

Fundament Analysis

Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	ix
1 Mengen und Abbildungen	1
1.1 Mengen	1
1.2 Funktionen	4
1.3 Äquivalenzrelation	8
1.4 Übungsaufgaben	9
2 Die reellen Zahlen	13
2.1 Algebraische Struktur der reellen Zahlen	13
2.2 Ordnungsstruktur der reellen Zahlen	16
2.3 Die natürlichen Zahlen	21
2.4 Die ganzen Zahlen	33
2.5 Eine alternative Konstruktion von \mathbb{Z}^*	37
2.6 Dividieren mit Rest*	41
2.7 Der Körper \mathbb{Q}	44
2.8 Archimedisch angeordnete Körper	49
2.9 Das Vollständigkeitsaxiom	50
2.10 Dedekindsche Schnitte*	54
2.11 Die komplexen Zahlen	59
2.12 Übungsaufgaben	61
3 Der Grenzwert	69
3.1 Metrische Räume	69
3.2 Der Grenzwert in metrischen Räumen	74
3.3 Folgen reeller und komplexer Zahlen	80
3.4 Monotone Folgen	84
3.5 Cauchy-Folgen	88
3.6 Konvergenz in weiteren metrischen Räumen	90
3.7 Konvergenz gegen unendlich	93
3.8 Konvergenz gegen $\pm\infty$ als metrische Konvergenz*	96
3.9 Unendliche Reihen	100
3.10 Konvergenzkriterien	105

3.11	Übungsaufgaben	110
4	Die Konstruktion der reellen Zahlen	119
4.1	Existenz	119
4.2	Eindeutigkeit	124
5	Topologie metrischer Räume	127
5.1	ϵ -Kugeln, offene und abgeschlossene Mengen	127
5.2	Kompaktheit	134
5.3	Gerichtete Mengen und Netze	139
5.4	Unbedingte Konvergenz und Umordnen von Reihen	146
5.5	Grenzwerte von Funktionen	154
5.6	Übungsaufgaben	159
6	Reelle und komplexe Funktionen	165
6.1	Stetigkeit	165
6.2	Der Zwischenwertsatz	173
6.3	Gleichmäßige Stetigkeit	175
6.4	Unstetigkeitsstellen	178
6.5	Monotone Funktionen	181
6.6	Gleichmäßige Konvergenz	183
6.7	Vervollständigung*	190
6.8	Reell- und komplexwertige Folgen und Reihen von Funktionen	192
6.9	Die Exponentialfunktion	197
6.10	Fundamentalsatz der Algebra	206
6.11	Weitere wichtige elementare Funktionen	208
6.12	Abelscher Grenzwertsatz*	212
6.13	Übungsaufgaben	214
7	Differentialrechnung	223
7.1	Begriff der Ableitung	223
7.2	Mittelwertsätze	230
7.3	Motivation zum Taylorschen Lehrsatz*	240
7.4	Der Taylorsche Lehrsatz	243
7.5	Stammfunktion	248
7.6	Übungsaufgaben	256
8	Das Riemannsche Integral	261
8.1	Ober- und Untersummen	261
8.2	Das Riemann-Integral	265
8.3	Integrale von stetigen Funktionen	272
8.4	Differential und Integralrechnung	273
8.5	Weitere Eigenschaften des Integrals*	279
8.6	Uneigentliche Integrale	280

