

Kapitel 11

Wegintegrale

11.1 Wege

Wege im \mathbb{R}^n sind der Anschauung nach etwas eindimensionales.

11.1.1 Definition.

- Ein Weg γ im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung von einem Intervall $[a, b]$ nach \mathbb{R}^n . Ist γ stetig, so sprechen wir von einem *stetigen Weg*.
- Dabei heißen zwei Wege $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\theta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent, falls sie Umparametrisierungen voneinander sind, was bedeutet, dass es eine streng monoton wachsende Bijektion $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$ mit $\theta \circ \alpha = \gamma$ gibt.¹ Wir schreiben auch $\gamma \sim \theta$ dafür.
- Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, so bezeichnet $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ den in der Gegenrichtung durchlaufenen Weg $t \mapsto \gamma(a + b - t)$.
- Sind $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei (stetige) Wege mit $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, so sei $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die (stetige) Funktion mit

$$(\gamma_1 \oplus \gamma_2)|_{[a_1, b_1]} = \gamma_1, \quad (\gamma_1 \oplus \gamma_2)|_{[a_2, b_2]} = \gamma_2.$$

- Sind x_0, \dots, x_m Punkte aus \mathbb{R}^n , so bezeichnet $\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_1 x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}$ den stetigen Weg $\gamma : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch $\gamma(t) = x_{j-1} + (t - (j-1))(x_j - x_{j-1})$, wenn $t \in [j-1, j]$ für $j = 1, \dots, m$. Solche Wege nennt man *Polygonzüge*.
- Im Fall $m = 1$ nennt man $\gamma(t) = tx_1 + (1-t)x_0$ die *gerade Strecke* von x_0 nach x_1 und schreibt auch $\overrightarrow{x_0 x_1}$ dafür.

¹ Wegen Korollar 6.5.3 ist eine solche Bijektion α stetig. Umgekehrt ist eine stetige Bijektion $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, vgl. Lemma 6.5.5.

11.1.2 Beispiel. Sind x_0, \dots, x_m Punkte aus \mathbb{R}^n , und definiert man für $j = 1, \dots, m$ den Weg $\widetilde{x_{j-1}x_j} : [j-1, j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\widetilde{x_{j-1}x_j}(t) := x_{j-1} + (t - (j-1))(x_j - x_{j-1})$, so sind offenbar $\widetilde{x_{j-1}x_j}$ und $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$ äquivalent, und

$$\widetilde{x_0x_1} \oplus \dots \oplus \widetilde{x_{m-1}x_m} = \overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_1x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1}x_m}.$$

11.1.3 Fakta.

1. Da mit α auch α^{-1} eine streng monoton wachsende Bijektion ist, ist \sim eine Äquivalenzrelation. Man sieht auch unmittelbar, dass $\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \gamma^- \sim \gamma'^-$.
2. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg und ist $\alpha(t) = a + t(b - a)$, so ist γ äquivalent zu $\gamma \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, also äquivalent zu einem Weg mit Parametermenge $[0, 1]$.
3. Das Bild eines stetigen Weges ist als stetiges Bild einer kompakten und zusammenhängenden Menge wieder kompakt und zusammenhängend; siehe Proposition 6.1.13 und Proposition 6.2.4.
4. Man könnte glauben, dass das Bild eines stetigen Weges den Weg schon bestimmt. Das ist aber nicht der Fall, wenn man nur an ein Geradenstück denkt, das man zuerst in die Hin- und dann in die Rückrichtung durchläuft.
5. Das Bild eines stetigen Weges kann auch ganz unerwartet aussehen. Man kann z.B. einen Weg in \mathbb{R}^2 konstruieren, der $[0, 1] \times [0, 1]$ als Bild hat.

Um einem Weg eine Länge $\ell(\gamma)$ zuzuordnen, liegt es nahe, das zuerst bei den einfachsten Arten von Wegen, nämlich den geraden Strecken $\gamma = \overrightarrow{xy}$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ zu tun:

$$\ell(\gamma) := \|x - y\|_2.$$

Die Länge eines beliebigen Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ approximiert man dadurch, dass man eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \dots, n(\mathcal{Z})\}$ von $[a, b]$ wie in Definition 8.1.2 nimmt und die Länge des dazugehörigen Polygonzuges

$$\overrightarrow{\gamma(\xi_0)\gamma(\xi_1)}, \dots, \overrightarrow{\gamma(\xi_{n(\mathcal{Z})-1})\gamma(\xi_{n(\mathcal{Z})})}, \quad (11.1)$$

nämlich

$$L(\mathcal{Z}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \|\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})\|_2$$

berechnet.

11.1.4 Definition. Die Länge $\ell(\gamma)$ des Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann das Supremum von $L(\mathcal{Z})$ über die Menge \mathfrak{Z} aller Zerlegungen \mathcal{Z} von $[a, b]$:

$$\ell(\gamma) := \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} L(\mathcal{Z}). \quad (11.2)$$

Der Fall $\ell(\gamma) = +\infty$ kann dabei auftreten. Ist jedoch $\ell(\gamma) < +\infty$, so spricht man von einem *rektifizierbaren Weg*.

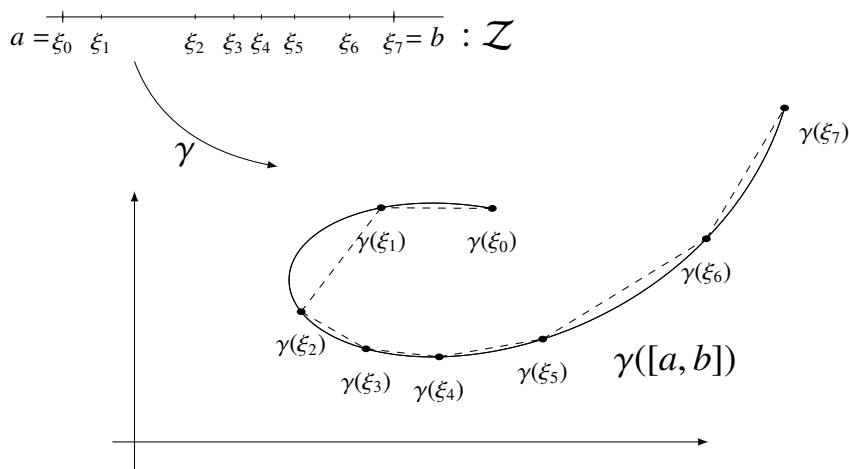


Abbildung 11.1: Polygonzüge zur Approximation der Weglänge

11.1.5 Fakta.

1. Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = tx_1 + (1-t)x_0$ eine gerade Strecke, so gilt für eine beliebige Zerlegung \mathcal{Z}

$$L(\mathcal{Z}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{Z})} \|(\xi_j - \xi_{j-1})(x_1 - x_0)\|_2 = \|x_1 - x_0\|_2.$$

Also ist unser Zugang zur Weglänge in sich konsistent.

2. Da \mathfrak{Z} bezüglich \subseteq eine gerichtete Menge ist, und da wegen der Dreiecksungleichung, $\|\gamma(w) - \gamma(u)\|_2 \leq \|\gamma(w) - \gamma(v)\|_2 + \|\gamma(v) - \gamma(u)\|_2$, aus $\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2$ folgt, dass $L(\mathcal{Z}_1) \leq L(\mathcal{Z}_2)$, kann man $\ell(\gamma)$ als Limes eines monoton wachsenden Netzes über $(\mathfrak{Z}, \subseteq)$ schreiben: $\ell(\gamma) = \lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} L(\mathcal{Z})$.
3. Für ein nicht konstantes γ gibt es $t_1, t_2 \in [a, b]$, sodass $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Dann folgt $L(\{a, b, t_1, t_2\}) \geq \|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\|_2 > 0$, und damit $\ell(\gamma) > 0$. Ist dagegen γ konstant, so folgt sofort aus der Definition $\ell(\gamma) = 0$. In jedem Fall gilt

$$\ell(\gamma) \geq L(\{a, b\}) = \|\gamma(b) - \gamma(a)\|_2. \quad (11.3)$$

4. Da sich die Zerlegungen der Definitionsbereiche von äquivalenten Wegen bijektiv entsprechen, überzeugt man sich leicht, dass äquivalente Wege dieselbe Länge haben. Genauso leicht sieht man $\ell(\gamma) = \ell(-\gamma)$.
5. Aus der Monotonie (vgl. 2) folgt für ein endliches $A \subseteq [a, b]$ unmittelbar, dass auch

$$\ell(\gamma) = \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}, \mathcal{Z} \supseteq A} L(\mathcal{Z}).$$

Da $\mathfrak{Z}_A := \{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z} : \mathcal{Z} \supseteq A\}$ mit \subseteq zu einer gerichteten Menge wird, und da $L(\mathcal{Z})$ monoton von \mathcal{Z} abhängt, gilt wegen (5.10) und Bemerkung 5.3.9 auch

$$\ell(\gamma) = \lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A} L(\mathcal{Z}).$$

6. Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Wege, sodass $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Infolge ist $\gamma_1 \oplus \gamma_2 : [a_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Weiters seien $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ bzw. \mathfrak{Z} die Menge aller Zerlegungen von $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ bzw. $[a_1, b_2]$.

Für $A = \{a_2\}$ und $\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A$ gilt offenbar $\mathcal{Z} \cap [a_1, b_1] \in \mathfrak{Z}_1$ und $\mathcal{Z} \cap [a_2, b_2] \in \mathfrak{Z}_2$, wobei

$$L(\gamma_1 \oplus \gamma_2, \mathcal{Z}) = L(\gamma_1, \mathcal{Z} \cap [a_1, b_1]) + L(\gamma_2, \mathcal{Z} \cap [a_2, b_2]).$$

Wegen $\mathfrak{Z}_j = \{\mathcal{Z} \cap [a_j, b_j] : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A\}$ gilt für $j = 1, 2$ auch

$$\ell(\gamma_j) = \sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A} L(\gamma_j, \mathcal{Z} \cap [a_j, b_j]) = \lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A} L(\gamma_j, \mathcal{Z} \cap [a_j, b_j]).$$

Wegen 5 folgt

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_1 \oplus \gamma_2) &= \lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A} L(\gamma_1 \oplus \gamma_2, \mathcal{Z}) \\ &= \lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A} L(\gamma_1, \mathcal{Z} \cap [a_1, b_1]) + \lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}_A} L(\gamma_2, \mathcal{Z} \cap [a_2, b_2]) \\ &= \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) \end{aligned}$$

in dem Sinn, dass die linke Seite genau dann endlich ist, wenn die rechte Seite endlich ist, also wenn $\ell(\gamma_1) < +\infty$ und $\ell(\gamma_2) < +\infty$.

7. Sei \mathcal{Z} eine Zerlegung von $[a, b]$, und betrachte den in (11.1) erwähnten Polygonzug $p : [0, n(\mathcal{Z})] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$p(t) = \gamma(\xi_{j-1}) + \frac{t - \xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} (\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})), \quad t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]. \quad (11.4)$$

Da dieser Weg eine Zusammensetzung von geraden Strecken – genauer eine Zusammensetzung von zu geraden Strecken äquivalenten Wegen – ist, folgt aus dem letzten Punkt, dass $\ell(p) = L(\mathcal{Z})$.

11.1.6 Bemerkung. Obwohl sich $\ell(\gamma)$ für ein Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, also im Fall $n = 1$, nur schwer als Weglänge interpretieren lässt, ist dieser Fall doch von Bedeutung. In der Tat sagt man, dass $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von *beschränkter Variation* ist, wenn $\ell(\gamma) < +\infty$, und nennt dann $\ell(\gamma)$ die *Variation* der Funktion γ .

11.1.7 Lemma. Für einen rektifizierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die reellwertige Funktion $\ell(x) := \ell(\gamma|_{[a,x]})$ auf $[a, b]$ monoton wachsend. Dabei impliziert die Rechtsstetigkeit (Linksstetigkeit, Stetigkeit)² von γ bei x die Rechtsstetigkeit (Linksstetigkeit, Stetigkeit) von ℓ bei x .

² Rechtsstetig bedeutet $\lim_{s \rightarrow x^+} \ell(s) = \ell(x)$ und linksstetig $\lim_{s \rightarrow x^-} \ell(s) = \ell(x)$.

Beweis. $x \mapsto \ell(\gamma|_{[a,x]})$ ist offensichtlich monoton wachsend; vgl. Fakta 11.1.5, 6. Sei γ in einem Punkt $x \in [a, b)$ rechtsstetig. Somit gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $\|\gamma(x) - \gamma(s)\|_2 < \epsilon$ für alle $s \in [x, x + \delta]$.

Wegen $\ell(\gamma|_{[x,b]}) \leq \ell(\gamma) < +\infty$ gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung \mathcal{Z}_0 von $[x, b]$, sodass

$$\ell(\gamma|_{[x,b]}) - \epsilon < L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) \leq \ell(\gamma|_{[x,b]}).$$

Da $L(\mathcal{Z})$ monoton von \mathcal{Z} abhängt, können wir \mathcal{Z}_0 so wählen, dass die erste Stützstelle ξ rechts von x einen Abstand zu x kleiner oder gleich δ hat.

Offenbar ist $\mathcal{Z}_0 \cap [\xi, b]$ eine Zerlegung von $[\xi, b]$, wobei $L(\gamma|_{[\xi,b]}, \mathcal{Z}_0 \cap [\xi, b]) = L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) - \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2$. Also gilt

$$L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) - \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2 \leq \ell(\gamma|_{[\xi,b]}),$$

und daher

$$\begin{aligned} \ell(\gamma|_{[x,\xi]}) &\leq \ell(\gamma|_{[x,\xi]}) + \left(\ell(\gamma|_{[\xi,b]}) - L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) + \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2 \right) \\ &= \|\gamma(\xi) - \gamma(x)\|_2 + \ell(\gamma|_{[x,b]}) - L(\gamma|_{[x,b]}, \mathcal{Z}_0) < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Also ist $\ell(\gamma|_{[x,\xi]}) < 2\epsilon$. Wegen der Monotonie gilt auch $\ell(\gamma|_{[a,s]}) - \ell(\gamma|_{[a,x]}) = \ell(\gamma|_{[x,s]}) \leq \ell(\gamma|_{[x,\xi]}) < 2\epsilon$ für alle $s \in [x, \xi]$.

Die Linksstetigkeit zeigt man analog. \square

Konkret ausrechnen lässt sich die Weglänge für stetig differenzierbare Wege.

11.1.8 Satz. Für $\gamma \in C^1[a, b]$ ist γ immer rektifizierbar, und $\ell(x)$ ist differenzierbar mit der Ableitung $\|\gamma'(x)\|_2$. Insbesondere gilt

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\|_2 dx.$$

Beweis. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und (9.12) erhält man

$$\|\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})\|_2 = \left\| \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \gamma'(t) dt \right\|_2 \leq \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Aufsummieren über alle $j = 1, \dots, n(\mathcal{Z})$ ergibt $L(\mathcal{Z}) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$ für jede Zerlegung \mathcal{Z} von $[a, b]$. Also gilt $\ell(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$.

Wegen (11.3) und der eben bewiesenen Ungleichung erhalten wir für $a \leq x < y \leq b$

$$\|\gamma(y) - \gamma(x)\|_2 \leq \ell(\gamma|_{[x,y]}) \leq \int_x^y \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Dividiert man diese Ungleichung durch $(y - x)$ und lässt $x \rightarrow y$ streben, so konvergiert die linke und die rechte Seite gegen $\|\gamma'(y)\|_2$, und somit auch der Ausdruck $\frac{\ell(y) - \ell(x)}{y - x}$ in der Mitte. Also gilt $\ell'(y)^- = \|\gamma'(y)\|_2$. Lässt man $y \rightarrow x$ streben, so sieht man genauso $\ell'(x)^+ = \|\gamma'(x)\|_2$. Insgesamt folgt $\ell'(x) = \|\gamma'(x)\|_2$ für alle $x \in [a, b]$, wobei wir an den Rändern die jeweiligen einseitigen Grenzwerte meinen. \square

11.1.9 Definition. Eine Abbildung $f : [a, b] \rightarrow X$ mit einem Banachraum X heißt *stückweise stetig differenzierbar*, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ gibt, sodass jede Einschränkung $f|_{(t_{j-1}, t_j)}$ eine stetig differenzierbare Fortsetzung auf $[t_{j-1}, t_j]$ hat.

Die Funktion $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist offenbar stetig und stückweise stetig differenzierbar (vgl. Definition 11.1.9), wenn es eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j\}_{j=0}^{n(\mathcal{Z})}$ gibt, sodass $\gamma|_{[\xi_{j-1}, \xi_j]} \in C^1[\xi_{j-1}, \xi_j]$ für $j = 1, \dots, n(\mathcal{Z})$. Wendet man Satz 11.1.8 insgesamt $n(\mathcal{Z})$ -mal auf $\gamma|_{[\xi_{j-1}, \xi_j]}$, $j = 1, \dots, n(\mathcal{Z})$ an, so erhalten wir

11.1.10 Korollar. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, so ist dieser rektifizierbar mit $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(x)\|_2 dx$.

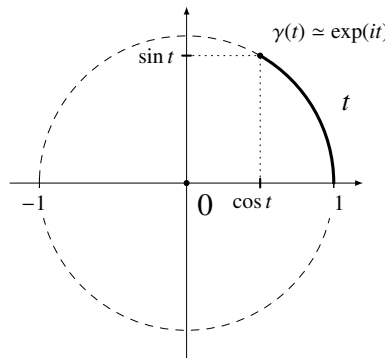
11.1.11 Beispiel. Man betrachte den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix};$$

siehe Definition 6.9.11, Beispiel 10.1.10. Für ein $t \in [0, 2\pi]$ gilt gemäß Satz 11.1.8

$$\ell(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} \right\|_2 ds = \int_0^t \sqrt{\sin^2 s + \cos^2 s} ds = t.$$

Also ist t genau die Weglänge des Bogens $\gamma|_{[0,t]}$.



Das erklärt, warum man für ein $w \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ dargestellt in Polarkoordinaten (siehe Definition 6.9.11), $w = r \exp(it) = r(\cos t + i \sin t)$, die Zahl t auch als *Bogenlänge* bezeichnet.

11.1.12 Bemerkung. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer und stetiger Weg, so wissen wir nun, dass ℓ das Intervall $[a, b]$ monoton wachsend und surjektiv auf $[0, \ell(\gamma)]$ abbildet. Für injektives und daher bijektives $\ell : [a, b] \rightarrow [0, \ell(\gamma)]$ ist $\beta = \gamma \circ \ell^{-1}$ ein zu γ äquivalenter Weg. β hat die spezielle Eigenschaft, dass für alle $t \in [0, \ell(\gamma)]$ die Länge von $\beta|_{[0,t]}$ genau t ist.

Ist ℓ nicht injektiv, so kann man für $t \in [0, \ell(\gamma)]$, $\beta(t) := \gamma(x)$ setzen, wobei x eine Zahl aus $[a, b]$ ist, sodass $\ell(x) = t$. Für $\ell(x_1) = t = \ell(x_2)$ mit $x_1 < x_2$ hat $\gamma|_{[x_1, x_2]}$ Weglänge Null und ist somit konstant, daher $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$. Infolge ist β wohldefiniert, wobei $\gamma = \beta \circ \ell$. Mit der Kompaktheit von $[0, \ell(\gamma)]$ folgert man aus $\gamma = \beta \circ \ell$ leicht die Stetigkeit von β .

Also ist β auch in diesem Fall ein zu γ in einem allgemeineren Sinn äquivalenter Weg, sodass die Länge des Weges $\beta|_{[0,t]}$ genau t ist.

11.1.13 Bemerkung (*). Bisher haben wir bei der Behandlung von Wegen und Weglängen nirgends verwendet, dass γ in den \mathbb{R}^n mit der $\|\cdot\|_2$ -Norm hinein abbildet. Wir haben die euklidische Norm nur verwendet, weil sie dem als natürlich empfundenen Längenbegriff entspricht.

