Schauder-Basen/James-Raum

nach [1, Kapitel 4] und [2, Kapitel 4]

Andreas Buchinger

16. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Schauder-Basen

1.1 Projektionen und Auerbach-Basen

Definition 1.1.1. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein Banachraum. Ein $A \leq X$ heißt **komplementiert**, wenn es eine beschränkte lineare Projektion $P : X \to X$ mit $\operatorname{ran}(P) = A$ gibt. A heißt **$\boldsymbol{\lambda}$-komplementiert** mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, falls $\|P\| \leq \lambda$. Ist A abgeschlossen, so nennt man ein abgeschlossenes $B \leq X$ **(topologisches) Komplement** von A, falls $X = A \dot{+} B$. ∗∗

Bemerkung 1.1.2. Offenbar gilt:

- Es handelt sich um Spezialfälle der linearen Projektionen auf einem Vektorraum bzw. äquivalent der Zerlegungen eines Vektorraumes in die direkte Summe zweier Teilräume.
- $I - P$ ist eine beschränkte lineare Projektion mit $\ker(I - P) = A$.
- Wegen $A = (I - P)^{-1}(0)$ ist ein komplementiertes A immer abgeschlossen.
- $\lambda \geq 1$

//

Beispiel 1.1.3. Nach [3, Seite 39] kann man die Hardy-Räume $H^p, p \in [1, \infty]$ mit abgeschlossenen Unterräumen der entsprechenden L^p-Räume auf dem offenen komplexen Einheitskreis identifizieren. Für $p \in \{1, \infty\}$ sind diese abgeschlossenen Unterräume nach [3, Seiten 154f] nicht komplementiert. //

Lemma 1.1.4. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein Banachraum. Ein abgeschlossenes $A \leq X$ ist genau dann komplementiert, wenn es ein topologisches Komplement $B \leq X$ gibt. Genauer gilt: Für eine beschränkte lineare Projektion P mit $\operatorname{ran}(P) = A$ ist $\ker(P)$ ein topologisches Komplement zu A und umgekehrt ist die eindeutige lineare Projetkion P mit $\operatorname{ran}(P) = A$ und $\ker(P) = B$ für topologische Komplemente A, B beschränkt.*

Beweis. „⇒“: Für eine beschränkte lineare Projektion P mit $\operatorname{ran}(P) = A$ gilt $X = \operatorname{ran}(P) \dot{+} \ker(P)$ und $B := \ker(P) = P^{-1}(0)$ ist abgeschlossen.
„⇐“: Man betrachte die eindeutige lineare Projetkion P mit $\operatorname{ran}(P) = A$ und $\ker(P) = B$. Eine konvergente Folge $(x_n, P(x_n))$ aus dem Graphen konvergiert komponentenweise. Also gibt es $x, y \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} P(x_n) = y$. Aus der Abgeschlossenheit folgen $y \in A$ und $\lim_{n\to\infty} x_n - P(x_n) = x - y \in B$, da ja $x_n - P(x_n) \in \ker(P)$. Das liefert die eindeutige Zerlegung $x = y + (x - y)$ und damit $P(x) = y$. Folglich ist der Graph von P abgeschlossen und P damit wegen des Satzes vom abgeschlossenen Graphen beschränkt. ■

Lemma 1.1.5. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein Banachraum. Sei $A \leq X$ abgeschlossen mit topologischem Komplement $B \leq X$. Der Banachraum X/A ist dann isomorph zu B. Ist die Projektion Q mit $\operatorname{ran}(Q) = B$ und $\ker(Q) = A$ eine Isometrie, also $\|Q\| = 1$, so ist X/A sogar isometrisch isomorph zu B. Mit der Projektion P mit $\operatorname{ran}(P) = A$ und $\ker(P) = A$ ist $P'(X')$ abgeschlossen und isomorph zu A' und $Q'(X')$ abgeschlossen und isomorph zu B'. Bei $\|P\| = 1$ bzw. $\|Q\| = 1$ gilt Isometrie. Weiters ist X' isomorph zu $A' \times B'$.*

Beweis. Man betrachte die Einbettungsabbildung $\pi : B \to X/A$, also $\pi(b) = b + A$. Wegen $\|b+A\|_{X/A} = \inf\{\|b-a\|_X : a \in A\}$ gilt $\|\pi(b)\|_{X/A} \leq \|b\|_X$, womit π stetig ist. Aus $b_1+A = b_2+A$ für $b_{1,2} \in B$ folgt $b_1 - b_2 \in A \cap B = \{0\}$, also ist π injektiv. Außerdem ist π surjektiv, denn zu beliebigem $x + A \in X/A$ zerlege $x = a + b$ eindeutig in $A \dot{+} B$. Dann folgt $\pi(b) = b + A = (b + a) + A = x + A$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist also π ein Isomorphismus

zwischen X/A und B.
Im Falle $\|Q\| = 1$ wähle $b \in B$ beliebig. Für $a \in A$ folgt $\|b\|_X = \|Q(b-a)\|_X \leq \|b-a\|_X$. Man hat also $\|\pi(b)\|_{X/A} \geq \|b\|_X$, womit π isometrisch ist.
$A = \text{ran}(P)$ ist abgeschlossen und damit ein Banachraum. Man betrachte nun $P'_A : A' \to X'$. Aus $P'_A(y) = 0$ für $y \in A'$ folgt $y(P(x)) = 0$ für $x \in X$. Wegen $\text{ran}(P) = A$ ist also $y = 0$ und $P'_A : A' \to P'_A(A')$ linear, beschränkt und bijektiv. Der Satz vom abgeschlossenen Bild liefert die Abgeschlossenheit von $P'_A(A')$ und damit der Satz von der offenen Abbildung die Isomorphie. Aus $\|P'_A\| = \|P\|$ folgt die Aussage bez. Isometrie. Es bleibt also $P'_A(A') = P'(X')$ zu zeigen. Für $y \in X'$ gilt $y|_A \in A'$ und damit $P'(y)(.) = y(P(.)) = y|_A(P_A(.)) = P'_A(y|_A)(.)$, also $P'_A(A') \supseteq P'(X')$. Umgekehrt liefert der Satz von Hahn-Banach zu jedem $y|_A \in A'$ eine Fortsetzung $y \in X'$ und damit $P'_A(y|_A)(.) = y|_A(P_A(.)) = y(P(.)) = P'(y)(.)$, also $P'_A(A') \subseteq P'(X')$. Für Q gilt das Gleiche.
Aus $I = P + Q$ folgt $I = P' + Q'$, sprich $X' = P'(X') + Q'(X')$. Ein $y \in P'(X') \cap Q'(X')$ erfüllt nun für $a \in A$, dass $y(a) = Q'(y_{Q'})(a) = y_{Q'}(Q(a)) = y_{Q'}(0) = 0$ mit einem gewissen $y_{Q'} \in X'$. Analoges gilt für $b \in B$. Das heißt $y = 0$ und somit $X' = P'(X') \dot{+} Q'(X')$. Die Isomorphie zu $A' \times B'$ ist damit klar. ■

