Übungen zu Analysis 1, 5. Übung

1. Welche der folgenden Paare sind metrische Räume, und warum oder warum nicht?

   (i) $\langle \mathbb{C}^n, d \rangle$,
   $d((z_j)_{j=1}^n, (w_j)_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n |z_j - w_j|$, $(z_j)_{j=1}^n, (w_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$.

   (ii) $\langle \mathbb{R}^+, d \rangle$, wobei $d(x, y) = xy$.

   (iii) $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, d \rangle$, wobei $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$, $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Sind folgende Folgen konvergent/divergent? (Divergent bedeutet nicht konvergent!) Begründen Sie ihre Antwort!

   (i) $\left(2 + (-1)^n \frac{3}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, versehen mit der euklidischen Metrik.

   (ii) $\left((-1)^n + \frac{1}{n^6}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, versehen mit der euklidischen Metrik.

3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum $\langle X, d \rangle$ und $x \in X$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ genau dann, wenn es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(x_n, x) < \frac{1}{k}$ für alle $n \geq N$.

   Zudem zeigen Sie mit Hilfe der in Kapitel 2 gezeigten Eigenschaften der Abbildung $\mathbb{R}_+ \cup \{0\} \ni s \mapsto s^k \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, dass für $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0, +\infty)\,(\subseteq \mathbb{R})$ versehen mit der Euklidischen Metrik d_2 genau dann gegen 0 konvergiert, wenn $(t_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

4. Sei $M \neq \emptyset$ versehen mit der diskreten Metrik d. Zeigen Sie, dass eine Folge in M genau dann konvergiert, wenn sie ab einem gewissen Index konstant ist.

5. Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

   (i) $(\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik.

   (ii) $(\frac{(-1)^n}{3n+1} + \frac{\mathrm{i}}{3^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ versehen mit der euklidischen Metrik.

6. Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

   (i) $\left((\frac{1}{2} + (-1)^n \mathrm{i}\frac{1}{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, versehen mit der euklidischen Metrik.

   (ii) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, versehen mit der euklidischen Metrik, wobei $S_n = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j(j+1)}\right)$.
   Beachte: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

7. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen ein x konvergiert, wenn $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ beide gegen x konvergieren.

   Anmerkung: Hat man zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die beide gegen denselben Grenzwert x konvergieren, so zeigt dieses Beispiel, dass die gemischte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen x konvergiert, wobei $c_{2k} = a_k$, $k \in \mathbb{N}$ und $c_{2k-1} = b_k$, $k \in \mathbb{N}$.

8. Geben Sie ein $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(\frac{1}{n(k)} + \mathrm{i}^{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\frac{1}{n} + \mathrm{i}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ derart an, dass
$$d_2(1, \frac{1}{n(k)} + \mathrm{i}^{n(k)}) \geq \epsilon \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

9. Zifferndarstellung reeller Zahlen:

   Sei $b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$. Wir betrachten Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ bestehend aus ganzen, nicht negativen Zahlen mit $z_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ für $n \geq 1$. Weiters fordern wir, dass die Folge nicht ab einem gewissen Index aus lauter Zahlen $b-1$ besteht, also $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : z_n \neq b-1$. Die Menge aller solchen Folgen bezeichnen wir mit D.

   Man zeige: Zu jeder reellen Zahl $x \geq 0$ gibt es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in D$ derart, dass die durch

   $$a_n = z_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{1}{b^j},$$

   definierte Folge rationaler Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

   Hinweis: Für $x \geq 0$ setze $z_0 = \lfloor x \rfloor$ (größte ganze Zahl $\leq x$). Dann definiere z_n rekursiv derart, dass $a_n \leq x$ und dass der Abstand von x zu a_n möglichst klein wird. Dieser Abstand ist dann $\leq b^{-n}$.

   Bemerkung: Für $b = 10$ erhält man die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl $x \geq 0$. Die Dezimaldarstellung einer negativen reellen Zahl x ist einfach minus die Dezimaldarstellung von $-x$.