In der Tat kann man genauso $\ell(\gamma)$ definieren, wenn γ eine beliebige Funktion von $[a, b]$ in einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ ist. Es gelten dann dieselben Eigenschaften, die wir eben aufgezählt haben. Ist hier $\ell(\gamma) < +\infty$, so spricht man von γ als einer *Funktion von beschränkter Variation*.

Äquivalente Normen $\|\cdot\|$ und $\|\|\cdot\|\|$, also $\alpha\|\cdot\| \leq \|\|\cdot\|\| \leq \beta\|\cdot\|$, induzieren zwar verschiedene Längenbegriffe, aber diese sind dennoch vergleichbar:

$$\alpha\ell^{\|\cdot\|}(\gamma) \leq \ell^{\|\|\cdot\|\|}(\gamma) \leq \beta\ell^{\|\cdot\|}(\gamma).$$

Versieht man etwa \mathbb{R}^n mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ oder $\|\cdot\|_1$, so erhält man insbesondere für ein und denselben Weg verschiedene Längenbegriffe.

11.2 Wegintegrale

11.2.1 Beispiel. Wir betrachten ein Objekt im Gravitationsfeld einer Punktmasse, und wollen die Arbeit berechnen, die verrichtet wird wenn man das Objekt von einer Position zu einer anderen verschiebt. Dabei denken wir uns diese Punktmasse im Nullvektor des \mathbb{R}^3 .

Das Newtonsche Gravitationsgesetz besagt, dass sich die Gravitationskraft umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes r zur Punktmasse verhält – also durch $C\frac{1}{r^2}$ mit einer Konstante C berechnet werden kann. Vernachlässigen wir diese Konstante, und zerlegt man die Kraft, die auf einen Punkt $x = (\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3$ wirkt, in ihre Komponenten, so erhält man den Kraftvektor

$$F(x) = -\frac{1}{\|x\|_2^3} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

Verschiebt man nun einen Punkt P von x zu einer sehr nahen Position $x + h$, so ist die Arbeit, die verrichtet wird, wegen der Formel *Arbeit = Kraft \times Weg* ungefähr gleich

$$-(F(x), h) = -F(x)^T h.$$

Sei nun P ein Punkt in der Position x_0 , und werde P längs eines Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ in die Position x_1 verschoben; also $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x_1$. Weiters sei vorausgesetzt, dass γ hinreichend glatt ist – etwa stetig und stückweise stetig differenzierbar.

Wir zerlegen die Kurve in kleine Abschnitte, indem wir $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ nehmen, und γ durch den Polygonzug mit den Ecken in $\gamma(t_i)$ approximiert. Die verrichtete Arbeit ω ist dann ungefähr

$$\omega \approx \sum_{i=1}^n -F(\gamma(t_i))^T (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})).$$

Wir werden unten sehen, dass dieser Ausdruck konvergiert, wenn man die Approximation immer genauer macht. Für diesen Grenzwert werden wir

$$\int_{\gamma} -F(x)^T dx,$$

schreiben, und ihn das Wegintegral des Vektorfeldes $\phi = -F^T$ längs des Weges γ nennen.

Mathematisch lässt sich die Situation aus Beispiel 11.2.1 dadurch fassen, dass man ein sogenanntes *Vektorfeld* gegeben hat. Das ist eine Abbildung $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ von einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in die Menge aller linearen³ Abbildungen von \mathbb{R}^n in einen Banachraum X . Oft gilt, so wie in Beispiel 11.2.1, $X = \mathbb{R}$.

Ist nun $\gamma : [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Weg, so entspricht die oben erwähnte Approximation der Arbeit bei gegebener Riemann-Zerlegung $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ der Summe

$$W(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi(\gamma(\alpha_j)) (\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})). \quad (11.5)$$

11.2.2 Definition. Konvergiert das Netz $(W(\mathcal{R}))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ in X , so nennen wir seinen Grenzwert

$$\int_{\gamma} \phi(x) dx := \lim_{|\mathcal{R}| \rightarrow 0} W(\mathcal{R})$$

das *Wegintegral* von ϕ längs des Weges γ .

Für $f : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$ setzen wir zudem

$$P(\mathcal{R}) := \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})).$$

Das *Riemann-Stieltjes-Integral* $\int_a^b f dg$ ist definiert als $\lim_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} P(\mathcal{R})$, falls dieser Limes in X existiert.

Wegintegrale sind spezielle Riemann-Stieltjes-Integrale, da $P(\mathcal{R}) = W(\mathcal{R})$ und in Folge $\int_a^b f dg = \int_{\gamma} \phi(x) dx$, wenn $g = \gamma$ und $f = \phi \circ \gamma$.

11.2.3 Fakta.

1. Ist $\theta : [c, d] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\gamma = \theta \circ \beta : [a, b] \rightarrow D$ ein zu θ äquivalenter Weg mit einer streng monoton wachsenden Bijektion $\beta : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Gemäß Satz 6.3.3 sind die stetigen Abbildungen β und β^{-1} sogar gleichmäßig stetig.

Für eine Riemann-Zerlegung \mathcal{R} von $[a, b]$ bezeichne im Folgenden $W_{\gamma}(\mathcal{R})$ die Wegsumme von ϕ längs γ , und für eine Riemann-Zerlegung \mathcal{R}' von $[c, d]$ bezeichne $W_{\theta}(\mathcal{R}')$ die Wegsumme von ϕ längs θ

³ Wegen Beispiel 9.2.10 sind diese automatisch beschränkt, wenn wir \mathbb{R}^n mit $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ oder $\|\cdot\|_{\infty}$ versehen.

Ist $\mathcal{R} = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine Riemann-Zerlegung von $[a, b]$, so ist $\beta(\mathcal{R}) := ((\beta(\xi_j))_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\beta(\alpha_j))_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ eine solche von $[c, d]$ und umgekehrt, wobei $W_\theta(\beta(\mathcal{R})) = W_\gamma(\mathcal{R})$.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es dabei zu jeder Riemann-Zerlegung \mathcal{R}'_0 von $[c, d]$ ein $\delta > 0$, sodass für jede Riemann-Zerlegung \mathcal{R} von $[a, b]$ aus $|\mathcal{R}| \leq \delta$ auch $|\beta(\mathcal{R})| \leq |\mathcal{R}'_0|$ folgt. Gemäß Definition 5.3.6 ist somit $(W_\gamma(\mathcal{R}))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} = (W_\theta(\beta(\mathcal{R})))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ ein Teilnetz von $(W_\theta(\mathcal{R}'))_{\mathcal{R}' \in \mathfrak{R}'}$. Weil auch β^{-1} gleichmäßig stetig ist, gilt auch die Umkehrung. Wegen Lemma 5.3.7 erhalten wir

$$\int_\theta \phi(x) dx = \int_\gamma \phi(x) dx$$

in dem Sinne, dass wenn eines dieser Integrale existiert, dann auch das andere existiert und diese übereinstimmen.

Ist γ^- der in die Gegenrichtung durchlaufene Weg, so entsprechen sich die Riemann-Summen auch bijektiv, wobei sich die korrespondierenden Summen $W(\mathcal{R})$ nur im Vorzeichen unterscheiden, und somit $\int_{\gamma^-} \phi(x) dx = - \int_\gamma \phi(x) dx$ gilt.

2. Ist unser Weg rektifizierbar und stetig, und ist ϕ stetig, so existiert das Integral.

Das folgt aus der allgemeineren Tatsache, dass $\int_a^b f dg$ existiert, falls f stetig auf $[a, b]$ und g rektifizierbar ist. Der Beweis für diese Tatsache ist ähnlich, wie der Beweis für die Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums.

Beweis. Seien $\mathcal{R}_1 = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R}_1)}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)})$ und $\mathcal{R} = ((\eta_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}; (\beta_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})})$ zwei Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$, sodass die Stützstellen von \mathcal{R} die von \mathcal{R}_1 umfassen.

Ist $j \in \{1, \dots, n(\mathcal{R}_1)\}$, so gibt es Indizes $k(j-1) < k(j)$, sodass

$$\xi_{j-1} = \eta_{k(j-1)} < \underbrace{\eta_{k(j-1)+1} < \dots < \eta_{k(j)-1}}_{k(j)-k(j-1)-1 \text{ viele}} < \eta_{k(j)} = \xi_j.$$

Wegen $g(\xi_j) - g(\xi_{j-1}) = \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})$ gilt

$$\begin{aligned} \|P(\mathcal{R}) - P(\mathcal{R}_1)\| &\leq \\ &\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)} \left\| f(\alpha_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})) - \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} f(\beta_k)(g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)} \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)} \|f(\alpha_j) - f(\beta_k)\| \cdot \|g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})\|_2. \end{aligned}$$

Dabei ist $\|f(\alpha_j) - f(\beta_k)\|$ die Abbildungsnorm von $f(\alpha_j) - f(\beta_k) \in L(\mathbb{R}^n, X) = L_b(\mathbb{R}^n, X)$, wenn \mathbb{R}^n mit der euklidischen Norm versehen wird.

Wegen $|\alpha_j - \beta_k| \leq (\xi_j - \xi_{j-1}) \leq |\mathcal{R}_1|$ für $k \in \{k(j-1) + 1, \dots, k(j)\}$ folgt

$$\|P(\mathcal{R}) - P(\mathcal{R}_1)\| \leq \sum_{k=1}^{n(\mathcal{R})} \rho(|\mathcal{R}_1|) \cdot \|g(\eta_k) - g(\eta_{k-1})\|_2 \leq \rho(|\mathcal{R}_1|) \cdot \ell(g), \quad (11.6)$$

wobei $\rho(\delta) := \sup_{s,t \in [a,b], |s-t| \leq \delta} \|f(s) - f(t)\|$.

Sind nun \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 zwei beliebige Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ und wählt man \mathcal{R} , sodass die Stützstellen von \mathcal{R} sowohl die von \mathcal{R}_1 also auch die von \mathcal{R}_2 umfasst, so folgt aus (11.6) je einmal angewandt auf \mathcal{R}_1 und auf \mathcal{R}_2 , der Dreiecksungleichung sowie der Monotonie von ρ

$$\|P(\mathcal{R}_1) - P(\mathcal{R}_2)\| \leq 2\rho(\max(|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2|)) \cdot \ell(g).$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gilt $\lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta) = 0$, woraus folgt, dass $(P(\mathcal{R}))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ ein Cauchy-Netz und daher konvergent ist. \square

3. Als Grenzwert von Netzen mit Werten im Banachraum X erfüllen Wegintegrale $(\mu, \nu \in \mathbb{R})$:

$$\int_{\gamma} (\mu\phi(x) + \nu\psi(x)) dx = \mu \int_{\gamma} \phi(x) dx + \nu \int_{\gamma} \psi(x) dx$$

Entsprechend sind Riemann-Stieltjes-Integrale linear nicht nur in f , sondern auch in g .

4. Sind $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow D$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow D$ zwei stetige und rektifizierbare Wege mit $b_1 = a_2$ und $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, und ist $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ stetig, dann gilt

$$\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} \phi(x) dx = \int_{\gamma_1} \phi(x) dx + \int_{\gamma_2} \phi(x) dx. \quad (11.7)$$

Allgemeiner gilt für ein $b \in (a, c)$, ein stetiges $f : [a, c] \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$, und ein rektifizierbares $g : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dass

$$\int_a^c f dg = \int_a^b f dg + \int_b^c f dg.$$

Beweis. Die Voraussetzungen gewährleisten, dass alle Integrale existieren. Wir wählen zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein reelles $\delta > 0$ so klein, dass $\|P(\mathcal{R}_1) - \int_a^b f dg\| < \epsilon$, $\|P(\mathcal{R}_2) - \int_b^c f dg\| < \epsilon$ und $\|P(\mathcal{R}) - \int_a^c f dg\| < \epsilon$ für jede Riemann-Zerlegung \mathcal{R}_1 von $[a, b]$, jede Riemann-Zerlegung \mathcal{R}_2 von $[b, c]$ und jede Riemann-Zerlegung \mathcal{R} von $[a, c]$ mit $|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2|, |\mathcal{R}| < \delta$.

Sind \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 zwei beliebige Riemann-Zerlegungen von $[a, b]$ bzw. $[b, c]$ mit $|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2| < \delta$, so sei \mathcal{R} jene Riemann-Zerlegungen von $[a, c]$, deren Stütz- und

Zwischenstellen genau jene von \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 umfasst. Dann gilt $|\mathcal{R}| < \delta$ und $P(\mathcal{R}) = P(\mathcal{R}_1) + P(\mathcal{R}_2)$. Somit folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \left\| \int_a^b f dg + \int_b^c f dg - \int_a^c f dg \right\| \leq \\ & \left\| P(\mathcal{R}_1) - \int_a^b f dg \right\| + \left\| P(\mathcal{R}_2) - \int_b^c f dg \right\| + \left\| P(\mathcal{R}) - \int_a^c f dg \right\| < 3\epsilon. \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt die behauptete Gleichheit. \square

5. Es gilt

$$\begin{aligned} \|P(\mathcal{R})\| & \leq \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \|f(\alpha_j)\| \cdot \|g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 \\ & \leq \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \|g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})\|_2 \\ & \leq \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| \cdot \ell(g). \end{aligned}$$

Daraus erkennt man auch, dass für konstantes g das Riemann-Stieltjes-Integral existiert und verschwindet. Entsprechend verschwindet das Wegintegral über einen konstanten Weg.

Existiert das Riemann-Stieltjes-Integral, so ist seine Norm kleiner oder gleich $\sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| \cdot \ell(g)$. Existiert das Wegintegral, so gilt entsprechend

$$\left\| \int_{\gamma} \phi(x) dx \right\| \leq \sup_{t \in [a,b]} \|\phi \circ \gamma(t)\| \cdot \ell(\gamma). \quad (11.8)$$

11.2.4 Bemerkung. Die Stetigkeit eines Vektorfeldes $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X) = L_b(\mathbb{R}^n, X)$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist äquivalent zur Stetigkeit der Funktion $x \mapsto \phi(x)e_j$, $j = 1, \dots, n$, wie man unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \max_{j=1, \dots, n} \|\phi(x)e_j - \phi(y)e_j\| & \leq \|\phi(x) - \phi(y)\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2=1} \|(\phi(x) - \phi(y))v\|_X \\ & \leq \sum_{j=1}^n \|\phi(x)e_j - \phi(y)e_j\| \end{aligned}$$

erkennt.

Zur Berechnung konkreter Riemann-Stieltjes-Integrale bzw. Wegintegrale dient am besten folgender Satz.

11.2.5 Satz. Für $g \in C^1[a, b]$ und $f \in C[a, b]$ gilt

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(t) g'(t) dt.$$

Insbesondere folgt für $\gamma \in C^1[a, b]$ und stetiges ϕ

$$\int_\gamma \phi(x) dx = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Dasselbe gilt für stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege g bzw. γ , wobei wir in diesem Zusammenhang $g'(t) := 0$ bzw. $\gamma'(t) := 0$ setzen, falls t einer der endlich vielen Punkte aus $[a, b]$ ist, wo g bzw. γ nicht differenzierbar ist.

Beweis. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir für $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$

$$P(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} f(\alpha_j) \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g'(t) dt = \int_a^b f_{\mathcal{R}}(t) g'(t) dt,$$

wobei $f_{\mathcal{R}}(t)$ die stückweise konstante Funktion mit $f_{\mathcal{R}}(t) = f(\alpha_j)$, $t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]$, $j = 1, \dots, n(\mathcal{R})$, und $f_{\mathcal{R}}(b) = f(\alpha_{n(\mathcal{R})})$ ist. Für $t \in [\xi_{j-1}, \xi_j]$, $1 \leq j < n(\mathcal{R})$, bzw. für $t \in [\xi_{n(\mathcal{R})-1}, \xi_{n(\mathcal{R})}]$ haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f_{\mathcal{R}}(t) g'(t) - f(t) g'(t)\| &\leq \|f_{\mathcal{R}}(t) - f(t)\| \cdot \|g'(t)\|_2 \\ &= \|f(\alpha_j) - f(t)\| \cdot \|g'(t)\|_2 \leq \rho(|\mathcal{R}|) \cdot \max_{s \in [a, b]} \|g'(s)\|_2, \end{aligned}$$

wobei $\rho(\delta) := \sup_{s, t \in [a, b], |s-t| \leq \delta} \|f(s) - f(t)\|$. Infolge konvergiert das Netz $(f_{\mathcal{R}}(\cdot) g'(\cdot))_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ von Funktionen gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $f(\cdot) g'(\cdot)$. Gemäß Satz 8.7.2 erhalten wir

$$\lim_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} P(\mathcal{R}) = \lim_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} \int_a^b f_{\mathcal{R}}(t) g'(t) dt = \int_a^b \lim_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} f_{\mathcal{R}}(t) g'(t) dt = \int_a^b f(t) g'(t) dt.$$

Für stetige und stückweise stetig differenzierbare Kurven folgt die Behauptung aus dem gerade Bewiesenen und Fakta 11.2.3, 4. \square

11.2.6 Bemerkung. Ist $X = \mathbb{R}^m$, so stellt man $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ meist als $m \times n$ -Matrix dar. Sind $\gamma_j(t)$ die Komponenten unseres Weges, so berechnet man das Wegintegral durch

$$\int_a^b \begin{pmatrix} \phi_{11}(\gamma(t)) & \cdots & \phi_{1n}(\gamma(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{m1}(\gamma(t)) & \cdots & \phi_{mn}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} dt.$$

11.2.7 Bemerkung (*). Wie im Abschnitt über Wege ist bisher auch nirgends eingegangen, dass g bzw. γ in den $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ hinein abbildet.

Die obigen Resultate samt Beweise bleiben gültig, wenn g bzw. γ das Intervall $[a, b]$ in eine Menge $D \subseteq Y$ hinein – Y ist Banachraum – abbilden, und $f : [a, b] \rightarrow L_b(Y, X)$ bzw. $\phi : D \rightarrow L_b(Y, X)$ jedem $t \in [a, b]$ bzw. $y \in D$ eine beschränkte lineare Abbildung von Y nach X zuordnet.

11.3 Offene Mengen in \mathbb{R}^n und Gebiete

Ehe wir uns weiter mit Vektorfeldern beschäftigen, wollen wir uns die Struktur von offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n anschauen. Dazu sei zunächst an den Begriff einer zusammenhängenden Teilmenge E eines metrischen Raumes aus Definition 6.2.2 erinnert. E heißt zusammenhängend, wenn man E nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen schreiben kann. Dabei nennt man A und B getrennt, wenn $c(A) \cap B = A \cap c(B) = \emptyset$.

11.3.1 Lemma. *Ist $(E_i)_{i \in I}$ eine Familie bestehend aus zusammenhängenden Teilmengen eines metrischen Raumes, sodass für ein gewisses $k \in I$ und allen $i \in I$ die Mengen E_k und E_i nicht getrennt sind⁴, so ist auch $E := \bigcup_{i \in I} E_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen es gilt $E = A \cup B$ mit getrennten Mengen A und B . Dann folgt $E_i = (A \cap E_i) \cup (B \cap E_i)$ für jedes $i \in I$. Wegen $c(A \cap E_i) \cap (B \cap E_i) \subseteq c(A) \cap B = \emptyset$ und $(A \cap E_i) \cap c(B \cap E_i) \subseteq A \cap c(B) = \emptyset$ sind auch $A \cap E_i$ und $B \cap E_i$ getrennt. Da E_i zusammenhängend ist, muss eine dieser Mengen leer sein; also $E_i \subseteq A$ oder $E_i \subseteq B$.

Wir wählen die Bezeichnung, sodass $E_k \subseteq A$. Im Fall $E_i \subseteq B$ für nur ein $i \in I$ wären E_k und E_i im Widerspruch zur Voraussetzung getrennt. Somit muss E ganz in A enthalten sein, und infolge $B = \emptyset$. \square

11.3.2 Definition. Offene und zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R}^n heißen *Gebiete*.

Die Eigenschaft Gebiet zu sein, lässt sich mit Hilfe von stetigen Wegen charakterisieren.

