Übungen zu Fana1 SS22, 5. Übung

1. Sei Ω eine nichtleere Menge sei $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ der Raum aller beschränkten komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm. Man zeige, dass $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ versehen mit der punktweisen Multiplikation eine Banachalgebra mit Eins ist.

   Weiters bestimme man für ein $\phi \in \mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ sein Spektrum $\sigma(\phi)$ und seinen Spektralradius $r(\phi) := \max_{z \in \sigma(\phi)} |z|$. (Hinweis: Betrachten Sie den Abschluss von $\phi(\Omega)$.)

   Ist schließlich Ω mit einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ versehen, so zeige man, dass $B(\Omega, \mathcal{A})$ (die Menge aller beschränkten und messberen Funktionen von Ω nach $\mathbb{C}$) eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})$ ist, wobei das Einselement dasselbe bleibt und $\mathrm{Inv}(\mathfrak{B}(\Omega, \mathbb{C})) \cap B(\Omega, \mathcal{A}) = \mathrm{Inv}(B(\Omega, \mathcal{A}))$.

   Bemerkung: Letzterer Sachverhalt gilt nicht in allen Banachalgebren mit Eins und ihre Unteralgebren.

2. Sei $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformation ist, welche auf der Schwarzklasse gegeben ist durch

   $$(Uf)(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-it\zeta)\, d\lambda(t).$$

   Man bestimme $\sigma(U)$ und $\sigma_p(U)$.

   Hinweis: Was ergibt U^4? Spektralabbildungssatz! Betrachte Funktionen der Bauart $p(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$ mit einem Polynom $p(t)$!

3. Seien X_1, X_2, Y_1, Y_2 Banachräume und seien $A \in L_b(X_1, Y_1)$ und $B \in L_b(X_2, Y_2)$.

   Zeigen Sie zunächst, dass $C : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ definiert durch $C(x_1, x_2) = (Ax_1, Bx_2)$ ein beschränkter und linearer Operator ist.

   Zeigen Sie weiters, dass der topologische Dualraum $(X_1 \times X_2)'$ von $X_1 \times X_2$ mit $X_1' \times X_2'$ identifiziert werden kann, dass es also einen linearen Homöomorphismus von $X_1' \times X_2'$ auf $(X_1 \times X_2)'$ gibt.

   Schließlich zeige man, dass $C'(y_1', y_2') = (A'y_1', B'y_2')$, $(y_1', y_2') \in Y_1' \times Y_2'$, wenn man $(X_1 \times X_2)'$ mit $X_1' \times X_2'$ und $(Y_1 \times Y_2)'$ mit $Y_1' \times Y_2'$ identifiziert.

4. Seien X ein normierter Raum, M, N lineare Teilräume von X derart, dass $X = M \dot{+} N$ (direkte Summe), und $P : X \to X$ die Projektion ($P^2 = P$), welche M als Bild und N als Kern hat. Weiters sei $M \times N$ mit der Summennorm oder mit der Maximumsnorm versehen.

   Zeigen Sie, dass $J : M \times N \to X$ mit $J((x; y)) = x + y$ linear, bijektiv und beschränkt ist. Zeigen Sie auch, dass $J^{-1} : X \to M \times N$ genau dann beschränkt ist, wenn P beschränkt ist.

   Zeigen Sie schließlich, dass im Fall eines Banachraumes X die Beschränktheit von P zur Abgeschlossenheit von M und N äquivalent ist!

5. Sei $C^1[0,1]$ versehen mit der Norm

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \,.$$

Zeigen Sie, dass $C^1[0,1]$ ein Banachraum ist. Weiters zeige man, dass die Einbettung $\iota : C^1[0,1] \to C[0,1],\ f \mapsto f$ eine kompakte und lineare Abbildung ist. Dabei ist $C[0,1]$ mit $\|.\|_\infty$ versehen.

Schließlich zeige man, dass (L^p bzgl. Lebesgue-Maß) $\iota : C[0,1] \to L^p[0,1],\ f \mapsto f$ beschränkt ist.

Hinweis: Arzela-Ascoli!

6. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass $f \mapsto (x \mapsto \int\limits_0^x f(t)\,dt)$ als Abbildung von $C[0,1]$ nach $C^1[0,1]$ beschränkt und als Abbildung T von $C[0,1]$ nach $C[0,1]$ kompakt ist. Man bestimme schließlich $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $r(T)$.

Anmerkung: T ist ein Beispiel für einen beschränkten linearen Operator auf einem unendlich-dimensionalen Banachraum mit $r(T) < \|T\|$.

7. Betrachte den sogenannten Volterra-Operator mit Kern $k \in C([0,1]\times[0,1],\mathbb{C})$:

$$(Vf)(x) := \int\limits_0^x k(x,t)f(t)\,dt\,.$$

Zeige $V \in L_b(C[0,1])$, $\|V\| \le \|k\|_{[0,1]\times[0,1],\infty}$, $\|V^n\| \le \|k\|^n_{[0,1]\times[0,1],\infty}\frac{1}{n!}$, $r(V) = 0$, $\sigma(V) = \{0\}$ und, dass V kompakt ist.

Hinweis: Arzela-Ascoli!

Anmerkung für $k = 1$ ist $(Vf)(x) := \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

8. Sei $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ (L^2 bzgl. Lebesgue-Maß) definiert durch

$$(Af)(x) = i\int\limits_{[0,x]} f\,d\lambda - \frac{i}{2}\int\limits_{[0,1]} f\,d\lambda\,.$$

Zeigen Sie, dass A ein kompakter selbstadjungierter Operator ist, wobei $B : H \to H$ mit einem Hilbertraum H die Gleichheit $(Ax,y) = (x,Ay)$ für alle $x,y \in H$ bedeutet.

Bestimmen Sie $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $r(A)$.

Hinweis: Für die Kompaktheit zeige man, dass $f \mapsto (x \mapsto \int_{[0,x]} f(t)\,dt)$ als Abbildung von $L^2[0,1]$ nach $C[0,1]$ kompakt ist. Dazu verwende man Arzela-Ascoli und Cauchy-Schwarz angewendet auf $f = 1\cdot f$!