Übungen zu Analysis 3, 1. Übung

1. Seien $(X, \mathcal{T})$, (Y, O) topologische Räume und $f : X \to Y$ injektiv. Zeigen Sie, dass $f : (X, \mathcal{T}) \to (f(X), O_{f(X)})$ genau dann ein Homöomorphismus ist, wenn $\mathcal{T}$ mit der von $f : X \to (Y, O)$ auf X induzierten initialen Topologie übereinstimmt.

2. Zeigen Sie, dass für topologische Räume X, Y, für $x \in X$ und für jedes bezüglich der Produkttopologie offene $O \subseteq X \times Y$ gilt, dass $(\{x\} \times Y) \cap O$ in der Form $\{x\} \times P$ mit einem offenen $P \subseteq Y$ dargestellt werden kann.

3. Für $i \in I$ seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume und B_i Teilmenge von X_i. Man zeige, dass der Abschluss von $\prod_{i \in I} B_i$ in $\prod_{i \in I} X_i$ bezüglich der Produkttopologie mit $\prod_{i \in I} \overline{B_i}^{\mathcal{T}_i}$ übereinstimmt.

4. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Zeigen Sie, dass $(\prod X_i, \prod \mathcal{T}_i)$ Hausdorffsch ist, wenn alle Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ Hausdorffsch sind.

5. Sei X eine nichtleere Menge. Ist die sogenannte cofinite Topologie

   $$\mathcal{T} := \{ A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich} \} .$$

   Hausdorffsch? Erfüllt sie das Trennungsaxiom (T3)? Erfüllt sie das Trennungsaxiom (T4)? Begründungen!

6. Sei $\mathcal{T}$ die cofinite Topologie aus der vorherigen Übungsaufgabe. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen Teilmengen und den Abschluss einer beliebigen Teilmenge von X! Ist $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ kompakt? Für welche X ist $\mathcal{T}$ metrisierbar, gibt es also eine Metrik d mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$?

7. Indem man eine offene Überdeckung angibt, die keine endliche Teilüberdeckung hat, zeige man, dass $(0, 1]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ versehen mit der Euklidischen Topologie $\mathcal{T}^1$ nicht kompakt ist, und dass eine unendliche Menge X versehen mit der diskreten Topologie nicht kompakt ist.

8. Sei $(-\infty, +\infty]$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}^> = \{(a, +\infty] : a \in [-\infty, +\infty]\}$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge K von $(-\infty, +\infty]$ genau dann bezüglich $\mathcal{T}^>$ kompakt ist, wenn K ein Minimum hat.

   Sei schließlich $(X, \mathcal{T})$ ein weiterer topologischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt, und $f : X \to (-\infty, +\infty]$ halbstetig von unten; siehe Aufbau Analysis. Zeigen Sie, dass dann $f(K)$ ein Minimum hat, also $f(x) \leq f(t)$ für alle $t \in K$ und ein $x \in K$ gilt.

9. Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ kompakte topologische Räume. Man zeige ohne dem Satz von Tychonoff, dass $X_1 \times X_2$ versehen mit der Produkttopologie kompakt ist!

   Hinweis: Siehe Fakta 8.7.8 für den metrischen Fall!

10. Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also eine Gruppe versehen mit einer Topologie derart, dass $(g, h) \mapsto gh$ als Abbildung von $G \times G$, versehen mit der Produkttopologie, nach G und $g \mapsto g^{-1}$ als Abbildung von G nach G stetig sind. Weiters seien M_1, M_2 Teilmengen von G.

Weisen Sie nach, dass für $x, y \in G$, eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ und Netze $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$ in G über dieser gerichteten Menge mit $x_i \to x$ und $y_i \to y$ immer $x_i y_i \to xy$ gilt.

Weiters zeige man, dass wenn M_1 und M_2 kompakt sind, dann auch $M_1 \cdot M_2$ eine kompakte Teilmenge von G ist.