11.3.3 Lemma. *Für ein offenes $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) D ist zusammenhängend, also ein Gebiet.
- (ii) Je zwei Punkte x, y aus D sind durch einen stetigen Weg in D verbindbar⁵.
- (iii) Je zwei Punkte aus D sind durch einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg in D verbindbar.
- (iv) Je zwei Punkte aus D sind durch einen Polygonzug in D verbindbar.
- (v) Je zwei Punkte aus D sind durch einen achsenparallelen⁶ Polygonzug in D verbindbar.

Beweis. Die Schlüsse (v) \Rightarrow (iv), (iv) \Rightarrow (iii) und (iii) \Rightarrow (ii) sind offensichtlich richtig. Gelte nun (ii) und sei x irgendein fester Punkt aus D . Zu jedem $y \in D$ gibt es einen stetigen Weg $\gamma_y : [a_y, b_y] \rightarrow D$ mit $\gamma_y(a_y) = x$ und $\gamma_y(b_y) = y$. Es folgt

$$D = \bigcup_{y \in D} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in D} \gamma_y([a_y, b_y]) \subseteq D.$$

⁴ Diese Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn E_k mit allen E_i einen nichtleeren Schnitt hat.

⁵ Das bedeutet, dass es einen stetigen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt.

⁶ Das ist ein Polygonzug $\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_1 x_2}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}$, wo $x_j - x_{j-1}$ ein skalares Vielfaches eines gewissen kanonischen Basisvektors $e_{i(j)}$ für $j = 1, \dots, m$ ist.

Also ist D die Vereinigung der nach Proposition 6.2.4 zusammenhängenden Mengen $\gamma_y([a_y, b_y])$, $y \in D$. Nach unserer Wahl von γ_y haben diese Mengen zumindest den Punkt x gemein. Nach Lemma 11.3.1 ist D zusammenhängend; also gilt (i).

Sei nun D zusammenhängend und $x \in D$ wieder fest. Wir bezeichnen mit A die Menge aller Punkte $y \in D$, die mit x durch einen achsenparallelen Polygonzug in D verbindbar sind. Da \overrightarrow{xx} auch ein solcher ist, gilt $x \in A$, also $A \neq \emptyset$. Klarerweise ist $B := D \setminus A$ die Menge aller $y \in D$, die mit x nicht durch einen achsenparallelen Polygonzug in D verbindbar sind. Sei $y \in A$ und $\delta > 0$ so klein, dass $U_\delta(y)$ – definiert bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm auf \mathbb{R}^n – ganz in D enthalten ist. Für beliebiges $z \in U_\delta(y)$ gilt $z = y + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ mit $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n| < \delta$. Ist $\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}$ ein in D verlaufender, achsenparalleler Polygonzug von $x = x_0$ nach $y = x_m$, so verläuft der achsenparallele Polygonzug

$$\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}, \underbrace{\overrightarrow{y(y + \lambda_1 e_1)}, \dots, \overrightarrow{(y + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1})(y + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)}}_{\text{verläuft in } U_\delta(y)}$$

von x nach z ebenfalls in D . Also gilt $z \in A$, und infolge $U_\delta(y) \subseteq A$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ kann y kein Häufungspunkt von B sein, und insgesamt erhalten wir $A \cap c(B) = \emptyset$.

Sei nun $y \in B$ und $\delta > 0$ so klein, dass $U_\delta(y) \subseteq D$. Läge ein $z = y + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in U_\delta(y)$ in A mit einem achsenparallelen Polygonzug $\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}$ von $x = x_0$ nach $z = x_m$ in D , so wäre

$$\overrightarrow{x_0 x_1}, \dots, \overrightarrow{x_{m-1} x_m}, \underbrace{\overrightarrow{z(y + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1})}, \dots, \overrightarrow{(y + \lambda_1 e_1) y}}_{\text{verläuft in } U_\delta(y)}$$

ein achsenparalleler Polygonzug von x nach y in D , und daher $y \in A$. Dieser Widerspruch zeigt $z \in B$, und somit $U_\delta(y) \subseteq B$. Wegen $A \cap B = \emptyset$ kann y kein Häufungspunkt von A sein, und wir erhalten auch $c(A) \cap B = \emptyset$.

Da D zusammenhängend ist, und da $A \neq \emptyset$, muss $B = \emptyset$ bzw. $D = A$, was aber genau bedeutet, dass alle Punkte aus D mit x durch einen achsenparallelen Polygonzug verbindbar sind. Klarerweise sind dann auch zwei beliebige Punkte aus D durch einen achsenparallelen Polygonzug – zumindest via x – verbindbar, und wir haben (v) nachgewiesen. \square

11.3.4 Beispiel. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, so lassen sich je zwei Punkte x, y aus D durch die gerade Strecke \overrightarrow{xy} verbinden. Gemäß Lemma 11.3.3 ist somit D ein Gebiet. Insbesondere sind alle offenen Kugeln bzgl. jeder möglichen Norm in \mathbb{R}^n Gebiete; vgl. Bemerkung 10.1.5.

Um beliebigen offene Teilmengen des \mathbb{R}^n eine Struktur geben zu können, benötigen wir folgendes Lemma.

11.3.5 Lemma. Sei E eine nichtleere Teilmenge eines metrischen Raumes und sei $\sim \subseteq E \times E$ die Relation auf E definiert durch

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists Z \subseteq E : x, y \in Z, Z \text{ ist zusammenhängend},$$

so ist \sim eine Äquivalenzrelation auf E . Für ein $x \in E$ ist die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ die größte zusammenhängende Teilmenge von E , die x enthält.

Beweis. Da einpunktige Mengen $\{x\}$ zusammenhängend sind, folgt die Reflexivität von \sim . Die Symmetrie ist klar. Gilt $x \sim y, y \sim z$, und sind Z_1 und Z_2 zusammenhängende Mengen, sodass $x, y \in Z_1$ und $y, z \in Z_2$, so ist nach Lemma 11.3.1 auch $Z_1 \cup Z_2$ zusammenhängend, wobei $x, z \in Z_1 \cup Z_2$. Also ist \sim ein Äquivalenzrelation. Schließlich ergibt für $x \in E$

$$[x]_{\sim} = \bigcup_{\substack{x \in Z \\ Z \text{ ist zusammenhängend}}} Z,$$

wegen Lemma 11.3.1 eine zusammenhängende Menge. Offenbar ist diese Menge dann auch die größte zusammenhängende Teilmenge von E , die x enthält. \square

11.3.6 Proposition. Für ein offenes $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die Äquivalenzklassen $[x]_{\sim}$ bezüglich der Äquivalenzrelation \sim aus Lemma 11.3.5 angewandt auf $E = G$ Gebiete. Insbesondere, lässt sich G als disjunkte Vereinigung von Gebieten schreiben.

Beweis. Für $y \in [x]_{\sim} \subseteq G$ sei $\epsilon > 0$, sodass $U_{\epsilon}(y) \subseteq G$. Wegen Lemma 11.3.1 zusammen mit Beispiel 11.3.4 ergibt $[x]_{\sim} \cup U_{\epsilon}(y)$ eine zusammenhängende Menge. Da $[x]_{\sim}$ die größte zusammenhängende Teilmenge von D ist, welche x enthält, folgt $[x]_{\sim} \cup U_{\epsilon}(y) = [x]_{\sim}$, also $U_{\epsilon}(y) \subseteq [x]_{\sim}$. Wir haben somit gezeigt, dass $[x]_{\sim}$ offen und daher ein Gebiet ist. \square

11.4 Gradientenfelder

Wir wollen eingangs ein mehrdimensionales Analogon der Tatsache $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ für Wegintegrale herleiten. Dafür sei bemerkt, dass für ein stetig differenzierbares $f : D \rightarrow X$ mit offenem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und einem Banachraum X die Ableitung $df : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein Vektorfeld ist.

11.4.1 Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, X ein Banachraum und $f : D \rightarrow X$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für einen stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ gilt

$$\int_{\gamma} df(x) dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Beweis. Sind $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$, sodass $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^1[t_{j-1}, t_j]$, so folgt aus der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz 8.4.5,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df(x) dx &= \int_a^b df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^l (f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1}))) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned} \quad \square$$

11.4.2 Beispiel. Wir betrachten nochmals Beispiel 11.2.1. Dort war das Vektorfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ durch $\phi(x) = \frac{1}{\|x\|_2^3}(\xi, \eta, \zeta)$ gegeben. Nun ist aber $\phi(x) = df(x)$, wobei $f(x) = -\frac{1}{\|x\|_2}$. Insbesondere berechnet sich die Arbeit, die man verrichten muss, um einen

Punkt P von x_0 nach x_1 entlang eines stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weges γ zu bewegen, durch

$$\int_{\gamma} \phi(x) dx = \frac{1}{\|x_0\|_2} - \frac{1}{\|x_1\|_2}.$$

11.4.3 Definition. Vektorfelder $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$, die Ableitungen df stetig differenzierbarer Funktionen $f : D \rightarrow X$ sind, heißen *Gradientenfelder*. Jedes stetig differenzierbare $f : D \rightarrow X$ mit $df = \phi$ nennt man *Stammfunktion* von ϕ .

11.4.4 Korollar. Für ein Gebiet D und ein Gradientenfeld $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ist die Stammfunktion $f \in C^1(D)$ von ϕ bis auf eine additive Konstante aus X eindeutig.

Beweis. Falls $df_1 = \phi = df_2$ für zwei $C^1(D)$ -Funktionen f_1, f_2 , so folgt für beliebige $x, y \in D$ aus Satz 11.4.1 angewandt auf $0 = df_1 - df_2$ und irgendeinen geeigneten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ (vgl. Lemma 11.3.3), dass $(f_1 - f_2)(x) = (f_1 - f_2)(y)$. Somit ist $f_1 - f_2$ auf D konstant. \square

11.4.5 Beispiel. Die Tatsache, dass ϕ ein Gradientenfeld ist, hängt entscheidend von seinem Definitionsbereich ab D . In der Tat gilt etwa für das Vektorfeld

$$\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \phi((x, y)^T) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

und den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$,

$$\int_{\gamma} \phi(x) dx \neq 0.$$

Wegen $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ erkennen wir aus Satz 11.4.1, dass $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ kein Gradientenfeld sein kann.

Macht man den Definitionsbereich $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ von ϕ aber kleiner, etwa $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^T : x \leq 0\}$, so ist ϕ sehr wohl ein Gradientenfeld; vgl. Beispiel 11.4.16.

Die in Satz 11.4.1 angegebene Eigenschaft, dass Wegintegrale über Gradientenfelder nicht vom konkreten Weg abhängen, charakterisiert in der Tat Gradientenfelder; siehe Satz 11.4.7. Um das zu zeigen, brauchen wir folgende Begriffsbildung:

Zu $c, x \in \mathbb{R}^n$ und einer Permutation σ von $\{1, \dots, n\}$, also einer Bijektion $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, sei $\gamma_{c,x}^{\sigma} : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der achsenparallele Polygonzug

$$\overrightarrow{y_0 y_1}, \overrightarrow{y_1 y_2}, \dots, \overrightarrow{y_{n-1} y_n},$$

von $c = y_0$ nach $x = y_n$, wobei wobei

$$y_k := c + \sum_{j=1}^k (x_{\sigma(j)} - c_{\sigma(j)}) e_{\sigma(j)}, \quad k = 0, \dots, n.$$

11.4.6 Lemma. Sei $D = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k) \subseteq \mathbb{R}^n$, und $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ stetig. Falls für ein festes $c \in D$ und allen $x \in D$ das Wegintegral

$$\int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v) dv$$

unabhängig von der Permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ist, so stellt

$$f(x) := \int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v) dv$$

eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow X$ mit $df = \phi$ dar.

Beweis. Sei $\delta > 0$, sodass $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq D$. Für $0 \neq |t| < \delta$, $j \in \{1, \dots, n\}$ und irgendeiner Permutation σ mit $\sigma(n) = j$ gilt im Falle $\text{sgn}(t \cdot (x_j - c_j)) \geq 0$,

$$\gamma_{c,x+te_j}^\sigma|_{[0, n-1+\frac{x_j-c_j}{x_j-c_j+t}]} \sim \gamma_{c,x}^\sigma \quad \text{und} \quad \gamma_{c,x+te_j}^\sigma|_{[n-1+\frac{x_j-c_j}{x_j-c_j+t}, n]} \sim \overrightarrow{x(x+te_j)}$$

und damit

$$\int_{\gamma_{c,x+te_j}^\sigma} \phi(v) dv = \int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v) dv + \int_{\overrightarrow{x(x+te_j)}} \phi(v) dv.$$

Im Falle $\text{sgn}(t \cdot (x_j - c_j)) < 0$ gilt

$$\gamma_{c,x}^\sigma|_{[0, n-1+\frac{x_j-c_j+t}{x_j-c_j}]} \sim \gamma_{c,x+te_j}^\sigma \quad \text{und} \quad \gamma_{c,x}^\sigma|_{[n-1+\frac{x_j-c_j+t}{x_j-c_j}, n]} \sim \overrightarrow{(x+te_j)x}$$

und damit

$$\int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v) dv = \int_{\gamma_{c,x+te_j}^\sigma} \phi(v) dv + \int_{\overrightarrow{(x+te_j)x}} \phi(v) dv.$$

Also erhalten wir in jedem Fall

$$\frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\overrightarrow{x(x+te_j)}} \phi(v) dv = \int_0^1 \phi(x+tse_j) e_j ds.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion ϕ konvergiert der Integrand für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig in $s \in [0, 1]$ gegen die Konstante $\phi(x)e_j \in X$. Also folgt $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \phi(x)e_j$; vgl. Satz 8.7.2 bzw. (9.16). Da dieser Ausdruck für jedes j stetig in x ist, gilt $f \in C^1(D)$ mit $df = \phi$. \square

11.4.7 Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein Vektorfeld. ϕ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn ϕ stetig und derart ist, dass Wegintegrale von ϕ über achsenparallele Polygonzüge nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen.

Beweis. Für Gradientenfeld folgt besagte Eigenschaft unmittelbar aus Satz 11.4.1. Sei umgekehrt $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein stetiges Vektorfeld, sodass Wegintegrale von ϕ über achsenparallele Polygonzüge nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen. Gemäß Proposition 11.3.6 können wir D als disjunkte Vereinigung von gewissen Gebieten

θ schreiben. Nun greife man aus jedem solchen Gebiet θ ein festes $x_\theta \in \theta$ heraus, und definiere für $x \in \theta$

$$f(x) = \int_{\rho_x^\theta} \phi(v) dv,$$

wobei $\rho_x^\theta : [a, b] \rightarrow \theta$ irgendein achsenparalleler Polygonzug mit $\rho_x^\theta(b) = x$ und $\rho_x^\theta(a) = x_\theta$ ist; vgl. Lemma 11.3.3. Wegen der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit und weil jedes $x \in D$ in irgendeinem solchen Gebiet liegt, ist auf diese Art und Weise eine Funktion $f : D \rightarrow X$ wohldefiniert.

Sei nun $c \in D$, θ das Gebiet mit $c \in \theta$ und $\delta > 0$, sodass $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c) \subseteq \theta$. Für $x \in U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)$ gilt wegen der Wegunabhängigkeit

$$f(x) = \int_{\rho_c^\theta} \phi(v) dv + \int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v) dv.$$

Gemäß Lemma 11.4.6 ist f auf $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)$ stetig differenzierbar mit $df|_{U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)} = \phi|_{U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(c)}$. Da die stetige Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt $f \in C^1(D)$ mit $df = \phi$. \square

11.4.8 Bemerkung. Die Voraussetzung in Satz 11.4.7, dass $\int_{\gamma_1} \phi(x) dx = \int_{\gamma_2} \phi(x) dx$ für je zwei achsenparallele Polygonzüge γ_1 und γ_2 mit gleichen Anfangs- und Endpunkten, ist äquivalent dazu, dass $\int_\gamma \phi(x) dx = 0$ für alle achsenparallele Polygonzüge γ , die *geschlossen* sind, also deren Endpunkt gleich dem Anfangspunkt ist. Das sieht man leicht, indem man $\gamma = \tilde{\gamma}_1 \oplus (\tilde{\gamma}_2^-)$ betrachtet, wobei $\tilde{\gamma}_j$ derart äquivalent zu γ_j ist, dass sich $\tilde{\gamma}_1 \oplus (\tilde{\gamma}_2^-)$ bilden lässt.

Etwas schwächer als Gradientenfeld ist folgender Begriff.

11.4.9 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt ϕ *lokales Gradientenfeld*, wenn es zu jedem $x \in D$ ein offenes $D(x) \subseteq D$ mit $x \in D(x)$ gibt, sodass $\phi|_{D(x)} : D(x) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein Gradientenfeld ist.

Dass die Begriffe lokales Gradientenfeld und Gradientenfeld nicht äquivalent sind, werden wir in Beispiel 11.4.16 sehen.

11.4.10 Bemerkung. Seien $0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty$ zwei Radien, sodass $\phi|_{U_{\rho_j}(x)} : U_{\rho_j}(x) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ für $j = 1, 2$ ein Gradientenfeld ist – also $\phi|_{U_{\rho_j}(x)} = df_j$ für $f_j \in C^1(U_{\rho_j}(x))$. Da die Addition einer Konstanten zu f_j daran nichts ändert, können wir zusätzlich $f_1(x) = 0 = f_2(x)$ annehmen.

Da innerhalb einer Kugel ein Punkt durch eine gerade Strecke mit dem Mittelpunkt verbunden werden kann, folgt aus Korollar 11.4.4, dass sich f_1 und f_2 auf der kleineren Kugel $U_{\rho_1}(x)$ nur um eine additive Konstante aus X unterscheiden. Wegen $f_1(x) = 0 = f_2(x)$ folgt $f_1 = f_2|_{U_{\rho_1}(x)}$.

Ist nun $R \subseteq (0, +\infty)$ die Menge aller positiver Zahlen ρ , sodass $\phi|_{U_\rho(x)}$ immer ein Gradientenfeld ist, so gibt es also $f_\rho \in C^1(U_\rho(x))$ mit $df_\rho = \phi|_{U_\rho(x)}$, welche Fortsetzungen

⁷ Klarerweise kann man $D(x)$ kleiner machen und daher immer als ϵ -Kugel bezüglich der $\|\cdot\|_2$ - oder der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm annehmen.

voneinander sind. Auf $\bigcup_{\rho \in R} U_\rho(x) = U_{\sup R}(x)$ ist somit durch $f(y) = f_\rho(y)$ mit $y \in U_\rho(x)$ eine C^1 Funktion wohldefiniert, welche offenbar $df = \phi|_{U_{\sup R}(x)}$ erfüllt.

Insgesamt erkennen wir, dass es für ein lokales Gradientenfeld $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ zu jedem $x \in D$ ein maximales $0 < \rho \leq +\infty$ gibt, sodass $U_\rho(x) \subseteq D$ und $\phi|_{U_\rho(x)}$ ein Gradientenfeld ist.

Bei stetig differenzierbaren Vektorfeldern gibt es eine greifbarere Bedingung dafür, dass ein Vektorfeld ein lokales Gradientenfeld ist.

11.4.11 Definition. Ein Vektorfeld $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ heißt *stetig differenzierbar*, falls für alle $j = 1, \dots, n$ die Funktionen $x \mapsto \phi(x)e_j$ von D nach X hinein stetig differenzierbar sind.

11.4.12 Bemerkung. Wegen Bemerkung 11.2.4 sind stetig differenzierbare Vektorfelder auch stetig.

11.4.13 Lemma (*). $\phi : D \rightarrow L_b(\mathbb{R}^n, X)$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn ϕ als Abbildung von D in den Banachraum $L_b(\mathbb{R}^n, X)$, versehen mit der Abbildungsnorm, stetig differenzierbar ist.

Beweis. Wegen Satz 10.1.15 ist die stetige Differenzierbarkeit von ϕ als Abbildung von D in den Banachraum $L_b(\mathbb{R}^n, X)$ äquivalent dazu, dass für $i = 1, \dots, n$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x) \in L_b(\mathbb{R}^n, X)$ für alle $x \in D$ existieren und stetig von x abhängen. Da für $j = 1, \dots, n$ die Abbildung $A \mapsto Ae_j$ von $L_b(\mathbb{R}^n, X)$ nach X linear und beschränkt ist, folgt daraus, dass auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi(\cdot)e_j)(x) \in X$$

existiert und mit $(\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x))e_j$ übereinstimmt; vgl. Fakta 9.3.13, 4. Da letztere Funktion stetig von x abhängt, sind somit für $j = 1, \dots, n$ die Funktionen $x \mapsto \phi(x)e_j$ von D nach X stetig differenzierbar.

