

# Literaturverzeichnis

- [DK1] J.J.DUISTERMAAT, J.A.C.KOLK: *Multidimensional Real Analysis I*, Cambridge University Press, 2004.
- [DK2] J.J.DUISTERMAAT, J.A.C.KOLK: *Multidimensional Real Analysis II*, Cambridge University Press, 2004.
- [H] H.HEUSER: *Lehrbuch der Analysis 1,2*, Teubner Verlag, Stuttgart 1989.
- [L] S.LANG: *A first course in calculus*, Springer Verlag, Heidelberg 1986.
- [Ri] W.RINOW: *Lehrbuch der Topologie*, Hochschulbücher für Mathematik, Bd.79, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975.
- [R1] W.RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York 1953, third edition 1976.
- [R2] W.RUDIN: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1966, third edition 1987.
- [W] W.WALTER: *Analysis I*, Springer Verlag, Heidelberg, New York, Tokio 2004 (7. Auflage).

# Index

- $(T_1)$ , 440
- $(T_2)$ , 417
- $(T_3)$ , 443
- $(T_4)$ , 443
- $C(I)$ , 229
- $C(X, Y)$ , 165
- $C^0(I)$ , 229
- $C_{00}^\infty(D)$ , 468
- $C^\infty(I)$ , 229
- $C^n(I)$ , 229
- $C_0(X, \mathbb{C})$ , 462
- $C_0(X, \mathbb{R})$ , 461
- $C_b(E)$ , 307
- $C_b(E, Y)$ , 190, 306
- $C_b(X, \mathbb{C})$ , 458
- $C_b(X, \mathbb{R})$ , 458
- $C_b[0, 1]$ , 331
- $L(X, Y)$ , 309
- $L_b(X, Y)$ , 309
- $M/\sim$ , 9
- $\Delta f$ , 358
- $\pi(X)$ , 427
- $\mathbb{C}[z]$ , 206
- $\mathbb{R}$ , 51
- $\mathbb{Z}$ , 33
- $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ , 117
- $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ , 329, 330
- $\ell(\gamma)$ , 362
- $\epsilon$ -Kugel
  - abgeschlossene, 127
  - offene, 127
- $\iota_j^y$ , 166, 171
- $[\cdot]_j$ , 157
- $\lim_{i \in I} x_i$ , 141
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ , 157
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$ , 157
- $\lim_{t \rightarrow z} f(t)$ , 155
- $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ , 158
- $\mathbb{P}$ , 42
- $\mathcal{B}(E, Y)$ , 185
- $\mathcal{T}_<$ , 414
- $\mathcal{T}_>$ , 424
- $c_0$ , 306
- $c_0(\mathbb{N})$ , 306
- $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ , 329, 330
- $d(x, y)$ , 69
- $d^k f(x)$ , 346
- $d_1(x, y)$ , 72
- $d_2(x, y)$ , 70
- $d_\infty(f, g)$ , 185
- $d_\infty(x, y)$ , 72
- $df(x)$ , 336
- $f'(x)$ , 223
- $f'(x)^+$ , 223
- $f'(x)^-$ , 223
- $f(x^+)$ , 178
- $f(x^-)$ , 178
- $k$ -te Ableitung, 346
- $l^\infty$ , 306
- $l^\infty(\mathbb{N})$ , 306
- $\mathbb{C}^+$ , 254
- $\mathbb{N}$ , 3, 21
- $\mathbb{Q}$ , 44
- $\mathbb{R}[x]$ , 95
- $\mathbb{Z}$ , 2
- $\mathcal{B}(E, Y)$ , 306
- $\mathbb{C}$ , 59
- $\mathbb{C}_{n-1}[z]$ , 253
- $C^1$ , 334
- $C^1(D)$ , 334
- $C^k$ , 344

