Übungen zu Analysis 3, 7. Übung

1. Beweisen Sie, dass $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z = r\exp(\mathrm{i}\phi) \mapsto \ln r + \mathrm{i}\phi$ $\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$-$\mathcal{A}(\mathcal{T}^2)$-messbar ist, wenn man etwa festlegt, dass der Winkel ϕ aus $[0, 2\pi)$ ist.

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Stetigkeit von $\log : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \to \mathbb{C}$.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ gegeben durch $f(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ (größte ganze Zahl $\leq \frac{1}{x}$) für $x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ sonst. Ist $f^{\frac{1}{2}}$ auf $\mathbb{R}$ integrierbar, gilt also $\int_{\mathbb{R}} f^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\lambda < +\infty$? Begründen Sie ihre Antwort!

3. Man betrachte
$$f(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \,.$$
   Für welche $t \in \mathbb{R}$ existiert dieses Integral als uneigentliche Riemann-Integral und für welche t existiert das entsprechende Lebesgue-Integral?

4. Man verwende den Satz von der monotonen Konvergenz, um für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$
$$I(t) := \int_{(0,+\infty)} \mathrm{e}^{-t^2 x} \frac{\mathrm{e}^{2tx} - \mathrm{e}^{-2tx}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}\lambda(x) = 4t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1 + t^2)^2 - 4t^2}$$
   zu zeigen. Schließlich zeige man mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz angewandt auf das Zählmaß, dass $\lim_{t\to 1} I(t) - \frac{4t}{(t^2-1)^2} = \frac{3}{4}$.

   Hinweis: Geometrische Reihe.

5. Sei $\mu : \mathcal{A}(\mathcal{T}^1) \to [0, +\infty)$ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für $y \in (0, 1)$ setzen wir
$$g(y) := \int_{\mathbb{R}} (1 + t^2) \left(\frac{1}{\pi} \arctan \frac{b - t}{y} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{a - t}{y} \right) \mathrm{d}\mu(t).$$
   Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von der beschränkten Konvergenz, dass
$$\lim_{y \searrow 0} g(y) = \int_{(a,b)} (t^2 + 1) \, \mathrm{d}\mu(t) + \frac{1}{2} \int_{\{a,b\}} (t^2 + 1) \, \mathrm{d}\mu(t) \,.$$
   Hinweis: Berechnen Sie $\lim_{y \searrow 0}$ des Integranden. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass der Integrand durch eine von y unabhängige Konstante beschränkt ist. Unterscheiden Sie dazu die Fälle, $t \in [a - 1, b + 1]$, $t \in (-\infty, a - 1)$ und $t \in (b + 1, +\infty)$.

6. Für $a, t > 0$ sei
$$u(t, a) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2 + x^2} \cos(ax) \, \mathrm{d}x \,.$$
   Zeigen Sie, dass $u : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist, und dass für jedes feste $a > 0$ die Funktion $t \mapsto u(t, a)$ zweimal differenzierbar ist.

Weiters berechne man $\lim_{a \to 0+} u(t, a)$ und $\lim_{a \to +\infty} u(t, a)$.

Hinweis: Für $\lim_{a \to +\infty} u(t, a)$ verwende man die Tatsache, dass $\lim_{|y| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(ixy)\, \mathrm{d}\lambda(x) = 0$ für jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Wir werden diesen Sachverhalt im Kapitel über die Fouriertransformation herleiten.

7. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, a) = a^2 u(t, a)$$

und leite daraus $u(t, a) = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-at}$ her.

Hinweis: Man wende zweimal partielle Integration auf $u(t, a)$ an, und vergleiche das Ergebnis mit $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, a)$. Für $u(t, a) = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-at}$ verwende man Beispiel 9.3.21 mit $f(t) = (u(t, a), \frac{\partial u(t,a)}{\partial t})^T$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Man zeige, dass $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2} + itx}\, \mathrm{d}\lambda(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ist, die $f'(t) + tf(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeigen Sie mit Hilfe von Bemerkung 7.5.6, dass infolge $f(t) = \sqrt{2\pi} \exp(-\frac{t^2}{2})$, $t \in \mathbb{R}$.

9. Zeigen Sie, dass die Gammafunktion $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$

$$\Gamma(z) = \int_{(0,+\infty)} \mathrm{e}^{-x} x^{z-1}\, \mathrm{d}\lambda(x)$$

wohldefiniert und holomorph ist, wobei $x^{z-1} := \exp((z-1) \cdot \ln x)$. Berechnen Sie $\Gamma'(z)$ und zeigen Sie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.