Seien umgekehrt alle diese Funktionen $D \ni x \mapsto \phi(x)e_j \in X$ stetig differenzierbar, und sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Für jedes feste $x \in D$ wird durch

$$B(x) : \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^n \mu_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi(\cdot)e_j)(x)$$

eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach X definiert, die gemäß Beispiel 9.2.10, (ii), beschränkt ist. Wegen

$$\|B(x) - B(y)\| = \sup_{\|v\|_\infty=1} \|(B(x) - B(y))v\|_X \leq \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi(\cdot)e_j)(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi(\cdot)e_j)(y) \right\|$$

ist $B : D \rightarrow L_b(\mathbb{R}^n, X)$ stetig. Schließlich ist wegen

$$\left\| \frac{1}{t} (\phi(x + te_i) - \phi(x)) - B(x) \right\| = \sup_{\|v\|_\infty=1} \left\| \left(\frac{1}{t} (\phi(x + te_i) - \phi(x)) - B(x) \right) v \right\|_X =$$

$$\begin{aligned} \sup_{\|v\|_\infty=1} \left\| \sum_{j=1}^n \mu_j \left(\frac{1}{t} (\phi(x + te_j)e_j - \phi(x)e_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi(\cdot)e_j)(x) \right) \right\|_X &\leq \\ \sum_{j=1}^n \left\| \left(\frac{1}{t} (\phi(x + te_j)e_j - \phi(x)e_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi(\cdot)e_j)(x) \right) \right\|_X &\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

$B(x)$ nichts anderes als $\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x)$. \square

Sei nun $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Angenommen, ϕ ist auf einem offenen $D(x) \subseteq D$ mit $x \in D(x) \subseteq D$ die Ableitung einer Funktion $f : D(x) \rightarrow X$, also $\phi = df$. Klarerweise ist dann $f \in C^2(D(x))$, und wegen dem Satz von Schwarz gilt für $y \in D(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(y)e_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(y) = \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(y)e_i.$$

Wir sehen also, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\cdot)e_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(\cdot)e_i \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (11.9)$$

eine notwendige Bedingung dafür ist, dass ϕ ein lokales Gradientenfeld ist.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass (11.9) auch hinreichend dafür ist, dass ein Vektorfeld ein lokales Gradientenfeld ist. In der Tat werden wir für ein Vektorfeld $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$, wobei D ein offener Quaders $D = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ ist, aus der Gültigkeit von (11.9) herleiten, dass ϕ ein Gradientenfeld auf D ist. Es sei daran erinnert, dass diese offenen Quader tatsächlich offen sind; vgl. Fakta 8.7.8.

11.4.14 Satz. Sei $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Im Falle $D = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ folgt aus (11.9), dass ϕ ein Gradientenfeld ist. Für beliebiges offenes $D \subseteq \mathbb{R}^n$ folgt aus (11.9), dass ϕ ein lokales Gradientenfeld ist.

Beweis. Sei $c \in D = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k)$ und sei $\sigma = \text{id}_{\{1, \dots, n\}}$ die identische Permutation von $\{1, \dots, n\}$. Mit der Notation, die wir vor Lemma 11.4.6 eingeführt haben, ist durch

$$f(x) := \int_{\gamma_{c,x}^\sigma} \phi(v) dv$$

eine Funktion $f : D \rightarrow X$ wohldefiniert. Für $f \in C^1(D)$ mit $df = \phi$, reicht es zu zeigen, dass $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \phi(x)e_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ und $x \in D$.

Mit (11.7), mit Satz 11.2.5 und mit der Substitution $s = (x_j - c_j)t$ folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} \phi(v) dv \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \phi((1-t)y_{j-1} + ty_j) (y_j - y_{j-1}) dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^{x_j - c_j} \phi(y_{j-1} + se_j) e_j ds, \end{aligned} \quad (11.10)$$

wobei $y_k = c + \sum_{j=1}^k (x_j - c_j) e_j$. Nun leiten wir diese Gleichung nach x_k ab, und werten bei x aus. Da für $j < k$ der Ausdruck y_{j-1} von x_k unabhängig ist, und somit im j -ten Summanden von (11.10) die Variable x_k nicht vorkommt, ist seine Ableitung gleich Null.

Für $j = k$ ist y_{j-1} auch von x_k unabhängig. Somit tritt beim k -ten Summanden x_k nur in der oberen Integralgrenze auf, weswegen seine Ableitung nach x_k übereinstimmt mit

$$\phi(y_{k-1} + (x_k - c_k) e_k) e_k = \phi(y_k) e_k.$$

Für $j > k$ tritt x_k nur im Integranden auf, da dann y_{j-1} sehr wohl von x_k abhängt. Wegen Korollar 8.7.12 (siehe auch (9.18)) kann man Integral und $\frac{\partial}{\partial x_k}$ vertauschen. Also ist die Ableitung des j -ten Summanden von (11.10) gleich

$$\int_0^{x_j - c_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \phi(y_{j-1} + s e_j) e_j ds$$

und wegen (11.9) weiter gleich

$$\begin{aligned} \int_0^{x_j - c_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(y_{j-1} + s e_j) e_k ds &= \phi(y_{j-1} + (x_j - c_j) e_j) e_k - \phi(y_{j-1}) e_k \\ &= \phi(y_j) e_k - \phi(y_{j-1}) e_k. \end{aligned}$$

Somit stimmt die Ableitung von (11.10) nach x_k überein mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \phi(y_k) e_k + \sum_{j=k+1}^n (\phi(y_j) e_k - \phi(y_{j-1}) e_k) = \phi(y_n) e_k = \phi(x) e_k.$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ist $x \in D$, so gilt für hinreichend kleines $\rho > 0$, dass $U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq D$. Da $U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - \rho, x_i + \rho)$ ein offener Quader ist, folgt aus (11.9), dass $\phi|_{U_\rho^{\|\cdot\|_\infty}(x)}$ ein Gradientenfeld ist. Also ist ϕ ein lokales Gradientenfeld. \square

11.4.15 Beispiel. Auf $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$ sei das Vektorfeld $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1 \times 2}$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2 \right).$$

ϕ ist stetig differenzierbar, wobei

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} e_1 = -\frac{1}{x^2 \cos^2 y} + 2x = \frac{\partial}{\partial x} \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} e_2.$$

Also ist ϕ nach Satz 11.4.14 ein lokales Gradientenfeld.

Da D kein Quader ist, sind wir zu diesem Zeitpunkt weder sicher, ob es sich um ein Gradientenfeld handelt, noch haben wir die Stammfunktion explizit in der Hand. Um diese zu finden, nehmen wir einmal unbestimmt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ so an, dass $df = \phi$; also

$$\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \int -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 dx + c(y) = \frac{\tan y}{x} + x^2y + \frac{x^3}{3} + c(y),$$

mit einer C^2 -Funktion $c(y)$, die nur von y abhängt. Nun leiten wir diesen Ausdruck nach y ab, verwenden die zweite Gleichung von oben und erhalten

$$\frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + c'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Also muss $c(y)$ von der Gestalt $c(y) = \frac{y^3}{3} + c$ sein. Wir sehen, dass

$$f\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \frac{\tan y}{x} + x^2y + \frac{x^3 + y^3}{3}.$$

tatsächlich $\phi = df$ erfüllt und somit eine Stammfunktion von ϕ ist. Insbesondere ist ϕ auf ganz D ein Gradientenfeld.

11.4.16 Beispiel. Für $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei das Vektorfeld $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definiert durch

$$\phi\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Man rechnet elementar nach, dass $\frac{\partial}{\partial y}\phi\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)e_1 = \frac{\partial}{\partial x}\phi\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right)e_2$ gilt, und dass somit ϕ ein lokales Gradientenfeld ist.

Wir haben in Beispiel 11.4.5 mit Hilfe eines geeigneten Wegintegrals gezeigt, dass $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ kein Gradientenfeld ist. Wir wollen diese Tatsache hier auf eine andere Art und Weise nochmals verifizieren. Dazu nehmen wir an, dass es doch ein $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $dg = \phi$, und leiten daraus einen Widerspruch her. Addieren wir eine geeignete Konstante, so können wir $g((1, 0)^T) = 0$ annehmen.

Auf die obere Halbebene $(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ eingeschränkt ist ϕ gemäß Satz 11.4.14 ein Gradientenfeld mit Stammfunktion f darauf. Der Ansatz

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

ergibt durch unbestimmte Integration $f((x, y)^T) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$. Nun leiten wir das nach y ab, und erhalten die Gleichung

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + c'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

also $c'(y) = 0$, womit $c(y)$ konstant ist. Da gemäß Korollar 11.4.4 die Stammfunktion eines Vektorfeldes eindeutig ist, und da $g|_{(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)}$ auch eine solche Stammfunktion von $\phi|_{(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)}$ ist, folgt

$$g|_{(-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)} = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c.$$

Lassen wir in dieser Gleichung $(x, y)^T \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ gegen $(1, 0)^T$ streben, so folgt $0 = -\frac{\pi}{2} + c$. Lassen wir in obiger Gleichung dann $(x, y)^T \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$ gegen $(-1, 0)^T$ streben, so schließen wir auf $g((-1, 0)^T) = \frac{\pi}{2} + c = \pi$.

Auf der unteren Halbebene $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0)$ erhalten wir ganz ähnlich $-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + d$ als Stammfunktion, und somit

$$g|_{(-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0)} = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + d.$$

Lassen wir hier $(x, y)^T \in (-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0)$ gegen $(-1, 0)^T$ streben, so konvergiert $\frac{x}{y}$ gegen $-\infty$, wodurch wir $\pi = g((-1, 0)^T) = -\frac{\pi}{2} + d$, also $d = \frac{3\pi}{2}$ erhalten. Lassen wir schließlich $(x, y)^T \in (-\infty, +\infty) \times (-\infty, 0)$ gegen $(1, 0)^T$ streben, so folgt der Widerspruch $0 = g((1, 0)^T) = \frac{\pi}{2} + d = 2\pi$.

11.4.17 Bemerkung (*). Sei I ein reelles Intervall und $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Funktion mit $x(I) \subseteq D$ für eine gewisse offene Teilmenge D von \mathbb{R}^n . Nun genüge x der Differentialgleichung

$$\sum_{j=1}^n f_j(x(t)) \cdot x'_j(t) = 0, \quad t \in I, \quad (11.11)$$

wobei $f_1, \dots, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ alle in $C(D)$ sind. Ziel ist es, mehr über die Funktion x in Erfahrung zu bringen.

Das geht sicher dann, wenn $(f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ein Gradientenfeld ist, also wenn $(f_1, \dots, f_n) = dF$ für ein $F \in C^1(D)$. Man nennt (11.11) dann eine *exakte Differentialgleichung*. In der Tat liest sich in diesem Fall (11.11) wegen der Kettenregel (siehe auch Bemerkung 10.1.20) als

$$(F \circ x)'(t) = 0, \quad t \in I,$$

und daher $F \circ x \equiv c$ für eine gewisse reelle Konstante c .

Ist D ein offener Quader und sind die f_j alle sogar C^1 , so ist gemäß Satz 11.4.14

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\},$$

eine hinreichende Bedingung dafür, dass (11.11) eine exakte Differentialgleichung ist.

Nun kann es sein, dass zwar (11.11) keine exakte Differentialgleichung ist, aber es dennoch eine Funktion $m : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass die aus (11.11) abgeleitete Differentialgleichung

$$m(x(t)) \cdot \sum_{j=1}^n f_j(x(t)) \cdot x'_j(t) = \sum_{j=1}^n (m \cdot f_j)(x(t)) \cdot x'_j(t) = 0, \quad t \in I,$$

eine solche ist. Dann folgt nämlich auch $G \circ x \equiv c$ für eine gewisse reelle Konstante c , wobei G eine Stammfunktion des Gradientenfeldes $(m \cdot f_1, \dots, m \cdot f_n)$ ist. Eine solche Funktion m nennt man *Integrierenden Faktor*.

11.4.18 Beispiel (*). Sei $b > 0$ und $y : (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, die der Differentialgleichung

$$4x + 3y(x)^2 + 2xy(x)y' = 0 \quad (11.12)$$

genügt. Um diese Gleichung mit der in Bemerkung 11.4.17 vorgestellten Methode behandeln zu können, betrachten wir

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}$$

als Abbildung von $(0, b)$ nach $(0, b) \times \mathbb{R}$. Dann schreibt sich unsere Gleichung als

$$f \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot x'(t) + g \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot y'(t) = 0, \quad (11.13)$$

wobei $f((x, y)^T) = 4x + 3y^2$ und $g((x, y)^T) = 2xy$. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6y \neq 2y = \frac{\partial}{\partial x} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ist (11.13) nicht exakt. Durch Multiplizieren mit $m((x, y)^T) = x^2$ folgt aus (11.13) aber

$$m \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot f \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot x'(t) + m \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot g \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \cdot y'(t) = 0. \quad (11.14)$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y} (m \cdot f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6yx^2 = 6x^2y = \frac{\partial}{\partial x} (m \cdot g) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

zusammen mit Satz 11.4.14 ist (11.14) exakt.

Man sieht leicht, dass $G((x, y)^T) = x^4 + x^3y^2$ eine Stammfunktion von $(m \cdot f, m \cdot g)$ ist. Also muss $G((x(t), y(t))^T) = c$, $t \in (0, b)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gelten. Das bedeutet $t^4 + t^3y^2(t) = c$ bzw.

$$y^2(t) = \frac{c}{t^3} - t.$$

Da dieser Ausdruck für alle $t \in (0, b)$ nichtnegativ ist, muss $c \geq b^4$. Wir erhalten

$$y(x) = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{c}{x^3} - x}, \quad x \in (0, b),$$

für gewisse $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, $c \in [b^4, +\infty)$. Man überprüft auch leicht nach, dass jede derartige Funktion tatsächlich eine Lösung von (11.12) ist.

11.5 Homotopie und einfacher Zusammenhang

Ehe wir den wichtigen Satz 11.5.4 beweisen können, brauchen wir noch eine grundlegende Begriffsbildung.

11.5.1 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ zwei stetige Wege. Eine stetige Abbildung $\Gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow D$ ($c, d \in \mathbb{R}, c < d$) mit

$$\Gamma(t, c) = \gamma_0(t) \text{ und } \Gamma(t, d) = \gamma_1(t) \text{ für alle } t \in [a, b],$$

heißt *Homotopie* zwischen γ_0 und γ_1 in D .

Haben γ_0 und γ_1 gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkt, also $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, dann heißen diese Wege *homotop* in D , wenn es eine Homotopie $\Gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow D$ zwischen γ_0 und γ_1 in D gibt, sodass

$$\Gamma|_{\{a\} \times [c, d]} \equiv \gamma_0(a), \quad \Gamma|_{\{b\} \times [c, d]} \equiv \gamma_0(b).$$

Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn je zwei stetige Wege mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten homotop in D sind.

11.5.2 Bemerkung. Mit $\Gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow D$ ist auch $\hat{\Gamma} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ definiert durch

$$\hat{\Gamma}(t, s) = \Gamma(t, sd + (1 - s)c).$$

eine Homotopie zwischen zwei Wegen, γ_0 und γ_1 . Also kann man für Homotopien immer ohne Beschränkung der Allgemeinheit $[c, d] = [0, 1]$ annehmen.

11.5.3 Beispiel. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ zwei stetige Wege mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt, sodass die Konvexkombinationen

$$\gamma_\alpha(t) := \alpha \cdot \gamma_1(t) + (1 - \alpha) \cdot \gamma_0(t)$$

für alle $\alpha \in [0, 1]$ und alle $t \in [a, b]$ in D liegen, so ist $\Gamma(t, \alpha) := \gamma_\alpha(t)$ stetig auf $[a, b] \times [0, 1]$. Infolge sind γ_0 und γ_1 homotop.

Insbesondere sind konvexe und offene D einfach zusammenhängende Gebiete; vgl. Beispiel 11.3.4.

11.5.4 Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ ein lokales Gradientenfeld. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten, die homotop sind, so gilt

$$\int_{\gamma_0} \phi(x) dx = \int_{\gamma_1} \phi(x) dx.$$

Ist D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n, X)$ genau dann ein lokales Gradientenfeld wenn es ein Gradientenfeld ist.

Beweis. Sei $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 wie in Definition 11.5.1. Voraussetzungsgemäß gibt es zu jedem $x \in K := \Gamma([a, b] \times [0, 1])$ ein $0 < \rho_x \leq +\infty$ mit $U_{\rho_x}(x) \subseteq D^8$, sodass $\phi|_{U_{\rho_x}(x)}$ ein Gradientenfeld ist. Gemäß Bemerkung 11.4.10 können wir die ρ_x maximal wählen, sodass $U_{\rho_x}(x) \subseteq D$ und $\phi|_{U_{\rho_x}(x)}$ ein Gradientenfeld ist.

⁸ Bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Wäre nun $\rho := \inf\{\rho_x : x \in K\}$ gleich Null, so gäbe es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus K mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{x_n} = 0$. Da K als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt ist, hat diese Folge eine gegen ein $x \in K$ konvergente Teilfolge $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$. Für alle hinreichend großen $j \in \mathbb{N}$ gilt daher $x_{n(j)} \in U_{\frac{\rho_x}{2}}(x)$ und in Folge der Dreiecksungleichung dann auch $U_{\frac{\rho_x}{2}}(x_{n(j)}) \subseteq U_{\rho_x}(x)$. Also ist für alle hinreichend großen j das Vektorfeld $\phi|_{U_{\frac{\rho_x}{2}}(x_{n(j)})}$ ein Gradientenfeld und somit $\frac{\rho_x}{2} \leq \rho_{x_{n(j)}}$, was aber $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho_{x_{n(j)}} = 0$ widerspricht.