- Abbildung, 4  
  identische, 5  
  isometrische, 166  
  Norm, 308  
Abbildungsnorm, 308  
Abel Kriterium, 109  
abelsch, 14  
Abelscher Grenzwertsatz, 212  
Ableitung, 318, 336  
  einer Funktion, 229  
  höhere, 229  
  im Punkt  $x$ , 223  
  komplexe, 390  
  linksseitige, 223  
  partielle, 333  
  rechtsseitige, 223  
  Richtungs-, 333  
Abschluss, 130  
absolut konvergent, 104  
absolut uneigentlich integrierbar, 281  
Abstand zweier Mengen, 161  
Abzählbarkeitsaxiom  
  erstes, 415  
  zweites, 428  
Addition, 13, 25  
äquivalente Metriken, 159, 427  
Äquivalenzrelation, 8  
Alexandroff-Kompaktifizierung, 460  
Algebra  
  nirgends verschwindend, 464  
  punktetrennend, 464  
Algebra von Funktionen, 463  
alternierende harmonische Reihe, 105  
analytisch, 197, 400  
analytisch in einem Punkt, 197  
Anschlussstelle, 243  
Antisymmetrie, 16  
antisymmetrisch, 17  
Archimedische Spirale, 407  
Arcuscosinus, 209  
  Funktionsgraph, 210  
Arcuscotangens, 209  
  Funktionsgraph, 209  
Arcussinus, 209  
  Funktionsgraph, 210  
Arcustangens, 209  
  Funktionsgraph, 209  
Areacosinus Hyperbolicus, 211  
  Funktionsgraph, 211  
Areacotangens Hyperbolicus, 211  
  Funktionsgraph, 212  
Areasinus Hyperbolicus, 210  
  Funktionsgraph, 211  
Areatangens Hyperbolicus, 211  
  Funktionsgraph, 212  
Assoziativität, 7, 26  
Auswahlaxiom, 81  
Axiome, 13  
Banachraum, 304  
Basis  
  eines Filters, 415  
begleitendes Dreibein, 332  
Bernoullische Ungleichung, 24  
beschränkt, 18, 308  
  nach oben, 18  
  nach unten, 18  
beschränkte  
  Folge, 78  
  Menge, 78  
Betrag  
  komplexer Zahlen, 60  
bijektiv, 6  
Bildmenge, 5  
Bilinearform, 351  
Binomialkoeffizient, 65  
Binormaleneinheitsvektor, 331  
Bogenlänge, 366  
Cauchy-Folge, 88  
Cauchy-Netz, 145, 273  
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, 357, 389  
Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 70  
Cauchysche Integralformel, 395  
Cauchysches Konvergenzkriterium  
  Folgen, 90

- Reihen, 104
- Cauchysches Restglied, 244
- Charakteristik, 49
- charakteristische Funktion, 274
- chordale Metrik, 220
- Cosinus, 197
  - Funktionsgraph, 203
- Cosinus Hyperbolicus, 209
  - Funktionsgraph, 210
- Cotangens, 208
  - Funktionsgraph, 209
- Cotangens Hyperbolicus
  - Funktionsgraph, 211
- Darbouxssches Integral, 264
- Dedekindscher Schnitt, 54
- Definitionsbereich, 5
- Definitionsmenge, 4
- dicht, 130, 418
  - in  $B$ , 418
- Dichteigenschaft, 50
- Differentialgleichung, 244, 250
  - exakte, 383
- Differentialgleichungen
  - Cauchy-Riemannsche, 357, 389
  - Trennung der Variablen, 250
- Differenz, 2
- differenzierbar, 339
  - $k$ -mal stetig, 344
  - $n$ -mal, 229
  - im Punkt  $x$ , 223
  - partiell, 334
  - rechtsseitig, 223
  - stetig, 229, 339
  - stetig partiell, 334
- Dirichlet Kriterium, 108
- diskrete Metrik, 73
- Distributivgesetz, 3
- Distributivität, 26
- divergent, 75, 100
  - bestimmt, 93
- Dividieren mit Rest, 41
- domain, 5
- Doppelreihen, 152
- Dreiecksungleichung, 21, 70, 303
- Dreiecksungleichung nach unten, 21
- Durchmesser einer Menge, 455
- einfach zusammenhängend, 385
- Einheitskreislinie, 132, 174
- Einpunkt-Kompaktifizierung, 460
- Einschränkung, 5
- Elemente, 1
- endlich, 32
- endliche Durchschnittseigenschaft, 448
- Euklidische Topologie, 414
- Euklidischer Algorithmus, 252, 254
- Euler-Mascheronische Konstante, 300
- Eulersche Exponentialfunktion, 154
- Eulersche Zahl, 86, 201
- Existenz des neutralen Elementes, 26
- Exponentialfunktion, 154, 197
  - Funktionsgraph, 200
  - Matrix-wertig, 326
- Extremum
  - globales, 230
  - lokales, 230
- faktorielle, 107
- Feinheit
  - einer Riemann-Zerlegung, 265
- Filter, 414
- Filterbasis, 415
- Folge, 74
  - Cauchy-Folge, 88
  - monoton fallende, 85
  - monoton wachsende, 85
  - monotone, 85
  - Rechenregeln für, 81
  - streng monoton fallend, 81
- folgenkompakt, 450
- Formel von de Moivre, 198
- Fortsetzung, 5
- Fréchet-differenzierbar, 343
- Frenetschen Formeln, 332
- Funktion, 4
  - analytische, 400
  - beschränkte, 78, 185

