Übungen zu Fana1 SS22, 1. Übung

1. Sei $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ versehen mit den beiden Metriken
$$d_1(x,y) = |x-y| \text{ und } d_2(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|\,.$$
Zunächst zeige man $\mathcal{T}(d_1) = \mathcal{T}(d_2)$ auf X. Man geben jeweils eine Vervollständigung von (X,d_1) und (X,d_2) an! Weiters betrachte man die Abbildungen $f : X \to X$ und $g : X \to X$ definiert durch $f(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$.

   Welche der insgesamt acht Abbildungen $f : (X,d_i) \to (X,d_j)$ und $g : (X,d_i) \to (X,d_j)$ $(i,j \in \{1,2\})$ ist gleichmäßig stetig und welche nicht, und welche davon läßt sich stetig auf die jeweiligen Vervollständigungen fortsetzen?

2. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und sei Y ein dichter linearer Teilraum von X. Für $r > 0$ und $x \in Y$ sei $U_r^X(x) := \{y \in X : \|x-y\| < r\}$ und $U_r^Y(x) := \{y \in Y : \|x-y\| < r\}$. Man zeige:
$$\overline{U_r^X(x)}^X = \overline{U_r^Y(x)}^X = \overline{\{y \in Y : \|x-y\| \le r\}}^X = \{y \in X : \|x-y\| \le r\} =: K_r^X(x).$$
Weiters zeigen man, dass wenn $\|.\|_2$ eine weiters Norm auf X ist, die Normen $\|.\|$ und $\|.\|_2$ genau dann äquivalent sind, wenn
$$U_\alpha^{(X,\|.\|)}(0) \subseteq U_1^{(X,\|.\|_2)}(0) \subseteq U_\beta^{(X,\|.\|)}(0)$$
für gewisse $\alpha, \beta > 0$.

3. Seien X und Y normierte Räume und sei $T : X \to Y$ linearer. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   - T ist injektiv und die daher existierende lineare Abbildung $T^{-1} : T(X) \to X$ ist beschränkt.
   - Es gibt ein $c > 0$ mit $\|Tx\| \ge c\|x\|$ für alle $x \in X$.
   - Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X folgt aus $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$, dass auch $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = +\infty$.

   Nehmen Sie nun an, dass diese Aussage richtig ist. Weiters sei auch T als beschränkt vorausgesetzt, und sei X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass dann $T(X)$ ein abgeschlossener Unterraum von Y ist.

4. Sei $X = \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der Banachraum aller absolut konvergenten komplexen Folgen; die Banachraumeigenschaft kann man zB. einsehen, indem man X als $L^1(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \xi, \mathbb{C})$ betrachtet, wobei ξ das Zählmaß ist. Zeigen Sie, dass die Menge $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ aller komplexen Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit endlichem $\{n \in \mathbb{N} : z_n \ne 0\}$ ein dichter Teilraum von X ist.

   Zeigen Sie weiters, dass für eine beschränkte lineare Abbildung $T : X \to X$ die unendlich mal unendlich Matrix $(m_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, wobei m_{ij} das i-te Folgenglied der Folge $T((\delta_{jn})_{n\in\mathbb{N}})$ (δ_{jn} bezeichnet das Kroneckerdelta) ist, folgende Eigenschaft hat:

Es gibt ein $C \geq 0$ derart, dass

$$\sum_{i=1}^{N} |\sum_{j=1}^{N} \alpha_j m_{ij}| \leq C \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie schließlich, dass es zu jeder unendlich mal unendlich Matrix $(m_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ mit dieser Eigenschaft ein eindeutiges beschränktes lineares $T : X \to X$ derart gibt, dass m_{ij} das i-te Folgenglied der Folge $T((\delta_{jn})_{n \in \mathbb{N}})$ ist.

Hinweis für die letzte Teilaufgabe: Zeigen Sie zuerst, dass die Spalten von $(m_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ in X liegen. Definieren Sie T auf $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und setzen Sie T stetig fort.

5. Seien (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$, metrische Räume und setze für $f, g \in X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} \min(1, d_n(f_n, g_n))\right).$$

Man zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist, wobei die von d induzierte Topologie $\mathcal{T}(d)$ mit der Produkttopologie $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}(d_n)$ übereinstimmt.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass mit d auch $\min(1, d)$ eine Metrik abgibt, welche dieselbe Topologie wie d erzeugt.

6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis, dh. $\emptyset \notin \mathfrak{B} \neq \emptyset$ und $B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \Rightarrow \exists B_3 \in \mathfrak{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, so heißt $\mathfrak{B}$ gegen ein $x \in X$ konvergent (in Zeichen $\mathfrak{B} \to x$), wenn der von $\mathfrak{B}$ erzeugte Filter $[\mathfrak{B}] = \{F \subseteq X : \exists B \in \mathfrak{B} \text{ mit } B \subseteq F\}$ gegen x konvergiert.

Zeigen Sie, dass

(*i*) für eine Filterbasis $\mathfrak{B}$ und $x \in X$ gilt, dass $\mathfrak{B} \to x$ genau dann, wenn $\forall U \in \mathfrak{U}(X) \exists B \in \mathfrak{B} : B \subseteq U$.

(*ii*) wenn $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis, $x \in X$ und $Y \subseteq X$ mit $x \in Y$ und $B \subseteq Y$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ ist, $\mathfrak{B} \to x$ innerhalb von $(X, \mathcal{T})$ genau dann, wenn $\mathfrak{B} \to x$ innerhalb von $(Y, \mathcal{T}|_Y)$.

(*iii*) für ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ die Menge $\mathfrak{B}((x_i)_{i \in I}) := \{\{x_i : i \geq j\} : j \in I\}$ eine Filterbasis ist.

(*iv*) für ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ und $x \in X$ gilt, dass $x_i \to x,\ i \in I$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}((x_i)_{i \in I}) \to x$.

7. Sei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{E}$ versehen, dh. mit der von $d(x,y) = |x - y|$ erzeugten Topologie. Weiters sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$, welche definiert ist durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Schließlich sei $\mathbb{R}/\sim$ mit der finialen Topologie $\mathcal{E}_{fin}$ bezüglich der Abbildung $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim,\ x \mapsto [x]_\sim$ versehen.

Zeigen Sie, dass

(*i*) $(\mathbb{R}/\sim, \mathcal{E}_{fin})$ kompakt ist.

(*ii*) $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ offen ist, dh. $\pi(O)$ ist offen für $O \in \mathcal{E}$. (Hinweis: Schreiben Sie $\pi^{-1}(\pi(O))$ $(\subseteq \mathbb{R})$ als Vereinigung offener Mengen.)

(iii) durch $\phi([x]_\sim) = \exp(i2\pi x)$ eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{T}$ $(= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$ wohldefiniert ist, welche ein Homöomorphismus ist.

8. Zeigen Sie durch sorgfältige Argumentation:

   (i) Ist A eine kreisförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$, so gilt $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$ oder es gibt ein $r > 0$ derart, dass $A = U_r^{\mathbb{C}}(0)$ oder $A = K_r^{\mathbb{C}}(0)$.

   (ii) Mit A ist auch A° symmetrisch.

   (iii) Die Teilmengen $A := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| \leq |w|\}$ von $\mathbb{C}^2$ ist kreisförmig, wobei A° nichtleer und auch nicht kreisförmig ist.

9. Für einen topologischen Vektorraum $(X, \mathcal{T})$ sei $\mathfrak{W}(0)$ eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathfrak{U}(0)$ und sei $A \subseteq X$. Man zeige, dass

$$\overline{A} = \bigcap_{W \in \mathfrak{W}(0)} (A + W)$$