# Übungen zu Analysis 3, 2. Übung

1. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel der vorherigen Übung zeige man, dass $M_1 \cdot M_2$ abgeschlossen ist, wenn eine der beiden Mengen abgeschlossen und die andere kompakt ist.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $z$ im Abschluss von $M_1 \cdot M_2$ ist, und betrachten Sie ein Netz, dass aus $M_1 \cdot M_2$ heraus gegen $z$ konvergiert!

   Anmerkung: $M_1 \cdot M_2$ ist am Allgemeinen nicht abgeschlossen, wenn man nur fordert, dass $M_1$ und $M_2$ abgeschlossen sind. Beispielsweise sind in der topologischen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ die Mengen $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{2}\,\mathbb{Z}$ abgeschlossen. Die Menge $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$ ist aber dicht in $\mathbb{R}$ und damit nicht abgeschlossen.

2. Sei $E$ eine unendliche Menge und sei $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ der Banachraum aller reellwertigen und beschränkten Funktion auf $E$ versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_A$ jeder Teilmenge $A \subseteq E$, also $\mathbb{1}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\mathbb{1}_A(x) = 0$ für $x \notin A$, zu $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ gehört. Weiters berechne man $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|_\infty$ für Teilmengen $A, B \subseteq E$ mit $A \neq B$. Schließlich zeige man, dass die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(0)$ um die Nullfunktion in $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ nicht total beschränkt ist.

   Hinweis: Falls $K_1(0) = M_1 \cup \cdots \cup M_n$, so enthält mindestens eine Menge $M_j$ mindestens zwei verschiedene charakteristische Funktionen. Warum?

3. Man gebe samt Begründung an, ob $\mathcal{G} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ total beschränkt ist, wobei

   (i) $K = [0, 1]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\}$

   (ii) $K = [0, 1]$ und $\mathcal{G} = \{f \in C(K, \mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1\}$

   (iii) $K = [0, 1]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

   (iv) $K = [0, 2]$ und $\mathcal{G} = \{(t \mapsto \frac{t^n}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$

4. Ist $\mathcal{G} = \{(t \mapsto t^n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C([0, 1), \mathbb{R})$ gleichgradig stetig? Begründung!

5. Sei $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Weiters sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Zu einer Zerlegung $\mathcal{Z} = \{\xi_j : j = 0, \ldots, n(\mathcal{Z})\}$ von $[0, 1]$, also $0 = \xi_0 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{Z})} = 1$, definieren wir $h_\mathcal{Z} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ induktiv durch ($j = 0, \ldots, n(\mathcal{Z}) - 1$)

   $$h_\mathcal{Z}(t) := y_j + (t - \xi_j) f(\xi_j, y_j) \quad \text{für} \quad t \in [\xi_j, \xi_{j+1}],$$

   und $y_{j+1} := h_\mathcal{Z}(\xi_{j+1})$. Skizzieren Sie $h_\mathcal{Z}$ und zeigen Sie, dass für $t \in [0, 1]$

   $$h_\mathcal{Z}(t) = y_0 + \int_0^t g_\mathcal{Z}(s)\, \mathrm{d}s,$$

   wobei $g_\mathcal{Z}(s) = f(\xi_j, y_j)$ für $s \in (\xi_j, \xi_{j+1}]$ und $g_\mathcal{Z}(0) = f(\xi_0, y_0)$. Zeigen Sie auch, dass die Menge $\{h_\mathcal{Z} : \mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}\}$ von Funktionen gleichgradig stetig ist und dass $\sup_{\mathcal{Z} \in \mathfrak{Z}} \|h_\mathcal{Z}\|_\infty < +\infty$.

6. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel sei $\mathcal{Z}_m, m \in \mathbb{N}$, eine Folge von Zerlegungen von $[0,1]$ mit $|\mathcal{Z}_m| \to 0$ für $m \to 0$, wobei $|\mathcal{Z}| := \max_{j=1,\dots,n(\mathcal{Z})} |\xi_j - \xi_{j-1}|$. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von $f|_{[0,1]\times[-N,N]}$ mit hinreichend großem $N$, dass

$$\lim_{m\to\infty} \big(g_{\mathcal{Z}_m}(s) - f(s, h_{\mathcal{Z}_m}(s))\big) = 0$$

und zwar gleichmäßig auf $[0,1]$. Schließlich zeige man mit Hilfe des Satzes von Ascoli die Existenz eines stetigen $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(t) = y_0 + \int_0^t f(s, h(s))\,\mathrm{d}s \quad \text{für} \quad t \in [0,1]\,.$$

Anmerkung: Differenzieren nach $t$ zeigt, dass $h$ die Lösung der Differentialgleichung $h'(x) = f(x, h(x))$ mit Anfangsbedingung $h(0) = y_0$ ist, was eine elementare Version des *Satzes von Peano* über die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen darstellt.

7. Zeigen Sie, dass für einen kompakten topologischen Raum $K$ aus der Existenz einer punktetrennenden Algebra $\mathcal{A} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ schon folgt, dass $K$ Hausdorffsch ist.

Anmerkung: Für kompakte Hausdorff-Räume ist die Algebra $C(K,\mathbb{R})$ tatsächlich punktetrennend. Um das zu zeigen, benötigt man das Lemma von Urysohn.

8. Zeigen Sie, dass der Raum $\mathcal{P} := \{g \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}) : g(x+2\pi) = g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$, also alle $2\pi$-periodischen, stetigen und komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, versehen mit $\|.\|_\infty$, die lineare Hülle der Funktionen $t \mapsto \exp(itn),\ n \in \mathbb{Z}$, dicht enthält.

Hinweis: Man zeige zuerst, dass $\mathcal{P}$ und $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$ Vektorräume sind. Weiters zeige man, dass genau dann $g \in \mathcal{P}$, wenn $g(x) = f(\exp(\mathrm{i}x))$ für eine Funktion $f \in C(\mathbb{T},\mathbb{C})$. Schließlich weise man nach, dass $\Phi : C(\mathbb{T},\mathbb{C}) \to \mathcal{P}$ mit $\Phi(f) = g$, wobei $g(t) = f(\exp(\mathrm{i}t))$, ein mit der Norm verträglicher (isometrischer) Vektorraumisomorphismus, also eine lineare Bijektion, ist. Verwenden Sie Schließlich Beispiel 12.18.10.

Anmerkung: Da die Funktionen der Bauart $t \mapsto \exp(itn)$ alle unendlich oft differenzierbar sind, ist auch die Menge aller $2\pi$-periodischen und unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dicht in $\mathcal{P}$.

9. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Unterhalbgruppe bzgl. $+$, also $n, m \in M \Rightarrow m + n \in M$. Ist dann die lineare Hülle aller Funktionen $[0,+\infty) \ni x \mapsto \exp(-nx),\ n \in M$, dicht in $C_0([0,+\infty),\mathbb{R})$? Begründung!