- bijektive, 6
- charakteristische, 274
- Einschränkung, 5
- Fortsetzung, 5
- harmonische, 405
- holomorphe, 390
- Indikator-, 274
- injektive, 6
- konkave, 221
- konvexe, 220
- monoton fallende, 181
- monoton wachsende, 181
- stetige, 165
- streng monoton fallende, 37, 181
- streng monoton wachsende, 37, 181
- surjektive, 6
- unstetige, 178
- von beschränkter Variation, 364, 407
- zusammengesetzte, 7
- Funktion von beschränkter Variation, 367
- Funktionen
  - stückweise stetig, 275
  - stückweise stetig differenzierbar, 366
  - trigonometrische, 197
- Funktionsmenge
  - gleichgradig stetige, 458
- Funktionswert, 4
- Gaußklammer, 157
- Gaußsche Zahlenebene, 60
- Gebiet, 373
- gerichtete Menge, 139
- getrennt, 173, 373
- gleichgradig stetige Funktionenmenge, 458
- Gradient, 337
- Gradientenfeld
  - lokales, 378
- Gradientenfelder, 376
- Graph, 4
- Grenzwert
  - einer Funktion, 155
  - einseitige, 157
  - linksseitiger, 157
  - rechtsseitiger, 157
- Gruppe, 14
  - abelsche, 14
  - kommutative, 14
- Häufungspunkt
  - einer Folge, 134
  - einer Menge, 129
- Häufungspunkt einer Menge, 420
- Häufungspunkt eines Netzes, 421
- Höldersche Ungleichung, 328
- Halbordnung, 17
- halbstetig von oben, 424
- halbstetig von unten, 424
- harmonisch, 405
- harmonische Reihe, 104
- Hauptnormaleneinheitsvektor, 331
- Hausdorff, 417
- hebbare Unstetigkeit, 178
- Hesse-Matrix, 351
- Hintereinanderausführung, 7
- holomorph, 390
- homöomorph, 426
- Homöomorphismus, 426
- Homotopie, 385
- imaginäre Einheit, 59
- Imaginärteil, 59
- Indikatorfunktion, 274
- Induktions
  - anfang, 24
  - prinzip, 24
  - schritt, 24
- Infimum, 18
- injektiv, 6
- Integral, 264
  - absolut konvergentes, 281
  - absolut uneigentliches, 281
  - Darboux'sches, 264
  - obere, 264
  - Riemann, 266
  - Riemann-Stieltjes, 368
  - unbestimmtes, 248
  - uneigentliches, 280
  - von stetigen Funktionen, 273

