Übungen zu Fana1 SS22, 4. Übung

1. Sei $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ eine Familie von topologischen Vektorräumen. Sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ und $\pi_i : X \to X_i$ sei die Projektion auf die i-te Komponente.

   Zunächst zeige man, dass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum ist. Weiters zeige man, dass $(X, \mathcal{T})'$ genau die linearen Funktionale der Bauart $f = \sum_{j=1}^m f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$ mit $i_1, \ldots, i_m \in I$ und $f_{i_j} \in (X_i, \mathcal{T}_i)'$ sind.

   Hinweis: Zu $f \in X'$ betrachte $f_i := f \circ \iota_i$, wobei $\iota_i : X_i \to X$ mit $y \mapsto (x_j)_{j\in I}$, wobei $x_i = y$ und $x_j = 0$ für $j \neq i$. Man leite aus der Beschränktheit von f auf einer Nullumgebung her, dass es endlich viele $i_1, \ldots, i_m \in I$ derart gibt, dass f auf $\ker \pi_{i_1} \cap \cdots \cap \ker \pi_{i_m}$ den Wert Null annimmt. Man leite daraus die Beziehung $f = \sum_{j=1}^m f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$ her!

2. Mit der Notation aus Beispiel 4 der dritten Übung sei zusätzlich angenommen, dass X mit einer Norm $\|.\|$ versehen ist, welche X zu einem Banachraum macht, und dass $Y = X' = L_b(X, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass $B \subseteq X$ genau dann bezüglich $\|.\|$ beschränkt ist, wenn B in $(X, \sigma(X, Y))$ im Sinne von topologischer Vektorraum beschränkt ist.

   Hinweis: Für ein in $(X, \sigma(X, Y))$ im Sinne von topologischer Vektorraum beschränktes B betrachte $\iota_{X'}(B)$ als Teilmenge von $X'' = L_b(X', \mathbb{C})$.

3. Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear, bijektiv und beschränkt. Zeigen Sie, dass dann für jeden Operator $S \in L_b(X)$ der Operator TST^{-1} zu $L_b(Y)$ gehört und $\sigma(S) = \sigma(TST^{-1})$ sowie $\sigma_p(S) = \sigma_p(TST^{-1})$ erfüllt.

4. Sei X ein Banachraum und $P : X \to X$ eine beschränkte ($\|P\| < +\infty$) Projektion ($P^2 = P$). Zeigen Sie, dass $P(X)$ und $\ker P$ in X abgeschlossen sind und bestimmen Sie $\sigma(P)$ im Fall $\{0\} \neq P(X) \neq X$.

   Hinweis: Spektralabbildungssatz

5. Mit der Notation aus Beispiel 2 der dritten Übung für $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ sei $V((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}})$ die Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\beta_1 = 0$ und $\beta_{n+1} = \alpha_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass $V((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und dass $V : \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (Vorwärts-Shift) eine lineare und bezüglich $\|.\|_p$ isometrische Abbildung abgibt. Schließlich bestimme man V', wenn man $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})'$ mit $\ell^q(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ identifiziert, also $\Phi^{-1} \circ V' \circ \Phi$.

6. Betrachte auf $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ($1 < p < \infty$) den Rückwärts-Shift-Operator

   $$T : \begin{cases} \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) & \to & \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \\ (\xi_1, \xi_2, \ldots) & \mapsto & (\xi_2, \xi_3, \ldots) \end{cases},$$

   und zeige $\sigma_p(T) = \mathbb{D}$, $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$. Dabei ist $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$.

7. Zeigen Sie für einen Banachraum X und $T \in L_b(X)$, dass $\sigma(T') = \sigma(T)$.

   Anmerkung: Für $\supseteq$ verwende man den noch nicht bewiesenen Satz vom abgeschlossenen Bild, welcher besagt, dass für $S \in L_b(X)$ der Bildbereich $S(X)$ genau dann Norm abgeschlossen ist, wenn der Bildbereich $S'(X')$ der konjugierten Norm abgeschlossen ist.

8. Betrachte auf $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ $(1 < p < \infty)$ den Vorwärts-Shift-Operator

$$S : \begin{cases} \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) & \to & \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \\ (\xi_1, \xi_2, \dots) & \mapsto & (0, \xi_1, \xi_2, \dots) \end{cases}$$

Zeige: S ist isometrisch, bestimme $\operatorname{ran} S$, zeige $\operatorname{ran} S = \overline{\operatorname{ran} S}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{ran}(S^n) = \{0\}$ sowie $\sigma_p(S) = \emptyset$. Dabei ist $\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(S - \lambda I) \neq \{0\}\}$.

Bestimmen Sie schließlich $\sigma(S)$!

9. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und Y ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Bekannterweise ist eine Abbildung $f : D \to Y$ genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist, also wenn es zu jedem $w \in D$ ein $r > 0$ und $a_n \in Y$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, derart gibt, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n a_n \quad \text{für alle} \quad z \in U_r^{\mathbb{C}}(w),$$

wobei der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$ größer oder gleich r ist.

Eine Abbildung $f : D \to Y$ heißt schwach holomorph, wenn $\phi \circ f : D \to \mathbb{C}$ für alle $\phi \in Y'$ holomorph ist.

Zeigen Sie, dass $f : D \to Y$ genau dann holomorph ist, wenn f schwach holomorph ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} z^n b_n$ mit $a_n \in Z$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, für einen beliebigen Banachraum Z über $\mathbb{C}$ mit

$$\sup\{s \in [0, +\infty) : \{s^n b_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \text{ ist beschränkt in } Z\}$$

übereinstimmt.