Übungen zu Fana1 SS22, 7. Übung

Die Beispiele 6 und 7 sind für die Hörer der Funktionalanalysis für Statistik-Wirtschaftsmathematik und Finanz- und Versicherungsmathematik und Beispiele 8 und 9 für die Hörer der Funktionalanalysis für Technische Mathematik gedacht. Sollten Sie Lust und Laune haben, so machen Sie auch die nicht für Sie vorgesehenen Beispiele.

Um den Übungsleitern die Einsortierung der Teilnehmer entlang ihrer Studienzweige beim Kreuzerlzählen zu ersparen, werden von den Beispielen 6,7,8,9 höchsten 2 Kreuze für die individuelle Kreuzerlanzahlberechnung gezählt. Für die maximal erreichbare Kreuzerlanzahl zählen diese vier Beispiele auch nur für zwei. Ich hoff, das ist klar genug :)

1. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum mit $X \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Menge $c(\mathbb{N}, X)$ aller Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X, die in X konvergieren, einen abgeschlossenen Teilraum des Banachraumes $\mathcal{B}(\mathbb{N}, X)$ $(= \ell^\infty(\mathbb{N}, X))$ aller beschränkten Folgen aus X versehen mit $\|.\|_\infty$ abgibt.

   Zeigen Sie, dass dabei die Abbildung $L : c(\mathbb{N}, X) \to X$ definiert durch $L((s_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} s_n$ linear ist und $\|L\| = 1$ erfüllt.

   Hinweis für den ersten Teil: $\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty}$ gilt unter welchen Umständen?

2. Eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus einem Banachraum X sei eine Schauderbasis von X, dh. für jedes $x \in X$ gibt es genau eine Folge von Skalaren $(\lambda_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$, sodass $x = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n(x)e_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \lambda_n(x)e_n$ (Insbesondere wird vorausgesetzt, dass diese Folge gegen x konvergiert! Die e_n's sind zwar linear unabhängig aber bilden keine algebraische Basis im Sinne der Linearen Algebra!).

   Warum sind dann die Teilräume $X_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\},\ n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen in X und für $m > n$ die Projektionen $P_{mn} : X_m \to X_n$ mit $P_{mn}(X_m) = X_n$ und $\ker P_{mn} = \operatorname{span}\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$ beschränkt ?

   Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass infolge

   $$\begin{aligned} &c(\mathbb{N}, X, (X_n), (P_{mn})) := \\ &\quad \{(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{N}, X) : s_n \in X_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N},\ P_{mn}s_m = s_n \text{ für alle } m > n\} \end{aligned}$$

   ein abgeschlossener Teilraum von $c(\mathbb{N}, X)$ ist, und dass $L : c(\mathbb{N}, X, (X_n), (P_{mn})) \to X$ (Notation aus dem vorherigen Beispiel) bijektiv ist.

   Schließlich wende man auf diese Abbildung den Satz von der offenen Abbildung an, um nachzuweisen, dass $P_n : X \to X_n,\ x \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j(x)e_j$ und infolge auch $X \ni x \mapsto \lambda_n(x) \in \mathbb{C}$ beschränkt und linear ist.

   Anmerkung: In Hilberträumen sind alle abzählbaren ONB's auch Schauderbasen. Weitere Beispiele sind etwa $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ für $p \in [1, +\infty)$ mit der Schauderbasis (e_n) mit $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$. Auch $C[0, 1]$ hat eine Schauderbasis. Aber es gibt auch Banachräume, die keine Schauderbasis haben ('basis problem').

3. Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume mit σ-endlichen μ und ν und $k \in L^2(\Omega\times \Upsilon, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu, \mathbb{C})$.

