots, U_n \cap K\}$, und wir erhalten $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq K$.

$(K_2) \Rightarrow (K_3)$: Sei C eine Familie in $(K, \mathcal{T}|_K)$ abgeschlossener Teilmengen von K mit der endlichen Durchschnittseigenschaft. Aus $\bigcap_{C \in C} C = \emptyset$ folgt

$$\bigcup_{C \in C} K \setminus C = K\,,$$

wobei die $K \setminus C$ in $(K, \mathcal{T}|_K)$ offen sind. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung, $(K \setminus C_1) \cup \ldots \cup (K \setminus C_n) = K$, und wir erhalten $C_1 \cap \ldots \cap C_n = \emptyset$, was aber der endlichen Durchschnittseigenschaft widerspricht.

$(K_3) \Rightarrow (K_2)$: Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}|_K$ eine offene Überdeckung von K. Würde $\mathcal{V}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzen, so wäre $(K \setminus V_1) \cap \ldots \cap (K \setminus V_n) \neq \emptyset$ für jede endliche Auswahl $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$. Also hätte $C = \{K \setminus V : V \in \mathcal{V}\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, und nach Voraussetzung wäre der Schnitt aller Mengen $K \setminus V,\ V \in \mathcal{V}$ nichtleer. Damit wäre $\mathcal{V}$ aber keine Überdeckung.

$(K_3) \Rightarrow (K_4)$: Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in K. Für $i \in I$ ist $C_i = \overline{\{x_k : k \geq i\}} \cap K$ abgeschlossen in $(K, \mathcal{T}|_K)$. Dabei hat $\{C_i : i \in I\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, denn sind $i_1, \ldots, i_n \in I$ und ist $i \in I$ mit $i \geq i_1, \ldots, i_n$, so gilt

$$\emptyset \neq \overline{\{x_k : k \geq i\}} \subseteq \overline{\{x_k : k \geq i_1\}} \cap \cdots \cap \overline{\{x_k : k \geq i_n\}}\,.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in \cap_{i \in I} C_i$.

Jetzt sei $J = \{(j, U) : j \in I, U \in \mathfrak{U}(x), x_j \in U\}$ versehen mit der offensichtlich reflexiven und transitiven Relation

$$(j, U) \leq (k, V) :\Leftrightarrow j \leq k \wedge U \supseteq V\,.$$

Für $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \in J$ sei $k \in I$ mit $k \geq j_1, j_2$. Wegen $x \in \overline{\{x_j : j \geq k\}}$ gibt es ein $x_j \in U_1 \cap U_2$ mit $j \geq k$, und infolge $(j, U_1 \cap U_2) \geq (j_1, U_1), (j_2, U_2)$. Also ist J gerichtet.

Mit $x_{i(j,U)} := x_j$ erhalten wir ein Teilnetz $(x_{i(j,U)})_{(j,U) \in J}$ von $(x_i)_{i \in I}$, da für jedes $i_0 \in I$ die Beziehung $(i_0, X) \in J$ gilt und da $(j, U) \geq (i_0, X)$ immer $i(j, U) = j \geq i_0 = i(i_0, U)$ nach sich zieht.

Zu $V \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es ein $k \in I$ mit $x_k \in V$. Für $(j, U) \geq (k, V)$ folgt dann $x_{i(j,U)} = x_j \in U \subseteq V$ und somit die Konvergenz dieses Teilnetzes gegen x.

$(K_4) \Rightarrow (K_3)$: Hat $C = \{C_i : i \in I\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, so sei $\mathcal{E}(I)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von I gerichtet durch die Relation $M_1 \leq M_2 :\Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2$.

Für $M \in \mathcal{E}(I)$ sei x_M irgend ein Punkt aus $\cap_{i \in M} C_i$. Man beachte, dass nach Voraussetzung dieser Schnitt nicht leer ist. Das Netz $(x_M)_{M \in \mathcal{E}(I)}$ hat wegen $(K4)$ ein gegen ein $x \in X$ konvergentes Teilnetz $(x_{M(j)})_{j \in J}$.

Ist $k \in I$, so gibt es wegen $\{k\} \in \mathcal{E}(I)$ ein $j_0 \in J$ mit $M(j) \supseteq \{k\}$ für alle $j \geq j_0$, und somit $x_{M(j)} \in \cap_{i \in M(j)} C_i \subseteq C_k$. Also liegt das ebenfalls gegen x konvergente Netz

$(x_{M(j)})_{j\in J_{\geq j_0}}$ in der abgeschlossenen Menge C_k. Mit Proposition 12.2.7 folgt daraus $x \in C_k$, und, da $k \in I$ beliebig war, auch dass der Schnitt aller C_k's x enthält und damit nicht leer ist. ❑

12.11.3 Bemerkung (*)**.** Wegen Lemma 12.2.15 ist die Bedingung ($K4$) zu der Tatsache äquivalent, dass jedes Netz einen Häufungspunkt in K hat.

12.11.4 Satz (*)**.** *Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in einer kompakten Menge $K \subseteq X$ konvergiert genau dann gegen ein $x \in X$, wenn x der einzige Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ ist.*

Beweis. Wenden wir nun Lemma 12.2.16 an, und beachten, dass Häufungspunkte von Teilnetzen von $(x_i)_{i\in I}$ auch Häufungspunkte von $(x_i)_{i\in I}$ sind (vgl. Lemma 12.2.15), so erhalten wir aus Bemerkung 12.11.3 das behauptete Ergebnis. ❑

12.11.5 Definition (*)**.** Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt *abzählbar kompakt*, wenn jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt in A hat.
Eine Teilmenge A eines topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in A eine gegen ein $x \in A$ konvergente Teilfolge hat.

12.11.6 Bemerkung (*)**.** Ist $M \subseteq A$ unendlich, so gibt es sicher eine injektive Funktion $x : \mathbb{N} \to M$, also eine Folge $x_n = x(n)$ mit paarweise verschiedenen Folgengliedern.
Ist A folgenkompakt, so gilt $x = \lim_{k\to\infty} x_{n(k)}$ für eine Teilfolge $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in A$. Für jede Umgebung U von x gibt es somit einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_{n(k)} \in U$ für alle $k \geq k_0$. Da die Folgenglieder alle verschieden sind, enthält U sicherlich einen Punkt $y := x_{n(k)} \in M$, der ungleich x ist. Also hat M einen Häufungspunkt in A; vgl. Definition 12.2.8. Somit folgt für eine Teilmenge eines topologischen Raumes aus der Eigenschaft folgenkompakt die Eigenschaft abzählbar kompakt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.
Ist A kompakt, so folgt wegen Proposition 12.11.2 $x = \lim_{i\in I} x_{n(i)}$ für ein Teilnetz $(x_{n(i)})_{i\in I}$ und ein $x \in A$. Für jede Umgebung U von x gibt es somit einen Index $i_0 \in I$, sodass $x_{n(i)} \in U$ für alle $i \geq i_0$.
Da die Folgenglieder alle verschieden sind, gibt es höchstens ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_{n_0} = x$. Die Teilnetzeigenschaft bedingt die Existenz eines $i_1 \in I$, sodass aus $i \geq i_1$ immer $n(i) \geq n_0 + 1$ und $x_{n(i)} \in U$ folgt. Für solche i liegt der Punkt $y := x_{n(i)} \in M$ in U und ist ungleich x. Also hat M einen Häufungspunkt in A; vgl. Definition 12.2.8. Somit folgt auch aus kompakt abzählbar kompakt. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen auch hier nicht.
Überraschenderweise gilt im Allgemeinen weder, dass kompakt folgenkompakt impliziert, noch, dass folgenkompakt kompakt impliziert. Für metrische Räumen werden wir in Satz 12.13.3 sehen, dass alle drei Begriffe äquivalent sind.

12.11.7 Lemma. *Für ein topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und A, $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ gilt:*

(*i*) *Ist A kompakt und $B \subseteq A$ abgeschlossen in $(A, \mathcal{T}|_A)$, dann ist B kompakt.*

(*ii*) *Sind $A_1, \dots, A_m$ kompakt, so auch $A_1 \cup \dots \cup A_m$.*

(*iii*) *Ist $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff und A kompakt, so ist A abgeschlossen.*

Beweis.

(i) Die Menge $A \setminus B$ ist offen in $(A, \mathcal{T}|_A)$. Also existiert $O \in \mathcal{T}$ mit $O \cap A = A \setminus B$. Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von B aus in X offenen Mengen, dann überdeckt $\mathcal{U} \cup \{O\}$ ganz A. Daher gibt es $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup O \supseteq A$. Es folgt

$$\begin{aligned} U_1 \cup \dots \cup U_n &= U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup \underbrace{(O \cap B)}_{=\emptyset} \\ &\supseteq (U_1 \cap B) \cup \ldots \cup (U_n \cap B) \cup (O \cap B) \\ &= (U_1 \cup \ldots \cup U_n \cup O) \cap B \supseteq B\,. \end{aligned}$$

(ii) Sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $A_1 \cup \ldots \cup A_m$ aus in X offenen Mengen. Dann überdeckt $\mathcal{U}$ jedes A_i, also existieren für $i = 1, \dots, m$ offene $U_1^i, \dots, U_{n_i}^i$ mit

$$U_1^i \cup \ldots \cup U_{n_i}^i \supseteq A_i\,,$$

und es folgt

$$\bigcup_{k,i} U_k^i \supseteq A_1 \cup \ldots \cup A_m\,.$$

(iii) Sei A kompakt, und sei $x \notin A$. Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist, gibt es zu jedem Punkt $y \in A$ offene Umgebungen $U_y \in \mathfrak{U}(y)$, $V_y \in \mathfrak{U}(x)$, mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Klarerweise ist $\{U_y : y \in A\}$ eine offene Überdeckung von A. Daher gibt es $y_1, \dots, y_n \in A$, sodass bereits $U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n} \supseteq A$ gilt. Die Menge $V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}$ ist als endlicher Durchschnitt von Umgebungen von x ebenfalls eine Umgebung von x, und es gilt

$$A \cap (V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}) \subseteq (U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}) \cap (V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}) = \emptyset\,.$$

Also ist x ein innerer Punkt von A^c. Nach Lemma 12.1.10 ist A^c offen und daher A abgeschlossen. ❑

12.11.8 Lemma. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist auch $f(A) \subseteq Y$ kompakt.*

Beweis. Für eine Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ von $f(A)$ ist auch $f^{-1}(\mathcal{U})$ eine Überdeckung von A, die wegen der Stetigkeit von f aus offenen Mengen besteht. Es gibt also $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, sodass

$$f^{-1}(U_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_n) \supseteq A\,.$$

Wendet man darauf f an, dann folgt $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq f(A)$. ❑

Nimmt man die Charakterisierung ($K4$) aus Proposition 12.11.2 her, so kann man Lemma 12.11.8 auch ganz ähnlich wie in Proposition 6.1.13 beweisen. Ist nämlich $(y_i)_{i \in I}$ ein Netz in $f(A)$, und wählt man zu jedem $i \in I$ ein $x_i \in A$, sodass $f(x_i) = y_i$, so hat das Netz $(x_i)_{i \in I}$ nach ($K4$) ein gegen ein $x \in A$ konvergentes Teilnetz $(x_{i(j)})_{j \in J}$. Aus Lemma 12.3.3 schließen wir, dass $(y_{i(j)})_{j \in J} = \big(f(x_{i(j)})\big)_{j \in J}$ gegen $f(x) =: y$ konvergiert. Also hat jedes Netz aus $f(A)$ ein gegen ein $y \in f(A)$ konvergentes Teilnetz. Nach ($K4$) aus Proposition 12.11.2 ist $f(A)$ somit kompakt.