Damit haben wir die Existenz eines $\rho > 0$ gezeigt, sodass für alle $x \in K$ immer $U_\rho(x) \subseteq D$ und $\phi|_{U_\rho(x)}$ ein Gradientenfeld ist. Gemäß Satz 6.3.3 gibt es ein $\eta > 0$, sodass

$$\max(|t_1 - t_2|, |s_1 - s_2|) < \eta \Rightarrow \|\Gamma(t_1, s_1) - \Gamma(t_2, s_2)\|_\infty < \rho. \quad (11.15)$$

Seien $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$, $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_p = 1$, sodass für alle $j, k = 1, \dots, p$ die Ungleichung $|t_j - t_{j-1}|, |s_k - s_{k-1}| < \eta$ gilt. Also verlaufen für $j, k = 1, \dots, p$ die Polygonzüge

$$\alpha_{jk} := \overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1}) \Gamma(t_{j-1}, s_k)}, \overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_k) \Gamma(t_j, s_k)}$$

und

$$\beta_{jk} := \overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1}) \Gamma(t_j, s_{k-1})}, \overrightarrow{\Gamma(t_j, s_{k-1}) \Gamma(t_j, s_k)}$$

ganz in $U_\rho(\Gamma(t_j, s_k)) \subseteq D$. Mit Satz 11.4.1 folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\alpha_{jk}} \phi(x) dx - \int_{\beta_{jk}} \phi(x) dx = \\ &= \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1}) \Gamma(t_{j-1}, s_k)}} \phi(x) dx + \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_k) \Gamma(t_j, s_k)}} \phi(x) dx \\ &\quad - \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1}) \Gamma(t_j, s_{k-1})}} \phi(x) dx - \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_j, s_{k-1}) \Gamma(t_j, s_k)}} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Aufsummieren über j und k ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j,k=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1}) \Gamma(t_{j-1}, s_k)}} \phi(x) dx + \sum_{j,k=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_k) \Gamma(t_j, s_k)}} \phi(x) dx \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_{k-1}) \Gamma(t_j, s_{k-1})}} \phi(x) dx - \sum_{j,k=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_j, s_{k-1}) \Gamma(t_j, s_k)}} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Nach Indexverschiebungen ($k \rightsquigarrow k+1$ bzw. $j \rightsquigarrow j-1$) in den letzten beiden Summen kürzen sich die meisten Summanden der ersten (zweiten) Summe mit welchen aus der vierten (dritten) Summe. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_0, s_{k-1}) \Gamma(t_0, s_k)}} \phi(x) dx + \sum_{j=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_p) \Gamma(t_j, s_p)}} \phi(x) dx \\ &\quad - \sum_{j=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_0) \Gamma(t_j, s_0)}} \phi(x) dx - \sum_{k=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_p, s_{k-1}) \Gamma(t_p, s_k)}} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\Gamma(t_0, s) = \Gamma(a, s) = \gamma_0(a)$ und $\Gamma(t_p, s) = \Gamma(b, s) = \gamma_0(b)$ für alle $s \in [0, 1]$. Also sind die gerade Strecken $\overrightarrow{\Gamma(t_0, s_{k-1}) \Gamma(t_0, s_k)}$ und $\overrightarrow{\Gamma(t_p, s_{k-1}) \Gamma(t_p, s_k)}$ konstant. Somit verschwinden alle Wegintegrale in der ersten und in der vierten Summe, und wir erhalten

$$\sum_{j=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_p) \Gamma(t_j, s_p)}} \phi(x) dx = \sum_{j=1}^p \int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_0) \Gamma(t_j, s_0)}} \phi(x) dx. \quad (11.16)$$

Für jedes $j = 1, \dots, p$ sind aber $\gamma_0|_{[t_{j-1}, t_j]}$ und $\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_0) \Gamma(t_j, s_0)}$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege, welche denselben Anfangspunkt $\gamma_0(t_{j-1}) = \Gamma(t_{j-1}, s_0)$ und denselben Endpunkt $\gamma_0(t_j) = \Gamma(t_j, s_0)$ haben. Aus (11.15) folgt zudem, dass beide Wege innerhalb von $U_p(\gamma_0(t_j)) \subseteq D$ verlaufen, worauf ϕ ein Gradientenfeld ist. Wegen Satz 11.4.1 erhalten wir somit, dass die Wegintegrale von ϕ über diese beiden Wege übereinstimmen:

$$\int_{\overrightarrow{\Gamma(t_{j-1}, s_0) \Gamma(t_j, s_0)}} \phi(x) dx = \int_{\gamma_0|_{[t_{j-1}, t_j]}} \phi(x) dx.$$

Wir erhalten nach dem Aufsummieren über die j , dass die rechte Seite in (11.16) mit $\int_{\gamma_0} \phi(x) dx$ übereinstimmt. Entsprechend zeigt man, dass die linke Seite in (11.16) mit $\int_{\gamma_1} \phi(x) dx$ übereinstimmt. Also folgt die behauptete Gleichheit.

Wenn D ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, dann sind zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkten immer homotop. Gemäß Satz 11.4.7 und dem ersten Teil des aktuellen Satzes ist dann jedes lokale Gradientenfeld sogar ein Gradientenfeld. \square

11.6 Komplexe Wegintegrale und Holomorphie

Wir wollen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung aus der Linearen Algebra beginnen.

11.6.1 Bemerkung. Vektorräume X und Y über dem Skalkörper \mathbb{C} lassen sich klarerweise auch als Vektorräume über \mathbb{R} auffassen. Ist dabei $A : X \rightarrow Y$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung, so ist A sicherlich auch \mathbb{R} -linear. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen sicher nicht, wie etwa das Beispiel der Vektorräume $X = \mathbb{C} = Y$ und $A(\xi + i\eta) = 3\xi + i\eta$ zeigt.

Wir fragen also, wann eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $A : X \rightarrow Y$ auch \mathbb{C} -linear ist. Eine offensichtlich notwendige Bedingung ist

$$A(ix) = iA(x) \quad \text{für alle } x \in X. \quad (11.17)$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend, da wegen der \mathbb{R} -Linearität $A(x + y) = A(x) + A(y)$ für $x, y \in X$ und da $(\xi, \eta \in \mathbb{R}, x \in X)$

$$A((\xi + i\eta)x) = A(\xi x) + A(i\eta x) = A(\xi x) + iA(\eta x) = \xi A(x) + i\eta A(x) = (\xi + i\eta)A(x).$$

Für ein \mathbb{R} -lineares $A : X \rightarrow Y$ gilt (11.17) sicher schon, wenn $A(ix) = iA(x)$ für alle x aus einer Basis von X , als Vektorraum über \mathbb{R} betrachtet, gilt.

Da $1, i$ eine Basis von \mathbb{C} (über \mathbb{R}) abgibt, trifft im Falle $X = \mathbb{C}$ Gleichung (11.17) genau dann zu, wenn

$$A(i) = iA(1). \quad (11.18)$$

In dem Fall ist wegen

$$A(\xi + i\eta) = A((\xi + i\eta) \cdot 1) = (\xi + i\eta) \cdot A(1) \quad (11.19)$$

die Abbildung A die skalare Multiplikation mit dem Vektor $A(1) \in Y$.

Im Spezialfall $X = Y = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ können wir jede \mathbb{R} -lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ als 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ anschreiben. Wegen $1 \cong (1, 0)^T$, $i \cong (0, 1)^T$ und weil für $\xi + i\eta \cong (\xi, \eta)^T$ aus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$$i(\xi + i\eta) = -\eta + i\xi \cong \begin{pmatrix} -\eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

gilt, bedeutet Bedingung (11.18) dann gerade

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{21} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

Das ist äquivalent dazu, dass A von der speziellen Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (11.20)$$

ist. Wegen (11.19) stellt A die Multiplikation mit der komplexen Zahl $A(1) = a + ib$ dar.

11.6.2 Definition. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$, Y ein Banachraum über \mathbb{C} , $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ ein Weg, so ist das *komplexe Wegintegral* definiert durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \lim_{|\mathcal{R}| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})) f(\gamma(\alpha_j)), \quad (11.21)$$

falls dieser Limes existiert.

Bemerkung 11.6.1 lässt sich dazu benutzen, um komplexe Wegintegrale auf die uns schon bekannten Wegintegral zurückzuführen. Man beachte, dass die Summanden in (11.21) Produkte von komplexen Zahlen mit Vektoren aus Y sind. Zum Vergleich dazu sind die Summanden in (11.5) Elemente aus X , die man erhält, wenn man $(\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})) \in \mathbb{R}^n$ auf die lineare Abbildung $\phi(\gamma(\alpha_j)) \in L(\mathbb{R}^n, X)$ anwendet.

Um dennoch komplexe Wegintegrale als Wegintegrale betrachten zu können, identifizieren wir \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 . Dann lässt sich gemäß Bemerkung 11.6.1 die komplexe Multiplikation als Anwendung eines Zweivektors auf eine lineare Abbildung aus $L(\mathbb{R}^2, Y)$ wie in (11.19) realisieren. Definieren wir also $\phi_f : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ durch

$$\phi_f(z) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto (\xi + i\eta)f(z),$$

so können wir (11.21) als

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{|\mathcal{R}| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \phi_f(\gamma(\alpha_j)) (\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1})) = \int_{\gamma} \phi_f(x) dx \quad (11.22)$$

anschreiben, wobei $(\gamma(\xi_j) - \gamma(\xi_{j-1}))$ jetzt als Element von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ zu interpretieren ist, das auf $\phi_f(\gamma(\alpha_j)) \in L(\mathbb{R}^2, Y)$ angewandt wird.

Die Stetigkeit von ϕ_f ist wegen $z \mapsto \phi_f(z)e_1 = f(z)$ und $z \mapsto \phi_f(z)e_2 = if(z)$ gemäß Bemerkung 11.2.4 äquivalent zur Stetigkeit von f . Also existiert für stetiges f sowie stetiges und rektifizierbares γ gemäß Fakta 11.2.3, 2, das Integral in (11.22). Ist γ sogar stetig und stückweise stetig differenzierbar, so folgt aus Satz 11.2.5

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \phi_f(x) dx = \int_a^b \phi_f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \gamma'(t) \cdot f(\gamma(t)) dt. \quad (11.23)$$

Wegen (11.8) lässt sich die Norm eines komplexen Wegintegrals folgendermaßen abschätzen:

$$\left\| \int_{\gamma} f(z) dz \right\| \leq \max_{t \in [a,b]} \|f \circ \gamma(t)\| \cdot \ell(\gamma). \quad (11.24)$$

Sei wieder $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion mit offenem $D \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ und mit einem Banachraum Y über dem Skalkörper \mathbb{C} . Ist f in einem Punkt $z = x + iy \cong (x, y)^T \in D$ differenzierbar im Sinne von Definition 10.1.13, so stellt $df(z)$ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ nach Y mit

$$df(z)v = \frac{\partial f}{\partial v}(z) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(z) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(z) \in Y \quad \text{für alle } v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2 (\cong \mathbb{C})$$

dar. Gemäß (11.18) ist $df(z)$ genau dann \mathbb{C} -linear, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z), \quad (11.25)$$

denn es gilt ja $1 \cong (1, 0)^T$, $i \cong (0, 1)^T$, wenn man komplexe Zahlen als Elemente von \mathbb{R}^2 betrachtet. In dem Fall gilt wegen (11.19) für $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$df(z)v = (v_1 + iv_2) \cdot df(z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (v_1 + iv_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z). \quad (11.26)$$

11.6.3 Bemerkung. Ist $Y = \mathbb{C}$ und setzen wir $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$, so gilt

$$df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix},$$

und die Vektorgleichung (11.25) lässt sich als

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z)$$

schreiben. Man spricht von den *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*.

11.6.4 Lemma. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, Y ein Banachraum über \mathbb{C} und $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion. Für ein $z \in D$ sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

- f ist bei z im Sinne von Definition 10.1.13 differenzierbar, sodass $df(z)$ eine \mathbb{C} -lineare Abbildung ist bzw. äquivalent dazu, dass (11.25) gilt.
- Der Grenzwert – man spricht von der komplexen Ableitung –

$$\frac{df}{dz}(z) = f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert in Y .

Treffen diese Aussagen zu, so heißt f bei z komplex differenzierbar und es gilt

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z). \quad (11.27)$$

Beweis. Gemäß Definition 10.1.13 und wegen der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist f bei z genau dann differenzierbar, wenn

$$f(z+h) = f(z) + df(z)h + |h|\varepsilon(h) \quad \text{für } z+h \in D, h \neq 0, \quad (11.28)$$

mit einer Funktion $\varepsilon : (D-z) \setminus \{0\} \rightarrow Y$, sodass $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Der Ausdruck $df(z)h$ ist dabei die Anwendung von $h = h_1 + ih_2$, interpretiert als Element $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ von \mathbb{R}^2 , auf die lineare Abbildung $df(z) \in L(\mathbb{R}^2, Y)$.

Ist dabei (11.25) erfüllt, so folgt aus (11.26), dass $df(z)h = h \cdot g(z)$ mit $g(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z) \in Y$. Daraus erhält man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = g(z) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \cdot \varepsilon(h) = g(z),$$

da $\left\| \frac{|h|}{h} \cdot \varepsilon(h) \right\| = \|\varepsilon(h)\| \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Falls umgekehrt der komplexe Grenzwert $g(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existiert, so folgt mit $\varepsilon(h) := \frac{h}{|h|} \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right)$ für $z+h \in D, h \neq 0$ unmittelbar

$$f(z+h) = f(z) + h \cdot g(z) + |h| \varepsilon(h) \quad \text{für } z+h \in D, h \neq 0,$$

wobei $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. Da die Ableitung $df(z)$ eindeutig ist, folgt hieraus $df(z)h = h \cdot g(z)$ und damit die \mathbb{C} -Linearität von $df(z)$. \square

11.6.5 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und Y ein Banachraum über dem Skalkörper \mathbb{C} . Eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ heißt *holomorph* auf D , falls sie bei allen Punkten $z \in D$ komplex differenzierbar ist und die Funktion $z \mapsto f'(z)$ stetig ist.

11.6.6 Bemerkung. Die Eigenschaft von $f : D \rightarrow Y$, holomorph zu sein, ist gemäß Lemma 11.6.4 äquivalent zu der Tatsache, dass f auf D stetig differenzierbar ist, wobei $df(z) : \mathbb{R}^2(\cong \mathbb{C}) \rightarrow Y$ für alle $z \in D$ auch \mathbb{C} -linear ist. Die Stetigkeit von f' entspricht dabei wegen (11.27) und Satz 10.1.15 der von $df : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$.

Mit einiger Mühe lässt sich zeigen, dass die Forderung, dass $z \mapsto f'(z)$ stetig ist, in Definition 11.6.5 weggelassen werden kann; vgl. Satz 11.8.2.

Schließlich sei bemerkt, dass wegen Fakta 10.1.14, 2, jedes holomorphe f auch stetig auf D ist.

11.6.7 Beispiel.

- (i) Ist $y \in Y$ fest und $f : \mathbb{C} \rightarrow Y$ die konstante Funktion $f(z) = y$, so ist f an allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar mit

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 0 \ (\in Y).$$

Da $z \mapsto 0$ als Abbildung von \mathbb{C} nach Y stetig ist, ist f holomorph.

- (ii) Für die Funktion $f : z \mapsto z$ von \mathbb{C} nach \mathbb{C} , also $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$, gilt an jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h) - z}{h} = 1.$$

Da die konstante 1-Funktion stetig ist, folgt die Holomorphie von f .

- (iii) Für die Funktion $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ als Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach \mathbb{C} gilt an jedem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z - (z+h)}{hz(z+h)} = -\frac{1}{z^2}.$$

Da $z \mapsto -\frac{1}{z^2}$ als Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach \mathbb{C} stetig ist, folgt die Holomorphie von f .

11.6.8 Proposition. Seien $D, G \subseteq \mathbb{C}$ offen, Y ein komplexer Banachraum, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $f, f_1, f_2 : D \rightarrow Y$, $\phi : D \rightarrow \mathbb{C}$ sowie $g : G \rightarrow Y$ allesamt holomorphe Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen:

- $\alpha f_1 + \beta f_2 : D \rightarrow Y$ ist holomorph, wobei $(\alpha f_1 + \beta f_2)'(z) = \alpha f_1'(z) + \beta f_2'(z)$ für alle $z \in D$.
- $\phi \cdot f : D \rightarrow Y$ ist holomorph, wobei die Produktregel,

$$(\phi \cdot f)'(z) = \phi'(z)f(z) + \phi(z)f'(z),$$

für alle $z \in D$ gilt.

- Die Funktion $\frac{f}{\phi} : \{z \in D : \phi(z) \neq 0\} \rightarrow Y$ ist holomorph, wobei die Quotientenregel,

$$\left(\frac{f}{\phi}\right)'(z) = \frac{\phi(z)f'(z) - \phi'(z)f(z)}{\phi(z)^2},$$

für alle $z \in D$ mit $\phi(z) \neq 0$ gilt.

→ $g \circ \phi : \phi^{-1}(G) \rightarrow Y^9$ ist holomorph, wobei die Kettenregel,

$$(g \circ \phi)'(z) = \phi'(z) \cdot g'(\phi(z)),$$

für alle $z \in \phi^{-1}(G)$ gilt.

Beweis. Linearität, Produktregel und Quotientenregel zeigt man fast genauso, wie die fürs reelle Differenzieren; vgl. Satz 7.1.7. Die Grenzübergänge $\lim_{h \rightarrow 0}$ sind dabei aber in \mathbb{C} zu nehmen.

Für die Kettenregel sei $z \in D$ mit $\phi(z) \in G$. Für $|h|$ hinreichend klein gilt dann

$$\frac{g \circ \phi(z+h) - g \circ \phi(z)}{h} = \frac{\phi(z+h) - \phi(z)}{h} \cdot r(\phi(z+h)),$$

wobei $r : G \rightarrow Y$ durch $r(w) = \frac{g(w) - g(\phi(z))}{w - \phi(z)}$ für $w \neq \phi(z)$ und $r(\phi(z)) := g'(\phi(z))$ definiert ist. Wegen der komplexen Differenzierbarkeit von g ist r bei $\phi(z)$ stetig, wodurch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g \circ \phi(z+h) - g \circ \phi(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(z+h) - \phi(z)}{h} \cdot r(\phi(z+h)) = \phi'(z) \cdot g'(\phi(z)).$$

Die Funktion $z \mapsto \phi'(z) \cdot g'(\phi(z)) = (g \circ \phi)'$ ist als Produkt stetiger Funktionen wieder stetig. \square

11.6.9 Beispiel.

- (i) Durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ folgt aus $(z \mapsto z)' = 1$ zusammen mit der Produktregel, dass auch $z \mapsto z^n$ auf \mathbb{C} holomorph ist, wobei $(z \mapsto z^n)'(w) = nw^{n-1}$.
- (ii) Durch wiederholte Anwendung von Proposition 11.6.8 folgt, dass alle Polynome $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ mit festen $a_0, \dots, a_n \in Y$ auf \mathbb{C} holomorph sind. Dabei gilt $f'(z) = a_1 + 2za_2 + \dots + nz^{n-1}a_n$.
- (iii) Mit der Quotientenregel zeigt man allgemeiner, dass $f : \mathbb{C} \setminus \{w\} \rightarrow Y$ mit $(N \in \mathbb{N}, w \in \mathbb{C}$ und $a_{-N}, \dots, a_N \in Y$ fest)

$$f(z) = \sum_{n=-N}^N (z-w)^n a_n$$

holomorph ist, wobei

$$f'(z) = \sum_{n=-N}^N n(z-w)^{n-1} a_n.$$

⁹ Man beachte, dass der Definitionsbereich dieser Funktion als Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Funktion ϕ selber offen ist.

(iv) Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist auch holomorph, wobei $\exp'(z) = \exp(z)$. Das folgt zum Beispiel aus der Tatsache, dass für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(wt)$ wegen der Rechnung in Beispiel 7.1.4 $f'(t) = w \exp(wt)$ gilt. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \exp(x + iy) &= \exp(iy) \frac{\partial}{\partial x} \exp(x) = \exp(x + iy), \\ \frac{\partial}{\partial y} \exp(x + iy) &= \exp(x) \frac{\partial}{\partial y} \exp(iy) = i \exp(x + iy).\end{aligned}$$

Da diese Funktionen auf \mathbb{C} stetig sind, erhalten wir $\exp \in C^1(\mathbb{C})$, wobei offensichtlich auch (11.25) erfüllt ist. Also ist \exp holomorph, wobei wegen (11.27) $\exp'(z) = \exp(z)$.

Die Tatsache, dass $f : D \rightarrow Y$ holomorph ist, lässt sich auch von einer anderen Seite beleuchten. Dazu betrachte man das stetig differenzierbare Vektorfeld $\phi_f : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ definiert durch $\phi_f(z) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto (\xi + i\eta)f(z)$. Aus (11.25) folgt ($z = x + iy$)

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi_f(z) e_1 = \frac{\partial}{\partial y} f(z) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x} \phi_f(z) e_2.$$

Gemäß Satz 11.4.14 ist ϕ_f ein lokales Gradientenfeld, und wir können Satz 11.5.4 anwenden, um folgendes Korollar herzuleiten.

11.6.10 Korollar. Sei $f : D \rightarrow Y$ holomorph auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare Wege mit gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkten, die homotop in D sind, so gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Ist D einfach zusammenhängend, dann gibt es eine, bis auf eine additive Konstante aus Y eindeutige, holomorphe Funktion F mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Dabei gilt

$$F(z) - F(w) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$$

für alle $z, w \in D$. Hier ist die rechte Seite ein komplexes Wegintegral und γ irgendein stetiger, stückweise stetig differenzierbarer und in D verlaufender Weg mit Anfangspunkt w und Endpunkt z .

Beweis. Wegen (11.22) gilt $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_0} \phi_f(x) dx$ und $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_1} \phi_f(x) dx$. Also folgt die erste Aussage sofort aus Satz 11.5.4.