- Integration  
   Vertauschbarkeit der Reihenfolge, 288  
   von Funktionen in mehreren Variablen, 290  
 integrierbar, 264  
   Riemann-, 266  
 Integrierenden Faktor, 383  
 Integritätsbereich, 35  
 Integritätseigenschaft, 34  
 Integritätsring, 35  
 Intervall, 173  
 Involution, 33  
 isolierter Punkt, 129, 420  
 isometrisch, 331  
 isometrische Abbildung, 166  
  
 Jensensche Ungleichung, 259  
  
 Körper  
   angeordneter, 16  
   archimedisch angeordneter, 49  
   vollständig angeordneter, 50  
 Kürzungsregel, 26  
 kartesisches Produkt, 2  
 Kettenregel, 340, 392  
 kommutativ, 14  
 Kommutativität, 26  
 kompakt, 136, 448  
   abzählbar, 450  
   folgen-, 450  
 Komplement, 2  
 komplex differenzierbar, 225, 390  
 komplexen Ableitung, 390  
 konjugiert komplexen, 61  
 konkav, 221  
 konvergent, 75, 100  
   absolut, 104  
   bedingt, 149  
   gegen  $\pm\infty$ , 93  
   gegen  $x$ , 75  
   gleichmäßig, 186  
   punktweise, 184  
 Konvergenz  
   gleichmäßige einer Funktionenfolge, 186  
   absolute einer Funktionenreihe, 192  
   einer Folge, 75  
   eines Netzes, 141  
   gleichmäßige einer Funktionenreihe, 192  
   komponentenweise, 91  
   lokal gleichmäßige, 398  
   punktweise einer Funktionenfolge, 184  
   punktweise einer Funktionenreihe, 192  
   unbedingte, 146  
 Konvergenz einer Reihe, 313  
   absolute, 313  
 Konvergenzradius, 193  
 konvex, 220  
 Krümmung, 331  
 Kreuzprodukt, 331  
 Kurvendiskussionen, 247  
  
 Länge  
   eines Weges, 362  
 Lagranges Restglied, 243  
 Laplace, 405  
 Laurentreihe, 402  
 leere Menge, 1  
 Leibniz Kriterium, 108  
 Lemma vom iterierten Supremum, 53  
 Lemma von Urysohn, 445  
 Limes Inferior, 87  
 Limes Superior, 87  
 lineare Abbildung  
   beschränkte, 308  
 linksstetig, 178  
 Lipschitz stetig, 272, 276  
 Logarithmus  
   natürlicher, 200  
   naturalis, 200  
 Logarithmus naturalis  
   Funktionsgraph, 200  
 lokale Eigenschaft, 167  
 lokales Gradientenfeld, 378  
 lokalkompakt, 448

- Mächtigkeit, 32  
Majorantenkriterium, 103  
Maximum, 18  
  globales, 230  
  lokales, 230, 350  
Menge, 1  
  abgeschlossene, 129, 418  
  Abschluss einer, 418  
  Bild, 5  
  Differenz-, 2  
  Distributivgesetz-, 3  
  gesättigte, 439  
  Inneres einer, 421  
  kompakte, 448  
  konvexe, 334  
  leere, 1  
  Ober-, 1  
  offene, 128, 413  
  Potenz-, 3  
  relativ kompakte, 448  
  Schnitt-, 2  
  Teil-, 1  
  total beschränkte, 455  
  Vereinigungs-, 2  
  zusammenhängende, 173, 373, 441  
Mengen  
  durch offenen Mengen getrennte, 440, 443  
  getrennte, 173, 373, 440  
Mengengleichheit, 1  
Metrik, 69  
  chordale, 220  
  euklidische, 70  
  Supremums-, 185  
Metriken  
  äquivalente, 159, 427  
metrischer Raum, 69  
  Vervollständigung, 190  
  vollständiger, 89  
Minimum, 18  
  globales, 230  
  lokales, 230, 350  
Minkowskische Ungleichung, 71  
Minorantenkriterium, 103  
Mittel  
  arithmetisches, 17  
Mittelwertsatz, 232  
  der Integralrechnung, 294  
monoton fallend, 85, 181  
monoton wachsend, 85, 181  
Moore-Smith-Folge, 141  
Multiindex, 345  
Multiplikation, 13, 25  
Nachfolgerabbildung, 21  
natürliche Zahlen, 21  
negativ definit, 351  
negativ semidefinit, 351  
Netz, 141  
  Cauchy-, 145, 273  
  Teilfolge, 142  
  Teilnetz, 142  
Norm, 73, 303  
  äquivalente, 307  
normal, 443  
obere Schranke, 18  
oberhalbstetig, 424  
Obermenge, 1  
Obersumme, 263  
offene Abbildung, 436  
Oszillation, 272  
Parameterintegral, 288  
Parameterintegrale, 342  
  Differenzierbarkeit, 291  
Partialbruchzerlegung  
  komplexe, 253  
  reelle, 254  
Partialsomme, 100  
partielle Ableitung, 333  
Partielle Integration, 278  
Partition, 9  
Pi, 202  
Polarkoordinaten, 204  
Polarkoordinatenfunktion, 204  
Polygonzug, 361