12.11.9 Beispiel. Wir betrachten $[-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T}_< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ wie in Beispiel 12.1.4, (v).
Sei $K \subseteq [-\infty, +\infty)$ nichtleer, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus K mit Grenzwert $\sup K$ ($\in [-\infty, +\infty]$); vgl. Beispiel 3.3.4 im Fall $\sup K < +\infty$. Im Fall $\sup K \notin K$ ergibt $\{[-\infty, x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von K, welche keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Infolge muss eine kompakte Teilmenge K nach oben beschränkt sein und sogar ein Maximum haben.
Hat umgekehrt K ein Maximum s, so gilt für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ aus K

$$\limsup_{i\in I} x_i = \inf_{k\in I} \sup_{I\ni i\geq k} x_i \leq s\,.$$

Gemäß Beispiel 12.1.14, (ii), konvergiert $(x_i)_{i\in I}$ gegen $s \in K$ in $([-\infty, +\infty), \mathcal{T}_<)$. Wegen Proposition 12.11.2 ist K dann kompakt.
Also sind die kompakten Teilmengen von $[-\infty, +\infty)$ genau diejenigen, welche ein Maximum haben. Da die abgeschlossenen Teilmengen alle von der Gestalt $[-\infty, +\infty) \setminus [-\infty, a) = [a, +\infty)$ sind, sehen wir auch, dass im Allgemeinen die Voraussetzung Hausdorff in Lemma 12.11.7, (iii), nicht weggelassen werden kann.
Ist schließlich $(X, \mathcal{T})$ ein weiterer topologischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt, und $f : X \to [-\infty, +\infty)$ oberhalbstetig (siehe Beispiel 12.3.5), so erhalten wir aus Lemma 12.11.8 die Kompaktheit von $f(X)$ in $([-\infty, +\infty), \mathcal{T}_<)$. Also hat $f(X)$ ein Maximum, und infolge gibt es ein $x \in K$ mit $f(x) \geq f(t)$ für alle $t \in K$.

12.11.10 Korollar.

(i) *Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und $(Y, \mathcal{O})$ Hausdorff. Weiters sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ bijektiv und stetig. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

(ii) *Sei die Menge X versehen mit den Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{O}$, sodass $\mathcal{T}$ kompakt und $\mathcal{O}$ Hausdorff ist. Gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$, so folgt sogar $\mathcal{O} = \mathcal{T}$.*

Beweis.

(i) Wir müssen nachweisen, dass f^{-1} stetig ist. Dazu zeigen wir, dass das Urbild unter f^{-1} einer in $(X, \mathcal{T})$ abgeschlossenen Menge in $(Y, \mathcal{O})$ abgeschlossen ist; siehe Satz 12.3.6. In der Tat ist gemäß Lemma 12.11.7, (i), jedes abgeschlossene $A \subseteq X$ auch kompakt. Nach Lemma 12.11.8 ist dann auch $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ als Teilmenge von Y kompakt. Wegen Lemma 12.11.7, (iii), ist $(f^{-1})^{-1}(A)$ damit auch abgeschlossen.

(ii) Wegen $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$ ist $\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{O})$ stetig, und (i) zeigt, dass id_X sogar ein Homöomorphismus ist, wodurch $\mathcal{T} = \mathcal{O}$. ❑

12.11.11 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

(i) *Ist X Hausdorffsch, $A \subseteq X$ kompakt, und $x \in X \setminus A$, so lassen sich x und A durch offene Mengen trennen, also gibt es disjunkte offene Mengen $O_x \ni x$ und $O_A \supseteq A$.*

(*ii*) *Erfüllt X das Axiom (T_3), und sind $A \subseteq X$ kompakt, $B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so lassen sich A und B durch offene Mengen trennen.*

(*iii*) *Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt und Hausdorffsch, so ist $(X, \mathcal{T})$ sogar normal.*

Beweis.

(*i*) Zu jedem $y \in A$ gibt es zwei disjunkte offene Mengen $Q_y \ni y$ und $P_y \ni x$. Klarerweise ist dann $\{Q_y : y \in A\}$ eine Überdeckung von A. Wegen der Kompaktheit gibt es $y_1, \dots, y_n \in A$, sodass $A \subseteq Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n} := O_A$. Für $O_x := P_{y_1} \cap \dots \cap P_{y_n}$ gilt dann

$$O_x \cap O_A = O_x \cap (Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n}) \subseteq (P_{y_1} \cap Q_{y_1}) \cup \dots \cup (P_{y_n} \cap Q_{y_n}) = \emptyset\,.$$

(*ii*) Zu jedem $y \in A$ gibt es wegen (T_3) zwei disjunkte offene Mengen $Q_y \ni y$ und $P_y \supseteq B$. Dann ist $\{Q_y : y \in A\}$ eine Überdeckung von A. Wegen der Kompaktheit gibt es $y_1, \dots, y_n \in A$, sodass $A \subseteq Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n} := O_A$. Außerdem gilt für $O_B := P_{y_1} \cap \dots \cap P_{y_n}$

$$O_B \cap (Q_{y_1} \cup \dots \cup Q_{y_n}) \subseteq (P_{y_1} \cap Q_{y_1}) \cup \dots \cup (P_{y_n} \cap Q_{y_n}) = \emptyset\,.$$

Also lassen sich A und B durch offene Mengen trennen.

(*iii*) Da jede abgeschlossene Teilmenge von X nach Lemma 12.11.7 kompakt ist, folgt aus (*i*), dass X regulär ist, also gilt (T_2) und (T_3). Nach (*ii*) ist X dann sogar normal. ❑

12.12 Satz von Tychonoff*

Der Übersicht halber schreiben wir in diesem Abschnitt die Elemente von $X = \prod_{i \in I} X_i$ als Funktionen $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$.

12.12.1 Lemma. *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume, und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie $\prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$ versehen. Ein Netz $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ hat $f \in X$ genau dann als Häufungspunkt, wenn für alle endlichen $J \subseteq I$ das Element $f|_J$ Häufungspunkt von $(f_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda}$ in $\prod_{i \in J} X_i$ ist.*

Beweis. Da die Mengen der Bauart $\bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(O_i)$ mit offenen Umgebungen O_i von $f(i)$ und endlichen $J \subseteq I$ eine Umgebungsbasis von f abgeben, ist gemäß Definition 12.2.13 f genau dann ein Häufungspunkt, wenn es zu jedem $\lambda \in \Lambda$, jedem endlichen $J \subseteq I$ und jeder Wahl von offenen Umgebungen O_i von $f(i)$ für $i \in J$ immer ein $\alpha \in \Lambda$ gibt, sodass $\alpha \succeq \lambda$ und

$$f_\alpha \in \bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(O_i), \quad \text{bzw. äquivalent dazu,} \quad f_\alpha(i) \in O_i \quad \text{für alle} \quad i \in J\,,$$

gilt. Ähnlich sieht man, dass $f|_J$ genau dann Häufungspunkt von $(f_\lambda|_J)_{\lambda \in \Lambda}$ ist, wenn es zu jedem $\lambda \in \Lambda$ und allen offenen Umgebungen O_i von $f(i)$ für $i \in J$ immer ein $\alpha \in \Lambda$ gibt, sodass $\alpha \succeq \lambda$ und $f_\alpha(i) \in O_i$ für alle $i \in J$.
Da Allquantoren vertauschen, folgt die behauptete Äquivalenz. ❑

12.12.2 Satz (Tychonoff). *Sei $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, eine Familie topologischer Räume, und sei $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ die Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$. Dann ist $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ genau dann kompakt, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, kompakt sind.*

Beweis. Setzt man voraus, dass $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist, so ist jeder Raum $(X_i, \mathcal{T}_i)$ als stetiges Bild eines kompakten Raumes ebenfalls kompakt; vgl. Lemma 12.11.8.
Sei nun vorausgesetzt, dass $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für jedes $i \in I$ kompakt ist. Gemäß Proposition 12.11.2 reicht es für die Kompaktheit von $\prod_{i\in I} X_i$ zu zeigen, dass jedes Netz $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ aus $\prod_{i\in I} X_i$ einen Häufungspunkt hat.
Betrachte die Menge $\mathcal{M}$ aller $g : D_g \to \bigcup_{i\in I} X_i$ mit $D_g \subseteq I$ und $g(i) \in X_i$ für $i \in D_g$. Insbesondere ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(I \times \bigcup_{i\in I} X_i)$ geordnet durch $\subseteq$. Wir setzen

$$HP_p := \{g \in \mathcal{M} : g \text{ ist Häufungspunkt von } (f_\lambda|_{D_g})_{\lambda\in\Lambda} \text{ in } \prod_{i\in D_g} X_i\}.$$

Da X_i kompakt ist, hat $(f_\lambda(i))_{\lambda\in\Lambda}$ für jedes $i \in I$ mindestens einen Häufungspunkt y_i in X_i, womit $\{i\} \times \{y_i\} \in HP_p$. Insbesondere ist HP_p nichtleer.
Für eine bezüglich $\subseteq$ totalgeordnete und nichtleere Teilmenge $\mathcal{N} \subseteq HP_p$, sieht man leicht, dass

$$h := \bigcup_{g\in\mathcal{N}} g,$$

$h(i) \in X_i$ für alle $i \in D_h$ erfüllt. Da jedes endliche $J \subseteq D_h$ schon in einem D_g mit $g \in \mathcal{N}$ enthalten ist, folgt aus Lemma 12.12.1, dass h ein Häufungspunkt von $(f_\lambda|_{D_h})_{\lambda\in\Lambda}$ ist, womit $h \in HP_p$.
Wir können das Lemma von Zorn anwenden und erhalten ein maximales $f \in HP_p$. Wegen Lemma 12.2.15 konvergiert ein gewisses Teilnetz $(f_{\lambda(\beta)}|_{D_g})_{\beta\in B}$ gegen $f|_{D_g}$. Wäre dabei $I \setminus D_g$ nichtleer und $i \in I \setminus D_g$, so impliziert die Kompaktheit von X_i die Existenz eines gegen ein $x_i \in X_i$ konvergenten Teilnetzes $(f_{\lambda(\beta(\gamma))}(i))_{\gamma\in C}$ von $(f_{\lambda(\beta)}(i))_{\beta\in B}$.
Setzen wir f durch $h(i) := x_i$ auf $D_f \cup \{i\}$ fort, so konvergiert $(f_{\lambda(\beta(\gamma))}|_{D_f\cup\{i\}})_{\gamma\in C}$ gemäß Lemma 12.5.3 gegen h. Damit ist h ist Häufungspunkt von $(f_\lambda|_{D_f\cup\{i\}})_{\lambda\in\Lambda}$ in $\prod_{i\in D_f\cup\{i\}} X_i$, was der Maximalität von f widerspricht. Also gilt $D_f = I$, und infolge ist $f \in X$ Häufungspunkt von $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. ❑

12.13 Kompaktheit in metrischen Räumen

In diesem Abschnitt wollen wir uns speziell kompakte metrische Räume anschauen. Im ersten Semester haben wir die Kompaktheit einer Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) so definiert, dass jede Folge eine gegen einen Punkt aus K konvergente Teilfolge hat. Wir werden hier unter anderem sehen, dass die Definition aus dem ersten Semester äquivalent zu der aus Definition 12.11.1 ist. Außerdem werden wir die Kompaktheit auch mit Hilfe des folgenden Begriffes charakterisieren.

12.13.1 Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge M von X heißt *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Teilmengen $M_1, \dots, M_n \subseteq M$ vom *Durchmesser* $d(M_j) := \sup_{x,y \in M_j} d(x, y)$ kleiner als ϵ gibt, sodass

$$M = M_1 \cup \dots \cup M_n\,.$$

12.13.2 Fakta.

1. Man sieht sofort, dass Teilmengen von total beschränkten Mengen wieder total beschränkt sind.

2. Da einerseits Kugeln mit Radius ϵ einen Durchmesser kleiner oder gleich 2ϵ haben und da andererseits jede Teilmenge $M_j \subseteq M$ mit $d(M_j) < \epsilon$ für ein beliebiges $\eta_j \in M_j$ in $U_\epsilon(\eta_j)$ enthalten ist, lässt sich totale Beschränktheit auch folgendermaßen charakterisieren:

   Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $y_1, \dots, y_n \in M$, sodass $M \subseteq U_\epsilon(y_1) \cup \dots \cup U_\epsilon(y_n)$.

3. Ist $M_j \subseteq X$ und sind $x, y \in \overline{M_j}$, so gibt es wegen Lemma 5.1.12 gegen x bzw. y konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M_j. Also folgt $d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq d(M_j)$, und daher $d(\overline{M_j}) = d(M_j)$.

   Ist M total beschränkt und $\epsilon > 0$, so gilt $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ mit $d(M_j) < \epsilon$ für $j = 1, \dots, n$. Es folgt nunmehr $\overline{M} = \overline{M_1} \cup \dots \cup \overline{M_n}$ mit $d(\overline{M_j}) < \epsilon$ für $j = 1, \dots, n$, womit auch $\overline{M}$ total beschränkt ist. Insbesondere kann man für abgeschlossenes M die Mengen M_j auch abgeschlossen wählen.

