Übungen zu Fana1 SS22, 2. Übung

1. Sei X ein normierter Raum. Zeige: Ist $\dim X = \infty$, dann existiert ein unstetiges lineares Funktional auf X. Gibt es ein unstetiges lineares Funktional, wenn $\dim X < \infty$ ist?

   Hinweis: Man baue mit Hilfe einer (algebraischen Basis) eine unbeschränkte lineare Abbildung nach $\mathbb{C}$.

2. Seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear und beschränkt. Zeigen Sie folgende Sachverhalte.

   (a) Für einen abgeschlossenen Teilraum N von $\ker T$ ist $T/N : X/N \to Y$, definiert durch $T/N([x]_N) = T(x)$, eine wohldefinierte lineare und beschränkte Abbildung mit $T = (T/N) \circ \pi_N$ und $\|T/N\| = \|T\|$, wobei $\pi_N : X \to X/N$ mit $\pi_N(x) = [x]_N$.

   (b) T heißt Quotientenabbildung, falls $\|Tx\| = \inf\{\|x - z\| : z \in \ker T\}$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass T genau dann eine Quotientenabbildung ist, wenn für $N = \ker T$ die Abbildung $T/N : X/N \to Y$ isometrisch ist. Dabei ist T/N genau dann bijektiv, wenn T surjektiv.

   (c) Ist T eine Quotientenabbildung und X ein Banachraum, so ist auch $T(X)$ ein Banachraum.

   (d) Ist N ein abgeschlosser Teilraum von X und $\hat{X}$ eine Vervollständigungen von X (mit $X \subseteq \hat{X}$, also ist ι die Einbettung), so ist für den Abschluss $\overline{N}$ von N in $\hat{X}$ die Abbildung $R : X \to \hat{X}/\overline{N}$ mit $R(x) = [x]_{\overline{N}} \in \hat{X}/\overline{N}$ eine Quotientenabbildung mit dichtem Bild, wobei $\ker R = N$.
   Hinweis: $d(z, N) = d(z, \overline{N})$.

3. Sei X ein normierter Raum und $A := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ und sei $c_{00}(A, \mathbb{C})$ der Raum aller $\phi : A \to \mathbb{C}$ mit endlichem $\phi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ versehen mit der Norm $\|\phi\|_1 := \sum_{x \in \phi^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})} |\phi(x)|$.

   Zeigen Sie, dass $Q : \phi \mapsto \sum_{x \in \phi^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})} \phi(x)x$ eine surjektive Quotientenabbildung von $c_{00}(A, \mathbb{C})$ auf X.

   Zeigen Sie auch, dass $\ell^1(A, \mathbb{C})$ $(= L^1(A, \mathcal{P}(A), \xi, \mathbb{C}))$ versehen mit der Norm $\|\phi\|_1 := \sum_{x \in A} |\phi(x)|$ für $\phi \in \ell^1(A, \mathbb{C})$ eine Vervollständigung von $c_{00}(A, \mathbb{C})$ ist und dass im Falle eines Banachraumes X die eindeutige stetige Fortsetzung T von Q auf $\ell^1(A, \mathbb{C})$ gegeben ist durch $T(\phi) = \sum_{x \in A} \phi(x)x$, wobei diese Summe im Sinne der unbedingten Konvergenz existiert; siehe etwa Fundament Analysis Seite 315 und 316 in Kapitel 9.

4. Sei $Q : X \to Y$ eine surjektive Quotientenabbildung mit normierten Räumen X, Y, $\hat{X}$ eine Vervollständigungen von X (mit $X \subseteq \hat{X}$) und $N := \ker Q$. Man zeige, dass $(\hat{X}/\overline{N}, \|.\|_{\hat{X}/\overline{N}}, \iota)$ eine Vervollständigung von Y ist, wobei $\iota = (R/N) \circ (Q/N)^{-1}$ mit R wie in (d) von Übungsbeispiel 2.

   Zeigen Sie damit auch, dass jeder normierte Raum eine Vervollständigung hat und zwar ohne Zuhilfenahme von Satz 2.5.7. aus dem Skriptum.

5. Mit der Notation aus Beispiel 5 der ersten Übung zeige man, dass d auf X vollständig ist, wenn alle d_n es auf den X_n sind.

6. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $\emptyset \neq K_n \subseteq G,\ n \in \mathbb{N}$ kompakt, sodass $K_n \subseteq K_{n+1}^{\circ} \subseteq K_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Man zeige:

   (i) $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} C(K_n, \mathbb{C})$, versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ der von $\|.\|_\infty$ auf $C(K_n, \mathbb{C})$ erzeugten Topologien, ist ein topologischer Vektorraum, wobei $\mathcal{T}$ eine metrische Topologie ist, dh. $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ für eine geeignete Metrik d. Man gebe eine derartige Metrik an, sodass d sogar vollständig ist.

   (ii) Die Abbildung $\Psi : C(G, \mathbb{C}) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} C(K_n, \mathbb{C})$ definiert durch $\Psi(f) = (f|_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist linear, injektiv und hat ein bzgl. $\mathcal{T}$ abgeschlossenes Bild.