Ist D einfach zusammenhängend, so folgt aus demselben Satz, dass ϕ_f ein Gradientenfeld ist, also $\phi_f = dF$ für ein stetig differenzierbares $F : D \rightarrow Y$. Dieses F ist gemäß Korollar 11.4.4 eindeutig bis auf eine additive Konstante aus Y . Da e_1, e_2 eine Basis von \mathbb{R}^2 ist, bedeutet aber $\phi_f = dF$ nichts anderes, als

$$i \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(z) = i \cdot \phi_f(z) e_1 = i \cdot f(z) = \phi_f(z) e_2 = \frac{\partial F}{\partial y}(z).$$

Also folgt die Holomorphie von F , wobei wegen (11.27) $F' = f$. Schließlich erhält man $F(z) - F(w) = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$ unmittelbar aus (11.22) und Satz 11.4.1. \square

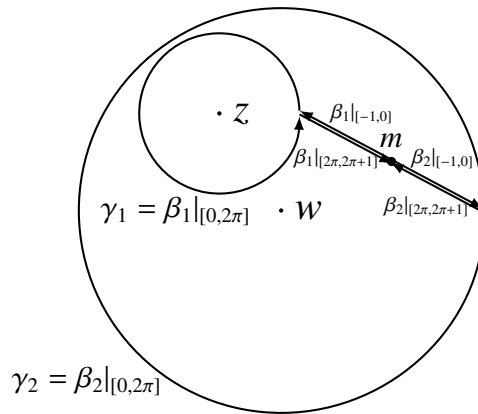
11.6.11 Bemerkung. Angenommen $D \subseteq \mathbb{C}$ ist offen und $w, z \in D$ sowie $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ derart, dass $K_{r_1}(z) \subseteq K_{r_2}(w)$ und $K_{r_2}(w) \setminus U_{r_1}(z) \subseteq D$, wobei wir hier die Kugeln bzgl. $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ meinen. Wir schließen dabei den Fall $z = w$ nicht aus. Weiters seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow D$ die Wege $\gamma_1(t) = z + r_1 \exp(it)$ bzw. $\gamma_2(t) = w + r_2 \exp(it)$, für die $\gamma_1([0, 2\pi]) = K_{r_1}(z) \setminus U_{r_1}(z) \subseteq K_{r_2}(w)$ und $\gamma_2([0, 2\pi]) = K_{r_2}(w) \setminus U_{r_2}(w)$ gilt. Wir behaupten, dass für jedes holomorphe $f : D \rightarrow Y$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \tag{11.29}$$

Dazu betrachten wir für $j = 1, 2$ die Wege $\beta_j : [-1, 2\pi + 1]$ definiert durch

$$\beta_j(t) = \begin{cases} \frac{-t}{2}(\gamma_1(0) + \gamma_2(0)) + (1+t)\gamma_j(0), & \text{falls } t \in [-1, 0), \\ \gamma_j(t), & \text{falls } t \in [0, 2\pi], \\ \frac{t-2\pi}{2}(\gamma_1(0) + \gamma_2(0)) + (1-t+2\pi)\gamma_j(0), & \text{falls } t \in (2\pi, 2\pi+1]. \end{cases}$$

Beide Wege sind geschlossen, und beide haben den Anfangs- bzw. Endpunkt $m := \frac{1}{2}(\gamma_1(0) + \gamma_2(0))$. β_j setzt sich zusammen aus dem zur Strecke $\overrightarrow{m\gamma_j(0)}$ äquivalenten Teil $\beta_j|_{[-1,0]}$, aus $\gamma_j = \beta_j|_{[0,2\pi]}$ und aus dem zur Strecke $\overrightarrow{\gamma_j(0)m} = \overrightarrow{m\gamma_j(0)}$ -äquivalenten Teil $\beta_j|_{[2\pi,2\pi+1]}$.



Da $K_{r_2}(w)$ konvex ist, verlaufen die Wege β_1 und β_2 ganz in $K_{r_2}(w)$. Außerdem gilt für alle $\zeta \in K_{r_2}(w)$

$$\operatorname{Re} \zeta = \operatorname{Re} w + \operatorname{Re}(\zeta - w) \leq \operatorname{Re} w + |\zeta - w| \leq \operatorname{Re} w + r_2,$$

und somit

$$\operatorname{Re} z + r_1 = \operatorname{Re} \gamma_1(0) \leq \operatorname{Re} w + r_2 = \operatorname{Re} \gamma_2(0).$$

Da die Bilder von $\beta_j|_{[-1,0]}$ und $\beta_j|_{[2\pi,2\pi+1]}$ ganz im Bild von $\overrightarrow{\gamma_1(0)\gamma_2(0)}$ enthalten sind, sind diese auch ganz in der konvexen Teilmenge $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \geq \operatorname{Re} z + r_1\}$ von \mathbb{C} enthalten. Wegen $\operatorname{Re} \zeta - \operatorname{Re} z \leq |\zeta - z|$ gilt $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \geq \operatorname{Re} z + r_1\} \subseteq \mathbb{C} \setminus U_{r_1}(z)$, womit die Wege β_1 und β_2 ganz in $K_{r_2}(w) \setminus U_{r_1}(z) \subseteq D$ verlaufen.

Definieren wir $\Gamma : [-1, 2\pi + 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\Gamma(t, s) := s\beta_1(t) + (1-s)\beta_2(t), \quad (11.30)$$

so folgt aus Konvexitätsgründen auch, dass das Bild von Γ ganz in $K_{r_2}(w)$ liegt. Andererseits gilt für $t \in [0, 2\pi]$ und $s \in [0, 1]$ wegen der zu $K_{r_1}(z) \subseteq K_{r_2}(w)$ äquivalenten Tatsache, dass $|z - w| + r_1 \leq r_2$, und wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} r_1 &= (1-s)r_1 + sr_1 \leq ((1-s)r_2 + sr_1) - (1-s)|z - w| \\ &\leq |((1-s)r_2 + sr_1) \cdot \exp(it) - (1-s)(z - w)| = |s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_2(t) - z|. \end{aligned}$$

Somit liegt $\Gamma(t, s)$ immer außerhalb von $U_{r_1}(z)$.

Zudem liegt für $t \in [-1, 0] \cup [2\pi, 2\pi + 1]$ und $s \in [0, 1]$ der Punkt $\Gamma(t, s)$ wieder aus Konvexitätsgründen ganz in $\{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \geq \operatorname{Re} z + r_1\}$.

Insgesamt liegt das Bild von Γ in $K_{r_2}(w) \setminus U_{r_1}(z) \subseteq D$. Also sind die Wege β_1 und β_2 homotop in D . Gemäß Korollar 11.6.10 gilt für die auf D holomorphe Funktion f

$$\int_{\beta_1} f(z) dz = \int_{\beta_2} f(z) dz.$$

Da $\beta_j|_{[-1, 0]}$ äquivalent zu $\beta_j|_{[2\pi, 2\pi+1]}$ ist, heben sich die Wegintegrale über die linearen Teile von β_j für $j = 1, 2$ auf (vgl. Fakta 11.2.3, 1), und es folgt (11.29).

11.6.12 Satz (Cauchysche Integralformel). Sei $f : D \rightarrow Y$ holomorph mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$, und seien $w \in \mathbb{C}$ und $\rho > 0$ derart, dass $K_\rho(w) \subseteq D$.

Ist $z \in U_\rho(w)$, und ist $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow D$ der Weg $\gamma_\rho : t \mapsto w + \rho \cdot \exp(it)$ oder ein in $D \setminus \{z\}$ zu γ_ρ homotoper, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (11.31)$$

Beweis. Man betrachte die Funktion $G : D \setminus \{z\} \rightarrow Y$ definiert durch

$$G(\eta) = \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z}.$$

Nach Proposition 11.6.8 ist G holomorph. Da $\lim_{\eta \rightarrow z} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z}$ existiert, kann man G auf D durch $G(z) := f'(z)$ stetig fortsetzen; vgl. Bemerkung 6.4.4.

Wegen $K_\rho(w) \setminus U_r(z) \subseteq D \setminus \{z\}$ für ein hinreichend kleines $r > 0$ folgt aus Bemerkung 11.6.11, dass

$$\int_{\gamma_\rho} G(\zeta) d\zeta = \int_{\mu_\epsilon} G(\zeta) d\zeta,$$

für alle $\epsilon \in (0, r]$, wobei $\mu_\epsilon(t) = z + \epsilon \cdot \exp(it)$. Andererseits kann man den Betrag der rechten Seite mit Hilfe von (11.24) nach oben abschätzen durch

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} \|G \circ \mu_\epsilon(t)\| \cdot \ell(\mu_\epsilon) \leq \sup_{\eta \in K_\rho(w)} \|G(\eta)\| \cdot \int_0^{2\pi} |\mu'_\epsilon(t)| dt = \sup_{\eta \in K_\rho(w)} \|G(\eta)\| \cdot 2\pi\epsilon.$$

Da G auf das kompakte $K_\rho(w)$ stetig fortgesetzt wurde, sind obige Suprema endlich. Damit geht der Ausdruck rechts für $\epsilon \rightarrow 0+$ gegen Null. Weil komplexe Wegintegrale linear im Integranden sind, folgt

$$0 = \int_{\gamma_\rho} G(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wieder mit Bemerkung 11.6.11 und mit Hilfe von (11.23) berechnet man

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\mu_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i.$$

Somit folgt (11.31) für $\gamma = \gamma_\rho$. Ist γ in $D \setminus \{z\}$ homotop zu γ_ρ , so folgt (11.31) aus Korollar 11.6.10. \square

Schreiben wir (11.31) mit Hilfe von (11.23) als Riemann-Integral, so erhalten wir für alle $z \in U_\rho(w)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \exp(it) \cdot \frac{f(w + \rho \exp(it))}{w + \rho \exp(it) - z} dt. \quad (11.32)$$

11.6.13 Korollar. *Ist $f : D \rightarrow Y$ holomorph mit offenem $D \subseteq \mathbb{C}$, so ist auch $f' : D \rightarrow Y$ holomorph. Infolge sind alle Funktionen $f^{(n)} : D \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, holomorph auf D . Insbesondere ist $f \in C^\infty(D)$.*

Dabei gilt für jedes $w \in D$ und $\rho > 0$ mit $K_\rho(w) \subseteq D$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{für alle } z \in U_\rho(w). \quad (11.33)$$

Hier ist $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow D$ der Weg $\gamma_\rho : t \mapsto w + \rho \cdot \exp(it)$ oder ein in $D \setminus \{z\}$ zu γ_ρ homotoper, stetiger und stückweise stetig differenzierbarer Weg.

Beweis. Sei $\rho > 0$, sodass $K_\rho(w) \subseteq D$. Der Integrand

$$h_t(z) := \rho \exp(it) \cdot \frac{f(w + \rho \exp(it))}{w + \rho \exp(it) - z}$$

der rechten Seite von (11.32) ist offensichtlich stetig als Funktion von $(z, t) \in U_\rho(w) \times [0, 2\pi]$ nach Y ; vgl. Korollar 6.1.8. Wie wir in Beispiel 11.6.9 gesehen haben, ist $h_t(z)$ als Funktion der Variable $z \in U_\rho(w)$ holomorph mit $(z = x + iy)$

$$\frac{\partial h_t}{\partial x}(z) = -i \cdot \frac{\partial h_t}{\partial y}(z) = h'_t(z) = \rho \exp(it) \cdot \frac{f(w + \rho \exp(it))}{(w + \rho \exp(it) - z)^2}.$$

Diese Funktion ist stetig als Funktion von $(z, t) \in U_\rho(w) \times [0, 2\pi]$ nach Y . Insbesondere sind die Voraussetzungen von Korollar 8.7.12 (siehe auch (9.18)) erfüllt, und wir erhalten

für $z \in U_\rho(w)$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} h_t(z) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \exp(it) \cdot \frac{f(w + \rho \exp(it))}{(w + \rho \exp(it) - z)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Nun ist $h'_t : U_\rho(w) \rightarrow Y$ ebenfalls holomorph mit

$$\frac{\partial h'_t}{\partial x}(z) = -i \cdot \frac{\partial h'_t}{\partial y}(z) = h''_t(z) = \rho \exp(it) \cdot 2 \frac{f(w + \rho \exp(it))}{(w + \rho \exp(it) - z)^3}.$$

Diese Funktion ist wieder stetig als Funktion von $(z, t) \in U_\rho(w) \times [0, 2\pi]$ nach Y . Nach Korollar 8.7.12 (siehe auch (9.18)) folgt für $z \in U_\rho(w)$

$$\frac{\partial f'}{\partial x}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} h'_t(z) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -i \cdot \frac{\partial}{\partial y} h'_t(z) dt = -i \cdot \frac{\partial f'}{\partial y}(z).$$

wobei diese Funktion gemäß Korollar 8.7.9 (siehe auch (9.17)) für jedes kompakte $K \subseteq U_\rho(w)$ stetig von $z \in K$ abhängt. Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, und da jede abgeschlossene, in $U_\rho(w)$ enthaltene Kugel um $z \in U_\rho(w)$ kompakt ist, folgt die Stetigkeit auf ganz $U_\rho(w)$. Somit gilt $f' \in C^1(D)$, und nach Lemma 11.6.4 ist f' auf $U_\rho(w)$ holomorph, wobei

$$(f')'(z) = \frac{\partial f'}{\partial x}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h''_t(z) dt = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta.$$

Insbesondere gilt $f \in C^2(U_\rho(w))$. Da $w \in D$ beliebig war, gilt $f \in C^2(D)$, und – Holomorphie ist eine lokale Eigenschaft – ist f' holomorph auf D .

Verfährt man induktiv weiter, so folgt insbesondere (11.33) und $f \in C^n(D)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\gamma = \gamma_\rho$ in (11.33). Für in $D \setminus \{z\}$ zu γ_ρ homotope γ folgt (11.33) aus Korollar 11.6.10. \square

11.6.14 Korollar (Satz von Liouville). *Jedes auf ganz \mathbb{C} holomorphe und beschränkte $f : \mathbb{C} \rightarrow Y$ ist eine konstante Funktion.*

Beweis. Es gelte $\|f(z)\| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Ist $\rho > 0$, $w \in \mathbb{C}$ und $\gamma(t) = w + \rho \cdot \exp(it)$, so folgt wegen (11.33) und (11.24)

$$\|f'(w)\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\zeta \right\| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{\rho^2} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho}.$$

Da wir $\rho > 0$ beliebig groß wählen können, folgt $f'(w) = 0$. Wegen $0' = 0$ folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Korollar 11.6.10, dass f konstant ist. \square

Ein stetiger Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$.

11.6.15 Satz (Satz von Morera). Für ein offenes $D \subseteq \mathbb{C}$ und eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- f ist holomorph.
- f ist stetig und zu jedem $w \in D$ gibt es ein offenes $D(w)$ mit $w \in D(w) \subseteq D$, sodass

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad (11.34)$$

für alle geschlossenen, achsenparallelen Polygonzüge γ in $D(w)$.

- Das Vektorfeld $\phi_f : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ definiert durch $\phi_f(z) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto (\xi + i\eta)f(z)$ ist ein lokales Gradientenfeld.

In dem Fall gilt (11.34) für alle einfach zusammenhängenden Gebiete $D(w)$ mit $w \in D(w) \subseteq D$, etwa für alle offenen, in D enthaltenen Kugeln um w .

Beweis. Ist f holomorph und $D(w)$ einfach zusammenhängendes Gebiet mit $w \in D(w) \subseteq D$, so folgt $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$ sofort aus Korollar 11.6.10. Außerdem ist f stetig; vgl. Lemma 11.6.4.

Sei nun f stetig und gelte (11.34) für jedes $w \in D$ und jeden geschlossenen, achsenparallelen Polygonzug γ in $D(w)$ mit einem offenen $D(w)$, sodass $w \in D(w) \subseteq D$. Wegen Bemerkung 11.2.4 ist die Stetigkeit von f zu der von $\phi_f : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ äquivalent. Gemäß (11.22) gilt

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} \phi_f(x) dx$$

für das Vektorfeld $\phi_f|_{D(w)} : D(w) \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$. Nach Bemerkung 11.4.8 sind daher die Voraussetzungen von Satz 11.4.7 für $\phi_f : D(w) \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ erfüllt. Somit gilt $\phi_f = dF$ für ein Y -wertiges $F \in C^1(D(w))$. Definitionsgemäß ist daher $\phi_f : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ ein lokales Gradientenfeld.

Sei schließlich $\phi_f : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ ein lokales Gradientenfeld. Da e_1, e_2 eine Basis von \mathbb{R}^2 ist, bedeutet aber $\phi_f = dF$ auf einer offenen, w enthaltenden Menge $D(w) \subseteq D$ nichts anderes, als

$$i \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(z) = i \cdot \phi_f(z) e_1 = i \cdot f(z) = \phi_f(z) e_2 = \frac{\partial F}{\partial y}(z).$$

Damit folgt die Holomorphie von F auf $D(w)$, wobei wegen (11.27) $F' = f$. Gemäß Korollar 11.6.13 ist auch $F' = f$ auf $D(w)$ holomorph. Da w beliebig war, und da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, folgt die Behauptung. \square

11.6.16 Lemma. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f_n : D \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig auf D gegen eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ konvergiert. Letzteres bedeutet, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq D$ $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen $f|_K$ konvergiert. Dann ist auch f holomorph.

Beweis. Wähle zu $w \in D$ die offene Menge $D(w)$ wie Satz 11.6.15. Gemäß dieses Satzes können wir sie sogar unabhängig von n so wählen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\gamma} f_n(\zeta) d\zeta = 0,$$

wenn nur $\gamma : [0, m] \rightarrow D(w)$ ein geschlossener, achsenparalleler Polygonzug ist. $K := \gamma([0, m])$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selber kompakt. Nun stimmt wegen (11.23) obiges Wegintegral überein mit

$$\int_0^m \gamma'(t) \cdot f_n(\gamma(t)) dt = 0.$$

Wegen ¹⁰ $\|\gamma'(t) \cdot f_n(\gamma(t)) - \gamma'(t) \cdot f(\gamma(t))\| \leq \|f_n - f\|_{\infty, K} \cdot \|\gamma'\|_{\infty, [0, m]}$ für alle $t \in [0, m]$, und da γ ein Polygonzug ist und daher $\|\gamma'\|_{\infty, [0, m]} < +\infty$, konvergiert die Funktionenfolge $\gamma' \cdot f_n \circ \gamma$ gleichmäßig gegen $\gamma' \cdot f \circ \gamma$ auf $[0, m]$. Aus Satz 8.7.2 (siehe auch (9.16)) folgt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_0^m \gamma'(t) \cdot f(\gamma(t)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^m \gamma'(t) \cdot f_n(\gamma(t)) dt = 0.$$

Nach Satz 11.6.15 ist daher f holomorph. \square

11.6.17 Korollar. Seien $a_k \in Y$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derart, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k$ einen Konvergenzradius $R > 0$ hat¹¹. Für $w \in \mathbb{C}$ ist die Grenzfunktion

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - w)^k a_k$$

auf $U_R(w) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < R\}$ holomorph, wobei $a_0 = f(w)$ und $a_n = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Für ein kompaktes $K \subseteq U_R(w)$ existiert $r = \max_{z \in K} |z - w| (< R)$, da $z \mapsto |z - w|$ stetig auf der kompakten Menge K ist. Also gilt $K \subseteq K_r(w) \subseteq U_R(w)$.

Nach Satz 6.8.7 (siehe auch Fakta 9.3.9, 4) konvergiert die Funktionenfolge $s_m(z) := \sum_{k=0}^m (z - w)^k a_k$ für $m \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $K_r(w)$ und damit auf K gegen $f(z)$. Da gemäß Beispiel 11.6.9 alle Polynome $s_m(z)$ holomorph sind, ist nach Lemma 11.6.16 auch f auf $U_R(w)$ holomorph. Für $\rho \in (0, R)$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt gemäß (11.33)

$$\begin{aligned} f^{(n)}(w) &= f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} d\zeta \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{s_m(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} d\zeta = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m^{(n)}(w) = n! a_n. \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Limes und Integral darf vorgenommen werden, da s_m auf $K_{\rho}(w)$ gleichmäßig gegen f konvergiert; vgl. Beweis von Lemma 11.6.16. \square

¹⁰ γ ist bei allen bis auf endlich viele $t \in [0, m]$ differenzierbar. An den Ausnahmepunkten können wir in diesem Zusammenhang $\gamma'(t) := 0$ setzen; vgl. Satz 11.2.5.