12.13.3 Satz. *Für eine Teilmenge K eines metrischen Raumes (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *K ist kompakt im Sinne von Definition 12.11.1.*

(ii) *Jede unendliche Teilmenge von K hat einen Häufungspunkt in K.*

(iii) *Jede Folge in K hat eine gegen einen Punkt in K konvergente Teilfolge.*

(iv) *K ist total beschränkt, und $(K, d|_{K\times K})$ ist ein vollständig metrischer Raum.*

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$**:** Sei $M \subseteq K$ unendlich. Hätte M keinen Häufungspunkt in K, so gibt es zu jedem $y \in K$ ein $\epsilon(y) > 0$, sodass (vgl. Definition 5.1.7)

$$M \cap U_{\epsilon(y)}(y) \subseteq \{y\}\,.$$

Da $y \in K$ beliebig war, ist $\{U_{\epsilon(y)}(y) : y \in K\}$ eine offene Überdeckung von K, die voraussetzungsgemäß eine endliche Teilüberdeckung hat. Also gibt es $y_1, \dots, y_k \in K$, sodass $K \subseteq U_{\epsilon(y_1)}(y_1) \cup \dots \cup U_{\epsilon(y_k)}(y_k)$. Wegen

$$M = M \cap K \subseteq M \cap \left(U_{\epsilon(y_1)}(y_1) \cup \dots \cup U_{\epsilon(y_k)}(y_k)\right) \subseteq \{y_1, \dots, y_n\}\,,$$

wäre M dann endlich.

$(ii) \Rightarrow (iii)$**:** Habe jede unendliche Teilmenge von K einen Häufungspunkt in K, und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus K. Ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ endlich, so gilt sicherlich $x_n = x$ für ein $x \in K$ und für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Somit hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die konstant gleich x ist. Also ist x ein Häufungspunkt unserer Folge.

Anderenfalls ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ unendlich, und laut Voraussetzung hat sie einen Häufungspunkt x in K. Da jede ϵ-Kugel um x unendlich viele Punkte aus $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ enthält (vgl. Fakta 5.1.10), muss für $N \in \mathbb{N}$ jede ϵ-Kugel auch unendlich viele Punkte aus $\{x_n : n \in \mathbb{N}, n \geq N\}$ enthalten.

Insbesondere gibt es ein $n(1) \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n(1)}, x) < 1$. Hat man natürliche $n(1) < \dots < n(k)$ mit $d(x_{n(j)}, x) < \frac{1}{j}$ für $j = 1, \dots, k$, so sei $n(k+1) \in \mathbb{N}$ mit $n(k+1) > n(k)$ derart, dass $x_{n(k+1)} \in \{x_n : n \in \mathbb{N}, n \geq n(k)+1\} \cap U_{\frac{1}{k+1}}(x)$. Wir haben somit rekursiv eine Teilfolge konstruiert, die gegen x konvergiert.

$(iii) \Rightarrow (iv)$**:** Angenommen K wäre nicht total beschränkt. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass, wenn immer $M_1, \dots, M_n$ endlich viele Teilmengen mit Durchmesser kleiner ϵ von K sind, niemals $M_1 \cup \dots \cup M_n = K$ gilt. Aus dieser Tatsache werden wir nun auf die Existenz einer Folge ohne Häufungspunkt schließen.

Sei $x_1 \in K$ beliebig. Angenommen wir haben $x_1, \dots, x_k \in K$ definiert, dann hat für $j \in \{1, \dots, k\}$ nach der Dreiecksungleichung die Kugel $U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_j)$ einen Durchmesser kleiner oder gleich $\frac{2\epsilon}{3}$. Wegen unserer Wahl von ϵ ist $(U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_k)) \cap K$ eine echte Teilmenge von K. Wir wählen

$$x_{k+1} \in K \setminus \left(U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_k)\right).$$

Diese induktiv definierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat offensichtlich die Eigenschaft, dass für $k \in \mathbb{N}$ der Punkt x_k nicht in $U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_1) \cup \dots \cup U_{\frac{\epsilon}{3}}(x_{k-1})$ liegt, und somit

$$d(x_k, x_l) \geq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für} \quad l < k\,.$$

Insbesondere kann keine Teilfolge von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge sein und schon gar nicht konvergieren. Das widerspricht aber der Voraussetzung (iii).

Es bleibt die Vollständigkeit von $(K, d|_{K\times K})$ zu zeigen. Dazu sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K. Diese hat voraussetzungsgemäß eine in K konvergente Teilfolge. Gemäß Lemma 3.5.7 ist dann auch $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K konvergent.

$(iv) \Rightarrow (i)$**:** Zunächst folgt wegen Lemma 9.1.6 aus der Vollständigkeit, dass K abgeschlossen ist. Sei nun $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von K, und sei angenommen, dass $\mathcal{U}$ keine endliche Teilüberdeckung enthält.

Die Menge K ist gleich der Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen mit Durchmesser kleiner als 1. Mindestens eine von diesen Mengen kann nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden. Diese sei K_1.

Die Menge K_1 ist gleich der Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen mit Durchmesser kleiner als $\frac{1}{2}$. Mindestens eine von diesen kann nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden. Diese sei K_2. Verfährt man induktiv weiter, so erhält man eine Folge

$$K \supseteq K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

von abgeschlossenen Mengen, sodass K_n einen Durchmesser kleiner als $\frac{1}{n}$ hat, und kein K_n durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden kann.

Wählt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in K_n$, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $x_m, x_n \in K_{\min(m,n)}$ mit $d(K_{\min(m,n)}) < \frac{1}{\min(m,n)}$ eine Cauchy-Folge. Die Vollständigkeit von K sichert die Existenz eines Grenzwertes $x \in K$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Als Überdeckung enthält $\mathcal{U}$ ein $V \in \mathcal{U}$ mit $x \in V$. Da V offen ist, gibt es eine Kugel $U_\epsilon(x) \subseteq V$. Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Wegen $d(K_n) < \frac{1}{n}$ folgt für $y \in K_n$

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \epsilon\,.$$

Also gilt $K_n \subseteq V$, im Widerspruch zur Tatsache, dass K_n nicht durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt werden kann. ❑

12.13.4 Bemerkung. Eine Situation, wo obiger Satz Anwendung findet, ist die, dass (X, d) ein vollständig metrischer Raum ist, und dass G eine total beschränkte Teilmenge von X ist. Der Abschluss K von G ist dann auch total beschränkt und vollständig, also kompakt.

12.13.5 Bemerkung (*)**.** Satz 12.13.3 besagt insbesondere, dass in metrischen Räumen die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt zusammenfallen; vgl. Definition 12.11.5.

12.13.6 Korollar (*)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $K \subseteq X$ kompakt, dann ist K* separabel*, hat also eine dichte abzählbare Teilmenge.*

Beweis. Nach Satz 12.13.3 gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Punkte $x_1^n, \dots, x_{m(n)}^n \in K$, sodass

$$U_{\frac{1}{n}}(x_1^n) \cup \dots \cup U_{\frac{1}{n}}(x_{m(n)}^n) \supseteq K\,. \tag{12.19}$$

Setzen wir $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_1^n, \dots, x_{m(n)}^n\}$, so ist D sicher eine abzählbare Teilmenge von K. Sei $y \in K$ und $\epsilon > 0$, und wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\epsilon \leq \frac{1}{n}$. Wegen (12.19) gibt es ein $j \in \{1, \dots, m(n)\}$ mit $d(y, x_j^n) < \frac{1}{n} \leq \epsilon$ und daher $x_j^n \in U_\epsilon(y)$. Infolge gilt $y \in \overline{D}$. ❑

12.13.7 Proposition (*)**.** *Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann separabel, wenn er das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, also eine abzählbare Basis hat.*

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}(d)$, so wähle für jede nichtleere Teilmenge $B \in \mathcal{B}$ irgendeinen Punkt x_B aus B. Klarerweise ist $D := \{x_B : \emptyset \neq B \in \mathcal{B}\}$ abzählbar. Zu beliebigem $y \in X$ und offenem $O \ni y$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $y \in B \subseteq O$. Insbesondere gilt $x_B \in O \cap D$, und infolge $y \in \overline{D}$. Also ist X separabel.
Ist umgekehrt (X, d) separabel mit einer abzählbaren und dichten Teilmenge $D \subseteq X$, so besteht

$$\mathcal{B} := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N},\ x \in D\}$$

aus abzählbar vielen Mengen. Ist nun $O \subseteq X$ offen, so sei für jedes $y \in O$ die Zahl $n(y) \in \mathbb{N}$ so groß, dass $U_{\frac{2}{n(y)}}(y) \subseteq O$. Wir zeigen nun, dass

$$O = \bigcup_{\substack{x \in D \cap O \\ n \in \mathbb{N}: U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq O}} U_{\frac{1}{n}}(x), \tag{12.20}$$

und damit dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}(d)$ ist. Klarerweise ist die rechte Seite in O enthalten. Ist $y \in O$, so gibt es wegen der Dichtheit von D ein $x \in D \cap U_{\frac{1}{n(y)}}(y) \subseteq D \cap O$. Daraus erhält man $y \in U_{\frac{1}{n(y)}}(x)$. Für jedes $t \in U_{\frac{1}{n(y)}}(x)$ gilt zudem

$$d(t, y) \leq d(t, x) + d(x, y) < \frac{1}{n(y)} + \frac{1}{n(y)} = \frac{2}{n(y)},$$

also $t \in U_{\frac{2}{n(y)}}(y)$, wodurch $U_{\frac{1}{n(y)}}(x) \subseteq U_{\frac{2}{n(y)}}(y) \subseteq O$. Also liegt jedes $y \in O$ in der Vereinigung auf der rechten Seite von (12.20). ❑

12.13.8 Bemerkung (*)**.** Da wir im ersten Beweisteil nicht verwendet haben, dass $\mathcal{T}(d)$ eine metrische Topologie ist, gilt allgemein in topologischen Räumen, dass aus $(ABII)$ die Separabilität folgt.

Ein wichtiges Beispiel von kompakten Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes liefert uns der Satz von Ascoli. Dabei betrachtet man den Raum $C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_b(X, \mathbb{C})$ aller beschränkten, stetigen und reell- bzw. komplexwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Wir haben solche Räume schon kennengelernt, aber nur in dem Fall, dass X ein metrischer Raum ist.
Wir wollen zunächst bemerken, dass wenn X kompakt ist, jede stetige Funktion f automatisch beschränkt ist, denn nach Lemma 12.11.8 ist dann $f(X)$ kompakt, und nach Proposition 5.2.8 ist $f(X)$ beschränkt.

12.13.9 Lemma. *Die Räume $C_b(X, \mathbb{R})$ und $C_b(X, \mathbb{C})$ sind abgeschlossene Teilräume der Banachräume $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ und $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ versehen mit $\|.\|_\infty$ und daher selbst Banachräume.*

Beweis. Wir wissen aus Beispiel 9.1.9, dass $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ und $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ Banachräume sind. Laut Definition sind $C_b(X, \mathbb{R})$ und $C_b(X, \mathbb{C})$ Teilmengen von $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$. Wegen Korollar 12.6.9 sind sie sogar lineare Teilräume.
Konvergiere nun eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_b(X, \mathbb{C})$ gegen ein f aus $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(X, \mathbb{C})$ bezüglich $\|.\|_\infty$, also gleichmäßig. Ist $x \in X$ und $(x_j)_{j \in J}$ ein gegen x konvergentes Netz, so wissen wir aus Lemma 8.7.1, dass $\lim_{j \in J} \lim_{n \to \infty} f_n(x_j) = \lim_{j \in J} f(x_j)$ existiert und mit

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{j \in J} f_n(x_j) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

übereinstimmt. Da das Netz beliebig war, ist f stetig, also $f \in C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $f \in C_b(X, \mathbb{C})$. ❑

12.13.10 Satz (Ascoli)**.** *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und sei Φ eine punktweise beschränkte und* gleichgradig stetige *Teilmenge von $C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_b(X, \mathbb{C})$, also $\Phi \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $\Phi \subseteq C_b(X, \mathbb{C})$ mit:*

(i) *Für jedes $x \in X$ ist* $\sup\{|f(x)| : f \in \Phi\}$ *beschränkt.*

(ii) *Für jedes $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}(x)$ mit $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ für alle $y \in V$, $f \in \Phi$.*

Dann ist Φ total beschränkt. Ist umgekehrt Φ total beschränkt, so gelten (i) *und* (ii).

Beweis.

$\rightsquigarrow$ Erfülle Φ die Bedingungen (i) und (ii). Wir zeigen, dass Φ total beschränkt ist.

Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in X$ können wir eine Umgebung V_x von x wählen, sodass (ii) für $V = V_x$ erfüllt ist. Da jede Umgebung von x eine x enthaltende offene Menge umfasst, können wir die V_x offen wählen. Offensichtlich ist $\{V_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X.

Wegen der Kompaktheit von X existieren $x_1, \ldots, x_n \in X$, sodass schon $X = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Für $i = 1, \ldots, n$ und beliebigen $x \in V_{x_i}$ und $f \in \Phi$ gilt dann

$$|f(x) - f(x_i)| < \epsilon\,.$$

Wegen (i) gilt $M := \sup\{f(x_i) : i = 1, \ldots, n, f \in \Phi\} < +\infty$.

Bezeichne mit K die abgeschlossene Kreisscheibe $K_M^{\mathbb{R}^n}(0)$ bzw. $K_M^{\mathbb{C}^n}(0)$ mit Radius M in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ um 0 bezüglich der $\|.\|_\infty$ Norm, und definiere die Abbildung

$$p : \Phi \to K \quad \text{durch} \quad p(f) := \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)^T\,.$$

Also kompakte Menge (siehe Korollar 5.2.9) ist K gemäß Satz 12.13.3 total beschränkt. Mit K ist auch seine Teilmenge $p(\Phi)$ total beschränkt; vgl. Fakta 12.13.2. Also existieren endlich viele $f_1, \ldots, f_m \in \Phi$, sodass es für jedes $f \in \Phi$ ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ gibt mit $\|p(f) - p(f_k)\|_\infty < \epsilon$. Das bedeutet

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \epsilon \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{12.21}$$

Sei nun $f \in \Phi$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$, sodass (12.21) gilt. Jedes $x \in X$ liegt in einer Menge V_{x_i}, und für dieses i gilt

$$|f(x) - f(x_i)| < \epsilon \quad \text{sowie} \quad |f_k(x) - f_k(x_i)| < \epsilon\,.$$

Wir erhalten

$$|f(x) - f_k(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x) - f_k(x_i)| < 3\epsilon$$

für alle $x \in X$ und somit $\|f - f_k\|_\infty \leq 3\epsilon$. Die abgeschlossenen Kugeln mit Radius 3ϵ und Mittelpunkt f_k überdecken also ganz Φ. Infolge ist Φ total beschränkt.

$\rightsquigarrow$ Zur Umkehrung sei zunächst bemerkt, dass total beschränkte Teilmengen von $(C_b(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ bzw. $(C_b(X,\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ beschränkt und somit auch punktweise beschränkt sind; also gilt (i).

Wegen der totalen Beschränktheit gibt es zu $\epsilon > 0$ endlich viele $f_1, \dots, f_m \in \Phi$, sodass es zu jedem $f \in \Phi$ ein f_k mit $\|f - f_k\|_\infty < \epsilon$ gibt.

Zu einem $x \in X$ gibt es wegen der Stetigkeit der f_k's für $k = 1, \dots, m$, Umgebungen $V_k \in \mathfrak{U}(x)$ mit $|f_k(y) - f_k(x)| < \epsilon$ für alle $y \in V_k$. Setzen wir $V = V_1 \cap \dots \cap V_m$, so ist $V \in \mathfrak{U}(x)$ und für $f \in \Phi$ folgt für das richtige f_k und $y \in V$

$$|f(y) - f(x)| < |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(x)| + |f(x) - f_k(x)| < 3\epsilon .$$

Somit gilt (ii). ❑

Zusammen mit Bemerkung 12.13.4 folgt aus Satz 12.13.10

12.13.11 Korollar. *Für $\Phi \subseteq C_b(X,\mathbb{C})$ bzw. $\Phi \subseteq C_b(X,\mathbb{C})$ ist $\overline{\Phi}$ genau dann kompakt, wenn Φ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist. Insbesondere enthält in diesem Fall jede Folge in Φ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes gibt es in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, wo dieser die Existenz von Lösungen von einer großen Klasse von Differentialgleichungen liefert.

12.13.12 Bemerkung (*). Mit fast denselben Beweisen kann man Satz 12.13.10 und Korollar 12.13.11 allgemeiner für Teilmengen Φ von $C_b(X,\mathbb{R}^p)$ zeigen, wobei $\mathbb{R}^p$ mit irgendeiner der Normen $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ versehen ist.

12.14 Alexandroff-Kompaktifizierung

Ein einfaches Beispiel von lokalkompakten Räumen liefert das Korollar 5.2.9 zum Satz von Bolzano-Weierstraß. Dieses besagt ja, dass im $\mathbb{R}^n$ jede Menge der Form $K_r(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq r\}$ und daher (vgl. Lemma 12.11.8) auch jede Menge der Form $x + K_r(0) = K_r(x)$ kompakt ist. Da diese Mengen einen Umgebungsbasis von x darstellen, ist der $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt.

12.14.1 Satz. *Ein topologischer Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann lokal kompakt, wenn er offene Teilmenge eines kompakten Hausdorff-Raumes ist, also wenn es einen topologischen Hausdorff-Raum $(Y, \mathcal{O})$ gibt, der kompakt ist, sodass X eine offene Teilmenge von Y ist, und sodass $\mathcal{T} = \mathcal{O}|_X$.*
Eine mögliche Wahl von Y ist die, dass man ein $Y := X \cup \{\infty\}$ mit einem Element $\infty \notin X$ und

$$\mathcal{O} = \mathcal{T} \cup \Big\{\{\infty\} \cup (X \setminus K) : X \supseteq K \text{ kompakt}\Big\} \tag{12.22}$$

setzt.[4].

[4] Dieser Topologische Raum wird als *Alexandroff-Kompaktifizierung* oder auch als *Einpunkt-Kompaktifizierung* bezeichnet.

Beweis. Sei X ein offene Teilmenge des kompakten Raumes Y. Nach Lemma 12.11.11 ist Y insbesondere regulär. Also gibt es zu der Umgebung X von x eine Umgebung V von x in Y, sodass $\overline{V} \subseteq X$. Aus Lemma 12.11.7 folgt die Kompaktheit von $\overline{V}$ in Y. Wegen Proposition 12.11.2, ($K2$), und $\mathcal{O}|_{\overline{V}} = (\mathcal{O}|_X)|_{\overline{V}}$ ist $\overline{V}$ auch kompakt in X, und daher ist X lokalkompakt.
Sei umgekehrt $(X, \mathcal{T})$ lokalkompakt, und definiere $Y := X \cup \{\infty\}$ und $\mathcal{O}$ wie in (12.22). Mit Hilfe von Lemma 12.11.7, (iii), überprüft man leicht, dass $\mathcal{O}$ eine Topologie auf Y ist, wobei $X \in \mathcal{O}$. Um zu zeigen, dass diese Hausdorffsch ist, seien $x, y \in Y$ zunächst derart, dass $x, y \in X$. Dann gibt es disjunkte $O_x, O_y \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$ mit $x \in O_x, y \in O_y$, da ja $(X, \mathcal{T})$ voraussetzungsgemäß Hausdorffsch ist. Ist $x \in X$ und $y = \infty$, so gibt es wegen der Lokalkompaktheit eine kompakte Umgebung V von x in X. Ist O_x eine x enthaltende offene Teilmenge von V, und ist $O_y := \{\infty\} \cup (X \setminus V)$, so gilt $O_y \in \mathcal{O}$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$.
Wir müssen noch zeigen, dass Y kompakt ist. Dazu sei $\{O_i : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von Y. Insbesondere gibt es mindestens ein $j \in I$ mit $\infty \in O_j$. Nach Konstruktion der Topologie gilt $O_j = \{\infty\} \cup X \setminus K$ für eine kompakte Teilmenge K von X. Nun ist sicherlich $\{O_i \setminus \{\infty\} : i \in I\}$ eine offene Überdeckung von K. Also gibt es $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \supseteq K$, und daher $Y = O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n} \cup O_j$. ❑

12.14.2 Bemerkung. In Satz 12.14.1 ist offenbar X dicht in Y genau dann, wenn X nicht kompakt ist.
Man kann auch unschwer nachweisen, dass der in Satz 12.14.1 konstruierte kompakte Hausdorff-Raum $(Y, \mathcal{O})$, sodass $(X, \mathcal{T})$ als offene Teilmenge in Y mit $\mathcal{O}|_X = \mathcal{T}$ enthalten ist und sodass $Y \setminus X$ nur einen Punkt enthält, bis auf Homöomorphismen eindeutig ist.
Allgemeiner gilt, dass, falls $(Z, \mathcal{T}_Z)$ ein weiterer kompakter Hausdorff-Raum ist, der $(X, \mathcal{T})$ als offene Teilmenge mit $\mathcal{T}_Z|_X = \mathcal{T}$ enthält, dann sich die Einbettungsabbildung $\iota : X \to Y$ durch $\phi(\{Z \setminus X\}) = \{\infty\}$ zu einer stetigen Abbildung $\phi : Z \to Y$ fortsetzen lässt.

12.14.3 Korollar. *Lokalkompakte Hausdorff-Räume $(X, \mathcal{T})$ sind regulär. Zudem gibt es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein offenes $P \subseteq X$ mit $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq U$, sodass $\overline{P}$ kompakt ist.*

Beweis. Wegen Satz 12.14.1 können wir X als offene Teilmenge eines kompakten Hausdorff-Raumes $(Y, \mathcal{O})$ mit $\mathcal{T} = \mathcal{O}|_X$ betrachten. Nach Lemma 12.11.11 ist $(Y, \mathcal{O})$ regulär und wegen Bemerkung 12.9.4 somit auch $(X, \mathcal{T})$.
Jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ ist auch Umgebung von x betrachtet als Teilmenge von Y. Wegen Korollar 12.9.3 gibt es ein offenes $P \subseteq Y$, sodass $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq U$, wobei $\overline{P}$ ad hoc der Abschluss von P in Y ist. Nach Lemma 12.11.7 ist $\overline{P}$ kompakt, wegen $P \subseteq X$ ist P auch offen in X, und wegen $\overline{P} \subseteq X$ zusammen mit (12.13) ist $\overline{P}$ auch der Abschluss von P in $(X, \mathcal{T})$. ❑

12.14.4 Beispiel. Man betrachte $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versehen mit der chordalen Metrik χ. Ist $\mathcal{O}$ die Topologie, die von χ auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erzeugt wird, so ist $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}, \mathcal{O})$ genau die Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ versehen mit der euklidischen Topologie.

12.14.5 Definition. Für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet $C_0(X, \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen $g : X \to \mathbb{R}$, sodass

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists K \text{ kompakt } : \forall x \in X \setminus K \Rightarrow |g(x)| < \epsilon \,.$$

Entsprechend definiert man $C_0(X, \mathbb{C})$.

Wählt man etwa $\epsilon = 1$ und K wie in der Definition, so ist $t \mapsto |g(t)|$ auf K wegen der Kompaktheit beschränkt, und auf $X \setminus K$ gilt ohnehin $|g(x)| < 1$. Also sind alle Funktionen aus $C_0(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_0(X, \mathbb{C})$ beschränkt.

12.14.6 Proposition. *Bezeichne $(Y, \mathcal{O})$ die Alexandroff-Kompaktifizierung des lokalkompakten Hausdorff-Raumes $(X, \mathcal{T})$ wie in Satz 12.14.1.*

(*i*) *Für $f \in C(Y, \mathbb{R})$ mit $f(\infty) = 0$ liegt die Einschränkung $g := f|_X$ in $C_0(X, \mathbb{R})$.*

(*ii*) *Ist umgekehrt $g \in C_0(X, \mathbb{R})$, und setzt man g zu einer Funktion f auf Y durch $f(\infty) = 0$ fort, so gilt $f \in C(Y, \mathbb{R})$.*

(*iii*) *Dabei ist $f \mapsto f|_X$ eine lineare Bijektion von*

$$\mathcal{N} := \{f \in C(Y, \mathbb{R}) : f(\infty) = 0\}$$

auf $C_0(X, \mathbb{R})$, wobei $\|f\|_\infty = \|f|_X\|_\infty$.

(*iv*) *Schließlich ist die Hyperebene $\mathcal{N}$ abgeschlossen in $C(Y, \mathbb{R})$, und $C_0(X, \mathbb{R})$ versehen mit der Supremumsnorm ist ein Banachraum.*

Analoge Aussagen gelten im Fall von komplexwertigen Funktionen.

Beweis.