Definition 1.1.6. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein Banachraum. Für $n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $(e_1, \dots, e_n)$ aus X nennt man Funktionale $(f_1, \dots, f_n)$ aus X' **biorthogonal** und das Tupel $(e_i, f_i)_{i=1,\dots,n}$ **Biorthogonalsystem**, falls $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Sind die Vektoren eine Basis von X und gilt $\|e_i\|_X = \|f_i\|_{X'} = 1$ für $1 \leq i \leq n$, so spricht man von einer **Auerbach-Basis**. ∗∗

Satz von Auerbach 1.1.7. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein Banachraum. Gilt $\dim(X) = n$ für $n \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Auerbach-Basis $(e_i, f_i)_{i=1,\dots,n}$. Hat $A \leq X$ Dimension n, so ist A n-komplementiert. Ist A abgeschlossen mit $\text{codim}(A) = n$, so is A ebenfalls komplementiert.*

Beweis. Im Falle $\dim(X) = n$ sei $x_1, \dots, x_n \in X$ eine Basis. Zu beliebigen $u_1, \dots, u_n \in K_1(0)$ sei $v(u_1, \dots, u_n)$ definiert als Determinante jener Matrix, deren j-te Zeile für $1 \leq j \leq n$ die Koordinaten von u_j in $x_1, \dots, x_n$ sind. Mit dieser Wahl ist $|v|$ stetig auf dem Kompaktum $(K_1(0))^n$, da die Koordinaten stetig von den Vektoren abhängen (alle Normen auf X sind äquivalent, also wähle die 1-Norm in der gegenständlichen Basis) und die Determinante als Polynomfunktion stetig ist. Damit nimmt diese Funktion ein Maximum an. Aus der Linearität der Determinante in jedem Eintrag folgt zunächst, dass es $e_1, \dots, e_n \in X$ gibt, sodass $v(e_1, \dots, e_n)$ den Wert des Maximums annimmt. Weiters folgt erneut aus der Linearität und der Maximalität, dass $\|e_j\|_X = 1$ für $1 \leq j \leq n$. Wegen $v(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ ist $e_1, \dots, e_n$ auch eine Basis von X. Die linearen Abbildungen

$$f_i(x) := \frac{v(e_1, \dots, e_{i-1}, x, e_{i+1}, \dots, e_n)}{v(e_1, \dots, e_n)}, 1 \leq i \leq n$$

erfüllen nach Definition $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ und $\|f_i\|_{X'} = 1$ für $1 \leq i, j \leq n$.
Im Falle $\dim(A) = n$ finden wir eine Auerbach-Basis $(e_i, f_i)_{i=1,\dots,n}$ von A. Man setzt nun die $f_i, i = 1, \dots, n$ vermittels des Satzes von Hahn-Banach zu Funktionalen auf X mit Operatornorm 1 fort und betrachtet den Operator

$$P : \begin{cases} X \to A \\ x \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i \end{cases}.$$

Offensichtlich handelt es sich um eine Projektion mit $\text{ran}(P) = A$. Schließlich gilt für $x \in X$ mit $\|x\|_X \leq 1$, dass

$$\|P(x)\|_X \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x)| \|e_i\|_X \leq \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Im Falle $\operatorname{codim}(A) = n$ für abgeschlossenes A folgt die Aussage sofort aus Lemma 1.1.4. ■

1.2 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 1.2.1. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum. Eine **Schauder-Basis** sind Vektoren $(e_1, \ldots, e_n)$ oder eine Folge $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus X, sodass es zu jedem $x \in X$ eindeutige **Koordinaten** $(a_1, \ldots, a_n)$ bzw. $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ gibt, sodass $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ bzw. $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$.
Die **kanonischen Projektionen** $P_j, 1 \leq j \leq n$ bzw. $P_j, j \in \mathbb{N}$ sind definiert als $P_j(x) := \sum_{i=1}^{j} a_i e_i$. Man setzt dann auch $P_0 \equiv 0$. **

Bemerkung 1.2.2. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum mit Schauder-Basis. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die kanonische Projektion P_n tatsächlich eine Projektion mit der linearen Hülle der ersten n Schauder-Basisvektoren als Bild. //

Bemerkung 1.2.3. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum mit Schauder-Basis. X ist separabel, da ja endliche rationale Linearkombinationen der Elemente der Schauder-Basis dicht liegen. //

Bemerkung 1.2.4. Klarerweise folgt aus der Definition, dass Schauder-Basen linear unabhängig sind und damit ein normierter Raum genau dann eine endliche Schauder-Basis besitzt, wenn er endlich-dimensional ist. In diesem Falle sind die Begriffe Schauder-Basis und Basis äquivalent. //

Lemma 1.2.5. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum mit Schauder-Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ oder $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann gilt für kanonische Projektionen P_j, P_k mit geeigneten $j, k \in \mathbb{N}$:*

(a) $\dim(\operatorname{ran}(P_j)) = j$.

(b) $P_j P_k = P_k P_j = P_{\min(j,k)}$.

(c) $\forall x \in X : P_j(x) \to x$ *bzw.* $P_n(x) = x$.

Umgekehrt gebe es beschränkte Projektionen $P_j, 1 \leq j \leq n$ bzw. $P_j, j \in \mathbb{N}$ auf einem normierten Raum $(X, \|.\|_X)$ mit den Eigenschaften (a), (b), (c). Man kann nun für passende j aus $\mathbb{N}$ Vektoren $0 \neq e_j \in \operatorname{ran}(P_j) \cap \ker(P_{j-1})$ beliebig wählen und erhält so eine Schauder-Basis von X mit kanonischen Projektionen $P_j, 1 \leq j \leq n$ bzw. $P_j, j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Offensichtlich erfüllen kanonische Projektionen (a), (b) und (c).
Sei also umgekehrt $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum mit Projektionen $P_j, 1 \leq j \leq n$ bzw. $P_j, j \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften (a), (b), (c). Mit der Notation $P_0 \equiv 0$ wähle man nun für geeignetes $j \in \mathbb{N}$ einen Vektor $0 \neq e_j \in \operatorname{ran}(P_j) \cap \ker(P_{j-1})$. Gäbe es so einen Vektor nicht, so hätte man einen Widerspruch zu $\operatorname{codim}(\ker(P_{j-1})) = j - 1$, also (a). Wegen $\operatorname{ran}(P_{j-1}) \leq \operatorname{ran}(P_j)$, was aus (b) folgt, hat man sogar $\dim(\operatorname{ran}(P_j) \cap \ker(P_{j-1})) = 1$. Deshalb gilt wegen (c), dass

$$\begin{aligned} x &= \lim_{j\to\infty} P_j(x) = \lim_{j\to\infty} (P_j(x) - P_0(x)) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} (P_i(x) - P_{i-1}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (P_i(x) - P_{i-1}(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{P_i(x - P_{i-1}(x))}_{\in \operatorname{ran}(P_i) \cap \ker(P_{i-1})} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \end{aligned}$$

für eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ oder

$$x = P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

für $(a_1, \ldots, a_n)$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$. Die P_j sind stetig also hat man wegen $\ker(P_j) \leq \ker(P_{j-1})$, was aus (b) folgt, für andere Koeffizienten $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_1, \ldots, b_n)$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, und wieder wegen $\operatorname{ran}(P_{j-1}) \leq \operatorname{ran}(P_j)$ induktiv, dass $P_j(x) = \sum_{i=1}^{j} b_i e_i$, sprich $b_j e_j = P_j(x) - P_{j-1}(x) = a_j e_j$. ■

