Grundintegrale

(1) $\int 0 \, dx = 0 + C$

(2) $\int 1 \, dx = x + C$

(3) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ für $n \neq -1$

(4) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

(5) $\int e^{cx} \, dx = \frac{1}{c} e^{cx} + C$

(6) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(7) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(8) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$

(10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \begin{Bmatrix} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{Bmatrix}$

(12) $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \begin{Bmatrix} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{Bmatrix}$

(13) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$

(14) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$

(15) $\int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + C$

(16) $\int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + C$

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \begin{Bmatrix} \operatorname{arsinh} x + C \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \end{Bmatrix}$

(18) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \begin{Bmatrix} \operatorname{arcosh} x + C \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C \end{Bmatrix}$

(19) $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{Bmatrix} \operatorname{artanh} x + C \\ \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \\ \operatorname{arcoth} x + C \\ \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C \end{Bmatrix}$

Spezielle Substitutionen

	Integralform	Substitution
(1)	$\int f(ax+b) \, dx$	$z = ax + b$
(2)	$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx$	$z = \varphi(x)$
(3)	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$z = f(x)$
(4)	$\int f(x; \sqrt{a^2 - x^2}) \, dx$	$x = a \sin z$ oder $x = a \cos z$
(5)	$\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$	$x = a \cosh z$
(6)	$\int f(x; \sqrt{x^2 + a^2}) \, dx$	$x = a \sinh z$

Partielle Integration

$$\int u v' \, dx = u v - \int u' v \, dx$$

Partialbruchzerlegung

1. evtl. Ausdividieren (bei unecht gebrochener Funktion)
2. Nullstellen des Nenners bestimmen
3. Ansatz der Partialbruchzerlegung:

Fall 1: Alle Nenner - Nullstellen einfach und reell

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Fall 2: Nenner - Nullstellen reell, aber nicht alle verschieden

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - x_1)^m} + \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x - x_2)^n}$$

Fall 3: Nenner - Nullstellen paarweise konjungiert komplex und einfach

$$\frac{A x + B}{x^2 + a x + b}$$ für jedes Nullstellenpaar mit $[(x - \underline{x}_1)(x - \underline{x}_1^*) = x^2 + a x + b]$

Fall 4: Mehrfache komplexe Nullstellen im Nenner

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + a x + b} + \frac{C_2}{(x - \underline{x}_1)^2} + \frac{C_2^*}{(x - \underline{x}_1^*)^2} + \cdots + \frac{C_m}{(x - \underline{x}_1)^m} + \frac{C_m^*}{(x - \underline{x}_1^*)^m}$$ mit $[(x - \underline{x}_1)(x - \underline{x}_1^*) = x^2 + a x + b]$

4. Bestimmung der Koeffizienten A_1, A_2, ...
5. Integration

Substitution für bestimmte Integrale

$\int \mathrm{R}(e^x)\ \mathrm{d}x;\ z = e^x$

$\int \mathrm{R}(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)\ \mathrm{d}x;\ z = \tan\frac{x}{2};\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+z^2}\ \mathrm{d}z;\ \sin x = \frac{2z}{z^2+1};\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2};\ \tan x = \frac{2z}{1-z^2};\ \cot x = \frac{1-z^2}{2z}$

$\int \mathrm{R}(\sin^2 x, \cos^2 x)\ \mathrm{d}x;\ z = \tan x;\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+z^2}\ \mathrm{d}z;\ \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}};\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}};\ \tan x = z;\ \cot x = \frac{1}{2}$

Einige besondere Integrale

(1) $\int \sin^n cx\ \mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} cx\ \cos cx}{cn} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} cx\ \mathrm{d}x$

(2) $\int \cos^n cx\ \mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1} cx\ \sin cx}{cn} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} cx\ \mathrm{d}x$

(3) $\int \tan^n cx\ \mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} cx}{c(n-1)} - \int \tan^{n-2} cx\ \mathrm{d}x$

(4) $\int \cot^n cx\ \mathrm{d}x = -\frac{\cot^{n-1} cx}{c(n-1)} - \int \cot^{n-2} cx\ \mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{1}{\sin cx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\ln\left|\tan\frac{cx}{2}\right|$

(6) $\int \frac{1}{\cos cx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\ln\left|\tan\left(\frac{cx}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

(7) $\int \frac{1}{\sin^n cx}\ \mathrm{d}x = -\frac{\cos cx}{c(n-1)\ \sin^{n-1} cx} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-2} cx}\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n > 1$

(8) $\int \frac{1}{\cos^n cx}\ \mathrm{d}x = \frac{\sin cx}{c(n-1)\ \cos^{n-1} cx} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\cos^{n-2} cx}\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n > 1$

(9) $\int \sinh^n cx\ \mathrm{d}x = \frac{\sinh^{n-1} cx\ \cosh cx}{cn} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} cx\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n > 0$