- Polynom  
 trigonometrisches, 207
- Polynom in mehreren Variablen, 348
- positiv definit, 351
- positiv semidefinit, 351
- Potenzmenge, 3
- Potenzreihe, 193, 197  
 Ableitung, 286
- Primfaktorzerlegung, 43
- Primzahl, 42
- Produkt metrischer Räume, 287
- Produktregel, 227, 391
- Punkt  
 isolierter, 420
- Quotientenkörper, 49
- Quotientenkriterium, 106
- Quotientenregel, 227, 391
- Raabe Kriterium, 109
- range, 5
- Raum  
 $T_2$ -, 417  
 Hausdorff, 417  
 metrischer, 69  
 normierter, 303  
 topologischer, 413
- Realteil, 59
- rechtsstetig, 178
- reflexiv, 8, 17
- Reflexivität, 16
- Regel von de L'Hospital, 235
- Regel von der Partiellen Integration, 249
- regulär, 443
- Reihe, 100  
 alternierende harmonische, 105  
 Banachraum-wertig, 313  
 bestimmt divergente, 100  
 divergente, 100  
 geometrische, 78  
 harmonische, 104  
 konvergent gegen  $\pm\infty$ , 100  
 konvergente, 100  
 Potenzreihe, 193
- Rechenregeln für, 101
- Summe der, 100
- Teleskop-, 102
- von Neumannsche, 316
- Relation, 4  
 antisymmetrische, 17  
 reflexive, 8, 17  
 symmetrische, 9  
 totale, 17  
 transitive, 9, 17
- Relationenprodukt, 7
- Restklasse, 9
- Richtungsableitung, 333
- Richtungsvektor, 333
- Riemann-Stieltjes-Integral, 368
- Riemann-Summe, 266
- Riemann-Zerlegung, 140, 265
- Riemannscher Umordnungssatz, 150
- Ring, 35  
 kommutativer, 35
- Ring mit Einselement, 35
- Satz  
 1. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, 232  
 2. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, 233
- Cauchysches Konvergenzkriterium, 90, 104
- Einschluss-, 80
- Fortsetzungssatz von Tietze, 446
- Fundamentalsatz der Algebra, 207
- Grenzwert- Abelscher, 212
- Hauptsatz der Differential-Integralrechnung, 276
- Leibniz Kriterium, 108
- Rekursions-, 22
- Riemannscher Umordnungs-, 150
- Stone-Weierstraß, 465
- Taylorische Formel, 347
- Taylorischer Lehrsatz, 243
- von Ascoli, 458
- von Bolzano-Weierstraß, 136
- von Fubini, 288