Lemma 1.2.6. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter Raum mit Schauder-Basis. Sind die kanonischen Projektionen gleichmäßig beschränkt mit einer Schranke $M \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist die Schauder-Basis auch Schauder-Basis der Vervollständigung $\hat{X}$.*

Beweis. Endlichdimensionale normierte Räume sind bereits Banachräume, also genügt es unendlichdimensionale zu betrachten. Man überprüft dazu die Gültigkeit der Voraussetzungen von Lemma 1.2.5. Bekanntermaßen kann man die kanonischen Projektionen $P_n, n \in \mathbb{N}$ eindeutig zu linearen, beschränkten $\hat{P}_n, n \in \mathbb{N}$ auf der Vervollständigung $\hat{X}$ fortsetzen. X liegt dicht in $\hat{X}$ und $P_j(X), j \in \mathbb{N}$ ist endlichdimensional, also abgeschlossen in $\hat{X}$. Das liefert $\hat{P}_j(\hat{X}) = P_j(X), j \in \mathbb{N}$, womit insbesondere die $\hat{P}_j, j \in \mathbb{N}$ Projektionen sind. Aus Stetigkeit und Dichtheit folgt auch $\hat{P}_j\hat{P}_k = \hat{P}_k\hat{P}_j = \hat{P}_{\min(j,k)}$ für $j, k \in \mathbb{N}$. Für $\hat{x} \in \hat{X}$ wähle man eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{m\to\infty} x_m = \hat{x}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\hat{P}_n(\hat{x}) - \hat{x}\|_X &\leq \|\hat{P}_n(\hat{x}) - P_n(x_m)\|_X + \|P_n(x_m) - x_m\|_X + \|x_m - \hat{x}\|_X \\ &\leq (1 + M)\|x_m - \hat{x}\|_X + \|P_n(x_m) - x_m\|_X,\end{aligned}$$

also $\lim_{n\to\infty} \hat{P}_n(\hat{x}) = \hat{x}$. Aus $e_j \in P_j(X) \cap \ker(P_{j-1})$ folgt $e_j \in \hat{P}_j(\hat{X}) \cap \ker(\hat{P}_{j-1})$, womit die Aussage gezeigt ist. ∎

Satz 1.2.7. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit Schauder-Basis $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann ist*

$$p : \begin{cases} X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_X \end{cases} \tag{1.2.1}$$

eine Norm auf X. Weiters ist $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von (X, p) mit denselben kanonischen Projektionen $P_j, j \in \mathbb{N}$, welche sogar bezüglich p gleichmäßig durch 1 beschränkt sind. Schließlich ist (X, p) ein Banachraum und p zu $\|.\|_X$ äquivalent.

Beweis. Aus $\|x\|_X = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_X$ folgen die Wohldefiniertheit von p und $p \geq \|.\|_X$. Homogenität und Dreiecksungleichung folgen sofort, also ist p eine Norm. Um zu zeigen, dass $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von (X, p) ist, greift man auf Lemma 1.2.5 zurück. Die Punkte (a) und (b), sowie die Tatsachen $0 \neq e_j \in \operatorname{ran}(P_j) \cap \ker(P_{j-1})$ für $j \in \mathbb{N}$ und dass $P_j, j \in \mathbb{N}$ Projektionen sind, sind unabhängig von der Norm und vererben sich deshalb von $(X, \|.\|_X)$ auf (X, p). Wegen

$$p(x - P_j(x)) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|P_k(x) - P_k(P_j(x))\|_X = \sup_{k\geq j} \|P_k(x) - P_j(x)\|_X \to 0$$

gilt auch (c). Bezüglich (X, p) hat man wegen des Lemmas vom iterierten Supremum

$$\begin{aligned}\|P_j\| &= \sup_{x\in K_1^p(0)} p(P_j(x)) = \sup_{x\in K_1^p(0)} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|P_k(P_j(x))\|_X = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{x\in K_1^p(0)} \|P_k(P_j(x))\|_X \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{ \sup \Big\{ \|P_{\min(j,k)}(x)\|_X : x \in X \text{ mit } \sup_{i\in I} \|P_i(x)\|_X \leq 1 \Big\} \Big\} \leq 1,\end{aligned}$$

womit die kanonischen Projektionen gleichmäßig durch 1 beschränkt sind. Also ist $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von (X, p).
Man betrachte jetzt die Vervollständigung $\hat{X}$ von X bezüglich p. Wegen Lemma 1.2.6 gibt es zu $\hat{x} \in \hat{X}$ eine eindeutige Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\hat{x} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ bezüglich p. Aufgrund von $p \geq \|.\|_X$ ist die Reihe eine Cauchy-Folge in $(X, \|.\|_X)$ und somit vermöge der Vollständigkeit bezüglich $\|.\|_X$ gegen ein $x \in X$ konvergent. Daraus folgt aber auch die Konvergenz gegen x in (X, p), da es sich ja um dieselben kanonischen Projektionen handelt. In Summe gilt $x = \hat{x}$, sprich

(X,p) ist vollständig. Die Identität von (X,p) nach $(X,\|.\|_X)$ ist linear, bijektiv und wegen $p \geq \|.\|_X$ stetig. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist die Identität auch offen, also ein Homöomorphismus, womit p und $\|.\|_X$ äquivalent sind. ■

Korollar 1.2.8 (Banach)**.** *Sei $(X,\|.\|_X)$ ein Banachraum mit Schauder-Basis. Die kanonischen Projektionen sind gleichmäßig beschränkt.*

Beweis. In endlichdimensionalen Räumen ist die Aussage klar. Im unendlichdimensionalen Falle ist p aus (1.2.1) nach Satz 1.2.7 eine zu $\|.\|_X$ äquivalente Norm, welche die kanonischen Projektionen gleichmäßig durch 1 beschränkt. ■

Definition 1.2.9. Sei $(X,\|.\|_X)$ ein Banachraum mit Schauder-Basis. Das Supremum der Operatornormen der kanonischen Projektionen nennt man **Basiskonstante**. Die Schauder-Basis heißt **normiert**, wenn alle Basisvektoren normiert sind. Schließlich heißt sie **monoton**, falls die Basiskonstante 1 ist. ∗∗

