Übungsaufgaben zur EIMA

1. Zeige, dass die folgenden Aussageformen allgemeingültig sind:
   - $A \Rightarrow A \vee B$
   - $(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   - $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$
2. Beantworte für die folgenden Aussageformen die beiden Fragen: Ist die Aussageform allgemeingültig ? Gibt es Aussagen A und B für die die Aussageform wahr ist ?
   - $(\neg(A \wedge B) \wedge B) \Rightarrow A$
   - $(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg(A \wedge \neg B)$
   - $(\neg A) \wedge A$
3. Seien M, N Mengen. Zeige, dass
$$M \subseteq N \;\Leftrightarrow\; M \cap N = M \;\Leftrightarrow\; M \cup N = N$$
4. Sei X eine Menge, und $M, N \subseteq X$.
   - Zeige, dass $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$. Welche Tautologie(n) haben Sie im Beweis benützt ?
   - Welche Mengenbeziehung erhält man, wenn man die Tautologie $\neg(A \wedge B) \wedge B \;\Rightarrow \neg A$ benützt ?
5. (a) Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage $\exists! k \in \mathbb{N} : k < n$?
   (b) Für welche Zahlen $k \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage $\exists! n \in \mathbb{N} : k < n$?
   (c) Ist die Aussage $\exists! n \in \mathbb{N} : \big(\exists! k \in \mathbb{N} : k < n\big)$ wahr?
   (d) Ist die Aussage $\exists! k \in \mathbb{N} : \big(\exists! n \in \mathbb{N} : k < n\big)$ wahr?
6. Diese Aufgabe soll in Erinnerung rufen, dass die Aussagen
$$(\forall x : A(x)) \Rightarrow B \quad \text{und} \quad \forall x : (A(x) \Rightarrow B)$$
   im Allgemeinen nicht äquivalent sind. Die Schreibweise $\forall x : A(x) \Rightarrow B$ lädt zu Missverständnissen ein. Verwenden Sie daher immer Klammern !

   Wir betrachten nun Aussagen A_0, B_0, A_1, B_1, $\ldots$, die alle einen Wahrheitswert haben. Weiters sei:
$$\begin{aligned} C_1 &:= \;\forall n : (A_n \Rightarrow B_n) \\ C_2 &:= \;(\forall n : A_n) \Rightarrow (\forall n : B_n) \\ C_3 &:= \;(\exists n : A_n) \Rightarrow (\exists n : B_n) \\ C_4 &:= \;\exists n : (A_n \Rightarrow B_n) \end{aligned}$$
   (a) Zeigen Sie, dass die Aussage $(C_3 \Rightarrow C_4)$ jedenfalls wahr ist, egal was die Wahrheitswerte der Aussagen A_i und B_j sind.
   (Dazu ist eine Fallunterscheidung hilfreich, z.B.: Erster Fall: Die Aussage $(\exists n : B_n)$ ist wahr. Zweiter Fall: Die Aussage $(\exists n : B_n)$ ist falsch.)
   (b) Zeigen Sie, dass die Aussage $(C_4 \Rightarrow C_3)$ im Allgemeinen nicht wahr ist, indem Sie ein konkretes Gegenbeispiel (also Wahrheitswerte für alle A_i und alle B_j) angeben.
   (c) Für Ehrgeizige: Von den 12 möglichen Paaren $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ mit $i \neq j$ gibt es 5 Paare, für die $C_i \Rightarrow C_j$ immer wahr ist (wie z.B. $i = 3, j = 4$) und 7 weitere, für die $C_i \Rightarrow C_j$ im Allgemeinen falsch ist.
   Finden Sie diese 7 Paare, und geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

7. Seien $A(x,y)$ und $B(x,y)$ Aussagen, die $\forall x\,\forall y : \Big(A(x,y) \Leftrightarrow \neg B(x,y)\Big)$ erfüllen. Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen eine äquivalente Aussage an, in der das Negationssymbol nicht vorkommt (und auch nicht der Quantor $\nexists$).
$$\neg\forall x\,\exists y : A(x,y) \qquad \neg\exists x\,\forall y : A(x,y)$$

8. Seien A und B wie in der vorigen Aufgabe. Geben Sie eine zu $\nexists x\,\big(\nexists y : A(x,y)\big)$ äquivalente Aussage an, die weder Negationssymbol noch $\nexists$ verwendet.
Für Ehrgeizige: Finden Sie eine Aussage $A(x,y)$, sodass die beiden Aussagen
$$\nexists x\,\big(\nexists y : A(x,y)\big) \qquad\qquad \nexists y\,\big(\nexists x : A(x,y)\big)$$
nicht äquivalent sind.

9. Betrachte die Aussage

   A: "Sei $\sim$ eine Relation auf einer nichtleeren Menge X. Ist $\sim$ symmetrisch und transitiv, so ist $\sim$ auch reflexiv."

   (i) Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort "wahr" lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort "falsch", finde ein Gegenbeispiel.

   (ii) Ist der folgende Beweis der Aussage A wahr oder falsch?

   Wir müssen zeigen dass stets $x \sim x$ gilt. Sei $x \sim y$, dann ist wegen der Symmetrie auch $y \sim x$, und wegen der Transitivität daher auch $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv.

   (iii) Falls Ihre Antwort in (ii) "falsch" lautet, finde den Fehler im Beweis.

   (iv) Muss man den in (ii) genannten Beweis lesen um zu entscheiden ob er wahr oder falsch ist ?

