# Übungen zu Analysis 1, 2. Übung

Ist $\langle K,+,\cdot\rangle$ ein Körper, so bezeichnet im folgenden $0_K$ das additiv neutrale Element und $1_K$ das multiplikativ neutrale Element. Weiters sei für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$ das Element $n\cdot x$ (oder kurz $nx$) durch $1\cdot x = x$ und $(n+1)\cdot x = (n\cdot x)+x$ mit Hilfe des Rekursionssatzes definiert. Gilt dabei $x = 1_K$, so schreiben wir auch $n_K$ bzw. kurz $n$ für $n\cdot 1_K$. Zudem sei $x^n$ durch $x^1 = x$ und $x^{n+1} = x^n \cdot x$ mit Hilfe des Rekursionssatzes definiert.

1. Seien $x, y, w$ Elemente eines Körpers $K$ mit $w \neq 0_K$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen sie

   $-(-x) = x, \quad (w^{-1})^{-1} = w,$

   $x(-y) = -(xy), \quad (-x)(-y) = xy,$

   $(xy)^n = x^n y^n, \quad (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n,$

   $(m+n)x = (mx)+(nx), \quad (m\cdot n)_K = m_K \cdot n_K.$

2. Man zeige mittels vollständiger Induktion: Sind $b, a$ aus einem Körper $K$, so gilt für $n \in \mathbb{N}$

   $$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a)\sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j}\,.$$

   Daraus leite man für $x \in K$ ab, dass

   $$(1_K - x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1_K - x^{n+1},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

3. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0,\dots,n\}$ sei der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ durch $\binom{n}{0} = 1$ und $(n \geq k \geq 1)$ durch

   $$\binom{n}{k} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

   definiert. Dabei ist $n!$ induktiv durch $0! = 1,\ 1! = 1$ und $(n+1)! = n!(n+1)$ definiert. Man zeige, dass $(n \geq k \geq 1)$

   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

   Weiters beweise man den Binomischen Lehrsatz mittels vollständiger Induktion:

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a^{n-k}b^k)\,.$$

   Dabei sind $a, b$ aus einem Körper $K$.

   Bemerkung: Mit der zusätzlichen Definition $\binom{n}{k} := 0$ im Fall $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,\dots,n\}$ gilt die Gleichung $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Sei $K = \{0,1,2\}$. Man definiere $+$ und $\cdot$ so, dass $\langle K,+,\cdot\rangle$ einen Körper abgibt. Geben Sie auch eine ausführliche Begründung an, warum sich dieser Körper nicht anordnen lässt!

5. Sei $\langle K, +, \cdot\rangle$ ein Körper, und seien $p, q \in K$. Man betrachte die Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ von $K$ nach $K$.

   Man zeige, dass wenn $x_1$ eine Nullstelle ist, dann auch $x_2 := -p - x_1$ eine Nullstelle ist, dass dann $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, und dass es dann keine weitere Nullstellen von $f$ gibt. Also hat $f$ höchstens zwei Nullstellen. Dabei heißt $x_0$ eine Nullstelle von $f$, wenn $f(x_0) = 0$.

   Hinweis: Ist $x_1$ eine feste Nullstelle und $x \in K$, so gilt $f(x) = f(x) - f(x_1)$. Man berechne die rechte Seite unter Zuhilfenahme von $x^2 - x_1^2 = (x - x_1)(x + x_1)$.

6. Sei $\langle K, +, \cdot\rangle$ ein Körper mit $2_K = 2 \cdot 1_K = 1_K + 1_K \neq 0$, womit auch $4_K = 4 \cdot 1_K = 1_K + 1_K + 1_K + 1_K = 2_K \cdot 2_K \neq 0$. Zudem seien $p, q \in K$. Man betrachte die Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ von $K$ nach $K$ und zeige, dass $f$ genau dann eine Nullstelle hat, falls es ein $y \in K$ mit $y^2 = \frac{p^2}{4_K} - q$ gibt. In diesem Falle zeige man, dass dann $-\frac{p}{2_K} + y$ und $-\frac{p}{2_K} - y$ genau die Lösungen von $f(x) = 0$ sind.

   Hinweis: $f(x) = (x + \frac{p}{2_K})^2 + q - \frac{p^2}{4_K}$.

7. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Man zeige $(x, y, z \in K)$:

   $x \leq y \vee y \leq x$,

   $x < y \Rightarrow x < \frac{x+2y}{3} < y$,

   $(z < 0 \wedge x \leq y) \Rightarrow xz \geq yz$.

8. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Man zeige $(x, y, z \in K)$:

   $0 < x \leq y \Rightarrow (\frac{x}{y} \leq 1_K \leq \frac{y}{x} \wedge x^{-1} \geq y^{-1})$.

   Außerdem beweise man $-\frac{2_K}{3_K} > -\frac{3_K}{4_K}$.

9. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass $[-3_K, 1_K] + (-1_K, 1_K)$ ein Intervall ist! Welches? Entsprechend verfahre man mit $[2_K, 5_K] + [-2_K, -1_K]$!

   Hinweis: Vergessen Sie nicht zu begründen, warum ihre Lösung ein offenes, halboffenes bzw. abgeschlossenes Intervall ist!

10. Sei $\langle K, +, \cdot, P\rangle$ ein angeordneter Körper. Um die Lösungsmenge einer Ungleichung z.B. der Form
$$|2_K - x| \geq 4_K\,,$$
    zu erhalten geht man folgendermaßen vor.

    Betrachte zuerst den Fall $x < 2_K$. Dann hat unsere Ungleichung die Form $2_K - x \geq 4_K$, was zu $x \leq -2_K$ äquivalent ist. Also ist unsere Lösungsmenge in diesem Fall $\{x \in K : x < 2_K\} \cap \{x \in K : x \leq -2_K\} = \{x \in K : x \leq -2_K\}$.

    Im Fall $x \geq 2_K$ bedeutet obige Ungleichung genau $x - 2_K \geq 4_K$, und somit $x \geq 6_K := 4_K + 2_K$. Unsere Lösungsmenge ist in diesem Fall
    $\{x \in K : x \geq 2_K\} \cap \{x \in K : x \geq 6_K\} = \{x \in K : x \geq 6_K\}$.

    Beide Fälle zusammenfassend hat die Lösungsmenge die Form
$$\{x \in K : x \leq -2_K\} \cup \{x \in K : x \geq 6_K\} = (-\infty, -2_K] \cup [6_K, +\infty)\,.$$

    Man bestimme auf analoge Weise die Menge aller $x \in K,\ x \neq 1_K$ derart, dass
$$\frac{4x}{|1_K - x|} \leq 2_K\,.$$