(10) $\int \sinh^n cx\ \mathrm{d}x = \frac{\sinh^{n+1} cx\ \cosh cx}{c(n+1)} - \frac{n+2}{n+1}\int \sinh^{n+2} cx\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n < 0;\ n \neq -1$

(11) $\int \cosh^n cx\ \mathrm{d}x = \frac{\cosh^{n-1} cx\ \sinh cx}{cn} - \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} cx\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n > 0$

(12) $\int \cosh^n cx\ \mathrm{d}x = -\frac{\cosh^{n+1} cx\ \sinh cx}{c(n+1)} - \frac{n+2}{n+1}\int \cosh^{n+2} cx\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n < 0;\ n \neq -1$

(13) $\int \tanh^n cx\ \mathrm{d}x = -\frac{\tanh^{n-1} cx}{c(n-1)} + \int \tanh^{n-2} cx\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n \neq 1$

(14) $\int \coth^n cx\ \mathrm{d}x = -\frac{\coth^{n-1} cx}{c(n-1)} + \int \coth^{n-2} cx\ \mathrm{d}x;\ \text{für}\ n \neq 1$

(15) $\int \frac{1}{\sinh cx}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{c}\ln\left|\tanh\frac{cx}{2}\right|$

(16) $\int \frac{1}{\cosh cx}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{c}\arctan e^{cx}$

Winkelfunktionen

	sin	cos	tan	cot
$\sin x =$		$\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\cos x =$	$\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x =$	$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	

Arcusfunktionen

	arcsin	arccos	arctan	arccot
$\arcsin x =$		$\frac{\pi}{2}-\arccos x$	$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x =$	$\frac{\pi}{2}-\arcsin x$			$\operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x =$	$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$			$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arccot} x$
$\operatorname{arccot} x =$		$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\pi}{2}-\arctan x$	

Hyperbelfunktionen

	sinh	cosh	tanh	coth
$\sinh x =$		$\sqrt{\cosh^2 x-1}$	$\frac{\tanh x}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\coth^2 x-1}}$
$\cosh x =$	$\sqrt{\sinh^2 x+1}$		$\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}$	$\frac{\lvert\coth x\rvert}{\sqrt{\coth^2 x-1}}$
$\tanh x =$	$\frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x+1}}$	$\frac{\sqrt{\cosh^2 x-1}}{\cosh x}$		$\frac{1}{\coth x}$
$\coth x =$	$\frac{\sqrt{\sinh^2 x+1}}{\sinh x}$	$\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x-1}}$	$\frac{1}{\tanh x}$	

Areafunktionen

	arsinh	arcosh	artanh	arcoth
$\operatorname{arsinh} x =$		$\pm\operatorname{arcosh}\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{artanh}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcoth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$\operatorname{arcosh} x =$	$\pm\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}$		$\pm\operatorname{artanh}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm\operatorname{arcoth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x =$	$\operatorname{arsinh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm\operatorname{arcosh}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{arcoth}\frac{1}{x}$
$\operatorname{arcoth} x =$	$\operatorname{arsinh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm\operatorname{arcosh}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{artanh}\frac{1}{x}$	

Reihen

Integralkriterium von C'auchy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n;\ a_n > 0$$

1. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ monoton fallende Glieder
2. $a_n = \mathrm{f}(n)$

$$\int_1^{\infty} \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} A & \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \text{ist konvergent} \\ \infty & \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \text{ist divergent} \end{Bmatrix}$$

Fourier

Koeffizienten bei gerader Funktion $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-x)$

ungerader Funktion $\mathrm{f}(x) = -\mathrm{f}(-x)$

Fourier - Integral

$$a_{(z)} = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(t)\ \cos(zt)\ \mathrm{d}t;\ z \in \mathbb{R}$$

$$b_{(z)} = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(t)\ \sin(zt)\ \mathrm{d}t;\ z \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{A}(z) = \sqrt{a^2(z) + b^2(z)};\ \tan\varphi = \frac{a_{(z)}}{b_{(z)}}$$

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^{\infty} \left(a_{(z)} \cos(zt) + b_{(z)} \sin(zt) \right)\ \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^{\infty} A(z)\ \sin(zt + \varphi(z))\ \mathrm{d}z$$

Restglied nach Lagrange

$$R_{n+1} \leq \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{f}^{(n+1)}(x_0 + v(x - x_0)) \right|;\ \Delta x = x - x_0;\ 0 < v < 1;\ v \text{ so wählen, daß das Restglied mögl. groß wird}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Trennung der Variablen

Form: $y' = \mathrm{f}_1(x) \cdot \mathrm{f}_2(y)$

Ansatz: $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};\ \int \mathrm{f}_1(x)\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{f}_2(y)\ \mathrm{d}y$