Bemerkung 1.2.10. Sei $(X,\|.\|_X)$ ein Banachraum mit Schauder-Basis. Sei e_j für passendes $j \in \mathbb{N}$ ein Basisvektor und P_j die entsprechende kanonische Projektion. Aus $P_j(e_j) = e_j$ schließt man $\|P_j\| \geq 1$, weswegen auch die Basiskonstante größer gleich 1 sein muss. Ist die Basis monoton, so haben damit alle kanonischen Projektionen Norm 1. Vermittels des Satzes 1.2.7 kann man X umnormieren, sodass die Schauder-Basis monoton ist. //

Bemerkung 1.2.11. Seien $(X,\|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit Schauder-Basis $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $k \in \mathbb{N}$. Die kanonische Projektion P_k ist nach Korollar 1.2.8 beschränkt, womit $\ker(P_k) \dot{+} \operatorname{ran}(P_k) = X$ nach Lemma 1.1.4 eine Zerlegung in topologische Komplemente ist. Nun gilt $\operatorname{ran}(P_k) = \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_k\}$ und offenbar auch $\ker(P_k) = \operatorname{ran}(I - P_k) = \overline{\operatorname{span}}\{e_j : j > k\}$, also $X = \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_k\} \dot{+} \overline{\operatorname{span}}\{e_j : j > k\}$. //

Korollar 1.2.12. *Sei $(X,\|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit Schauder-Basis $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann sind äquivalent:*

(A) Die Basis ist monoton.

(B) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Folgen $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ mit $X \ni \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$ gilt $\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|_X \leq \|\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\|_X$.

(C) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $a_1,\dots,a_{n+1} \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ gilt $\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|_X \leq \|\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i\|_X$.

(D) Mit der Norm p aus (1.2.1) gilt $p = (X,\|.\|_X)$.

Beweis. Zunächst gilt (A) ⇔ (B) offensichtlich wegen der Definition der Basiskonstante und der kanonischen Projektionen. Ebenfalls sofort bekommt man aufgrund von $\|\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\|_X = \lim_{n\to\infty}\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|_X$ für $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ mit $X \ni \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$, dass (B) ⇔ (C). Mithilfe der letzten Gleichheit folgert man auch (D) ⇒ (B) und (C) ⇒ (D), da das Supremum in (1.2.1) zu einem Limes wird, bzw. umgekehrt. ■

Beispiel 1.2.13. Für die Räume $c_0(\mathbb{N})$ und $\ell_p(\mathbb{N})$ für $p \in [1,\infty)$ ist $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ offensichtlich eine monotone Schauder-Basis. //

Korollar 1.2.14. *Sei $(X,\|.\|_X)$ ein Banachraum mit Schauder-Basis $(e_1,\dots,e_n)$ oder $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Die Abbildung*

$$e_j' : \begin{cases} X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}) \\ x \mapsto a_j, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

wobei $j \in \mathbb{N}$ passend gewählt sei und a_j die Koordinate von x zu e_j sei, ist ein Funktional mit $\|e_j\|_X \|e'_j\|_{X'} \leq 2B$, wobei $B \in \mathbb{R}_0$ die Basiskonstante ist. Weiters sind diese Funktionale separierend.

Beweis. Die Linearität und die Punktetrennung sind klar. Die Stetigkeit mit der Operatornormabschätzung folgt aus

$$\begin{aligned}\|e'_j\|_{X'} &= \sup_{x\in K_1(0)} |e'_j(x)| = \sup_{x\in K_1(0)} |e'_j(x)| \|e_j\|_X \|e_j\|_X^{-1} = \|e_j\|_X^{-1} \sup_{x\in K_1(0)} \|e'_j(x) e_j\|_X \\ &= \|e_j\|_X^{-1} \sup_{x\in K_1(0)} \|P_j(x) - P_{j-1}(x)\|_X \leq \|e_j\|_X^{-1} 2B.\end{aligned}$$

■

Definition 1.2.15. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein Banachraum mit Schauder-Basis $(e_1, \dots, e_n)$ oder $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Die $(e'_1, \dots, e'_n)$ oder $(e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus (1.2.2) nennt man **Koordinatenfunktionale**. Außerdem nennt man $(e_j, e'_j)_{j=1,\dots,n}$ bzw. $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ **erweiterte Schauder-Basis**. **

Beispiel 1.2.16. Auerbach-Basen sind klarerweise normierte, erweiterte Schauder-Basen. //

Beispiel 1.2.17. Ein vollständiges Orthonormalsystem eines Hilbertraumes ist genau dann eine normierte Schauder-Basis, wenn der Hilbertraum separabel ist. Da die kanonischen Projektionen nichttriviale Orthogonalprojektionen sind, ist die Basis auch monoton. Die Koordinatenfunktionale sind die Abbildungen auf die Fourierkoeffizienten. //

Satz 1.2.18 (Banach)**.** *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum. Eine Folge $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Schauder-Basis des Raumes, wenn folgende Punkte gelten:*

(1) Alle $e_j, j \in \mathbb{N}$ sind ungleich 0.

(2) Es gibt ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|_X \leq M \|\sum_{i=1}^m a_i e_i\|_X$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und alle $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

(3) $\overline{\operatorname{span}}\{e_j : j \in \mathbb{N}\} = X$

Beweis. Jede Schauder-Basis erfüllt all diese Punkte, wenn man für M die Basiskonstante wählt. Andererseits definiere man für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$P_n : \begin{cases} \operatorname{span}\{e_j : j \in \mathbb{N}\} \to \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} \\ x \mapsto \sum_{j=1}^n a_j e_j \end{cases}$$

mit den Koeffizienten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ von x bezüglich $e_1, \dots, e_n$. Es handelt sich klarerweise um gleichmäßig durch M beschränkte Projektionen, welche (a), (b) und (c) aus Lemma 1.2.5 erfüllen. Weiters gilt $0 \neq e_j \in \operatorname{ran}(P_j) \cap \ker(P_{j-1})$ für $j \in \mathbb{N}$. Folglich ist $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von $\operatorname{span}\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ mit kanonischen Projektionen $P_j, j \in \mathbb{N}$. Vermöge der gleichmäßigen Schranke M und $\overline{\operatorname{span}}\{e_j : j \in \mathbb{N}\} = X$ liefert Lemma 1.2.6, dass $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von X ist. ■

1.3 Approximationseigenschaft

Definition 1.3.1. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum. Man sagt, dass die **Approximationseigenschaft** gilt, falls jeder kompakte Operator Grenzwert einer Folge von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild ist. **

Lemma 1.3.2. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum. Falls sich die Identität auf jeder kompakten Teilmenge von X gleichmäßig durch eine Folge von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild approximieren lässt, gilt die Approximationseigenschaft.*