(*i*) Ist $f \in C(Y, \mathbb{R})$ mit $f(\infty) = 0$, so ist klarerweise $f|_X$ stetig auf X bzgl. $\mathcal{O}|_X = \mathcal{T}$. Außerdem gibt es wegen der Stetigkeit von f bei ∞ zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung von ∞, also eine kompakte Menge K in X, sodass $|f(x) - f(\infty)| = |f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Somit haben wir $f|_X \in C_0(X, \mathbb{R})$.

(*ii*) Ist $g \in C_0(X, \mathbb{R})$ und setzt man $f(x) := g(x)$ für alle $x \in X$ und $f(\infty) := 0$, so ist f stetig auf Y, da die Bedingung aus Definition 12.14.5 genau die Stetigkeit von f bei ∞ bedeutet, und da für $x \in X$ wegen der Tatsache, dass X offen in Y ist, die Stetigkeit von g bei x unmittelbar auf f übertragen wird.

(*iii*) $f \mapsto f|_X$ ist offensichtlich eine lineare Bijektion, wobei

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in Y} |f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \|f|_X\|_\infty\,,$$

da ja $Y = X \cup \{\infty\}$ und $f(\infty) = 0$.

(*iv*) Wegen $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{0\})$ mit dem linearen beschränkten und daher stetigen Punktauswertungsfunktional $\varphi : f \mapsto f(\infty)$ ist $\mathcal{N}$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ selbst abgeschlossen.

Somit ist $(\mathcal{N}, \|.\|_\infty)$ ein Banachraum (vgl. Lemma 9.1.6) und wegen $\|f\|_\infty = \|f|_X\|_\infty$ auch $C_0(X, \mathbb{R})$. ❑

12.14.7 Korollar (*). *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein lokalkompakter Hausdorffraum. Ist* $K \subseteq X$ *kompakt und* $O \supseteq K$ *offen, so gibt es ein stetige Funktion* $f : X \to [0, 1]$, *sodass* $f(K) \subseteq \{1\}$ *und sodass der* Träger $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ *von* f *kompakt und in* O *enthalten ist.*

Beweis. Wegen der Lokalkompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ folgt aus Korollar 12.14.3, dass es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung O_x gibt, sodass $x \in O_x \subseteq \overline{O_x} \subseteq O$, wobei $\overline{O_x}$ ebenfalls kompakt ist.
Da $(O_x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es aufgrund der Kompaktheit von K endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass

$$K \subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} O_{x_j}}_{=:R} \subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} \overline{O_{x_j}}}_{=\overline{R}} \subseteq O\,.$$

Dabei ist $\overline{R} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{O_{x_j}}$ (siehe Lemma 12.2.5) als Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt; vgl. Lemma 12.11.7.
Somit ist $(\overline{R}, \mathcal{T}|_{\overline{R}})$ ein kompakter Hausdorffraum und gemäß Lemma 12.11.11 normal. Die Menge K und $\overline{R} \setminus R$ sind darin zwei disjunkte abgeschlossene Mengen. Also gibt es nach Korollar 12.10.2 ein stetiges $g : \overline{R} \to [0, 1]$ mit

$$g(K) \subseteq \{1\} \quad \text{und} \quad g(\overline{R} \setminus R) \subseteq \{0\}\,.$$

Ist $h : X \setminus R \to [0, 1]$ die konstante Nullfunktion, so stimmen g und h am Schnitt ihrer Definitionsbereiche $X \setminus R \cap \overline{R} = \overline{R} \setminus R$ überein. Nach Lemma 12.6.4 ist $f := g \cup h$ stetig, und erfüllt offensichtlich $f(K) \subseteq \{1\}$. Wegen $\{x : f(x) \neq 0\} \subseteq \overline{R} \subseteq O$ ist der Träger von f kompakt und in O enthalten. ❑

12.14.8 Bemerkung (*). Aus dem Beweis von Korollar 12.14.7 wollen wir für lokalkompakte Hausdorffräume $(X, \mathcal{T})$ noch herausstellen, dass es zu jedem kompakten $K \subseteq X$ eine offene Obermenge R gibt, die kompakten Abschluss hat.

12.15 Der Satz von Stone-Weierstraß

12.15.1 Definition. Sei E irgendeine Menge. Dann heißt eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^E$ bzw. $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{C}^E$ von Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) eine *Algebra von Funktionen*, falls gilt:

(*i*) $\mathcal{A}$ ist ein linearer Teilraum.

(*ii*) Mit $f, g \in \mathcal{A}$ ist auch $f \cdot g \in \mathcal{A}$.

Offenbar sind $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ und $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ Algebren von Funktionen; vgl. Definition 6.6.3 sowie Definition 6.8.1 samt nachfolgender Tatsachen.
Ist E mit einer Topologie versehen, so folgt aus der Tatsache, dass das Produkt von zwei stetigen Funktion wieder stetig ist (vgl. Korollar 12.6.9), dass auch die Räume $C_b(E, \mathbb{R})$ und $C_b(E, \mathbb{C})$ aller beschränkten und stetigen Funktionen eine Algebra darstellt.

12.15.2 Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf einer Menge E, und bezeichne B den Abschluss von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(E,\mathbb{C})$ bezüglich $\|.\|_\infty$. Dann ist B wieder eine Algebra.*

Beweis. Nach Lemma 9.1.8 ist B ein linearer Teilraum von $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(E,\mathbb{C})$. Für $f, g, f_n, g_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \to f, g_n \to g$ folgt aus der Beschränktheit von $\|f_n\|_\infty$

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty = \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \|g\|_\infty \to 0\,.$$

Also ist mit $f, g \in B$ auch $fg \in B$. ❑

12.15.3 Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf E. Man sagt, $\mathcal{A}$ ist *punktetrennend*, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in E$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ gibt mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Man nennt die Algebra $\mathcal{A}$ ist *nirgends verschwindend*, falls es zu jedem $x \in E$ ein $f \in \mathcal{A}$ gibt, sodass $f(x) \neq 0$.

Enthält $\mathcal{A}$ eine konstante Funktion ungleich der Nullfunktion, so ist $\mathcal{A}$ offensichtlich nirgends verschwindend.

12.15.4 Bemerkung. Für $x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2$, ist $\phi_{x_1,x_2} : f \mapsto \binom{f(x_1)}{f(x_2)}$ als Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{R}^2$ linear.
Ist für jedes solche Paar x_1, x_2 diese Abbildung surjektiv, also für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2$, so ist $\mathcal{A}$ offensichtlich punktetrennend und nirgends verschwindend.
Ist $\mathcal{A}$ umgekehrt nirgends verschwindend und punktetrennend, so enthält $\phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$ wegen der Linearität einen Vektor der Form $\binom{1}{d}$, einen Vektor der Form $\binom{c}{1}$ und einen der Form $\binom{e}{f}$ mit $e \neq f$.
Ist $cd \neq 1$, so sind die ersten beiden Vektoren linear unabhängig. Ist $c = d = 1$, so sind die ersten beiden gleich und der letzte dazu linear unabhängig. Falls $cd = 1 \neq c$, so ist – da $\mathcal{A}$ sogar eine Algebra ist – auch $\binom{c}{d} = \binom{1\cdot c}{d\cdot 1} \in \phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$. Nun ist $\binom{0}{0} \neq \binom{0}{1-d} = \binom{c}{1} - \binom{c}{d} \in \phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$ linear unabhängig von $\binom{1}{d}$. In jedem Fall ist der Teilraum $\phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A})$ von $\mathbb{R}^2$ mindestens zweidimensional, und daher $\phi_{x_1,x_2}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^2$.

Ehe wir den Satz von Stone-Weierstraß beweisen, benötigen wir noch

12.15.5 Lemma. *Es gibt eine Folge von Polynomen $p_n \in \mathbb{R}[x],\ n \in \mathbb{N}$, die auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $t \mapsto |t|$ konvergiert.*

Beweis. Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \sqrt{1-x}$. Bekannterweise ist g auf $[0,1)$ unendlich oft differenzierbar. Gemäß Proposition 8.8.2 erhalten wir für die Anschlussstelle $y = 0$ die Taylor-Approximation

$$g(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^n}_{=:q_n(x)} + R_n(x), \quad x \in [0,1)\,.$$

$$R_n(x) = \int\limits_0^x g^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{1}{n!}\int\limits_0^x (1-t)^{-n-\frac{1}{2}}(x-t)^n\,dt$$

erfüllt wegen $(1-t)^{-n-\frac{1}{2}}(x-t)^n \leq (1-t)^{-\frac{1}{2}}$ für $0 \leq t \leq x < 1$ die Abschätzung

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2}\prod_{j=1}^n \left(1-\frac{1}{2j}\right)\cdot \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt}_{=2} = \exp(\sum_{j=1}^n \ln\left(1-\frac{1}{2j}\right)).$$

Aus der durch elementare Kurvendiskussion nachzuweisenden Ungleichung $\ln s \leq s-1$ für $s>0$ folgt $\sum_{j=1}^n \ln(1-\frac{1}{2j}) \leq -\sum_{j=1}^n \frac{1}{2j}$. Also erhalten wir

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|g(x)-q_n(x)\right| = \sup_{x\in[0,1)} |R_n(x)| \leq \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Die erste Gleichheit hier gilt, da g und q_n beide sogar auf $[0,1]$ stetig sind. Setzen wir schließlich $p_n(x) = q_n(1-x^2)$, so gilt auch

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left||x|-p_n(x)\right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|g(1-x^2)-q_n(1-x^2)\right| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)-q_n(x)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

❑

12.15.6 Satz (Stone-Weierstraß). *Sei $(K,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, und sei $\mathcal{A} \subseteq C_b(K,\mathbb{R})$ eine punktetrennende, nirgends verschwindende Algebra stetiger Funktionen. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_b(K,\mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm.*

Beweis. Nach Lemma 12.15.2 ist der Abschluss B von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(K,\mathbb{R})$ ein Algebra. Da $C_b(K,\mathbb{R})$ abgeschlossen in $\mathcal{B}(K,\mathbb{R})$ ist, haben wir auch $B \subseteq C_b(K,\mathbb{R})$. Der Beweis erfolgt nun in vier Schritten:

(*i*) Ist $f\in B$, so zeigen wir, dass auch $|f|\in B$. Dividieren wir $f\neq 0$ nötigenfalls durch $\|f\|_\infty$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f\|_\infty \leq 1$ annehmen.

Gemäß Lemma 12.15.5 gibt es zu $\epsilon>0$ ein reelles Polynom $p_\epsilon(y)$, sodass

$$\left|p_\epsilon(y)-|y|\right| \leq \epsilon \quad \text{für alle} \quad y\in[-1,1]\,.$$

Setzt man $y=0$, so folgt $|p_\epsilon(0)|\leq\epsilon$, womit für $\sum_{j=1}^m a_j y^j := p_\epsilon(y)-p_\epsilon(0)$

$$\Big|\sum_{j=1}^m a_j y^j - |y|\Big| \leq 2\epsilon \quad \text{für alle} \quad y\in[-1,1]\,.$$

Als Algebra enthält B auch $\sum_{j=1}^m a_j f^j$, wobei

$$\Big\|\sum_{j=1}^m a_j f^j - |f|\Big\|_\infty \leq 2\epsilon\,.$$

Da $\epsilon>0$ beliebig war und da B abgeschlossen ist, folgt $|f|\in B$.

(*ii*) Sind $f_1, \dots, f_n \in B$, so gilt auch $\max(f_1, \dots, f_n)$ und $\min(f_1, \dots, f_n)$ in B, dann für $n = 2$ hat man

$$\max(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{|f_1 - f_2|}{2},$$
$$\min(f_1, f_2) = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{|f_1 - f_2|}{2},$$

und für $n > 2$ folgt die Behauptung durch vollständiger Induktion.

(*iii*) Ist $f \in C_b(K, \mathbb{R}), x \in K, \epsilon > 0$, dann existiert eine Funktion $g_x \in B$ mit $g_x(x) = f(x)$ und $g_x(t) > f(t) - \epsilon$ für alle $t \in K$.

Um das zu sehen, bemerken wir zunächst, dass mit $\mathcal{A}$ ist auch B ($\supseteq \mathcal{A}$) punktetrennend und nirgends verschwindend ist. Wegen Bemerkung 12.15.4 existiert für jedes $y \in K$ eine Funktion $h_y \in B$ mit

$$h_y(x) = f(x) \quad \text{und} \quad h_y(y) = f(y)\,.$$

Wegen der Stetigkeit von $f - h_y$ bei y existiert eine offene Umgebung U_y von y, sodass insbesondere

$$h_y(t) > f(t) - \epsilon \quad \text{für alle} \quad t \in U_y\,.$$

Da K kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $y_1, \dots, y_n \in K$ mit

$$K \subseteq U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}\,.$$

Setzt man $g_x := \max(h_{y_1}, \dots, h_{y_n})$, dann liegt g_x in B und hat die gewünschten Eigenschaften.

