Übungen zu Analysis 1, 3. Übung

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{n}) .$$

2. Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper. Man bestimme Minimum, Maximum, Infimum und Supremum (falls existent) der Menge

$$\left[-1_K, \frac{1_K}{2 \cdot 1_K}\right] \cup \left\{1_K + \frac{1_K}{n \cdot 1_K} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2 \cdot 1_K, 4 \cdot 1_K) .$$

Begründen Sie ihre Antwort in mathematisch stichhaltiger Art und Weise!

3. Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper. Man bestimme Minimum, Maximum, Infimum und Supremum (falls existent) der Menge

$$\bigcup_{0<x<y<1_K} \left\{t \in K : \frac{1_K}{y} < t < \frac{1_K}{x}\right\} .$$

Begründen Sie ihre Antwort in mathematisch stichhaltiger Art und Weise!

4. Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein archimedisch angeordneter Körper. Man bestimme das Supremum und Infimum der Menge

$$M = \left\{(-1)^n + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} .$$

5. Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper. Sei $M \subseteq K$ so, dass $\inf M$ existiert, und $s \in K$.

   Man zeige: Es gilt $s < \inf M$ genau dann, wenn es ein $t \in K$ gibt mit $s < t \leq m$ für alle $m \in M$. Weiters zeige man: $s \leq \inf M$ genau dann, wenn $s \leq m$ für alle $m \in M$.

6. Zeigen Sie für eine Teilmenge M eines angeordneten Körpers K und $x \in K$, dass $\inf(\{x\} + M) = x + \inf M$ in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte es tut!

   Unter der Zusätzlichen Voraussetzung $x > 0$ zeige man zudem, dass $\sup(\{x\} \cdot M) = x \cdot \sup M$ wieder in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte es tut!

   Schließlich zeige man auch $\inf(-M) = -\sup M$ wieder in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn die rechte es tut!

7. Sei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein angeordneter Körper. Man zeige, dass die Abbildung $\phi : K \to K$, definiert durch $\phi(x) = \frac{x}{1_K + |x|}$, die Menge $(-1_K, 1_K) = \{x \in K : -1_K < x < 1_K\}$ als Bild hat und als Abbildung von K auf $(-1_K, 1_K)$ sogar bijektiv ist. Man gebe die Inverse $\phi^{-1} : (-1_K, 1_K) \to K$ von ϕ an.

Weiters zeige man, dass ϕ streng monoton wachsend ist, also dass aus $x < y$ immer $\phi(x) < \phi(y)$ folgt.

Hinweis: Eine Abbildung $\phi : A \to B$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $\psi : B \to A$ mit $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$ und $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_A$ gibt. In dem Fall ist ψ die Inverse von ϕ.

8. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

   (a) $2^n > n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $2^n > n^2$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

   (b) Für ein beliebiges $x \geq 2$ aus einem angeordneten Körper, folgere man $x^n > n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x^n > n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

9. Die Zahlen $a_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$) sind rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,.$$

   Zeigen Sie, dass $a_n = 2^{n-2}$ für $n \geq 2$.

   Anmerkung: Die Existenz der Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ folgt aus dem Rekursionssatz, wenn für A die Menge $\cup_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^k$, also die Menge aller endlichen geordneten Tupel, für a das Element $1 \in \mathbb{N} \subseteq A$ gewählt, und g durch $g((b_1, \ldots, b_k)) := (b_1, \ldots, b_k, \sum_{j=1}^k b_j)$ definiert wird. Die gesuchten Zahlen a_n sind dann genau die letzten Einträge von $\phi(n)$.

10. Seien $\langle K, +, \cdot \rangle$ ein Körper und $x \in K \setminus \{0\}$. Zeigen Sie

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p},\ x^p x^q = x^{p+q},\ (x^p)^q = x^{pq}\,,$$

   zunächst für alle $p, q \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion nach p. Anschließend zeige man diese Gleichungen für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, wobei für $p = [(n_+, n_-, 1)]_\sim \in \mathbb{Z}$ wie aus der Vorlesung x^p durch $x^{n_+}(x^{n_-})^{-1}$ definiert ist.