Homogene Differentialgleichungen

Form: $y' = \mathrm{f}\left(\frac{y}{x}\right)$

Ansatz: Substituieren mit $u = \frac{y}{x}$

$$y = ux;\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} x + u$$

Exakte Differentialgleichungen

Form: $y' = \mathrm{f}(x, y) \rightarrow \mathrm{P}(x,y)\mathrm{d}x + \mathrm{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0$

Exakt, wenn: $\mathrm{P}_y = \mathrm{Q}_x$

$$\begin{aligned} \rightarrow\ \mathrm{F}(x,y) = c &= \int \mathrm{P}(x,y)\ \mathrm{d}x + \mathrm{g}(y) \\ &= \int \mathrm{Q}(x,y)\ \mathrm{d}y + \mathrm{h}(x) \end{aligned}$$

$$\rightarrow\ c = \mathrm{F}_1(x) + \mathrm{F}_2(x,y) + \mathrm{F}_3(y)$$

Substitution

Form: $y' = \mathrm{f}(ax + by + c)$

Ansatz: $u = ax + by + c \rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a + by' \rightarrow y' = \frac{(u'-a)}{b}$

$$y' = \frac{(u'-a)}{b} = u = \mathrm{f}(ax + by + c)$$

Implizite Differentialgleichungen

1.Form: $\mathrm{f}(x, y') = 0;\ y$ kommt nicht explizit vor

Ansatz: $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \rightarrow \mathrm{d}y = p\ \mathrm{d}x$

$$x = \varphi(p) \rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = \varphi'(p) \rightarrow \mathrm{d}x = p\varphi'(p)\mathrm{d}p$$

$$\mathrm{d}y = p\varphi'(p)\ \mathrm{d}p$$

$$y = \int p\varphi'(p)\ \mathrm{d}p$$

2.Form: $\mathrm{f}(y, y') = 0;\ x$ kommt nicht explizit vor

Ansatz: $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \rightarrow \underline{y = \psi(p)} \rightarrow \mathrm{d}y = \psi'(p)\ \mathrm{d}p$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} \rightarrow \underline{x = \int \frac{\psi'(p)}{p}\ \mathrm{d}p}$$

Ergebnis: Parameterdarstellung: $x(p);\ y(p)$

Lineare Differentialgleichungen

Form: $y' + \mathrm{f}(x)y = 0$

Lösung: $y = ce^{-\int \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x}$

Inhomogene Differentialgleichungen

Form: $y' + \mathrm{f}(x)y = \mathrm{g}(x)$

Ansatz: $e^{-\int \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x} \left\{ c + \int \mathrm{g}(x)\ e^{\int \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x \right\}$

Differentialgleichungen 2. Ordnung

2. Ordnung → 1. Ordnung

1.Form: $y''=\mathrm{f}(x)$

Ansatz: $y'=\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x+c_1;\; y=\int\left(\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x+c_1\right)\mathrm{d}x+c_2$

2.Form: $y''=\mathrm{f}(x,y');$ y kommt nicht explizit vor

Ansatz: $y'=p \rightarrow y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=p' \rightarrow p'=\mathrm{f}(x,p);$ (Dgl 1. Ordnung)

3.Form: $y''=\mathrm{f}(y,y');$ x kommt nicht explizit vor

Ansatz: $y'=p \rightarrow y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p \rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p=\mathrm{f}(y,p)$

Homogene lineare Differentialgleichungen

Form: $y''=\mathrm{f}_1(x)\,y'+f_0(x)\,y=0$

Lösung: $y=y_1\left\{\int c_1 e^{-\int\left(\frac{2y'_1}{y_1}+\mathrm{f}_1\right)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+c_2\right\}$

Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Form: $y''+a_1y'+a_0y=0$

Ansatz: $y(x)=e^{\lambda x};\; y'=\lambda y;\; y''=\lambda^2 y;$ Bestimmung von $\lambda_{1,2}$ mit pq - Formel

Fall 1: $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$ → allgemeine Lösung: $y_h=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

Fall 2: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\in\mathbb{R}$ → allgemeine Lösung: $y_h=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

Fall 3: $\lambda_{1,2}=a\pm jb\in\mathbb{C}$ → allgemeine Lösung: $y_h=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$

Inhomogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten

Form: $y''+\mathrm{f}_1(x)\,y'+\mathrm{f}_2(x)\,y=\mathrm{g}(x)$

Ansatz: $y=x^\alpha;\; y'=\alpha x^{\alpha-1};\; y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$y_h=c_1x^{\alpha_1}+c_2x^{\alpha_2}$

$\mathrm{W}(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix};\; y_1=x^{\alpha_1};\; y_2=x^{\alpha_2}$

$y_p=-y_1\int\frac{y_2\,\mathrm{g}(x)}{\mathrm{W}(x)}\,\mathrm{d}x+y_2\int\frac{y_1\,\mathrm{g}(x)}{\mathrm{W}(x)}\,\mathrm{d}x$

$y(x)=y_h+y_p$