Übungen zu Fana1 SS22, 3. Übung

1. Weisen Sie die Aussagen (v), (vi) und (vii) von Lemma 5.4.4. nach.

2. Seien $p, q \in (1, +\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der Banachraum aller komplexen Folgen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^p < +\infty$ versehen mit der Norm $\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := (\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

   Zeigen Sie unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung, dass $\Phi : \ell^q(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to (\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}))'$ mit $\Phi((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}})((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n$ eine lineare Bijektion abgibt.

   Zeigen Sie damit auch, dass $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ reflexiv ist.

3. Sei (X, Y) ein duales Paar, $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. $\iota_Y : X \to Y^*$ sei definiert durch $\iota_Y(x)(f) = f(x)$.

   Zeigen Sie sorgfältig, dass $(Y, \iota_Y(X))$ ein duales Paar ist, wobei M° (gebildet bzgl. (X, Y)) mit ${}^\circ\iota_Y(M)$ (gebildet bzgl. $(Y, \iota_Y(X))$) übereinstimmt. Gilt die entsprechende Gleichheit für $M^\perp$ und ${}^\perp\iota_Y(M)$?

   Ist $r \geq 0$, $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $Y = X'$, so bestimme man $(K_r^X(0))^\circ$, $(U_r^X(0))^\circ$ sowie ${}^\circ K_r^{X'}(0)$, ${}^\circ U_r^{X'}(0)$. Begründen Sie ihre Antwort sorgfältig!

4. Sei X ein Vektorraum, $Y \leq X^*$ punktetrennend, $B \subseteq X$ und X sei versehen mit $\sigma(X, Y)$. Zeigen Sie, dass B genau dann beschränkt in $(X, \sigma(X, Y))$ im Sinne von topologischer Vektorraum (siehe zweite Übung) ist, wenn $f(B)$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ für alle $f \in Y$ beschränkt ist.

5. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum, sei $X' := L_b(X, \mathbb{C})$ sein topologischer Dualraum versehen mit der Abbildungsnorm und sei $X'' := L_b(X', \mathbb{C})$ wiederum dessen topologischer Dualraum auch versehen mit der Abbildungsnorm. Für $x \in X$ sei $\iota_{X'}(x) \in X''$ das Auswärtungsfunktional $X' \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$.

   Man zeige schließlich, dass $\iota_{X'}$ als Abbildung von X auf $\iota_{X'}(X)$ $(\subseteq X'')$ ein Homöomorphismus ist, wenn man X mit $\sigma(X, X')$ und $\iota_{X'}(X)$ mit $\sigma(X'', X')|_{\iota_{X'}(X)}$ versieht. Zeigen Sie dieselbe Tatsache, wenn man $\iota_{X'}(X)$ mit $\sigma(X'', (X'')')|_{\iota_{X'}(X)}$ versieht, und infolge $\sigma(X'', (X'')')|_{\iota_{X'}(X)} = \sigma(X'', X')|_{\iota_{X'}(X)}$.

   Hinweis: Für $F \in (X'')'$ betrachte $F|_{\iota_{X'}(X)} \circ \iota_{X'} : X \to \mathbb{C}$.

6. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum, sei $X' := L_b(X, \mathbb{C})$ sein topologischer Dualraum versehen mit der Abbildungsnorm und sei $X'' := L_b(X', \mathbb{C})$ wiederum dessen topologischer Dualraum auch versehen mit der Abbildungsnorm. Für $x \in X$ sei $\iota_{X'}(x) \in X''$ das Auswärtungsfunktional $X' \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie zunächst, dass $\iota_{X'}(X)$ ein bzgl. der Abbildungsnorm abgeschlossener Teilraum von X'' ist.

   Zeigen Sie weiters, dass X isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $(C(K, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ ist, wobei K ein gewisser (von X abhängiger) kompakter Hausdorffraum ist.

   Hinweis für zweiten Teil: Betrachten Sie $\iota_{X'}(x)|_K$ für $K = K_1^{X'}(0)$ und jedes $x \in X$.

7. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum, sei $X' := L_b(X, \mathbb{C})$ sein topologischer Dualraum versehen mit der Abbildungsnorm, $X'' := L_b(X', \mathbb{C})$ wiederum dessen topologischer Dualraum auch versehen mit der Abbildungsnorm und schließlich $X''' := L_b(X'', \mathbb{C})$ der topologischer Dualraum von X'' auch versehen mit der Abbildungsnorm.

   Für $x \in X$ sei $\iota_{X'}(x) \in X''$ das Auswärtungsfunktional $X' \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$, und für $f \in X'$ sei $\iota_{X''}(f) \in X'''$ das Auswärtungsfunktional $X'' \ni F \mapsto F(f) \in \mathbb{C}$.

   Zeigen Sie, dass $X''' = \iota_{X''}(X') \dot{+} (\iota_{X'}(X))^{\perp}$ und dass $\iota_{X''} \circ (\iota_{X'})' : X''' \to X'''$ die Projektion auf $\iota_{X''}(X')$ mit Kern $(\iota_{X'}(X))^{\perp}$ ist.

   Hinweis: Für $F \in X'''$ ist $(\iota_{X'})'(F) = F \circ \iota_{X'}$ in X'. Was erfüllt dann $F - \iota_{X''}((\iota_{X'})'(F))$?

8. Seien X, Y Banachräume. Sei $S : Y' \to X'$ linear. Man zeige, dass S genau dann $w*$-$w*$-stetig ist, also stetig, wenn Y' mit $\sigma(Y', Y)$ und X' mit $\sigma(X', X)$ versehen ist, wenn $S = T'$ für ein $T \in L_b(X, Y)$. Zeigen Sie auch, dass in diesem Fall $\iota_{Y'} \circ T = S' \circ \iota_{X'}$.

   Hinweis: Für eine Richtung zeigen Sie zuerst mit Hilfe des Satzes vom abgeschlossenen Graphen, dass $S : Y' \to X'$ auch Norm stetig ist. Dann betrachten Sie $S' : X'' \to Y''$. Zeigen, dass $S'(\iota_{X'}(x)) = (Y' \ni f \mapsto (Sf)(x) \in \mathbb{C})$ $w*$-stetig ist und somit $S'(\iota_{X'}(X)) \subseteq \iota_{Y'}(Y)$.

9. Seien $p \in [1, +\infty]$, X ein Banachraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X' derart, dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ in $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ liegt. Zeigen Sie, dass dann $X \ni x \mapsto (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ eine lineare und beschränkte Abbildung abgibt.

10. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein normierter Raum und $f : \Omega \to X$ schwach messbar, also $x' \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ für alle $x' \in X'$ messbar.

    Zeigen Sie, dass im Falle, dass $x' \circ f$ für alle $x' \in X'$ integrierbar ist, es ein eindeutiges $z'' \in X''$ mit $z''(x') = \int x' \circ f \, d\mu$ für alle $x' \in X'$ gibt.

    Anmerkung: $\int f \, d\mu := z''$ nennt man auch das Dunford Integral von f.

    Hinweis: Zeigen Sie zuerst mit Mitteln der Maßtheorie, dass aus $x'_n \to x'$ bzgl. der Abbildungsnorm und $x'_n \circ f \to g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ bzgl. $\|.\|_1$ folgt, dass $x' \circ f = g$ μ-fast überall. Was bedeutet das dann für die Abbildung $X' \ni x' \mapsto x' \circ f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$? Schließlich betrachte man die Konjungierte dieser Abbildung angewendet auf das Funktional $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \ni h \mapsto \int h \, d\mu \in \mathbb{C}$.