Beweis. Für einen kompakten Operator T ist $\overline{T(K_1(0))}$ kompakt. Damit gibt es eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren mit endlichdimensionalem Bild, welche auf $\overline{T(K_1(0))}$ gleichmäßig gegen I konvergiert. Ergo gilt

$$\|F_nT - T\| = \sup\{F_nT(x) - T(x) : x \in K_1(0)\} \leq \sup\left\{F_n(x) - I(x) : x \in \overline{T(K_1(0))}\right\}.$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} F_nT = T$. ■

Satz 1.3.3. *Auf jedem unendlichdimensionalen Banachraum $(X, \|.\|_X)$ mit einer Schauder-Basis $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gilt die Approximationseigenschaft.*

Beweis. Sei $K \subseteq X$ kompakt. Die kanonischen Projektionen haben nach Lemma 1.2.5 endlichdimensionales Bild und konvergieren punktweise gegen die Identität. Sei B die Basiskonstante und seien $y_1, \dots, y_m \in K, m \in \mathbb{N}$ vermöge der Kompaktheit so gewählt, dass jedes $x \in K$ zu einem $y_k, k \in \{1, \dots, m\}$ Abstand kleiner $\frac{\varepsilon}{B+2}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ hat. Sei weiter $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|P_n(y_k) - y_k\|_X \leq \frac{\varepsilon}{B+2}$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ und alle $\mathbb{N} \ni n \geq n_0$ gilt. Für beliebiges $x \in K$ gibt es dann ein $k \in \{1, \dots, m\}$, sodass

$$\begin{aligned}
\|P_n(x) - x\|_X &\leq \|P_n(y_k - x)\|_X + \|P_n(y_k) - y_k\|_X + \|y_k - x\|_X \\
&\leq \|P_n\|\,\|y_k - x\|_X + \|P_n(y_k) - y_k\|_X + \|y_k - x\|_X \\
&\leq \frac{B\varepsilon}{B+2} + \frac{\varepsilon}{B+2} + \frac{\varepsilon}{B+2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt die Behauptung aus Lemma 1.3.2. ■

Beispiel 1.3.4. Es gibt separable Banachräume, spezielle abgeschlossene Unterräume von $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $\ell_p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), p \in (2, \infty)$, welche die Approximationseigenschaft nicht erfüllen; siehe [4, Kapitel 2]. Damit sind diese wegen Satz 1.3.3 auch separable Banachräume ohne Schauder-Basis. //

1.4 Schrumpfende und beschränkt vollständige Schauder-Basen

Lemma 1.4.1. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit einer erweiterten Schauder-Basis $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und kanonischen Projektionen $P_j, j \in \mathbb{N}$. Dann gelten:*

(i) $\forall j \in \mathbb{N} \forall f \in X' : P'_j(f) = \sum_{i=1}^{j} f(e_i)e'_i = \sum_{i=1}^{j} e_i(f)e'_i$,

(ii) $\forall f \in X' : P'_j(f) \xrightarrow{w^*} f$ *und*

(iii) $(e'_j, e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ist eine erweiterte Schauder-Basis von* $\overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ *mit kanonischen Projektionen* $P'_j, j \in \mathbb{N}$. *Insbesondere folgt für* $f \in \overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$, *dass* $P'_j(f) \to f$.

Beweis. Um Punkt (i) einzusehen, beachte man $x = \sum_{i=1}^{\infty} e'_i(x)e_i$ für $x \in X$. Es gilt nämlich

$$P'_j(f)(x) = f(P_j(x)) = f\Big(\sum_{i=1}^{j} e'_i(x)e_i\Big) = \sum_{i=1}^{j} f(e_i)e'_i(x).$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt daraus sofort auch Punkt (ii). Für Punkt (iii) überprüft man die Voraussetzungen von Lemma 1.2.5. Zunächst sind die $P'_j, j \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkte Projektionen und erfüllen, wie man leicht einsieht, Punkt (a) und (b). Für $f \in \operatorname{span}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$

gilt $P'_j(f) = f$ für $j \in \mathbb{N}$ groß genug, womit auch Punkt (c) erfüllt ist. Schließlich gilt $e'_j \in \operatorname{ran}(P'_j) \cap \ker(P'_{j-1})$ für $j \in \mathbb{N}$ und e_j ist klarerweise das Koordinatenfunktional zu e'_j. Folglich ist $(e'_j, e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine erweiterte Schauder-Basis von $\operatorname{span}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ mit kanonischen Projektionen $P'_j, j \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 1.2.6 und der Stetigkeit der Punktauswertungen erhält man auch, dass $(e'_j, e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine erweiterte Schauder-Basis von $\overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ ist, weswegen Punkt (c) auch $P'_j(f) \to f$ für $f \in \overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ liefert. ■

Definition 1.4.2. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit einer erweiterten Schauder-Basis $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Man nennt diesen **schrumpfend**, falls $\overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\} = X'$ und **beschränkt vollständig**, falls $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ für $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ genau dann konvergiert, wenn $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_X < \infty$. **

Beispiel 1.4.3. Die Schauder-Basis $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ ist für $\ell_p(\mathbb{N}), p \in [1, \infty)$ offensichtlich beschränkt vollständig. Auf $c_0(\mathbb{N})$ nicht, da die Folge $(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij})_{n\in\mathbb{N}}$ zwar normmäßig durch 1 beschränkt ist, aber nicht konvergiert. //

Lemma 1.4.4. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit einer erweiterten Schauder-Basis $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und kanonischen Projektionen $P_j, j \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:*

(I) $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ist schrumpfend.*

(II) $(e'_j, e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *ist eine erweiterte Schauder-Basis von X'.*

(III) $\forall f \in X' : \lim_{n\to\infty} \|f|_{\overline{\operatorname{span}}\{e_j : j > n\}}\| = 0$.

Beweis. „(I) ⇒ (II)“: Lemma 1.4.1 Punkt (iii)
„(II) ⇒ (I)“: Nach Lemma 1.4.1 Punkt (i) sind $P'_j, j \in \mathbb{N}$ die kanonischen Projektionen. Wegen Lemma 1.2.5 Punkt (c) gilt $\overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\} = X'$.
„(I) ⇔ (III)“: Für $f \in X'$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt vermittels Bemerkung 1.2.11

$$\begin{aligned}
\|f|_{\overline{\operatorname{span}}\{e_j : j > n\}}\| &= \|f|_{\operatorname{ran}(I-P_n)}\| = \sup\{|f(x)| : x \in K_1(0) \cap \operatorname{ran}(I - P_n)\} \\
&\leq \sup\{|f(x)| : x \in (I - P_n)(K_1(0))\} = \|f - P'_n(f)\| \\
&\leq \sup\{|f(x)| : x \in (\|P_n\| + 1)(K_1(0) \cap \operatorname{ran}(I - P_n))\} \\
&= (\|P_n\| + 1)\|f|_{\overline{\operatorname{span}}\{e_j : j > n\}}\|.
\end{aligned}$$

Somit ist $\lim_{n\to\infty} \|f|_{\overline{\operatorname{span}}\{e_j : j > n\}}\| = 0$ äquivalent zu $P'_j(f) \to f$ also wegen Lemma 1.4.1 Punkt (i) und Punkt (iii) zu $f \in \overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$. ■