(*iv*) Ist $f \in C(K)$ und $\epsilon > 0$, so existiert $h \in B$ mit $\| h - f \|_\infty < \epsilon$.

Dazu betrachte die Funktionen g_x, $x \in K$, aus (*iii*). Da $g_x - f$ bei x stetig ist, existiert eine offene Umgebung V_x von x mit

$$g_x(t) < f(t) + \epsilon \quad \text{für alle} \quad t \in V_x\,.$$

Da K kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_m \in K$ mit

$$K \subseteq V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}\,.$$

Setzt man nun $h := \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m})$, dann ist $h \in B$ und erfüllt $h(t) < f(t) + \epsilon$ für alle $t \in K$. Mit den g_x hat aber auch h die Eigenschaft $h(t) > f(t) - \epsilon$. ❑

12.15.7 Beispiel. Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $\mathcal{A} := \mathbb{R}[x]|_{[a,b]}$ der Raum aller Polynome mit reellen Koeffizienten betrachtet als Funktionen auf $[a, b]$. Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ eine Algebra bestehend aus stetigen Funktionen, die alle linearen Polynome also alle Geraden enthält. $\mathcal{A}$ ist daher punktetrennend und nirgends verschwindend. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist $\mathcal{A}$ (bzgl.$\|.\|_\infty$) dicht in $C([a, b], \mathbb{R})$.

12.15.8 Korollar. *Sei $\mathcal{A} \subseteq C_b(K, \mathbb{C})$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende Algebra stetiger Funktionen auf einer kompakten Menge K, sodass mit $f \in \mathcal{A}$ immer auch die komplex konjugierte Funktion $\bar{f}$ zu $\mathcal{A}$ gehört. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in der Algebra $C_b(K, \mathbb{C})$ aller stetigen Funktionen auf K.*

Beweis. Man betrachte die Menge $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ aller $h \in \mathcal{A}$, sodass h nur Werte in $\mathbb{R}$ hat. Nach Voraussetzung ist mit f auch $\operatorname{Re} f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ und $\operatorname{Im} f = \frac{f-\bar{f}}{2i}$ in $\mathcal{A}$, und somit $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$. Daraus erkennt man leicht, dass $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ auch punktetrennend und nirgends verschwindend ist. Nach Satz 12.15.6 ist $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ dicht in $C_b(K, \mathbb{R})$. Insbesondere gibt es zu jedem $f \in C_b(K, \mathbb{C})$ zwei Folgen $g_n, h_n \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$ mit $g_n \to \operatorname{Re} f,\ h_n \to \operatorname{Im} f$. Daraus folgt $g_n + ih_n \to f$, und somit die Dichtheit von $\mathcal{A}$ in $C_b(K, \mathbb{C})$. ❑

12.15.9 Beispiel. Sei $\mathcal{A}$ die lineare Hülle in $C_b(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ von $\{(\zeta \mapsto \zeta^n) : n \in \mathbb{Z}\}$. $\mathcal{A}$ ist dann der Raum aller Trigonometrischen Polynome.
Da für $\zeta \in \mathbb{T}$ die Beziehung $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ gilt, ist $\mathcal{A}$ invariant unter der komplexen Konjugation. Weiters ist $\mathcal{A}$ punktetrennend, da für $\zeta_1 \neq \zeta_2 \in \mathbb{T}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$p(\zeta) = c_2 \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} + c_1 \frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}$$

eine Funktion in $\mathcal{A}$ mit $p(\zeta_1) = c_1$ und $p(\zeta_2) = c_2$ ist. Nach obigen Satz ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_b(\mathbb{T}, \mathbb{C})$.
Da $C_b(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ isomorph zu den stetigen, 2π-periodischen Funktionen $\mathcal{P}$ auf $\mathbb{R}$ ist, folgt daraus auch, dass die lineare Hülle der Funktionen $t \mapsto \exp(itn),\ n \in \mathbb{Z}$ dicht in $\mathcal{P}$ ist.

Wir wollen nun eine Version des Satzes von Stone-Weierstraß für lokalkompakte Hausdorff-Räume $(X, \mathcal{T})$ herleiten.

12.15.10 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, und sei $\mathcal{A} \subseteq C_0(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{A} \subseteq C_0(X, \mathbb{C})$ eine punktetrennende, nirgends verschwindende Algebra, die im komplexen Falle unter der komplexen Konjugation abgeschlossen ist. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(X, \mathbb{R})$ bzw. in $C_0(X, \mathbb{C})$.*

Beweis. Aus Proposition 12.14.6 wissen wir, dass $C_0(X)$ isometrisch isomorph zu $\mathcal{N} \subseteq C(Y) = C_b(Y)$ ist, wobei $Y = X \cup \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung aus Satz 12.14.1 ist. Also können wir $\mathcal{A}$ auch als Algebra in $C_b(Y)$ betrachten. Als solche ist sie aber nicht mehr nirgends verschwindend, da ja $f(\infty) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}$.
Um diesen Nachteil zu beheben, betrachten wir $\mathcal{B} := \mathcal{A} + \langle \mathbb{1}_Y \rangle$, also die lineare Hülle von $\mathcal{A}$ und der konstanten 1-Funktion auf Y. Nun überprüft man leicht, dass $\mathcal{B}$ eine punktetrennende, nirgends verschwindende Algebra auf Y ist. Nach Satz 12.15.6 bzw. Korollar 12.15.8 ist $\mathcal{B}$ dicht in $C_b(Y)$.
Ist jetzt $f \in C_0(X)$, so gibt es daher eine Folge $g_n \in \mathcal{B}$ mit $g_n \to f$ bzgl. $\|.\|_\infty$. Insbesondere gilt $g_n(\infty) \to f(\infty) = 0$, und infolge

$$f_n := g_n - g_n(\infty) \cdot \mathbb{1}_Y \xrightarrow{n\to\infty} f - 0 \cdot \mathbb{1}_Y = f\,.$$

Nun ist aber $f_n(\infty) = 0$, also $f_n \in \mathcal{A}$, und wir sehen, dass $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(X)$ ist. ❑

12.15.11 Beispiel. Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Als offene Teilmenge eines lokalkompakten Raumes ist D auch lokalkompakt.
Nun sei $\mathcal{A}$ die Menge $C_{00}^\infty(D)$ aller auf D unendlich oft differenzierbaren reell- bzw. komplexwertigen Funktionen f mit *kompakten Träger*, also ist der Abschluss von $\{x \in D : f(x) \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge von D.
Da das Produkt zweier Funktionen $f, g \in C_{00}^\infty(D)$ wieder in $C_{00}^\infty(D)$ liegt, überprüft man leicht, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist. Um Korollar 12.15.10 anwenden zu können, müssen wir nur noch zeigen, dass $\mathcal{A}$ punktetrennend ist.
Dazu betrachte man zunächst die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0\,, \\ 0\,, & \text{falls } x \leq 0\,. \end{cases}$$

die bekannterweise beliebig oft differenzierbar ist; vgl. Beispiel 7.2.20. Für ein $x_0 \in D$ und $\delta > 0$ mit $K_\delta(x_0) \subseteq D$ sei

$$f_{x_0,\delta}(x) := \psi(1 - \frac{\|x - x_0\|_2^2}{\delta^2})\,.$$

Man sieht unmittelbar, dass der Träger von $f_{x_0,\delta}$ in der kompakten Menge $K_\delta(x_0)$ enthalten ist, und dass $f_{x_0,\delta}$ auf D als Zusammensetzung von C^∞-Funktionen beliebig oft differenzierbar ist; also $f_{x_0,\delta} \in C_{00}^\infty(D)$.
Sind nun $x_1 \neq x_2 \in D$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), und ist $3\delta \leq \|x_1 - x_2\|_2$, so hat die Funktion $c_1 f_{x_1,\delta} + c_2 f_{x_2,\delta}$ Werte c_1 bei x_1 und c_2 bei x_2.
Also können wir Korollar 12.15.10 anwenden, und erhalten, dass $C_{00}^\infty(D)$ dicht in $C_0(D)$ ist.

12.16 Übungsaufgaben

12.1 Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\hat{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},\ x, y \in X\,,$$

eine Metrik auf X mit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\hat{d})$ ist, und dass stets $0 \leq \hat{d}(x, y) \leq \min(1, d(x, y))$.

Anmerkung: d und $\hat{d}$ erzeugen zwar dieselbe Topologie, sind aber im Allgemeinen nicht äquivalent im Sinne von (12.6).

12.2 Zeigen Sie, dass für eine Menge M und einen Filter $\mathfrak{F}$ auf M ein Mengensystem $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ genau dann eine Filterbasis von $\mathfrak{F}$ ist, wenn

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(M) : \exists B \in \mathfrak{B} :\ B \subseteq F\}\,.$$

Zeigen Sie auch, dass ein Mengensystem $\mathfrak{B}$ Filterbasis höchstens eines Filters ist. Schließlich zeige man, dass ein Mengensystem $\mathfrak{B}$ genau dann Filterbasis eines Filters ist, wenn gilt:

(FB1) $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{B}$, (FB2) $B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : \; B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

12.3 Für eine Funktion $f : M \to N$ und einen Filter $\mathfrak{F}$ auf M. zeige man, dass $f(\mathfrak{F}) = \{f(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathfrak{G}$ auf N ist. Man zeige, dass dabei $\mathfrak{G} = \{G \subseteq N : f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}\}$ ist. Man gebe schließlich ein Beispiel an, sodass $f(\mathfrak{F})$ zwar eine Filterbasis, aber kein Filter ist.

12.4 Sei X eine nichtleere Menge und d die diskrete Metrik, also $d(x, y) = 1, x \neq y$ und $d(x, x) = 0$. Man zeige, dass dann $\mathcal{T}(d) = \mathcal{P}(X)$.

12.5 Man zeige, dass $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T}_< := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ ein topologischer ist; siehe Beispiel 12.1.4, (v).

12.6 Man zeige, dass in $X = [-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T}_< = \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$ ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ gegen ein $x \in [-\infty, +\infty)$ genau dann konvergiert, wenn $x \geq \limsup_{i\in I} x_i$; vgl. Beispiel 12.1.14, (ii).

12.7 Man betrachte $X := \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$. Man zeige, dass $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum ist. Ist er Hausdorffsch? Weiters bestimme man den Umgebungsfilter und eine möglichst kleine Filterbasis davon um jeden Punkt $x \in X$.

Schließlich bestimme man den Abschluss einer jeden Teilmenge von X!

12.8 Man zeige: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und $x \in X$, so gilt immer $\cap_{U\in\mathfrak{U}(x)} U = \{x\}$. Weiters zeige man, dass $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen ist.

12.9 Sei X eine nichtleere Menge, und definiere $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \subseteq X$ als

$$\mathcal{T}_1 := \{A \subseteq X : \; A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich}\},$$

$$\mathcal{T}_2 := \{A \subseteq X : \; A = X \text{ oder } A \text{ endlich}\}.$$

Für welche X sind $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$ Topologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Unterscheide die Fälle, dass X endlich oder unendlich ist.

12.10 Sei $\mathcal{T}$ die Topologie $\mathcal{T}_1$ aus dem letzten Beispiel! Man spricht von der cofiniten Topologie auf der Menge X.

(i) Ist die cofinite Topologie Hausdorff?

(ii) Erfüllt sie das Trennungsaxiom T_3?

(iii) Erfüllt sie das Trennungsaxiom T_4?

12.11 Sei $\mathcal{T}$ wie im vorherigen Beispiel die cofinite Topologie auf der Menge X.

(i) Bestimme alle abgeschlossenen Teilmengen und den Abschluss einer beliebigen Teilmenge von X.

(ii) Ist $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ kompakt?

(iii) Für welche X ist $\mathcal{T}$ eine metrische Topologie, gibt es also eine Metrik d, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$?

12.12 Für eine topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ zeige man:

(i) $B \subseteq X \Rightarrow B^\circ \subseteq B$.

(ii) $C \subseteq B \Rightarrow C^\circ \subseteq B^\circ$.

(iii) $B \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $B = B^\circ$.