10. Seien M, N Mengen, und $f : M \to N$ eine Funktion. Wir definieren eine Relation $\ker f$ auf M als
$$\ker f := \big\{(x,y) \in M \times M :\ f(x) = f(y)\big\}.$$
Zeige, dass $\ker f$ eine Äquivalenzrelation ist.

11. Eine unendlich große Menge von Mathematikern spielt mit einem Physiker ein Spiel. Die Spielregeln sind wie folgt: Zu Spielbeginn setzt der Physiker jedem Mathematiker einen Hut auf der rot oder grün sein kann. Jeder der Mathematiker sieht wohl die Farbe der Hüte aller anderen, nicht jedoch die Farbe seines eigenen Hutes. In geheimer Abstimmung schreibt dann jeder der Mathematiker auf einen Zettel, welche Farbe sein Hut (seiner Meinung nach) hat. Die Mathematiker gewinnen, wenn sich nur endlich viele von ihnen irren. Dabei dürfen sich die Mathematiker vor Spielbeginn auf eine Strategie einigen, während des Spiels ist jedoch jegliche Kommunikation verboten[1].

    Gibt es eine Strategie, sodass die Mathematiker sicher gewinnen? Falls ja, finde eine.

    Hinweis. Diese Aufgabe ist schwierig.

12. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Weiters seien $M, N \subseteq X$.

    - Zeige, dass $M \subseteq N \;\Rightarrow\; f(M) \subseteq f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Implikation ? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
    - Zeige, dass $f(M \cup N) \subseteq f(M) \cup f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion ? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
    - Zeige, dass $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion ? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.

13. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Weiters sei I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Teilmenge von Y. Zeige, dass $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(M_i)$ und $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(M_i)$.

[1] *Jegliche* Kommunikation ist verboten, also auch nichtverbale, wie etwa: winken wenn ich einen roten Hut sehe, oder das Spielfeld verlassen, wenn ich einen grünen Hut sehe, etc.

14. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Weiters sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Partition von Y. Zeige, dass $\{f^{-1}(M) : \; M \in \mathcal{Q}\} \setminus \{\emptyset\}$ eine Partition von X ist.

15. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Zeige

    - f ist surjektiv $\Leftrightarrow \big[\forall B \subseteq Y : f(f^{-1}(B)) = B\big] \Leftrightarrow f^{-1}$ ist injektiv
    - f ist injektiv $\Leftrightarrow \big[\forall A \subseteq X : f^{-1}(f(A)) = A\big] \Leftrightarrow f^{-1}$ ist surjektiv

16. Seien X, Y Mengen, und $f, g \subseteq X \times Y$ Funktionen von X nach Y. Zeige, dass aus $f \subseteq g$ bereits $f = g$ folgt.

17. Finde eine Menge M und zwei Funktionen $f, g : M \to M$, sodass $g \circ f = f$, wobei aber $g \neq \mathrm{id}_M$. Kann man so ein Beispiel auch dann konstruieren, wenn man zusätzlich verlangt dass f injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) ist ?

18. Eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ heißt kommutativ, wenn für je zwei Elemente $x, y \in G$ gilt dass $x \cdot y = y \cdot x$. Für welche Mengen M ist die Permutationsgruppe $\mathrm{Sym}(M)$ kommutativ ?

19. Ein Tupel $(K, +, *, 0, e)$ heißt ein Körper, wenn $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, *, e)$ kommutative Gruppen sind und das Distributivgesetz $\forall x, y, z \in K : \; x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ gilt.

    Betrachte die Menge $K = \{0, 1\}$, und definiere $+, * : K \times K \to K$ als

    $$x + y := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \qquad x * y := \begin{cases} 0, & x = 0 \vee y = 0 \\ 1, & x = y = 1 \end{cases}$$

    Zeige, dass $(K, +, *, 0, 1)$ ein Körper ist.

20. Sei M eine nichtleere Menge. Für $A \subseteq M$ bezeichne mit $\mathbb{1}_A$ die charakteristische Funktion der Menge A, das ist die Funktion $\mathbb{1}_A : M \to \{0, 1\}$ die definiert ist als

    $$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

    Weiters bezeichne mit $\{0, 1\}^M$ die Menge aller Funktionen von M nach $\{0, 1\}$. Auf $\{0, 1\}^M$ definieren wir eine Addition und Multiplikation punktweise, sprich, durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ sowie $(f \cdot g)(x) := f(x) * g(x)$ für $x \in \{0, 1\}$. Betrachte nun die Funktion

    $$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(M) & \to & \{0, 1\}^M \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$$

    - Zeige, dass
      $$\Phi(A \triangle B) = \Phi(A) + \Phi(B), \quad \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B),$$
      wobei $\triangle$ die symmetrische Differenz bezeichnet. Zeige weiters, dass Φ injektiv ist. Ist Φ surjektiv ?
    - Zeige, dass $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ eine kommutative Gruppe ist.
    - Zeige, dass $\cap$ distributiv über $\triangle$ ist ($\forall x, y, z \in \mathcal{P}(M) : x \cap (y \triangle z) = (x \cap y) \triangle (x \cap z)$), und es ein neutrales Element bzgl. $\cap$ gibt ($\exists\, e \in \mathcal{P}(M) \, \forall x \in \mathcal{P}(M) : \; e \cap x = x \cap e = x$). Welche Elemente von $\mathcal{P}(M)$ haben ein Inverses bezüglich $\cap$?

    Hinweis. Hier kann man sich viel Arbeit ersparen, wenn man die vorherige Aufgabe verwendet.