# Übungen zu Analysis 3, 3. Übung

1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Man zeige, dass dann jedes $Y \subseteq X$ versehen mit der Spurtopologie ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ist, falls $Y$ offen oder abgeschlossen in $(X, \mathcal{T})$ ist.

2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $(Y, \mathcal{O})$ seine Alexandroff Kompaktifizierung. Ist $(Z, \mathcal{W})$ ein kompakter Hausdorff-Raum, $R \subseteq Z$ eine offene Teilmenge und $h : (R, \mathcal{W}_R) \to (X, \mathcal{T})$ ein Homöomorphismus, so zeige man, dass die Funktion $f : Z \to Y$ definiert durch $f(x) = h(x)$ für $x \in R$ und $f(z) = \infty$ für $z \in Z \setminus R$ stetig ist. Falls dabei $Z \setminus R$ einpunktig ist, so zeige man weiters, dass $f$ auch ein Homöomorphismus ist.

   Anmerkung: Für $h : (0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{T} : z \neq 1\}$ mit $h(t) = \exp(\mathrm{i}t)$ zeigt dieses Übungsbeispiel, dass die Einpunktkompaktifizierung von $(0, 2\pi)$ zu $\mathbb{T}$ homöomorph ist.

3. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher nicht kompakt ist. Zeigen Sie, dass $I := \{(x, K) : x \in X \setminus K,\ K \text{ ist kompakte Teilmenge von } X\}$ mit $(x_1, K_1) \preceq (x_2, K_2) :\Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ zu einer gerichteten Menge wird. Zeigen Sie für eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ auch, dass

   $$\forall \epsilon > 0\ \exists K \text{ kompakt } \forall x \in X \setminus K : |g(x)| < \epsilon$$

   genau dann, wenn $\lim_{(x,K) \in I} g(x) = 0$.

4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein beliebiger topologischer Raum. Zeigen Sie in dieser allgemeinen Situation, dass $C_0(X, \mathbb{R})$ $(C_0(X, \mathbb{C}))$ ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(X, \mathbb{R})$ $(C_b(X, \mathbb{C}))$ ist. Zeigen Sie weiters, dass diese Räume übereinstimmen, wenn $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

5. Sei $\mathbb{D}$ der offene in Einheitskreis $U_1^{\mathbb{C}}(0)$ und $\overline{\mathbb{D}}$ der abgeschlossene Einheitskreis $K_1^{\mathbb{C}}(0)$ um die Null in $\mathbb{C}$ bzgl. $|.|$.

   Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{C}[z]|_{\overline{\mathbb{D}}}$ aller Funktionen $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ von Polynombauart $f(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j z^j$ eine Algebra in $C_b(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ abgibt. Zeigen Sie auch, dass diese Algebra nicht dicht in $C_b(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ ist.

   Welche Voraussetzung der komplexen Version des Satzes von Stone-Wierstrass ist nicht erfüllt?

   Hinweis: Für das Faktum, dass $\mathbb{C}[z]|_{\overline{\mathbb{D}}}$ nicht dicht ist, untersuche man einen gleichmäßigen Grenzwert $f \in C_b(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C})$ einer Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}[z]|_{\overline{\mathbb{D}}}$ punkto Holomorphie auf $\mathbb{D}$!

6. Für $\epsilon > 0$, $0 < a \leq 1 - \epsilon$ und $M = [0, 1 - \epsilon]$ zeige man dass die Abbildung $T : M \to \mathbb{R}$ definiert durch $T(x) = \frac{a + x^2}{2}$ eine strikte Kontraktion ist, wobei $T(M) \subseteq M$. Was erhält man für eine Aussage mit dem Banachschen Fixpunktsatz angewandt auf diese Abbildung $T$?

7. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(x) = x\sin(x) + \cos(x) - \frac{\pi}{4}\sin(x)$$

das Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ in sich abbildet, und dass $g : I \to I$ genau einen Fixpunkt in $I$ hat.

Hinweis: $g(x) - g(y) = \int_y^x g'(t)\,\mathrm{d}t$.

8. Man betrachte die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Psi(b_0, \ldots, b_{n-1}, x)^T = b_0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n \, .$$

Man wende den Hauptsatz über implizite Funktionen an, um folgendes zu zeigen:

Hat das Polynom $a_0+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ genau $n$ verschiedene Nullstellen, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass wenn $|a_0 - b_0| < \delta, \ldots, |a_{n-1} - b_{n-1}| < \delta$ das Polynom $b_0+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+x^n$ auch $n$ verschiedene Nullstellen hat, wobei diese Nullstellen stetig differenzierbar von $(b_0, \ldots, b_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ abhängen.

9. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x, y, z)^T = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + z^2 - 5 \\ xy - 1 \end{pmatrix} \, .$$

Für welche $(x, y, z)^T$ ist $F(x, y, z)^T = 0$ eindeutig nach $(y, z)$ auflösbar, sind also die dem Hauptsatz über implizit definierte Funktionen entsprechenden Bedingungen erfüllt?