Bemerkung 1.4.5. Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit einer normierten schrumpfenden Schauder-Basis $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Es folgt dann aus Lemma 1.4.4 Punkt (III), dass $e_j \xrightarrow{w} 0$ für $j \to \infty$. //

Beispiel 1.4.6. Die Schauder-Basis $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ ist für $c_0(\mathbb{N})$ und $\ell_p(\mathbb{N}), p \in (1, \infty)$ schrumpfend, da es sich bei den Dualräumen um $\ell_p(\mathbb{N}), p \in [1, \infty)$ handelt und die Koordinatenfunktionale genau $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{jn}$ sind. Andererseits ist $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ für ℓ_1 nicht schrumpfend, da der Dualraum ℓ_∞ das Funktional $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ enthält, welches klarerweise Lemma 1.4.4 Punkt (III) nicht erfüllt. //

Lemma 1.4.7. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit einer erweiterten Schauder-Basis $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit kanonischen Projektionen $P_j, j \in \mathbb{N}$. Der Raum A aller Folgen $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ mit endlichem $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_X$ ist mit der Norm*

$$q : \begin{cases} A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_X \end{cases} \tag{1.4.1}$$

ein Banachraum. Falls $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ schrumpfend ist, hat man mit

$$T : \begin{cases} X'' \to A \\ \varphi \mapsto (\varphi(e'_j))_{j\in\mathbb{N}} \end{cases} \tag{1.4.2}$$

einen Isomorphismus. Falls $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ monoton ist, so ist T sogar isometrisch.

Beweis. Betrachtet man q auf den Folgen aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, so überprüft man sofort die Normeigenschaften. Damit handelt es sich bei A auch um einen Untervektorraum. Sei, um die Vollständigkeit zu zeigen, $((a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich A. Für festes $j \in \mathbb{N}$ und beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |a_{n,j} - a_{m,j}| &= \|e_j\|_X^{-1} \Big\| \sum_{k=1}^{j} (a_{n,k} - a_{m,k})e_k - \sum_{k=1}^{j-1} (a_{n,k} - a_{m,k})e_k \Big\|_X \\ &\leq 2\|e_j\|_X^{-1} q((a_{n,\ell} - a_{m,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}), \end{aligned}$$

sprich $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ und deshalb konvergent. Es ist also gerechtfertigt, die Folge $a_j := \lim_{n\to\infty} a_{n,j}$ zu betrachten. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so groß, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m > n_\varepsilon$ folgt, dass $q((a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} - (a_{m,j})_{j\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$. Für festes $\ell \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\ell} (a_{n,k} - a_{m,k})e_k \Big\|_X \leq q((a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} - (a_{m,j})_{j\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$$

und vermöge $m \to \infty$ auch

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\ell} (a_{n,k} - a_k)e_k \Big\|_X \leq \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\ell \in \mathbb{N}$ schließt man $q((a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} - (a_j)_{j\in\mathbb{N}}) \leq \varepsilon$ und dass[1] $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$, womit (A, q) ein Banachraum ist.
Um die Aussagen zu T zu zeigen, sei $B \in \mathbb{R}_{>0}$ die Basiskonstante. Für $\varphi \in X''$ und $j \in \mathbb{N}$ hat man wegen Lemma 1.4.4 Punkt (II) und Lemma 1.4.1 Punkte (iii) und (i), dass $P''_j(\varphi) = \sum_{i=1}^{j} \varphi(e'_i)e_i$. Das hat

$$q(T(\varphi)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \varphi(e'_j)e_j \Big\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P''_n(\varphi)\|_{X''} \leq B\|\varphi\|_{X''}$$

zur Konsequenz, sprich T bildet stetig (die Linearität von T ist klar) nach (A, q) ab. Um Surjektivität zu beweisen, betrachte ein $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$. Aus $\|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_X = \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_{X''}$ für $n \in \mathbb{N}$ folgert man, dass $\sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ eine beschränkte Folge in X'' ist. Weil X' nach Lemma 1.4.4 Punkt (II) eine Schauder-Basis besitzt und demnach separabel ist, erhält man vermöge des Satzes von Banach-Alaoglu eine w^*-konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert $\varphi \in X''$. Dieser erfüllt aufgrund der w^*-Konvergenz[2] $\varphi(e'_j) = a_j$ für $j \in \mathbb{N}$, ist also ein Urbild. Schließlich erfüllt jedes $\varphi \in X''$ vermittels Lemma 1.4.4 Punkt (II) und Lemma 1.4.1 Punkte (iii) und (i) und (ii), dass $P''_j(\varphi) = \sum_{i=1}^{j} \varphi(e'_i)e_i \overset{w^*}{\to} \varphi$. Dies liefert für $f \in X'$, dass

$$|\varphi(f)| = \lim_{n\to\infty} |P''_n(\varphi)(f)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P''_n(\varphi)\|_{X''}\|f\|_{X'} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \varphi(e'_j)e_j \Big\|_X \|f\|_{X'} = q(T(\varphi))\|f\|_{X'}$$

sprich $q(T(\varphi)) \geq \|\varphi\|_{X''}$, womit T injektiv ist. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist T ein Isomorphismus und im Falle der Monotonie wegen $B = 1$ sogar isometrisch. ■

[1] Die Dreiecksungleichung bezüglich q gilt auf ganz $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ und man hat $q((a_j)_{j\in\mathbb{N}}) \leq q((a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}) + q((a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} - (a_j)_{j\in\mathbb{N}}) < \infty$.

[2] Die Punktauswertungsfunktionale $e_j, j \in \mathbb{N}$ sind nach Lemma 1.4.4 Punkt (II) die Koordinatenfunktionale.

Satz 1.4.8. *Sei $(X, \|.\|_X)$ ein unendlichdimensionaler Banachraum mit erweiterter Schauder-Basis $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit kanonischen Projektionen $P_j, j \in \mathbb{N}$. Ist diese Basis beschränkt vollständig, so ist X isomorph zu $(\overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\})'$. Ist $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ noch dazu monoton, so handelt es sich sogar um eine Isometrie. Bei dem (isometrischen) Isomorphismus handelt es sich um die Punktauswertungen.*

Beweis. Für $Z := \overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$ betrachte man die Punktauswertungen $\iota : X \to Z'$. Diese Abbildung ist linear und liefert zu $x \in X$ mit $\iota(x)$ tatsächlich ein Funktional auf Z. Offensichtlich hat man $|\iota(x)(z)| = |z(x)| \le \|z\|_{X'}\|x\|_X$ für $z \in Z$. Das heißt $\|\iota(x)\|_{Z'} \le \|x\|_X$, sprich ι ist stetig. Andererseits findet man zu $j \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ vermittels des Satzes von Hahn-Banach ein $f \in X'$ mit $\|f\|_{X'} = 1$ und $f(P_j(x)) = \|P_j(x)\|_X$. Wie man leicht einsieht treffen $P'_j(f) \in Z$ und $\|P'_j(f)\|_{X'} \le B$ mit der Basiskonstante B zu. Wegen

$$\iota(P_j(x))(P'_j(f)) = f(P_j^2(x)) = f(P_j(x)) = \|P_j(x)\|_X$$

folgt

$$\|\iota(P_j(x))\|_{Z'} \ge \iota(P_j(x))\Big(\frac{P'_j(f)}{\|P'_j(f)\|_{X'}}\Big) = \frac{1}{\|P'_j(f)\|_{X'}}\|P_j(x)\|_X \ge \frac{1}{B}\|P_j(x)\|_X.$$