   Zeigen Sie zunächst für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < +\infty$ mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass $(x, t) \mapsto \mathbb{1}_A(x) \cdot k(x, t) \cdot f(t)$ für jedes $f \in H_1 :=$

$L^2(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu, \mathbb{C})$ als Funktion auf $\Omega \times \Upsilon$ nach $\mu \times \nu$ integrierbar ist und dass infolge für eine Nullmenge $N_A \in \mathcal{A}$ die Funktion

$$\Omega \setminus N_A \ni x \mapsto \mathbb{1}_A(x) \cdot \int_\Upsilon k(x,t) f(t) \, d\nu(t)$$

messbar ist. Leiten Sie daraus die Messbarkeit von

$$\Omega \setminus N \ni x \mapsto (K(f))(x) := \int_\Upsilon k(x,t) f(t) \, d\nu(t)$$

für eine gewisse Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ her. Setzt man $Kf(x) = 0$ für $x \in N$, so zeige man, dass $Kf \in H_2 := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie auch, dass $K \in L_b(H_1, H_2)$ und $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mu \times \nu)}$.

Anmerkung: K heißt Integraloperator zum Kern k.

Hinweis: Fubini!

4. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass für $g \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) = H_2$ und $f \in L^2(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu, \mathbb{C}) = H_1$

$$(Kf, g)_{H_2} = (k, g \otimes \bar{f})_{L^2(\Omega \times \Upsilon, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu, \mathbb{C})},$$

wobei $(g \otimes \bar{f})(x,t) = g(x) \cdot \overline{f(t)}$.

Indem man herleite, was $k \perp b_j \otimes \overline{a_i}$ für den zu k gehörigen Operator K bedeutet, zeige man, dass für ONBs $(a_i)_{i \in I}$ und $(b_j)_{j \in J}$ von H_1 bzw. H_2 die Menge $\{b_j \otimes \overline{a_i} : i \in I, \ j \in J\}$ eine ONB von $L^2(\Omega \times \Upsilon, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu, \mathbb{C})$ abgibt.

5. Mit der Notation aus den vorherigen beiden Beispielen sei $k(x,t) := \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(t)$ für Funktionen $a_1, \dots, a_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und $b_1, \dots, b_n \in L^2(\Upsilon, \mathcal{B}, \nu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass dann $\dim \operatorname{ran}(K) \leq n$.

Weiters zeige man, dass für alle $k \in L^2(\Omega \times \Upsilon, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu, \mathbb{C})$ der Integraloperator $K : H_1 \to H_2$ mit Kern k kompakt ist.

Hinweis: Entwickeln Sie k in eine Fourierreihe mit einer ONB wie im vorherigen Beispiel. Verwenden Sie auch Proposition 6.5.4. (iii) (online stehende Version des Skrptums).

6. Sei $g : [0,1] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt. Weiters sei $y_0 \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes (!!), die Existenz eines stetigen $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$h(t) = y_0 + \int_0^t g(s, h(s)) \, ds \quad \text{für} \quad t \in [0,1]$$

und infolge die Lösbarkeit der Differentialgleichung $h'(x) = g(x, h(x))$ mit Anfangsbedingung $h(0) = y_0$.

Geben Sie dazu genau an, auf welchen lokalkonvexen Raum X, welche konvexe Menge F, welche kompakte Menge E und welche stetige Funktion $f : F \to E$ sie den Schauderschen Fixpunktsatz anwenden.

7. Sei A wie in Beispiel acht der fünften Übung. Bestimmen Sie für alle $\lambda \in \sigma_p(A)$ die Eigenräume $\ker(A - \lambda I)$.

   Stellen Sie A auch in der Form (6.7.3) aus dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren dar.

8. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < +\infty$ und setze $H := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$. Führen Sie genau aus, warum $\mathcal{A} \ni \Delta \mapsto M_{\mathbb{1}_\Delta} \in L_b(H)$ ein Spektralmaß E abgibt, wobei $M_{\mathbb{1}_\Delta}$ den Multiplikationsoperator $f \mapsto f \cdot \mathbb{1}_\Delta$ auf H bezeichnet. Bestimmen Sie für $g, h \in H$ das komplexe Maß $E_{g,h}$.

   Weiters bestimme man für das soeben eingeführte Spektralmaß E und für ein beschränktes und messbares $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ den Operator

$$\int \phi \, dE \, .$$

9. Sei H ein Hilbertraum und sei $P \in L_b(H)$ eine orthogonal-Projektion. Bestimmen Sie $E(\Delta)$ mit messbarem $\Delta \subseteq \sigma(P)$, wobei E das Spektralmaß zu P aus dem Spektralsatz für beschränkte, selbstadjungierte Operatoren ist.