8.7	Vertauschung von Integralen mit Grenzwerten	283
8.8	Mittelwertsatz	294
8.9	Übungsaufgaben	296
9	Normen und Banachräume	303
9.1	Normierte Räume	303
9.2	Lineare Abbildungen	307
9.3	Banachraumwertige Reihen, Funktionen, etc.	313
9.4	Übungsaufgaben	328
10	Ableitungen nach mehreren Variablen	333
10.1	Partielle Ableitungen	333
10.2	Höhere Ableitungen	343
10.3	Extremwerte	350
10.4	Übungsaufgaben	356
11	Wegintegrale	361
11.1	Wege	361
11.2	Wegintegrale	367
11.3	Offene Mengen in \mathbb{R}^n und Gebiete	373
11.4	Gradientenfelder	375
11.5	Homotopie und einfacher Zusammenhang	384
11.6	Komplexe Wegintegrale und Holomorphie	387
11.7	Laurentreihen*	401
11.8	Nochmals komplexe Differenzierbarkeit*	403
11.9	Harmonische Funktionen*	405
11.10	Übungsaufgaben	406
12	Topologische Grundlagen	413
12.1	Topologische Grundbegriffe	413
12.2	Abgeschlossene Mengen	418
12.3	Stetige Abbildungen	423
12.4	Basis, Subbasis	427
12.5	Initiale Topologie	431
12.6	Spur- und Produkttopologie	434
12.7	Finale Topologie*	437
12.8	Zusammenhang und Trennungseigenschaft $(T1)^*$	439
12.9	Trennungseigenschaften $(T3)$ und $(T4)$	442
12.10	Das Lemma von Urysohn*	444
12.11	Kompaktheit	448
12.12	Satz von Tychonoff*	453
12.13	Kompaktheit in metrischen Räumen	454
12.14	Alexandroff-Kompaktifizierung	460
12.15	Der Satz von Stone-Weierstraß	463

12.16 Übungsaufgaben	468
13 Lemma von Zorn*	475
Literaturverzeichnis	479
Index	480

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus den Skripten zu den Vorlesungen Analysis 1 und Analysis 2 an der TU Wien entstanden. Diese beiden Vorlesungen habe ich seit 2005 viermal gehalten, und viele Studenten sowie Kollegen haben mich auf Druckfehler, mathematische Ungeheimheiten oder auch Fehlendes aufmerksam gemacht, wofür ich sehr sehr dankbar bin. Ich hoffe daher, dass das vorliegende Werk nicht mehr allzu fehlerbehaftet ist.

Die hier auftauchenden Begriffe, Konzepte und Ergebnisse sind eine wichtige Grundlage für die meisten Vorlesungen in den folgenden Semestern. So wird etwa das Verständnis von Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Konvergenz als selbstverständlich vorausgesetzt werden. Ich habe also darauf geachtet, dass dieses Buch nicht nur als Lernunterlage, sondern auch später als Nachschlagewerk verwendet werden kann. Insbesondere findet sich am Ende ein ausführlicher Index.

Obwohl die Anfänge der Analysis inhaltlich nicht viel Spielraum für den Vortragenden lassen, habe ich versucht, auf die Dinge besonderes Augenmerk zu legen, die mir in meiner Arbeit als Mathematiker und im Hinblick auf spätere Vorlesungen wichtig erscheinen. Ich möchte aber auch betonen, dass das meine ganz persönliche Sicht der Materie ist. Es kann für Sie daher nur von Nutzen sein, wenn sie auch in andere Analysis Bücher bzw. Skripten manch Blicke werfen, um daraus zu lernen.

Neben den klassischen Inhalten wie die Beschaffenheit von \mathbb{R} , Konvergenztheorie von Folgen und Reihen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit in einer und mehreren Variablen, Riemann-Integral und Wegintegral werden hier auch elementare Eigenschaften von Banachräumen studiert. Zudem wird aufbauend auf das Konzept der Gradientenfelder eine kurze Einführung in die komplexe Analysis gegeben. Zuletzt beinhaltet dieses Buch eine Einführung in die mengentheoretische Topologie. Selbige hat sich in der modernen Mathematik als unverzichtbar wichtiges Werkzeug für diverse Gebiete etabliert.

Die mit * gekennzeichneten Abschnitte, Resultate bzw. Bemerkungen ist weiterführendes bzw. tiefer erklärendes Material, welches nicht zum Verständnis von nachfolgenden Inhalten notwendig ist, und daher beim ersten Mal übergangen werden kann.

Bezüglich der noch versteckten Fehler möchte ich die Leser bitten, mir entdeckte Druckfehler mit Seiten und Zeilenangabe per Email zu schicken:

michael.kaltenbaeck@tuwien.ac.at