Mit der bereits gezeigten Stetigkeit von ι schließt man

$$\frac{1}{B}\|x\|_X \le \|\iota(x)\|_{Z'} \le \|x\|_X. \tag{1.4.3}$$

Das beweist Injektivität und Isometrie, falls $B = 1$.
Wegen des Satzes von der offenen Abbildung ist der Satz bewiesen, wenn ι surjektiv ist. Zu diesem Zwecke beachte, dass nach Lemma 1.4.1 Punkt (iii) der Banachraum Z die erweiterte Schauder-Basis $(e'_j, e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit kanonischen Projektionen $P'_j, j \in \mathbb{N}$ besitzt. Für $\varphi \in Z'$ folgt mit Lemma 1.4.1 Punkte (i) und (ii), dass $P''_j(\varphi) = \sum_{i=1}^j \varphi(e'_i)e_i \overset{w^*}{\to} \varphi$. Außerdem[3]

$$\Big\|\sum_{i=1}^j \varphi(e'_i)e_i\Big\|_{Z'} = \|P''_j(\varphi)\|_{Z'} \le B\|\varphi\|_{Z'},$$

womit wegen (1.4.3) auch

$$\Big\|\sum_{i=1}^j \varphi(e'_i)e_i\Big\|_X \le B^2\|\varphi\|_{Z'}$$

gilt. Somit ist wegen der beschränkten Vollständigkeit $X \ni x := \sum_{i=1}^\infty \varphi(e'_i)e_i$ wohldefiniert. Die Stetigkeit von ι, wiederum (1.4.3), hat $\iota(x) = \sum_{i=1}^\infty \varphi(e'_i)e_i = \lim_{j\to\infty} P''_j(\varphi)$ zur Konsequenz. Also muss $\iota(x) = \varphi$ zutreffen. ∎

Satz 1.4.9 (James). *Ein unendlichdimensionaler Banachraum $(X, \|.\|_X)$ mit einer erweiterten Schauder-Basis $(e_j, e'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und kanonischen Projektionen $P_j, j \in \mathbb{N}$ ist genau dann reflexiv, wenn die Basis beschränkt vollständig und schrumpfend ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$": Nach Satz 1.4.8 zusammen mit der Definition von schrumpfend gilt $\iota(X) = X''$.
„$\Rightarrow$": Lemma 1.4.1 Punkt (ii) wird wegen der Reflexivität zu $P'_j(f) \overset{w}{\to} f$ für $f \in X'$. Das bedeutet (Unterräume sind konvex) $X' = \overline{\operatorname{span}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}}^w = \overline{\operatorname{span}}\{e'_j : j \in \mathbb{N}\}$, weswegen die Basis

[3] Die zweite Konjugation erfolgt bezüglich $P'_j : Z \to Z, j \in \mathbb{N}$. Diese Projektionen haben offensichtlich eine Basiskonstante kleiner gleich B.

schrumpfend ist. Also ist X'' vermöge des Lemmas 1.4.7 isomorph zu (A, q). Die Surjektivität und Stetigkeit von ι bedeuten, dass es zu jedem $\varphi \in X''$ eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ und $X \ni \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ gibt. Diese Darstellung von φ ist wegen der Injektivität von ι eindeutig. Da Normkonvergenz w^*-Konvergenz impliziert, erhält man[4] $\varphi(e'_j) = a_j \in X, j \in \mathbb{N}$. Gelte für eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\|_X < \infty$. Damit folgt wegen (1.4.1), dass $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$. Weiters existiert wegen (1.4.2) ein $\varphi \in X''$ mit $\varphi(e'_j) = a_j \in X, j \in \mathbb{N}$. Somit folgert man $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ und $X \ni \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$. ■

[4] Die Punktauswertungsfunktionale $e_j, j \in \mathbb{N}$ sind nach Lemma 1.4.4 Punkt (II) die Koordinatenfunktionale.

2 James-Raum

2.1 Definition und Schauder-Basis

Lemma 2.1.1. *Der Raum J aller $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$, für welche*

$$\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \sup\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{p_j}-a_{p_{j+1}})^2 + (a_{p_n}-a_{p_1})^2\Big)^{\frac{1}{2}} : n\in\mathbb{N}_{\geq 2}, p_1<\dots<p_n\in\mathbb{N}\Big\}$$

endlich ist, ist mit $\|.\|_{J_1}$ ein Banachraum. Außerdem ist

$$\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_2} := \frac{1}{\sqrt{2}} \sup\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{p_j}-a_{p_{j+1}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} : n\in\mathbb{N}_{\geq 2}, p_1<\dots<p_n\in\mathbb{N}\Big\} \tag{2.1.1}$$

eine äquivalente Norm auf J mit $\|.\|_{J_2} \leq \|.\|_{J_1} \leq 2\|.\|_{J_2}$.

Beweis. Homogenität und dass nur die Nullfolge auf 0 abgebildet wird, sind offensichtlich. Die Dreiecksungleichung folgt aus jener für die euklidische Norm. Damit gilt $J \leq c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ und $\|.\|_{J_i}, i=1,2$ sind Normen auf J. Wegen

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{p_j}-a_{p_{j+1}})^2 + (a_{p_n}-a_{p_1})^2\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq \Big(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{p_j}-a_{p_{j+1}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} + ((a_{p_n}-a_{p_1})^2)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \sqrt{2}2\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_2}\end{aligned}$$

für $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in J$ und $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p_1<\dots<p_n\in\mathbb{N}$ folgt $\|.\|_{J_2} \leq \|.\|_{J_1} \leq 2\|.\|_{J_2}$, also sind die Normen auch äquivalent.
Es bleibt die Vollständigkeit zu zeigen. Sei dazu $((a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|.\|_{J_1}$. Für jede Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in J$ und $k,\ell\in\mathbb{N}$ mit $k<\ell$ folgt

$$|b_k-b_\ell| = \frac{1}{\sqrt{2}}((b_k-b_\ell)^2+(b_\ell-b_k)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1}.$$