(iv) $C, B \subseteq X \Rightarrow (C \cap B)^\circ = C^\circ \cap B^\circ$.

12.13 Für eine topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $M \subseteq X$ sei $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$! Man zeige:

(i) ∂M ist immer abgeschlossen.

(ii) $\partial M = \{x \in X : \forall U \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow U \cap M \neq \emptyset \neq U \setminus M\}$.

(iii) $\partial M = \partial(M^c)$.

(iv) $\partial M = \emptyset \iff M, M^c \in \mathcal{T}$.

12.14 Zeigen Sie, dass in einem topologischen Raum der Durchschnitt von endlich vielen offenen und dichten Mengen wieder offen und dicht ist.

12.15 Sei G eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G, sodass für alle $g \in G$ die Abbildungen $h \mapsto gh$ und $h \mapsto hg$ stetig sind. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ diese Abbildungen sogar Homöomorphismen sind. Zeigen Sie, auch dass eine Untergruppe H von G, welche bzgl. $\mathcal{T}$ offen ist, auch abgeschlossen ist!

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\{gH : g \in G\}$ eine Partition abgibt, also dass dieses Mengensystem die Restklassenmenge einer Äquivalenzrelation ist.

12.16 Sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der von d_2 induzierten Topologie. Weiters sei $Y = (-1, 1) \times (-1, 1)$ versehen mit der von der Einschränkung $d_2|_{Y \times Y}$ von d_2 auf Y induzierten Topologie. Man gebe einen Homöomorphismus von X auf Y an!

12.17 Zeigen Sie, dass die chordale Metrik χ (siehe Übungsbeispiel 6.39) und die 2-Metrik d_2 auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ dieselbe Topologie induzieren, aber dort nicht äquivalent sind!

12.18 Sei $f : X \to Y$ mit topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$, wobei $(X, \mathcal{T}_X)$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Zeigen Sie, dass f bei $x \in X$ genau dann stetig ist, wenn für jede Folge (x_n) aus X mit Grenzwert x folgt, dass $f(x_n) \to f(x)$!

12.19 Sei $f : X \to Y$ mit topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Zeigen Sie, dass f bei jedem isolierten Punkt $x \in X$, also $\{x\} \in \mathcal{T}_X$, stetig ist. Für nicht isolierte $x \in X$ zeige man, dass die Stetigkeit in x dazu äquivalent ist, dass $\lim_{i \in I} f(x_i) = f(x)$, wobei $(x_i)_{i \in I}$ das Netz aus Lemma 12.2.6 mit $B = X \setminus \{x\}$ ist.

Anmerkung: Diese Äquivalenz entspricht der Charakterisierung $f(x) = \lim_{t \to x} f(t)$ von Stetigkeit im metrischen Fall; vgl. Proposition 6.1.4.

12.20 Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, so zeige man zunächst, dass für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathfrak{U}(x)$ von x ist. Schließlich zeige man, dass $(X, \mathcal{T})$ separabel ist (enthält also eine abzählbare dichte Teilmenge), wenn $(X, \mathcal{T})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt!

Hinweis für den zweiten Teil: Man greife aus jedem B einen Punkt heraus, wobei B alle Mengen einer abzählbaren Basis durchläuft, und zeige die Dichtheit dieser Menge in X!

12.21 Zeigen Sie, dass für einen metrischen Raum (X, d) auch die Umkehrung gilt: Ist $(X, \mathcal{T}(d))$ separabel (enthält also eine abzählbare dichte Teilmenge), dann erfüllt $(X, \mathcal{T}(d))$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom!

Hinweis: Betrachte $\{U_\epsilon(x) : x \in D, \mathbb{Q} \ni \epsilon > 0\}$ mit $D \subseteq X$ abzählbar und dicht!

12.22 Mit der Notation aus dem Übungsbeispiel 12.7 zeige man: Jede Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{T}$ muss schon mit $\mathcal{T}$ oder mit $\{\{1\}, \{1, 2\}, X\}$ übereinstimmen. Weiters zeige man: $\mathcal{V}$ ist eine Subbasis von $\mathcal{T}$ genau dann wenn $\mathcal{V} \supseteq \{\{1\}, \{1, 2\}\}$.

12.23 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum auf X hat.

12.24 Seien (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$, metrische Räume. Weiters seien $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit $c_n \to 0$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n < +\infty$. Definiere Abbildungen $d, \tilde{d} : (\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n)^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(f, g) := \max_{n\in\mathbb{N}} \Big(c_n \frac{d_n(f_n, g_n)}{1 + d_n(f_n, g_n)} \Big), \quad \tilde{d}(f, g) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n \frac{d_n(f_n, g_n)}{1 + d_n(f_n, g_n)} ,$$

wobei $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Zeige, dass d und $\tilde{d}$ Metriken sind, und dass sowohl $\mathcal{T}(d)$ als auch $\mathcal{T}(\tilde{d})$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(d_n)$ übereinstimmt.

12.25 Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum und sei $X \subseteq Y$ versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}|_X$. Man weise nach:

(i) $U \subseteq X$ ist genau dann eine Umgebung eines $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}|_X$, falls $U = X \cap V$ für eine Umgebung V von x bezüglich $\mathcal{T}$.

(ii) Ist $A \subseteq X$ und ist $\overline{A}$ der Abschluss von A in $(Y, \mathcal{T})$, so ist $\overline{A} \cap X$ genau der Abschluss von A in $(X, \mathcal{T}|_X)$.

(iii) Sei $(Z, \mathcal{O})$ ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to Z$ eine stetige Funktion. Dann ist auch $f|_X : X \to Z$ stetig, wenn man X mit $\mathcal{T}|_X$ versieht.

12.26 Gibt es in $\mathbb{R}$ nichttriviale Teilmengen, also $\neq \emptyset$ und $\neq \mathbb{R}$, die bzgl. $\mathcal{E} := \mathcal{T}(d_2)$ gleichzeitig offen und abgeschlossen sind?

Hinweis: Der Begriff Zusammenhang aus dem ersten Semester!

12.27 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\lambda \geq 0$ und $f_1, f_2 : X \to [-\infty, +\infty)$ von oben halbstetig; vgl. Beispiel 12.3.5. Zeigen Sie, dass λf_1 und $f_1 + f_2$ ebenfalls von oben halbstetig sind, indem sie zuerst die Stetigkeit von $t \mapsto \lambda t$ von $[-\infty, +\infty)$ in sich und von $(s, t) \to s + t$ von $[-\infty, +\infty) \times [-\infty, +\infty)$ nach $[-\infty, +\infty)$ nachweisen!

12.28 Seien $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume, sei Y eine Menge, und seien $f_i : Y \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen. Bezeichne mit $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf Y bezüglich der Familie $\{f_i : i \in I\}$ von Abbildungen.

Sei vorausgesetzt, dass die Familie $\{f_i : i \in I\}$ punktetrennend operiert, also dass es zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in Y$ eine Funktion f_{i_0} gibt mit $f_{i_0}(a) \neq f_{i_0}(b)$. Zeigen Sie: Sind alle Räume $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$ Hausdorff, so hat auch $\langle Y, \mathcal{T} \rangle$ diese Eigenschaft. Zeigen Sie auch: Sind alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ Hausdorff, so auch $(\prod X_i, \prod \mathcal{T}_i)$.

12.29 Sei $X = \mathbb{R}^{[0,1]} = \prod_{x \in [0,1]} \mathbb{R}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich $D = [0, 1]$ versehen mit der Produkttopologie.

Man zeige, dass für $f \in X$ das Mengensystem

$$\{V_{x_1,\dots,x_n;\epsilon}(f) : n \in \mathbb{N};\ x_1, \dots, x_n \in D;\ \epsilon > 0\},$$

wobei

$$V_{x_1,\dots,x_n;\epsilon}(f) := \{g \in X : |g(x_j) - f(x_j)| < \epsilon, j = 1, \dots, n\},$$

eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathfrak{U}(f)$ von f abgibt. Sind die Mengen $V_{x_1,\dots,x_n;\epsilon}(f)$ offen bzgl. der Produkttopologie? Zeigen Sie auch, dass der Umgebungsfilter von f keine Filterbasis bestehend aus abzählbar vielen Mengen besitzt. Gibt es dann eine Metrik d, sodass $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$?

Hinweis: Falls es eine abzählbare Filterbasis $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mathfrak{U}(f)$ gibt, so konstruiere man induktiv $x^1_1, \dots x^1_{n_1}, x^2_1, \dots x^2_{n_2}, \dots \in [0, 1]$ und eine Nullfolge $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \dots > 0$, sodass $V_{x^1_1,\dots x^1_{n_1},\dots,x^k_1,\dots x^k_{n_k};\epsilon_k}(f) \subseteq U_k$ und daher auch $(V_{x^1_1,\dots x^1_{n_1},\dots,x^k_1,\dots x^k_{n_k};\epsilon_k}(f))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Filterbasis abgibt. Nun zeige man $g \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} V_{x^1_1,\dots x^1_{n_1},\dots,x^k_1,\dots x^k_{n_k};\epsilon_k}(f) \Leftrightarrow g(x^k_j) = f(x^k_j), \forall k \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n_k\}$.....

12.30 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel sei $\mathcal{B}(D)$ die Teilmenge aller beschränkten Funktion aus X. Also $\mathcal{B}(D) = \{f \in X : \sup_{t\in D} |f(t)| < +\infty\}$.

Sei nun $\mathcal{T}_1$ die von der Supremumsmetrik $d_\infty(f, g) := \sup_{t\in D} |f(t) - g(t)|$ erzeugte Topologie auf $\mathcal{B}(D)$, und sei $\mathcal{T}_2$ die Spurtopologie $\mathcal{T}|_{\mathcal{B}(D)}$, wobei $\mathcal{T}$ die Produkttopologie aus dem vorherigen Beispiel ist.

Man zeige: Wenn $f_j \to f$ für ein Netz aus $\mathcal{B}(D)$ bzgl. $\mathcal{T}_1$, dann gilt auch $f_j \to f$ bzgl. $\mathcal{T}_2$. Die Umkehrung gilt aber nicht. Man zeige auch, dass $\mathcal{T}_1$ echt feiner als $\mathcal{T}_2$ ist, bzw. äquivalent dazu, dass $\mathrm{id} : (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_1) \to (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_2)$ stetig ist, aber $\mathrm{id} : (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_2) \to (\mathcal{B}(D), \mathcal{T}_1)$ nicht stetig ist.

12.31 Indem man eine offene Überdeckung angibt, die keine endliche Teilüberdeckung hat, zeige man, dass $(0, 1]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ versehen mit $\mathcal{E} = \mathcal{T}(d_2)$ nicht kompakt ist, und dass eine unendliche Menge X versehen mit der diskreten Topologie nicht kompakt ist.

12.32 Sei M eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Man zeige, dass $\{(-\infty, q) : q \in M\} \cup \{(q, \infty) : q \in M\}$ eine Subbasis der von der Euklidischen Metrik erzeugten Topologie (Euklidischen Topologie) ist.

12.33 Zeigen Sie, dass jeder metrische, kompakte Raum auch separabel ist, also eine abzählbare dicht Menge enthält!

12.34 Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ kompakte topologische Räume. Man zeige ohne den Satz von Tychonoff, dass $X_1 \times X_2$ versehen mit der Produkttopologie kompakt ist!

Hinweis: Siehe Fakta 8.7.8 für den metrischen Fall!

12.35 Sei I eine gerichtete Menge und ∞ ein nicht in I enthaltenes Element. Man versehe $I \cup \{\infty\}$ derart mit einer Topologie, sodass für jeden topologischen Raum X und jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X mit betrefflicher Menge I als Indexmenge und jedes $x \in X$ folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

$x_i \to x,\ i \in I$.

$f : I \cup \{\infty\} \to X$ ist stetig, wobei $f(i) = x_i$ und $f(\infty) = x$.

12.36 Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also eine Gruppe versehen mit einer Topologie, sodass $(g, h) \mapsto gh$ als Abbildung von $G \times G$ (versehen mit der Produkttopologie) nach G und $g \mapsto g^{-1}$ als Abbildung von G nach G stetig sind. Weiters seien M_1, M_2 Teilmengen von G.

Weisen Sie nach, dass wenn $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ zwei Netze in G über dieser gerichteten Menge mit $x_i \to x$ und $y_i \to y$ für $x, y \in G$ sind, dann auch $x_i y_i \to xy$.

