Übungen zu Analysis 1, 4. Übung

1. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Ist $M \subseteq K$ nach oben beschränkt und bezeichnet O die Menge aller oberen Schranken von M, so zeige man, dass $O \cap M = \emptyset$ oder $O \cap M = \{z\}$ und dass die zweite Möglichkeit genau dann eintritt, wenn M ein Maximum hat.

2. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein archimedisch angeordneter Körper. Man bestimme die Menge aller oberen Schranken und die Menge aller unteren Schranken der Teilmenge
$$M := \{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [\frac{1}{2}, 1) \subseteq K\,.$$
Hat diese Menge ein Infimum bzw. ein Supremum in K? Falls ja, dann bestimme man diese und überprüfe, ob diese auch Minimum bzw. Maximum von M sind!

3. Sei $p(x) = a_k x^k + \cdots + a_0$ ein Polynom mit Koeffizienten a_j aus einem archimedisch angeordneten Körper K, wobei $a_k > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $p(n) > 0$ für alle $n \geq N,\ n \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass man $a_k = 1$ annehmen kann, und schließen Sie von $n > k \max(|a_{k-1}|, \ldots, |a_0|)$ auf $p(n) > 0$.

4. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dieser enthält bekanntlich $\mathbb{Q}$ – genauer, eine Kopie der rationalen Zahlen. Ist nun $\mathbb{Q} \subsetneq K$, so zeige man, dass es sogar ein $\eta \in K \setminus \mathbb{Q}$ gibt mit $0 < \eta < 1$.

   Weiters zeige man, dass zwischen je zwei $x < y$ aus K ein nicht rationales ξ mit $x < \xi < y$ gibt.

   Hinweis: Zeigen Sie die letzte Behauptung zunächst für $x, y \in \mathbb{Q}$.

5. Man zeige für $x \in \mathbb{R},\ x > 0$, und $r, s \in \mathbb{Q}$, dass $x^{-r} = \frac{1}{x^r},\ x^r x^s = x^{r+s},\ (x^r)^s = x^{rs}$.

6. Betrachte die quadratische Ungleichung ($p, q \in \mathbb{R}$)
$$x^2 + px + q > 0\,.$$
Man beweise, dass die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die diese Ungleichung stimmt, mit $\mathbb{R}$ übereinstimmt, wenn $x^2 + px + q$ keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat, und anderenfalls gleich $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ ist, wobei

   $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

   Wie schauen die Lösungsmengen für die Ungleichungen $x^2 + px + q \geq 0$, $x^2 + px + q \leq 0$, $x^2 + px + q < 0$ aus?

   Hinweis: Man beachte $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$ und verwende die Tatsache, dass $x \mapsto x^2$ die Menge $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ abbildet.

7. Man zeige, dass $|zw| = |z||w|$, $|z + w| \leq |z| + |w|$ und $||z| - |w|| \leq |z - w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$.

8. Man berechne $\frac{3+\mathrm{i}9}{-2-\mathrm{i}3}$, $(-1+\mathrm{i}2)^{-2}$, $(1+\mathrm{i})^2$, $\sum_{j=0}^{17} \mathrm{i}^j$. Man stelle also diese komplexen Zahlen in der Form $a + \mathrm{i}b$ dar.

9. Sei $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Man zeige mit den Mitteln der Vorlesung also ohne Polarkoordinaten, dass z Quadratwurzeln hat, dass es also ein $w \in \mathbb{C}$ gibt mit $w^2 = z$. Wie viele Lösungen gibt es? Man berechne damit alle Quadratwurzeln von i und von $3 - \mathrm{i}2$.

   Hinweis: Man setze $w = c + \mathrm{i}d$ unbestimmt an und löse die gewünschte Gleichung.

   Anmerkung: Die Schreibweise $\sqrt{z}$ für w ist hier, also im Falle $z \in \mathbb{C}$, nicht angebracht, da es für $z \neq 0$ immer zwei Lösungen für $w^2 = z$ gibt, wobei keine der beiden ausgezeichnet ist. Für reelle Zahlen $t \geq 0$ steht $\sqrt{t}$ für die eindeutige nichtnegative s Lösung der Gleichung $s^2 = t$.

10. Man betrachte die Intervalle $I_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$ und bestimme $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

    Weiters sei $B_n := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \in I_n\}$. Man bestimme $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ und skizziere die Lage von B und B_n in der Zahlenebene.