¹¹ Vergleiche (6.7), Satz 6.8.7 sowie Fakta 9.3.9.

11.6.18 Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ ist genau dann holomorph, wenn f analytisch ist, also wenn es zu jedem $w \in D$ eine offene Kreisscheibe $U_{\rho_w}(w) \subseteq D$ bzgl. $|\cdot|$ gibt, sodass sich f darauf als Grenzfunktion einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n a_n$ mit Konvergenzradius größer oder gleich ρ_w darstellen lässt; vgl. Bemerkung 6.8.11. Die Koeffizienten a_n sind dabei eindeutig durch f und w bestimmt, und das größtmögliche ρ_w , sodass sich ein holomorphes f als Potenzreihe auf $U_{\rho_w}(w)$ darstellen lässt, ist $\rho_w = \sup\{r > 0 : U_r(w) \subseteq D\}$, wobei $\rho_w = +\infty$, wenn $D = \mathbb{C}$.

Beweis. Lässt sich f um jedes w auf einem $U_{\rho_w}(w) \subseteq D$ lokal als Grenzfunktion einer Potenzreihe darstellen, so ist f dort gemäß Korollar 11.6.17 holomorph, wobei $a_n = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}$. Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, muss f auf ganz D holomorph sein.

Sei nun $f : D \rightarrow Y$ holomorph, und setze $\rho_w = \sup\{r > 0 : U_r(w) \subseteq D\}$. Offensichtlich ist $r = \rho_w$ maximal, sodass $U_r(w) \subseteq D$. Für $\rho \in (0, \rho_w)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - w| = \rho$ und für $z \in U_{\rho}(w)$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - w}{\zeta - w} \right)^n = \frac{1}{\zeta - w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-w}{\zeta-w}} = \frac{1}{\zeta - z}.$$

Aus (11.32) folgt mit $\gamma_{\rho}(t) = w + \rho \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - w}{\zeta - w} \right)^n \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - w}{\rho \exp(it)} \right)^n \cdot f(w + \rho \exp(it)) dt. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \left(\frac{z - w}{\rho \exp(it)} \right)^n \cdot f(w + \rho \exp(it)) \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - w|}{\rho} \right)^n \cdot \|f\|_{\infty, K_{\rho}(w)} < +\infty$$

konvergiert die Reihe im obigen Riemann-Integral absolut und daher gleichmäßig; vgl. Korollar 6.8.4. Aus Satz 8.7.2 (siehe auch (9.16)) folgt daher¹²

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z - w}{\rho \exp(it)} \right)^n \cdot f(w + \rho \exp(it)) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} d\zeta \right)}_{=: a_n}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus (11.23). Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n a_n$ und stimmt mit $f(z)$ überein.

Aus (6.7) folgt schließlich, dass diese Potenzreihe einen Konvergenzradius $R \geq |z - w|$ hat, und da $z \in U_{\rho}(w)$ beliebig war, gilt $R \geq \rho$. Da auch $\rho \in (0, \rho_w)$ beliebig war, folgt $R \geq \rho_w$. \square

¹² Insbesondere konvergiert diese Reihe!

11.6.19 Bemerkung (*). Wir haben gezeigt, dass jedes holomorphe $f : D \rightarrow Y$ unendlich oft differenzierbar ist. Somit existieren neben allen höheren partiellen Ableitungen auch alle Ausdrücke der Form (10.8), also $d^k f(z)(v_1, \dots, v_k)$ aus Definition 10.2.7 für alle $k \in \mathbb{N}$, alle $z \in D$ und alle Richtungsvektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Gemäß (11.26) gilt für $k = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v_1}(z) = d^1 f(z)v_1 = v_1 \cdot f'(z).$$

Ersetzen wir f durch die holomorphe Funktion $z \mapsto v_1 \cdot f'(z)$ und v_1 durch v_2 , so folgt

$$\frac{\partial}{\partial v_2} \frac{\partial}{\partial v_1} f(z) = d^2 f(z)(v_1, v_2) = v_2 \cdot v_1 \cdot f'(z).$$

Führt man so fort, so erhält man allgemein $d^k f(z)(v_1, \dots, v_k) = v_k \cdot \dots \cdot v_1 \cdot f^{(k)}(z)$.

Insbesondere stimmt die Reihe aus Proposition 10.2.13, (ii), für $y = w \in D$ mit der Potenzreihe aus Satz 11.6.18 überein.

11.7 Laurentreihen*

Wir betrachten zunächst ein holomorphes $f : D \rightarrow Y$ mit einem Banachraum Y über \mathbb{C} und einem offenen $D \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass für gewisse $0 < r < R < +\infty$ und $w \in \mathbb{C}$ der abgeschlossene Kreisring $K_R(w) \setminus U_r(w)$ in D enthalten ist.

11.7.1 Bemerkung. Für ein $z \in U_R(w) \setminus K_r(w)$ gilt dann folgende Variante der Cauchyschen Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (11.35)$$

wobei $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_\rho(t) = w + \rho \exp(it)$ für $\rho > 0$. Um das einzusehen, betrachten wir die Funktion $G : D \rightarrow Y$,

$$G(\eta) = \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} \quad \text{für } \eta \neq z \quad \text{und} \quad G(z) = f'(z),$$

wie im Beweis von Satz 11.6.12. Auf $D \setminus \{z\}$ ist G holomorph. Weiters ist $\eta \mapsto (\eta - z)G(\eta) = f(\eta) - f(z)$ auf ganz D holomorph und verschwindet bei $\eta = z$. Nach Satz 11.6.18 gilt

$$(\eta - z)G(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} (\eta - z)^n \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

und infolge

$$G(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\eta - z)^n \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \quad (11.36)$$

für $\eta \in U_\rho(z) \setminus \{z\}$ mit einem hinreichend kleinen $\rho > 0$. Bildet man hier $\lim_{\eta \rightarrow z}$, so erkennt man, dass (11.36) für alle $\eta \in U_\rho(z)$ gilt. Gemäß Korollar 11.6.17 ist G auf $U_\rho(z)$, und infolge auf ganz D holomorph. Nach Bemerkung 11.6.11, angewandt auf G , gilt

$$\int_{\gamma_R} G(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_r} G(\zeta) d\zeta$$

und somit

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

Da $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ auf $U_{|z-w|}(w)$ holomorph ist, und da γ_r in $U_{|z-w|}(w)$ verläuft, folgt aus Korollar 11.6.10, dass $\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0$. Wie im Beweis von Satz 11.6.12 erkennt man, dass $\int_{\gamma_R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i$. Umformen ergibt schließlich (11.35).

11.7.2 Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $w \in \mathbb{C}$, sodass $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w) \subseteq D$ für gewisse $0 \leq r_w < R_w \leq +\infty$. Ist $f : D \rightarrow Y$ holomorph, so gilt für alle $z \in U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-w)^n a_n, \quad (11.37)$$

wobei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^n a_n$ Konvergenzradius größer oder gleich R_w und die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^n a_{-n}$ Konvergenzradius größer oder gleich $\frac{1}{r_w}$ hat, und damit obige Reihe auf $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$ konvergiert. Die Koeffizienten a_n , sind durch f und den Bereich $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$ eindeutig bestimmt, wobei für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)^{n+1}} d\zeta \quad (11.38)$$

mit $\gamma_\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_\rho(t) = w + \rho \exp(it)$ für jeden Radius $\rho \in (r_w, R_w)$. Die Reihe in (11.37) heißt Laurentreihe um w im Bereich $U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$.

Beweis. Seien $r, R \in (r_w, R_w)$ mit $r < R$. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - w| = R$ und für $z \in U_R(w)$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-w}{\zeta-w} \right)^n = \frac{1}{\zeta - w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-w}{\zeta-w}} = \frac{1}{\zeta - z}.$$

Analog erhalten wir für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta - w| = r$ und $z \in \mathbb{C} \setminus K_r(w)$

$$\frac{1}{z-w} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-w}{z-w} \right)^n = \frac{1}{z-w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-w}{z-w}} = -\frac{1}{\zeta - z}.$$

Aus (11.35) folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-w}{\zeta-w} \right)^n \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta-w} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-w}{z-w} \right)^n \cdot \frac{f(\zeta)}{z-w} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^{-n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{-n}} d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-w)^n a_n, \end{aligned}$$

wobei $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta$ für $n \geq 0$ und $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}} d\zeta$ für $n < 0$. Da die betreffenden Reihen gleichmäßig konvergieren, dürfen Integrale und Reihen vertauscht werden, womit die beiden Reihen rechts vom zweiten Gleichheitszeichen konvergieren und eben diese Gleichheit gilt; vgl. Beweis von Lemma 11.6.16. Dass die a_n einheitlich in der Form (11.38) für jedes $\rho \in (r, R)$ geschrieben werden können, folgt aus Bemerkung 11.6.11.

Da $r, R \in (r_w, R_w)$ mit $r < R$ beliebig waren und da wegen (11.38) die a_n unabhängig von r, R sind, ist die Reihenentwicklung für alle $z \in U_{R_w}(w) \setminus K_{r_w}(w)$ gültig. Insbesondere konvergiert $\sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^n a_n$ für $|\zeta| \in (r_w, R_w)$ und $\sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^n a_{-n}$ für $|\frac{1}{\zeta}| \in (r_w, R_w)$. Daraus folgt die getroffene Aussage über die jeweiligen Konvergenzradien dieser Reihen. \square

11.8 Nochmals komplexe Differenzierbarkeit*

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass $f : D \rightarrow Y$ genau dann holomorph ist, wenn f bei allen $z \in D$ komplex differenzierbar ist. Man kann also bei der Definition der Holomorphie in Definition 11.6.5 auf die Stetigkeit von f' verzichten.

11.8.1 Lemma. Sei $R \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Rechteck. Sei $f : R \rightarrow Y$ bei jedem $z \in R$ differenzierbar, und es gelte $\frac{f}{\partial y}(z) = i \frac{f}{\partial x}(z)$ für alle $z \in R$. Eine gemäß Lemma 11.6.4 äquivalente Forderung ist, dass f bei allen $z \in R$ komplex differenzierbar ist.

Ist weiters das Rechteck $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ in R enthalten, so gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz, \tag{11.39}$$

wobei $\gamma_1 = \overrightarrow{(\alpha_1)(\beta_1)}_{(\alpha_2)(\beta_2)}$ und $\gamma_2 = \overrightarrow{(\alpha_1)(\alpha_2)}_{(\beta_1)(\beta_2)}$.

Beweis. Aus der Differenzierbarkeit von f folgt seine Stetigkeit bei allen $z \in R$; vgl. Fakta 10.1.14, 2. Somit existieren die obigen komplexen Wegintegrale. Außerdem ist (11.39) dazu äquivalent, dass

$$I(Q) := \int_{\partial Q} f(z) dz$$

verschwindet, wobei $Q = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2]$ und ∂Q der geschlossene Polygonzug

$$\overrightarrow{(\alpha_1)(\beta_1)}_{(\alpha_2)(\beta_2)}, \overrightarrow{(\beta_1)(\beta_1)}_{(\alpha_2)(\beta_2)}, \overrightarrow{(\beta_1)(\alpha_1)}_{(\beta_2)(\beta_2)}, \overrightarrow{(\alpha_1)(\alpha_1)}_{(\beta_2)(\alpha_2)}$$

ist. Unterteilen wir Q in die vier gleich großen Rechtecke

$$Q_{kl}^1 := [0, \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}] \times [0, \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}] + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} \\ l \cdot \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2} \end{pmatrix}, \quad k, l = 0, 1,$$

so folgt

$$I(Q) = \int_{\partial Q} f(z) dz = \sum_{k,l=0}^1 \underbrace{\int_{\partial Q_{k,l}^1} f(z) dz}_{:=I(Q_{k,l}^1)},$$

da sich die Wegintegrale über die inneren Polygonzüge wegheben und die über die äußeren Polygonzüge aufaddieren.

Wäre nun $I(Q) \neq 0$, so hätten wir auch $I(Q_{k,l}^1) \neq 0$ für zumindest ein Paar $k, l \in \{0, 1\}$. Seien nun $k_1, l_1 \in \{0, 1\}$, sodass $\|I(Q_{k_1, l_1}^1)\| \geq \|I(Q_{k,l}^1)\|$ für alle $k, l \in \{0, 1\}$. Offenbar gilt dann

$$\|I(Q)\| \leq \sum_{k,l=0}^1 \|I(Q_{k,l}^1)\| \leq 4\|I(Q_{k_1, l_1}^1)\|.$$

Nun unterteilen wir jedes der Rechtecke $Q_{k,l}^1$ in vier gleich großen Rechtecke und erhalten insgesamt die 16 Rechtecke $Q_{k,l}^2$, $k, l = 0, \dots, 3$. Unter den in Q_{k_1, l_1}^1 enthaltenen Rechtecken aus $\{Q_{k,l}^2 : k, l = 0, \dots, 3\}$ wählen wir eines – Q_{k_2, l_2}^2 , $k_2, l_2 \in \{0, \dots, 3\}$ – aus, sodass $\|I(Q_{k_2, l_2}^2)\|$ maximal ist, womit $\|I(Q_{k_1, l_1}^1)\| \leq 4\|I(Q_{k_2, l_2}^2)\|$.

Setzen wir diese Prozedur fort, so haben wir im n -ten Schritt Q in 4^n Rechtecke

$$Q_{k,l}^n := \left[0, \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^n}\right] \times \left[0, \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2^n}\right] + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^n} \\ l \cdot \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2^n} \end{pmatrix}, \quad k, l = 0, \dots, 2^n - 1,$$

unterteilt, auf dass $\sum_{k,l=0}^{2^n-1} I(Q_{k,l}^n) = I(Q)$. Zudem sind $k_n, l_n \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, sodass

$$Q_{k_n, l_n}^n \subseteq Q_{k_{n-1}, l_{n-1}}^{n-1} \quad \text{und} \quad \|I(Q_{k_n, l_n}^n)\| = \max\{\|I(Q_{k,l}^n)\| : Q_{k,l}^n \subseteq Q_{k_{n-1}, l_{n-1}}^{n-1}\},$$

womit $\|I(Q_{k_{n-1}, l_{n-1}}^{n-1})\| \leq 4\|I(Q_{k_n, l_n}^n)\|$.

Da die Rechtecke Q_{k_n, l_n}^n , $n \in \mathbb{N}$ ineinander geschachtelt sind, erfüllt diese Mengenfolge bestehend aus kompakten Mengen die endliche Durchschnittseigenschaft; vgl. Proposition 12.11.2. Infolge ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_{k_n, l_n}^n$ nichtleer. Da aber die Durchmesser $d(Q_{k_n, l_n}^n)$ von Q_{k_n, l_n}^n für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergieren, ist dieser Durchschnitt einpunktig: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_{k_n, l_n}^n = \{w\}$.

Die noch nicht verwendete Tatsache, dass f insbesondere bei w komplex differenzierbar ist, besagt, dass $f(z) = f(w) + (z - w)f'(w) + |z - w|\varepsilon(z)$ mit $\lim_{z \rightarrow w} \varepsilon(z) = 0$. Aus der Linearität von Wegintegralen folgt

$$I(Q_{k_n, l_n}^n) = \int_{\partial Q_{k_n, l_n}^n} (f(w) + (z - w)f'(w)) dz + \int_{\partial Q_{k_n, l_n}^n} |z - w| \varepsilon(z) dz.$$

Da $z \mapsto f(w) + (z - w)f'(w)$ holomorph ist, folgt aus (11.24) und Korollar 11.6.10

$$\|I(Q_{k_n, l_n}^n)\| = \left\| \int_{\partial Q_{k_n, l_n}^n} |z - w| \varepsilon(z) dz \right\| \leq \ell(\partial Q_{k_n, l_n}^n) d(Q_{k_n, l_n}^n) \sup_{z \in Q_{k_n, l_n}^n} \|\varepsilon(z)\|.$$

Wegen $\ell(\partial Q_{k_n, l_n}^n) = \frac{1}{2^n} \ell(\partial Q)$ und $d(Q_{k_n, l_n}^n) = \frac{1}{2^n} d(Q)$ folgt

$$\|I(Q)\| \leq 4^1 \|I(Q_{k_1, l_1}^1)\| \leq \dots \leq 4^n \|I(Q_{k_n, l_n}^n)\| \leq 4^n \frac{1}{4^n} \ell(\partial Q) d(Q) \sup_{z \in Q_{k_n, l_n}^n} \|\varepsilon(z)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also gilt $I(Q) = 0$ im Gegensatz zu unserer Annahme $I(Q) \neq 0$. \square

11.8.2 Satz. Sei Y ein Banachraum über \mathbb{C} , $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \rightarrow Y$ ist genau dann holomorph, wenn f bei allen $z \in D$ komplex differenzierbar ist.

Beweis. Definitionsgemäß ist jede holomorphe Funktion komplex differenzierbar; vgl. Definition 11.6.5. Sei nun $f : D \rightarrow Y$ überall komplex differenzierbar, $w \in D$ und $\delta > 0$ so klein, dass das Quadrat $D(w) := U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(w)$ ganz in D enthalten ist. Wir können also Lemma 11.8.1 auf $R = D(w)$ anwenden.

Definieren wir $\phi_f : D(w) \rightarrow L(\mathbb{R}^2, Y)$ durch $\phi_f(z) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto (\xi + i\eta)f(z)$, so kann wegen (11.22) die Gleichung (11.39) auch als

$$\int_{\gamma_1} \phi_f(x) dx = \int_{\gamma_2} \phi_f(x) dx$$

angeschrieben. Insbesondere sind die Voraussetzungen von Lemma 11.4.6 erfüllt, womit sich ϕ_f auf $D(w)$ als Gradientenfeld und infolge auf D als lokales Gradientenfeld herausstellt. Nach Satz 11.6.15 ist f holomorph auf D . \square

11.9 Harmonische Funktionen*

Wir wollen in diesem Abschnitt den Zusammenhang von komplexwertigen, holomorphen Funktionen und sogenannten harmonischen Funktionen beleuchten.

11.9.1 Definition. Ist $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit offenem $G \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar, so bezeichnet $\Delta g : G \rightarrow \mathbb{C}$ (Laplace g) die Abbildung

$$\Delta g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Funktionen $g : G \rightarrow \mathbb{C}$, $g \in C^2(G)$ heißen *harmonisch*, falls $\Delta g \equiv 0$.

Da die Ableitungen eintragsweise berechenbar sind, ist g offenbar genau dann harmonisch, wenn $\operatorname{Re} g$ und $\operatorname{Im} g$ es sind.

11.9.2 Proposition. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so ist f auch harmonisch. Insbesondere sind dann Real- und Imaginärteil von f harmonisch.

Ist umgekehrt $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, so gibt es ein bis auf eine imaginäre Konstante eindeutiges holomorphes $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, sodass $u \equiv \operatorname{Re} f$.

Beweis. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt (11.25). Da holomorphe Funktionen beliebig oft differenzierbar sind, folgt aus dieser Gleichung abgeleitet nach x bzw. nach y und dem Satz von Schwarz, Satz 10.2.3,

$$i \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z) = (-i) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z),$$

woraus wir $\Delta \bar{f} = 0$ erhalten. Infolge ist f und daher auch $u = \operatorname{Re} f$ sowie $v = \operatorname{Im} f$ harmonisch.

Ist umgekehrt $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet, so setzen wir $\alpha(z) := \frac{\partial u}{\partial x}(z)$, $\beta(z) := -\frac{\partial u}{\partial y}(z)$ und $F := \alpha + i\beta$. Dann sind $\alpha : G \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ alle drei C^1 -Funktionen, wobei wegen $\Delta u = 0$ und wegen des Satzes von Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(z) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}(z) + i \frac{\partial \beta}{\partial x}(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(z) \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) - i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(z) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(z) - i \frac{\partial \alpha}{\partial y}(z) = -i \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(z). \end{aligned}$$

Somit ist F holomorph. Da G einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Holomorphe Stammfunktion f , also ein $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f' = F$; vgl. Korollar 11.6.10. Wegen $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$ gilt

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \operatorname{Re} F = \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

und

$$-\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} = \operatorname{Im} F = \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Insbesondere ist $d(\operatorname{Re} f)(z) = du(z) (\in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ für alle $z \in G$. Wegen Satz 11.4.1 und da in G je zwei Punkte durch einen Polygonzug verbindbar sind, folgt daraus $\operatorname{Re} f = u + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Nun ist $f - c$ die gesuchte holomorphe Funktion.

