Übungen zu Fana1 SS22, 6. Übung

1. Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass H reflexiv ist. Weiters stelle man für eine Teilmene M von H vermöge der Abbildung $\Phi : H \to H'$ mit $\Phi(y) = (.,y)$ aus der Vorlesung eine Beziehung zwischem dem Annihilator $M^\perp \subseteq H'$ (gemäß Definition 5.4.3) und dem orthogonalen Komplement $M^{(\perp)} \subseteq H$ (gemäß Definition 3.2.1) her.

2. Zeigen Sie, dass in einem Skalarproduktraum $(H, (.,.))$ für ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in H genau dann $\lim_{i\in I} x_i = x$ (bzgl. $\|.\|$), wenn $\lim_{i\in I} \|x_i\| = \|x\|$ und $(x_i)_{i\in I}$ schwach gegen x konvergiert, dh. $\lim_{i\in I}(x_i, y) = (x, y)$ für alle $y \in H$.

   Zudem zeige man, dass $\lim_{i\in I} x_i = x$ (bzgl. $\|.\|$) auch äquivalent zu $\lim_{i\in I} \|x_i\| = \|x\|$ und $\lim_{i\in I}(x_i, y) = (x, y)$ für $y \in D$ ist. Dabei ist $D \subseteq H$ irgend eine dichte Teilmenge von H.

   Hinweis für den 2ten Teil: Aus $\lim_{i\in I} \|x_i\| = \|x\|$ und $\lim_{i\in I}(x_i, y) = (x, y)$ für $y \in D$ leite man her, dass $\lim_{i\in I}(x_i, y) = (x, y)$ für alle $y \in H$.

3. Sei K die Menge aller reellen Polynome mit Grad $\leq n$ (n fest), für die $p'' \geq 0$ auf einem gegebenen Intervall $[a, b]$ gilt. Man zeige, dass es zu einem $f \in L^2([a, b], \lambda_1)$ genau ein $p_0 \in K$ gibt, sodass

   $$\int_{[a,b]} |f - p_0|^2 \, d\lambda_1 \leq \int_{[a,b]} |f - p|^2 \, d\lambda_1$$

   für alle $p \in K$.

   Hinweis: Die Menge aller komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ ist ein endlich dimensionaler Unterraum und für $t \in [a, b]$ sind $p \mapsto p(t)$ sowie $p \mapsto p''(t)$ lineare Funktionale auf diesem Unterraum und daher stetig.

4. Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dicht Teilmenge besitzt. Sei X ein topologischer Vektorraum und $M \subseteq X$ abzählbar. Man zeige, dass dann $\operatorname{span}(M)$ (lineare Hülle) und $\overline{\operatorname{span}(M)}$ (Abschluss der linearen Hülle) jeweils versehen mit der Spurtopologie separabel sind.

   Zeigen Sie damit, dass $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ separabel ist.

5. Zeigen Sie, dass für eine $\Omega \neq \emptyset$ und $(\xi_i)_{i\in\Omega} \in \ell^2(\Omega, \mathbb{C})$ die Teilmenge $\{i \in \Omega : \xi_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar ist.

   Zeigen Sie auch, dass es für ein abzählbares $N \subseteq \ell^2(\Omega, \mathbb{C})$ ein abzählbares $\Theta \subseteq \Omega$ mit $\overline{N} \subseteq \ell^2(\Theta, \mathbb{C})$ gibt, wobei die Elemente von $\ell^2(\Theta, \mathbb{C})$ als Elemente von $\ell^2(\Omega, \mathbb{C})$ zu betrachten sind, indem man diese durch Null von Θ auf Ω fortsetzt.

   Hinweis für ersten Teil: Tschebyscheff-Ungleichung für $|h|^2$ mit $(\xi_i)_{i\in\Omega} = h : \Omega \to \mathbb{C}$, $\epsilon = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und dem Zählmaß.

6. Sei H ein Hilbertraum von nicht endlicher Dimension. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen beiden Aufgaben, dass H genau dann separabel ist, wenn H eine abzählbare ONB besitzt, und dass in dem Fall alle ONBs abzählbar sind und dass $H \cong \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ($\cong$ bedeutet die Existenz einer isometrischen und linearen Bijektion).

7. Zuerst zeige man, dass mit Hilberträumen H_1 und H_2 auch $H_1 \times H_2$ (die Elemente davon werden mit $(a_1; a_2)$ bezeichnet) versehen mit $((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = (x_1, y_1)_1 + (x_2, y_2)_2$ einen Hilbertraum abgibt. Zeigen Sie auch, dass die von $(.,.)$ auf $H_1 \times H_2$ erzeugte Norm zur Summennorm und zur Maximumsnorm äquivalent ist.

   Nun sei H ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum von H. Bezeichne $P : H \to H$ die orthogonale Projektion mit $P(H) = M$. Man bestimme die Adjungierte von P als Operator von H nach H und auch die Adjungierte von P als Operator von H nach M!

   Schließlich zeige man, dass die Abbildung J aus der vierten Aufgabe der fünften Übung unitär ist, wobei $X = H$, $M = M$, $N = M^\perp$ und $M \times N$ als Hilbertraum im Sinne vom Anfang der Aufgabe zu betrachten ist.

8. Betrachte den Raum $L^2([0, 2\pi), \mu)$, wobei $\mu = \frac{1}{2\pi}\lambda_1$ (λ_1 ist das Lebesguesche Maß auf $[0, 2\pi)$), und seine Elemente bzw. Teilräume

$$e_n(t) := e^{int},\ n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n(t) := \frac{e_{-n}(t) + n e_n(t)}{\sqrt{1 + n^2}},\ n \in \mathbb{N},$$

$$M := \overline{\operatorname{span}\{e_n : n = 0, 1, 2, \dots\}}, \quad N := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n = 1, 2, \dots\}}.$$

   Zeige:

   (a) $\{e_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ bzw. $\{u_n : n = 1, 2, \dots\}$ sind Orthonormalbasen von M bzw. N.

   (b) $M \cap N = \{0\}$.

   (c) $M \dot{+} N$ ist dicht in $L^2([0, 2\pi), \mu)$, aber nicht gleich ganz $L^2([0, 2\pi), \mu)$.

   (d) Die Projektion des normierten Raumes $X := M \dot{+} N$ mit Bild M und Kern N ist nicht stetig.

9. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem σ-endlichen Maß μ. Weiters sei $h : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Sei $\mathcal{D}_h := \{f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) : h \cdot f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})\}$, und $M_h : \mathcal{D}_h \to L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ definiert durch $M_h f := h \cdot f$.

   Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) $h \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$,

   (ii) $\mathcal{D}_h = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ und M_h ist beschränkt,

   (iii) $\mathcal{D}_h = L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$.

   Hinweis: Aus der L^2-Konvergenz folgt die Konvergenz im Maßl!