   Hinweis: Die lineare Abbildung $g \mapsto g|_{K_n}$ von $C(K_m, \mathbb{C})$ nach $C(K_n, \mathbb{C})$ ist beschränkt für jedes $m > n$.

   (iii) Die initiale Topologie $\mathcal{O}$ auf $C(G, \mathbb{C})$ bzgl. Ψ stimmt überein mit der initialen Topologie auf $C(G, \mathbb{C})$ bzgl. der Abbildungen $p_{K_n} : f \mapsto f|_{K_n},\ n \in \mathbb{N}$.

   (iv) Die Topologie $\mathcal{O}$ auf $C(G, \mathbb{C})$ stimmt stimmt überein mit der initialen Topologie auf $C(G, \mathbb{C})$ bzgl. aller Abbildungen $p_K : f \mapsto f|_K$, wobei K alle nichtleeren kompakten Teilmengen von G durchläuft.

   Hinweis: Für die Stetigkeit von p_K verwende man die Tatsache, dass $K \subseteq G = \bigcup_n K_n^{\circ}$.....

   (v) Ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ aus $C(G, \mathbb{C})$ konvergiert genau dann gegen $f \in C(G, \mathbb{C})$ bzgl. $\mathcal{O}$, wenn $f_i|_K \to f|_K$ gleichmäßig für alle kompakten $\emptyset \neq K \subseteq G$.

   Anmerkung: Deshalb heißt $\mathcal{O}$ Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz.

   Anmerkung: Ähnlich lässt sich $L^1_{loc}(G, \mathbb{C})$ mit einer vollständigen Metrik versehen, sodass dieser zu einem topologischen Vektorraum wird. Auch den Raum $C^\infty(G, \mathbb{C})$ kann man mit einer vollständigen Metrik versehen, sodass dieser zu einem topologischen Vektorraum wird, und sodass $f_n \to f$ bzgl. dieser Metrik genau dann, wenn $f_n|_K \to f|_K$ für alle kompakten $K \subseteq G$ und das entsprechende für alle höheren partiellen Ableitungen gilt.

7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $B \subseteq X$ heißt beschränkt (im Sinne von topologischer Vektorraum), falls es zu jeder Nullumgebung U ein positive Zahl λ_U gibt, sodass $B \subseteq \lambda_U U$. Man zeige:

   (a) B ist beschränkt genau dann, wenn es zu jeder Nullumgebung U eine positive Zahl μ_U gibt, sodass $B \subseteq \lambda U$, für alle $\lambda > \mu_U$.

   Hinweis: Stetigkeit der skalaren Multiplikation bei $(0, 0) \in \mathbb{C} \times X$.

   (b) Ist B beschränkt, so auch $\overline{B}$.

   (c) Jede kompakte Menge ist beschränkt.

   (d) Ist $\mathcal{T}$ von einer Norm induziert, so gibt es eine Null-Umgebungsbasis bestehend aus beschränkten Mengen.

8. Man zeige, dass ein topologischer Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ genau dann normierbar ist, dh. es gibt eine Norm $\|.\|$ auf X, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\|.\|}$, wenn es eine im Sinne von topologischer Vektorraum (siehe letzte Aufgabe der dritten Übung) beschränkte und konvexe Nullumgebung bzgl. $\mathcal{T}$ gibt.

   Hinweis: Betrachten Sie das Minkowski Funktional zu einer offenen, beschränkten, kreisförmigen und konvexen Nullumgebung!

9. Sei $0 < p < 1$. Zeigen Sie, dass für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ der Raum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ aller messbaren $f : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\int |f|^p \, d\mu < +\infty$ versehen mit $d(f, g) := \int |f - g|^p \, d\mu < +\infty$ ein metrische Raum ist, wobei $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}), \mathcal{T}(d))$ einen topologischen Vektorraum abgibt.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst $(1+t)^p \leq 1+t^p$ für $t \in [0, 1]$ mit Mitteln der Analysis.

10. Für $0 < p < 1$, $\Omega = (0, 1)$ den Borelteilmengen $\mathcal{A}$ von $(0, 1)$ und die Einschränkung μ des Lebesgueschen Maßes auf $\mathcal{A}$ zeige man, dass eine konvexe Nullumgebung in $(L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}), \mathcal{T}(d))$ mit ganz $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) =: L^p(0, 1)$ übereinstimmen muss.

    Zeigen Sie damit, dass es keine stetige lineare Abbildung $0 \neq \phi : L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ geben kann.

    Hinweis: Ist V konvexe Nullumgebung und $r > 0$ mit $U_r(0) = \{g \in L^p(0, 1) : \int |g|^p \, d\mu < r\} \subseteq V$ und $f \in L^p(0, 1)$, so wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n^{p-1} \int |f|^p \, d\mu < r$ und $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ mit $\int_{(x_{i-1}, x_i]} |f(t)|^p \, d\mu(t) = n^{-1} \int |f|^p \, d\mu$ (warum geht das?). Man setze $g_i(t) := n f(t) \mathbb{1}_{(x_{i-1}, x_i]}$ und vergleiche f mit $n^{-1}(g_1 + \ldots + g_n)$.