Weiters zeige man, dass wenn M_1 und M_2 kompakt sind, dann auch $M_1 \cdot M_2$ eine kompakte Teilmenge von G ist.

12.37 Mit der Notation aus vorherigen Beispiel zeige man, dass $M_1 \cdot M_2$ abgeschlossen ist, wenn eine der beiden Mengen abgeschlossen und die andere kompakt ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass z im Abschluss von $M_1 \cdot M_2$ ist, und betrachten Sie ein Netz, dass aus $M_1 \cdot M_2$ heraus gegen z konvergiert!

Anmerkung: $M_1 \cdot M_2$ ist am Allgemeinen nicht abgeschlossen, wenn man nur fordert, dass M_1 und M_2 abgeschlossen sind. Beispielsweise sind in der topologischen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ abgeschlossen. Die Menge $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$ ist aber dicht in $\mathbb{R}$ und damit nicht abgeschlossen.

12.38 Zeigen Sie, dass $\Phi = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0, \|f'\|_\infty \leq 1\}$ als Teilmenge von $C([0,1], \mathbb{R})$ relativ kompakt ist, also dass $\overline{\Phi}$ kompakt ist.

12.39 Man gebe an, ob $\Phi \subseteq C(K, \mathbb{R})$ total beschränkt ist, wobei

(a) $K = [0,1]$ und $\Phi = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\}$

(b) $K = [0,1]$ und $\Phi = \{f \in C(K, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\}$

(c) $K = [0,1]$ und $\Phi = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

(d) $K = [0,2]$ und $\Phi = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

12.40 Ist $\Phi = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C([0,1), \mathbb{R})$ gleichgradig stetig? Begründung!

12.41 Zeigen Sie, dass für einen kompakten metrischen Raum K ein $\Phi \subseteq C(K, \mathbb{R})$ genau dann total beschränkt ist, wenn Φ als Teilmenge des normierten Raumes $(C(K, \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ beschränkt ist und wenn Φ gleichmäßig und gleichgradig stetig ist.

Letzteres bedeutet, dass es zu jeden $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $f \in \Phi$ und alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$.

Kapitel 13

Lemma von Zorn*

In diesem Anhang wollen wir insbesondere einen Beweis des Lemmas von Zorn bringen, das im Beweis des Satzes von Tychonoff, Satz 12.12.2, verwendet wurde.

Ordnungen

13.0.1 Definition. Sei M eine Menge, und $\leq$ eine Relation auf M, d.h. $\leq$ ist eine Teilmenge von $M \times M$. Dann heißt $\leq$ Halbordnung auf M, oder kurz $(M, \leq)$ Halbordnung, falls folgende drei Axiome gelten:

Reflexiv: $x \in M \Rightarrow x \leq x$.

Antisymmetrisch: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Transitiv: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Eine Halbordnung $(M, \leq)$ heißt Totalordnung, falls je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h.

$$x, y \in M \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x\,.$$

13.0.2 Definition. Sei $\leq$ eine Halbordnung auf der Menge M.
Ist $R \subseteq M$, dann heißt y obere (untere) Schranke von R, falls $x \leq y$ ($y \leq x$) für alle $x \in R$.
Ist $R \subseteq M$, dann heißt ein $m \in R$ maximales (minimales) Element von R, falls aus $x \in R \wedge m \leq x$ ($x \in R \wedge x \leq m$) folgt, dass $x = m$. Ein maximales (minimales) Element m heißt größtes (kleinstes) Element von R, wenn $x \leq m$ ($m \leq x$) für alle $x \in R$.
Ist $R \subseteq M$, dann heißt y Supremum oder kleinste obere Schranke (Infimum oder größte unter Schranke) von R, falls y eine obere (untere) Schranke von R ist, und gleichzeitig $y \leq x$ ($x \leq y$) für alle oberen (unteren) Schranken x von R gilt.

13.0.3 Definition. Sei $\leq$ eine Halbordnung auf der Menge M. Dann heißt $(M, \leq)$ Verband, wenn jede zweielementige Teilmenge von M ein Supremum und ein Infimum hat.
Ein Verband $(M, \leq)$ heißt vollständig, falls jede Teilmenge von M ein Supremum und ein Infimum hat.

Ist M eine Menge, so ist $\mathcal{P}(M)$ versehen mit der Mengeninklusion ein vollständiger Verband. Ein weiters Beispiel ist die Menge aller Topologien auf einer Menge.
Das nun folgende Lemma von Zorn ist ein fundamentales Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Es ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz und war von daher vor allem in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts umstritten. Mittlerweile sind die Mathematiker entspannter, auch wenn ein möglicher Verzicht auf das Auswahlaxiom immer noch in manchen Situationen explizit hervorgehoben wird.

13.0.4 Definition (Auswahlaxiom)**.** Gegeben sei eine Indexmenge I und eine Familie von nichtleeren Mengen $A_i,\ i \in I$, so existiert eine Funktion (Auswahlfunktion) $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$, sodass $f(i) \in A_i$.

Man beachte, dass das Auswahlaxiom nichts anderes besagt als, dass $\prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

13.0.5 Definition. Sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Wenn für jede total geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke existiert, dann heißt M induktiv geordnet. Wenn sogar jeweils eine kleinste obere Schranke existiert, dann heißt M strikt induktiv geordnet.

Folgendes Lemma ist der zentrale Hilfsatz zum Beweis des Lemma von Zorn.

13.0.6 Lemma. *Es sei $(M, \leq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge mit einem kleinsten Element o, sodass M strikt induktiv ist. Schließlich sei $F : M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft (Monotonie)*

$$m \leq F(m) \quad \text{für alle} \quad m \in M\,.$$

Dann gibt es ein $m \in M$ mit $F(m) = m$.

Beweis. Wie nennen eine Teilmenge S von M zulässig, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten: $o \in S$, $F(S) \subseteq S$, und für jede total geordnete Teilmenge $T \subseteq S$ liegt auch die kleinste obere Schranke $\sup T$ in S. Zum Beispiel ist M selbst zulässig.
Nun sei S_0 der Durchschnitt aller zulässigen Teilmengen von M. Da in jeder zulässigen Teilmenge auch o liegt, enthält der Durchschnitt zumindest das Element o . Außerdem gelten auch die beiden anderen Bedingungen für Zulässigkeit. Also ist S_0 selbst zulässig und damit die kleinste aller zulässigen Teilmengen von M.
Wenn wir nun zeigen können, dass S_0 total geordnet ist, dann folgt daraus für die kleinste obere Schranke $\sup S_0$, dass $\sup S_0$ das größte Element von S_0 ist. Somit gilt wegen der Zulässigkeit $F(\sup S_0) \leq \sup S_0$. Wir bekommen insgesamt

$$\sup S_0 \leq F(\sup S_0) \leq \sup S_0\,,$$

und damit die gewünschte Gleichheit. Noch zu zeigen ist also die Behauptung, dass S_0 total geordnet ist.
Für den Beweis nennen wir $e \in S_0$ ein extremales Element, wenn für alle $s \in S_0$ mit $s \leq e, s \neq e$ $(s < e)$ gilt, dass $F(s) \leq e$. Zum Beispiel ist o extremal. Für ein extremales e setzen wir

$$S_e := \{s \in S_0 : s \leq e \vee F(e) \leq s\}\,.$$

Dann ist für jedes extremale e die Menge S_e zulässig:

$\rightsquigarrow$ o liegt in S_e.

$\rightsquigarrow$ Für jedes Element $s \in S_e$ folgt aus $s < e$ schon $F(s) \leq e$, aus $s = e$ folgt $F(s) = F(e)$, und aus $s \nleq e$ folgt $F(e) \leq s \leq F(s)$. Also gilt insgesamt $F(S_e) \subseteq S_e$.

$\rightsquigarrow$ Es sei T eine total geordnete Teilmenge von S_e. Wenn dann für alle $t \leq \sup T$ die Ungleichung $t \leq e$ gilt, dann gilt auch $\sup T \leq e$. Wenn es aber mindestens ein t gibt, sodass $t \nleq e$ gilt, dann ist $F(e) \leq t \leq \sup T$. Wir sehen also in beiden Fällen, dass $\sup T \in S_e$.

Da aber S_0 die kleinste zulässige Teilmenge von M ist, muss also für alle extremalen e gelten:

$$S_e = S_0 .$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass jedes $e \in S_0$ extremal ist. Dann folgt nämlich für $s \in S_0$, dass $s \in S_e$ bzw.

$$s \leq e \vee e \leq F(e) \leq s ,$$

also die Tatsache, dass S_0 total geordnet ist.
Um zu beweisen, dass jedes $e \in S_0$ extremal ist, betrachten wir

$$E := \{e \in S_0 : e \text{ ist extremal}\} .$$

Wir weisen nach, dass E zulässig und damit gleich S_0 ist.

$\rightsquigarrow$ $o \in E$ ist klar.

$\rightsquigarrow$ Wir müssen zeigen, dass mit e auch $F(e)$ in E liegt. Ist $s \in S_0 = S_e$ und $s < F(e)$, so müssen wir $F(s) \leq F(e)$ folgern. Da $s \in S_e$, gilt $s \leq e$ oder $F(e) \leq s$, wobei wir letzteres wegen unserer Voraussetzung ausschließen können. Aus $s = e$ folgt trivialerweise $F(s) \leq F(e)$ und aus $s < e$ folgt wegen $e \in E$, dass $F(s) \leq e \leq F(e)$.

$\rightsquigarrow$ Nun sei noch $T \subseteq E$ total geordnet. Zu zeigen ist, dass $\sup T \in E$. Sei dazu $s \in S_0, s < \sup T$. Wenn für jedes $t \in T$ die Relation $F(t) \leq s$ gelten würde, dann wäre wegen $t \leq F(t)$ auch $\sup T \leq s$. Das ist ein Widerspruch. Also gibt es ein extremales $e \in T$ mit $F(e) \nleq s$, und da $S_0 = S_e$ gilt, folgt daraus zwangsweise $s \leq e$. Ist $s \neq e$, so folgt wegen $e \in E$, dass $F(s) \leq e \leq \sup T$. Da $\sup T \in S_0 = S_e$, $s < \sup T$ folgt aus $s = e$, dass $F(s) = F(e) \leq \sup T$. Damit folgt insgesamt, dass $\sup T$ extremal ist.

❑

Nun können wir das Lemma von Zorn aus dem Auswahlaxiom herleiten.

13.0.7 Satz. *Es sei $(M, \leq)$ eine nichtleere induktiv geordnete Menge. Dann besitzt M ein maximales Element.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall einer strikt induktiv geordneten Menge.
Sei $x \in M$ fest. Ist m maximales Element von $\{y \in M : x \leq y\}$, so ist m auch maximales Element von M. Also dürfen wir uns auf den Fall beschränken, dass M ein kleinstes Element enthält. Wir nehmen an, es gebe kein maximales Element. Dann finden wir für jedes $m \in M$ ein größeres Element $F(m)$ und definieren damit eine Funktion $F : M \to M$, für die gilt:

$$\forall m \in M : m < F(m) .$$

Man beachte, dass man für die Existenz einer solchen Funktion F das Auswahlaxiom verwendet. In der Tat ist F eine Auswahlfunktion der Familie $(A_m)_{m \in M}$, wobei $A_m = \{x \in M : m \leq x,\ m \neq x\}$. Da M strikt induktiv geordnet ist, folgt aus Lemma 13.0.6 der Widerspruch $F(m) = m$ für ein $m \in M$.
Nun sei M induktiv geordnet, und sei $\mathcal{H}$ die Menge aller total geordneten Teilmengen von M. Dann ist $\mathcal{H}$ bezüglich der Inklusion eine Halbordnung, und zwar eine strikt induktive, denn ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ totalgeordnet (bzgl. $\subseteq$), so ist es auch $\bigcup_{N \in \mathcal{T}} N$ (bzgl. $\leq$), und diese Teilmenge von M ist auch die kleinste obere Schranke von $\mathcal{T}$ (bzgl. $\subseteq$).
Also besitzt $\mathcal{H}$ nach dem ersten Beweisteil ein maximales Element T. Es sei O eine obere Schranke von T. Dann muss O zu T gehören, da sonst $T \cup \{O\}$ eine total geordnete Menge wäre, die T echt umfasste.
Dieses Element O ist dann ein maximales Element von M, denn für jedes $m \in M$ folgt aus $O \leq m$, dass m eine obere Schranke von T ist, und somit ebenfalls zu T gehören muss. Insbesondere folgt $m \leq O$ und damit $m = O$. ❑