Falls $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine weitere holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} g = u$ ist, so ist $f - c - g : G \rightarrow \mathbb{C}$ auch holomorph mit einem verschwindenden Realteil. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt $d(f - c - g)(z) = 0$ und daraus, dass $f - c - g$ eine Konstante sein muss; vgl. Satz 11.4.1. \square

11.10 Übungsaufgaben

11.1 Man berechne die Länge der Wege $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix},$$

und gebe die zu den γ 's äquivalenten Wege β an, sodass der Parameter von β die Bogenlänge ist.

11.2 Man zeige, dass $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(t) = (t, t^2 \cos \frac{\pi}{2})^T$, $t > 0$ zwar stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

Hinweis: Berechne $L(\mathcal{Z})$ für $\mathcal{Z} = \{0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\}$.

- 11.3 Sei $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma_3 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_3(t) = \gamma_1(t)$, $t \in [0, 1]$ und $\gamma_3(t) = \gamma_2(t)$, $t \in [1, 2]$. Es gilt nicht notwendigerweise $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$! Weiters sei γ_1 bei 1 stetig, und seien γ_1 und γ_2 rektifizierbar. Man zeige, dass dann auch γ_3 rektifizierbar ist mit $\ell(\gamma_3) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) + \|\gamma_2(1) - \gamma_1(1)\|_2$!

Hinweis: Man zeige zunächst, dass $\lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}, 1 \in \mathcal{Z}} \|\gamma_2(1) - \gamma_1(\xi_{j(\mathcal{Z})})\|_2 = \|\gamma_2(1) - \gamma_1(1)\|_2$ und dass $\lim_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}, 1 \in \mathcal{Z}} \|\gamma_1(1) - \gamma_1(\xi_{j(\mathcal{Z})})\|_2 = 0$, wobei \mathfrak{Z} die Menge aller Zerlegungen von $[0, 2]$ ist, und $\xi_{j(\mathcal{Z})}$ das größte Element von \mathcal{Z} ist, welches kleiner 1 ist.

- 11.4 Man betrachte $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ist f rektifizierbar, so sagt man in diesem Fall ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$), dass die Funktion f von beschränkter Variation ist, und setzt $V_x^y(f) := \ell(f|_{[x,y]})$, wenn $a \leq x \leq y \leq b$. Man zeige:

(i) Sind f, g von beschränkter Variation und $\lambda \in \mathbb{R}$, so auch $f + g$ und λf , wobei

$$V_x^y(f + g) \leq V_x^y(f) + V_x^y(g) \quad \text{und} \quad V_x^y(\lambda f) = |\lambda| V_x^y(f).$$

(ii) Ist f monoton wachsend, so gilt $V_x^y(f) = f(y) - f(x)$.

(iii) Ist f Differenz zweier monoton wachsender Funktionen, so ist f von beschränkter Variation.

(iv) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so gilt $f = g - h$ für zwei monoton wachsende Funktionen g, h .

Hinweis: Setze $g(t) = V_a^t(f)$ und zeige von h , dass es dann monoton wächst!

- 11.5 Man gebe eine Formel für die Länge des Weges $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, der durch $\gamma(t) = (f(t) \cos t, f(t) \sin t)^T$ definiert ist, wobei $f \in C^1$.

Man berechne die Bogenlänge speziell für die Archimedische Spirale: $f(t) = t$!

- 11.6 Man betrachte den Weg im \mathbb{R}^3 mit folgender Parameterdarstellung (Schraubenlinie):

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Hierbei seien $r, h > 0$ fest gewählt. Zeichnen Sie eine Skizze! Weiters berechne man die Bogenlänge, und parametrisiere $\gamma(t)$ nach der Bogenlänge um. Daher schreibe $\gamma(t)$ als $\gamma(t(s))$, sodass die Bogenlänge der Kurve von $\gamma(0)$ bis $\gamma(t(s))$ genau s ist.

- 11.7 Sei $\beta : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^p$ ein stetig differenzierbarer Weg. Zeigen Sie, dass der Tangentialvektor $\beta'(s)$ für alle $s \in [0, c]$ genau dann Länge eins hat, wenn β die Eigenschaft aus Bemerkung 11.1.12 hat, also wenn die Weglänge von $\beta|_{[0,s]}$ für alle $s \in [0, c]$ mit s übereinstimmt.

- 11.8 Man berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} ((x^2 + 5y + 3yz) dx + (5x + 3xz - 2) dy + (3xy - 4z) dz)$, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), t)^T$.

Schreibweise: Wegintegrale $\int_{\gamma} \phi(x) dx$ von Vektorfeldern $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, also $\phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (P(\xi, \eta, \zeta), Q(\xi, \eta, \zeta), R(\xi, \eta, \zeta))$ werden auch oft als

$$\int_{\gamma} P(\xi, \eta, \zeta) d\xi + Q(\xi, \eta, \zeta) d\eta + R(\xi, \eta, \zeta) d\zeta.$$

angeschrieben. Entsprechendes gilt für Vektorfeldern $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

- 11.9 Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ein gerade Strecke, also $\gamma(t) = tx_1 + (1-t)x_0$, und sei ϕ stetig. Man zeige, dass dann

$$\int_{\gamma} \phi(x) dx = \underbrace{\left(\int_0^1 \phi(tx_1 + (1-t)x_0) dt \right)}_{\in L_b(\mathbb{R}^n, X)} (x_1 - x_0).$$

- 11.10 Man berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} \phi(x) dx$, wobei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sqrt{t}, t)^T$ und

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \phi((x, y)^T) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

- 11.11 Man betrachte den stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (1+t^2, 1+t^3)^T$. Man bestimme die Weglänge von γ und berechne das Wegintegral $\int_{\gamma} \phi(x) dx$, wobei $\phi : (1, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $\phi((x, y)^T) = (\sin(\sqrt{x-1}), xy)$.

- 11.12 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Man identifiziere für $X = \mathbb{R}$ und $n = 1$ den Raum $L(\mathbb{R}^n, X)$ mit \mathbb{R} , um gemäß Definition 11.2.2 $P(f, g; \mathcal{R})$ bzw. $P(g, f; \mathcal{R})$ bilden zu können.

Weiters seien $\mathcal{R}_1 = ((\xi_j)_{j=0}^m; (\alpha_j)_{j=1}^m)$ und $\mathcal{R}_2 = ((\eta_j)_{j=0}^{m+1}; (\beta_j)_{j=1}^{m+1})$ Riemann-Zerlegungen mit $\eta_j = \alpha_j$, $j = 1, \dots, m$ und $\beta_1 = a, \beta_{m+1} = b, \beta_j = \xi_{j-1}$, $j = 2, \dots, m$.

Man zeige: $P(f, g; \mathcal{R}_1) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - P(g, f; \mathcal{R}_2)$, wobei

$$P(f, g; \mathcal{R}_1) = \sum_{j=1}^m f(\alpha_j)(g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})),$$

$$P(g, f; \mathcal{R}_2) = \sum_{j=1}^{m+1} g(\beta_j)(f(\eta_j) - f(\eta_{j-1})),$$

und leite daraus her, dass $\int_a^b f dg$ genau dann existiert, wenn $\int_a^b g df$ existiert, und in diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df.$$

Hinweis: Man leite aus Lemma 3.10.5 zunächst folgendes her:

$$\sum_{n=1}^m a_n(b_n - b_{n-1}) = a_m b_m - a_1 b_0 - \sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) b_n.$$

- 11.13 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ rektifizierbar und man denke sich den Weg γ mit Masse belegt, sodass an der Stelle $t \in [a, b]$ die Dichte (Masse pro Längeneinheit) $\rho(t)$ ist. Die Gesamtmasse des Weges berechnet sich durch das Riemann-Stieltjes-Integral

$$M = \int_a^b \rho d\ell,$$

wobei $\ell(x) = \ell(\gamma|_{[a,x]})$ (Weglänge des auf $[a, x]$ eingeschränkten Weges), und der Schwerpunkt durch

$$\frac{1}{M} \int_a^b f d\ell,$$

wobei $f : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $f(t) = \rho(t)\gamma(t)$.

Man berechne für den Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)^T$, der mit konstanter Dichte $\rho = 1$ die Gesamtmasse und den Schwerpunkt.

11.14 Ist das Vektorfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ein Gradientenfeld? Falls ja, berechne man die Stammfunktion, also ein f , sodass $df = \phi$! Dabei ist

(i) $\phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (\xi + \zeta, \xi + \eta + \zeta, \xi + \zeta)$

(ii) $\phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (2\xi, 2\eta, 0)$

(iii) $\phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (\eta\zeta, \xi\zeta, \xi^2)$

11.15 Ist das Vektorfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1 \times 3}$ ein Gradientenfeld? Falls ja, berechne man die Stammfunktion, also ein f , sodass $df = \phi$! Dabei ist

(i) $\phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (1, 1, 1)$

(ii) $\phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (-\xi, -\eta, -\zeta)$

(iii) $\phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (\eta^3, 2, \xi^2)$

11.16 Man betrachte $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definiert durch $\phi(x, y)^T = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

Man berechne zunächst das Wegintegral dieser Funktion über den in positiver Richtung durchlaufenen Einheitskreis ($\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$)!

Nun zeige man, dass auf D die Bedingung (11.9) erfüllt ist und zeige, dass es auf der rechten offenen Halbebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^T : x \leq 0\}$ eine reellwertige Funktion $f \in C^1$ gibt, sodass dort $df = \phi$.

Kann es so eine Funktion f auf ganz D geben?

11.17 Im einfach zusammenhängenden Gebiet $G = \{(\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \eta > 0, \zeta > 0\}$ sei $K : G \rightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1 \times 3}$ durch

$$K((\xi, \eta, \zeta)^T) = \left(\ln(\zeta\eta), \frac{\xi}{\eta}, \beta \frac{\xi}{\zeta} \right),$$

mit einem festen $\beta \in \mathbb{R}$ definiert. Für welchen Wert von β ist K ein Gradientenfeld?

Für die geradlinige Verbindung γ von $(0, 1, 1)^T$ nach $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)^T$ in G berechne man das Wegintegral $\int_{\gamma} K(x) dx$ in den Fällen $\beta = 1$ und $\beta = 2$.

11.18 Seien $x_0 = (1, 1)^T$, $x_1 = (-1, 1)^T$, $x_2 = (-1, -1)^T$, $x_3 = (1, -1)^T$, sei $\gamma(t) := \sqrt{2}(\cos t, \sin t)^T$, $t \in [\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}]$, und seien $\rho > \sqrt{2}$ sowie $w \in U_1^{\|\cdot\|_{\infty}}(0) \subseteq \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\gamma : [\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in $U_{\rho}^{\|\cdot\|_2}(0) \setminus \{w\}$ homotop zu $\beta : [\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist, wobei β äquivalent zum Polygonzug $\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_3}, \overrightarrow{x_3x_0}$ ist mit einem linearen α , sodass $\beta = \overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_1x_2}, \overrightarrow{x_2x_3}, \overrightarrow{x_3x_0} \circ \alpha$.

11.19 Sei $k \in \mathbb{Z}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = a + r \exp(it)$ mit festem, aber beliebigem $r > 0$ und $a \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie das folgende komplexe Wegintegral direkt, also ohne Zuhilfenahme der Cauchyschen Integralformel bzw. ihres Korollars:

$$\int_{\gamma} (z - a)^k dz.$$

11.20 Man berechne wieder ohne Cauchyscher Integralformel das komplexe Wegintegral $\int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz$, wobei $\gamma(t) = \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, und $|w| \neq 1$.

Hinweis: Ist $|w| > 1$, so gilt $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$, und ist $|w| < 1$, so gilt $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}$. Begründen Sie allfällige Vertauschungen von Limes und Integral!

11.21 Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar, so zeige man, dass $\det df(z) = |f'(z)|^2$.

11.22 Sei $h : \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $h(z) = \ln|z| + i \arg(z)$. Dabei ist das Argument $\arg(\xi + i\eta) \in (-\pi, \pi)$ so definiert, dass $f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \arg(\xi + i\eta))^T = (\xi, \eta)^T$, wobei $f(r, \phi)^T = (r \cos \phi, r \sin \phi)^T$. Zeigen Sie, dass h holomorph ist, und berechnen Sie $h'(z)$!

Anmerkung: h wird als komplexer Logarithmus bezeichnet. In der Tat erfüllt h die Beziehung $\exp(h(z)) = z$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$, und $h(\exp(z)) = z$ für $z \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$.

11.23 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass f konstant ist, wenn f nur Werte aus $\mathbb{R} (\subseteq \mathbb{C})$ oder nur Werte aus $i\mathbb{R} (\subseteq \mathbb{C})$ annimmt.

Hinweis: Was gilt für $df(z)$?

11.24 Für $w \in \mathbb{C}$ und einen geschlossenen, stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $w \notin \gamma([a, b])$ ist die Umlaufzahl von γ um w definiert durch

$$n(\gamma, w) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz.$$

Zeigen Sie, dass $n(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Setzen Sie $g(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w} ds$ und leiten dann $e^{-g(t)}(\gamma(t) - w)$ nach t ab. Was bedeutet das Ergebnis, wenn Sie $e^{-g(b)}$ und $e^{-g(a)}$ vergleichen?

11.25 Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar aber nicht notwendigerweise geschlossen. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z-w} dz$$

von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ nach \mathbb{C} stetig ist.

11.26 Mit der Notation aus dem vorletzten Beispiel sei γ ein fester geschlossener, stetiger und stetig differenzierbarer Weg. Weiters sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sodass $\gamma([a, b]) \cap G = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $n(\gamma, w)$ für alle $w \in G$ denselben Wert ergibt.

Zeigen Sie auch, dass dieser Wert Null ist, falls G nicht beschränkt ist.

11.27 Nun sei $H \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $w \in \mathbb{C} \setminus H$. Zeigen Sie, dass für jeden geschlossenen, stetigen und stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow H$ (also jeden Weg der in H verläuft) immer $n(\gamma, w) = 0$ gilt.

11.28 Überprüfen Sie die Kettenregel für holomorphe Funktionen auf 2 verschiedene Arten. Einmal ähnlich wie die eindimensionale Kettenregel aus dem Kapitel 7, und ein zweites mal mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.

- 11.29 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow Y$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ ein stetiger, stückweise stetig differenzierbarer und geschlossener Weg. Zeigen Sie, dass γ genau eine stetige Fortsetzung $\beta : \mathbb{R} \rightarrow D$ hat, die periodisch ist, also $\beta(t) = \beta(t + (b - a))$ für $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie auch, dass für jedes $s \in \mathbb{R}$ der Weg $\beta|_{[a+s, b+s]}$ stetig, stückweise stetig differenzierbar und geschlossen ist, wobei

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\beta|_{[a+s, b+s]}} f(z) dz.$$

Anmerkung: Mit diesem Beispiel erkennt man, dass die Cauchysche Integralformel aus Satz 11.6.12 auch richtig ist für Wege $\gamma_{\rho}^s : [s, 2\pi + s] \rightarrow \mathbb{C}$ mit festem $s \in \mathbb{R}$, wobei $\gamma_{\rho}^s(t) = w + \rho \exp(it)$ mit $\rho > 0$, sodass $K_{\rho}(w) \subseteq D$. Weiters stimmt die Cauchysche Integralformel auch für Wege γ , die zu γ_{ρ}^s in $D \setminus \{z\}$ homotop sind.

- 11.30 Für $j = 1, 2$ seien $R_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j] \subseteq \mathbb{C}$ zwei Rechtecke, wobei $R_1 \subseteq R_2^{\circ} := (a_2, b_2) \times (c_2, d_2)$. Weiters sei $f : D \rightarrow Y$ holomorph, wobei D offen in \mathbb{C} ist und $R_2 \setminus R_1^{\circ}$ umfasst. Zeigen Sie, dass $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$, wobei γ_j derjenige Polygonzug ist, der, startend bei $(a_j, c_j)^T$, den Rand von R_j gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

Hinweis: Werfen Sie einige Blicke auf Bemerkung 11.6.11.

- 11.31 Sei $f : D \rightarrow Y$ holomorph, wobei $R := [a, b] \times [c, d] \subseteq D$, und sei $z \in R^{\circ} := (a, b) \times (c, d)$. Zeigen Sie, dass die Cauchysche Integralformel (11.31) auch für γ richtig ist, wobei γ ein Polygonzug ist, der den Rand von R gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Variante von 11.18 sowie 11.29 und 11.30.

- 11.32 Weisen Sie die Holomorphie der Funktionen $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nach, indem sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und die stetige Differenzierbarkeit zeigen! Weiters gebe man in dem Fall jeweils eine Stammfunktion dieser Funktionen f an (also das F mit $F' = f$)! Schließlich gebe man auch eine Stammfunktion von $z^2(\cos z)^2$ an!

- 11.33 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Man zeige, dass $\Delta \operatorname{Re} f = \Delta \operatorname{Im} f = 0$ und dass $\Delta(|f|^2) \geq 0$; vgl. Übungsbeispiel 10.15.

- 11.34 Verwenden Sie das vorherige Beispiel und Übungsbeispiel 10.15, um zu zeigen, dass wenn $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, dann für jedes $w \in G$ und $\rho > 0$ mit $K_{\rho}(w) \subseteq G$ für alle $\zeta \in U_{\rho}(w)$

$$\begin{aligned} |f(\zeta)| &\leq \max_{z \in K_{\rho}(w) \setminus U_{\rho}(w)} |f(z)|, \\ \min_{z \in K_{\rho}(w) \setminus U_{\rho}(w)} \operatorname{Re} f(z) &\leq \operatorname{Re} f(\zeta) \leq \max_{z \in K_{\rho}(w) \setminus U_{\rho}(w)} \operatorname{Re} f(z), \\ \min_{z \in K_{\rho}(w) \setminus U_{\rho}(w)} \operatorname{Im} f(z) &\leq \operatorname{Im} f(\zeta) \leq \max_{z \in K_{\rho}(w) \setminus U_{\rho}(w)} \operatorname{Im} f(z) \end{aligned}$$

gilt.

- 11.35 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : G \rightarrow Y$ zwei holomorphe Funktionen. Man zeige, dass $f \equiv g$, falls $f(z) = g(z)$ für alle $z \in E$, wobei $E \subseteq G$ mindestens einen Häufungspunkt in G hat.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $A = \{z \in G : \exists \epsilon > 0, f|_{U_\epsilon(z)} \equiv g|_{U_\epsilon(z)}\}$ offen und nicht-leer ist; werfen Sie dafür einen Blick auf Korollar 6.8.9 bzw. Fakta 9.3.9, 5. Zeigen Sie auch, dass $c(A) \cap G = A$. Nun betrachte man $B := G \setminus c(A)$...

- 11.36 Man leite die Potenzreihenentwicklung von $z^2(\cos z)^2$ um den Punkt 0 her! Wie groß ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe?
- 11.37 Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass dann auch $f^* : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei $\bar{D} = \{\bar{z} : z \in D\}$ und $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$.
- 11.38 Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)$ aus 6.29 auch für $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine wohldefinierte komplexwertige Funktion ist. Zeigen Sie, dass diese Funktion auch holomorph ist.
- 11.39 Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z)$ aus dem vorherigen Beispiel für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ mit $z \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ übereinstimmt.
- 11.40 Berechnen Sie für die Funktion $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma_3} f(z) dz,$$

wobei $\gamma_j : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, 3$) mit $\gamma_j(t) = (-1)^j + \frac{1}{2} \exp(it)$ für $j = 1, 2$ und $\gamma_3(t) = 4 \exp(it)$. Skizze!