- von Liouville, 397
- von Morera, 398
- von Rolle, 231
- von Schwarz, 344
- von Tychonoff, 454
- Zwischenwertsatz, 174
- Schlömilchsches Restglied, 244
- Schnittmenge, 2
- Schraubenlinie, 407
- separabel, 457
- Sinus, 197
  - Funktionsgraph, 203
- Sinus Hyperbolicus, 209
  - Funktionsgraph, 210
- Sprungstelle, 178
- stückweise stetig, 275
- stückweise stetig differenzierbar, 366
- Stützstellen, 265
- Stammfunktion, 248, 277
  - eines Gradientenfeldes, 376
- stationärer Punkt, 351
- stereographische Projektion, 219
- stetig, 165, 423
  - an der Stelle  $x$ , 165
  - gleichmäßig, 176
  - in einem Punkt, 423
  - linksseitig, 178
  - Lipschitz, 272, 276
  - rechtsseitig, 178
- stetig differenzierbar, 339
  - $k$ -mal, 344
- Stetigkeit
  - gleichgradige, 458
- Stirlingsche Formel, 300
- Strecke
  - gerade, 361
- streng monoton fallend, 181
- streng monoton wachsend, 181
- Subbasis einer Topologie, 428
- Substitutionsregel, 249, 278
- Summensätze, 199
- Supremum, 18
- Supremumsnorm, 192
- surjektiv, 6
- symmetrisch, 9
- symmetrische Mengendifferenz, 147
- Tangens, 208
  - Funktionsgraph, 209
- Tangens Hyperbolicus
  - Funktionsgraph, 211
- Tangentialebene, 339
- Tangentialvektor, 318
- Taylorreihe, 245
  - areatanh, 302
  - $\ln(1 - x)$ , 287
- Taylorsche Formel, 347
- Taylorsche Polynom, 243
  - mehrdimensionale, 348
- Teilfolge, 77
- Teilfolge eines Netzes, 142
- Teilmenge, 1
- Teilnetz, 142
- Teilraum, 434
- teilt, 42
- Topologie, 413
  - Basis von, 428
  - diskrete, 414
  - feinere, 427
  - finale, 437
  - gröbere, 427
  - initiale, 432
  - Klumpentopologie, 414
  - normale, 443
  - Produkt-, 435
  - Quotienten-, 438
  - reguläre, 443
  - Spur-, 434
  - Subbasis von, 428
  - von einer Metrik, 414
- Torsion, 332
- total, 17
- Totalität, 16
- Totalordnung, 17
- Träger
  - kompakt, 468
- Träger einer Funktion, 463

- transitiv, 9, 17
- Transitivität, 16
- Trennung der Variablen, 250
- überall definiert, 4
- Umgebung, 414
- Umgebungsfilter, 414
- uneigentlich integrierbar, 280
- Ungleichung
  - Bernoullische, 24
  - Cauchy-Schwarzsche, 70
  - Höldersche, 328
  - Jensensche, 259
  - Minkowskische, 71
- Unstetigkeit
  - 1. Art, 178
  - 2. Art, 178
  - hebbare, 178
  - Sprungstelle, 178
- untere Schranke, 18
- unterhalbstetig, 424
- Untersumme, 262
- Urbild, 5
  - vollständiges, 5
- Variation, 364
- Vektorfeld, 368
- Vektorfelder
  - stetig differenzierbare, 379
- Vereinigungsmenge, 2
- Verknüpfung, 13
- Vertauschbarkeit
  - Integrationsreihenfolge, 288
  - Grenzwert und Ableitung, 285
  - Grenzwert und Integration, 284
- Vervollständigung, 190
- vollständige Induktion, 24
  - Varianten, 31
- vollständiger metrischer Raum, 89
- von Neumannsche Reihe, 316
- Wallische Produktformel, 299
- Weg, 361
  - geschlossener, 378, 397
  - rektifizierbar, 362
  - stetig, 361
- Wege
  - homotope, 385
- Wegintegral, 368
  - komplexes, 388
- Weierstraß Kriterium, 193
- Wertebereich, 5
- Wertevorrat, 4
- Windung, 332
- wohldefiniert, 4
- Wurzel
  - einer komplexen Zahl, 206
  - einer reellen Zahl  $\geq 0$ , 52
- Wurzelkriterium, 105
- Zahl
  - komplexe, 59
  - rationale, 44
- Zahlen
  - natürliche, 21
  - positive, 16
- Zerlegung, 140
- Zielmenge, 4
- zusammenhängend, 373, 441
- Zwischenstellen, 265