Lässt man ℓ gegen ∞ laufen, so hat man wegen $b_\ell\to 0$ gezeigt, dass für jedes $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\in J$ und alle $k\in\mathbb{N}$ die Abschätzung $|b_k| \leq \|(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1}$ gültig ist. Somit ist für festes $j\in\mathbb{N}$ die Folge $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy in $\mathbb{R}$, also konvergent. Man kann also $a_j := \lim_{n\to\infty} a_{n,j}$ defineren. Für $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$ sei $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ so groß, dass für $n,m\in\mathbb{N}$ mit $n,m>n_\varepsilon$ folgt, dass $\|(a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} - (a_{m,j})_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1} \leq \varepsilon$. Für $\ell\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p_1<\dots<p_\ell\in\mathbb{N}$ hat man

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{j=1}^{\ell-1}((a_{n,p_j}-a_{m,p_j})-(a_{p_{n,j+1}}-a_{p_{m,j+1}}))^2 + ((a_{p_{n,\ell}}-a_{p_{m,\ell}})-(a_{p_{n,1}}-a_{p_{m,1}}))^2\Big)^{\frac{1}{2}}&\\ \leq \|(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}-(a_{m,j})_{n\in\mathbb{N}}\|_{J_1} \leq \varepsilon&\end{aligned}$$

und vermöge $m\to\infty$ auch

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{j=1}^{\ell-1}((a_{n,p_j}-a_{p_j})-(a_{p_{n,j+1}}-a_{p_{j+1}}))^2 + ((a_{p_{n,\ell}}-a_{p_\ell})-(a_{p_{n,1}}-a_{p_1}))^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon.$$

Aus der Beliebigkeit von $\ell\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p_1<\dots<p_\ell\in\mathbb{N}$ erhält man $\|(a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}-(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1}\leq\varepsilon$ und dass [5] $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\in J$, womit $(J,\|.\|_{J_1})$ ein Banachraum ist. ■

[5] Die Dreiecksungleichung bezüglich $\|.\|_{J_1}$ gilt auf ganz $c_0(\mathbb{N},\mathbb{R})$ und man hat $\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1} \leq \|(a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1} + \|(a_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}-(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1} < \infty$.

Definition 2.1.2. Mit der Notation aus Lemma 2.1.1 nennt man den reellen Banachraum $(J, \|.\|_{J_1})$ **James-Raum**. $**$

Lemma 2.1.3. *Die Folgen $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ bilden eine monotone Schauder-Basis des James-Raumes $(J, \|.\|_{J_1})$. Die erweiterte Schauder-Basis $(\delta_{ij}, \delta'_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ ist schrumpfend.*

Beweis. Man hat sicher $\|\sum_{j=1}^{n} a_j\delta_{ij}\|_{J_1} \leq \|\sum_{j=1}^{m} a_j\delta_{ij}\|_{J_1}$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und alle $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Folglich ist $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ vermöge Satz 1.2.18 und Korollar 1.2.12 eine monotone Basis von $\overline{\operatorname{span}}\{\delta_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$. Sei also $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in J$ beliebig. Es muss gezeigt werden, dass $\lim_{k\to\infty}\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}} - \sum_{j=1}^{k} a_j\delta_{ij}\|_{J_1} = 0$. Das heißt aber $\lim_{k\to\infty}\|(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots)\|_{J_1} = 0$. Wäre dem nicht so, so gäbe es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Folge $(n_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ mit $n_\ell \geq 2, \ell \in \mathbb{N}$, sowie $p_{1,1} < \dots < p_{n_1,1} < p_{1,2} < \dots$, sodass

$$\Big(\sum_{i=1}^{n_\ell-1}(a_{p_{i,\ell}} - a_{p_{i+1},\ell})^2 + (a_{p_{n_\ell},\ell} - a_{p_{1,\ell}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \varepsilon$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Wegen $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ fände man ein $\ell_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $\ell \geq \ell_0, \ell \in \mathbb{N}$ gälte

$$\sum_{i=1}^{n_\ell-1}(a_{p_{i,\ell}} - a_{p_{i+1},\ell})^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Daraus folgte aber $\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_2} = \infty$ mit $\|.\|_{J_2}$ aus (2.1.1) und mit Lemma 2.1.1 schließlich $\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_{J_1} = \infty$.↯
Angenommen $(\delta_{ij}, \delta'_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ wäre nicht schrumpfend. Dann gäbe es nach Lemma 1.4.4 Punkt (III) ein $f \in J'$ mit $\|f\|_{J'} = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\|f|_{\overline{\operatorname{span}}\{\delta_{ij}:j>n\}}\| \neq 0$. Somit existierten ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine streng monoton wachsende Folge $(n_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ mit $\|f|_{\overline{\operatorname{span}}\{\delta_{ij}:j>n_\ell\}}\| \geq \varepsilon, \ell \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von f könnte man also induktiv eine normierte Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\operatorname{span}\{\delta_{ij} : j \in \mathbb{N}\}$ definieren, sodass $f(u_k) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ und sodass für $k_1 < k_2 \in \mathbb{N}$ die Koeffizienten in der Entwicklung von u_{k_1} in $(\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ alle niedriger als der niedrigste Koeffizient von u_{k_2} wären. Betrachte nun $\sum_{j=k_1}^{k_2}\frac{1}{j}u_j$ für $k_1 < k_2 \in \mathbb{N}$. Um $\|.\|_{J_2}$ aus (2.1.1) abzuschätzen, wählte man feste $p_1 < \dots < p_n$ aus $\mathbb{N}$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Aus jenen Differenzen in (2.1.1), für welche beide Koeffizienten zum selben $u_j, j \in \mathbb{N}$ gehören, ließe sich der Faktor $\frac{1}{j}$ einfach herausheben und man hätte eine Summe zu u_j im Sinne von (2.1.1). Das hieße für die Summe s_1 dieser Differenzen wegen $\|.\|_{J_2} \leq \|.\|_{J_1}$ (siehe Lemma 2.1.1), dass

$$s_1 \leq 2\sum_{j=k_1}^{k_2}\frac{1}{j^2}\|u_j\|_{J_2}^2 \leq 2\sum_{j=k_1}^{k_2}\frac{1}{j^2}.$$

Bei Sprungstellen von einem Koeffizienten von u_{j_1} zu einem Koeffizienten von u_{j_2} in (2.1.1) für $k_1 \leq j_1 < j_2 \leq k_2$ könnte man das Quadrat der Differenz durch $2(\frac{1}{j_1^2} + \frac{1}{j_2^2})$ abschätzen[6]. Offenbar könnte jedes $\frac{1}{j}$ höchstens zweimal und nur zu $k_1 \leq j \leq k_2$ vorkommen, weswegen für die Summe dieser Sprünge s_2 gälte:

$$s_2 \leq 4\sum_{j=k_1}^{k_2}\frac{1}{j^2},$$

[6] Die Koeffizienten von $u_k, k \in \mathbb{N}$ müssen wegen der Normiertheit und der Definition von $\|.\|_{J_1}$ Betrag kleiner gleich 1 haben. Hier fließt der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ maßgeblich ein. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit Betrag kleiner gleich 1 hat man $(\frac{1}{j_1}a - \frac{1}{j_2}b)^2 \leq \frac{1}{j_1^2}a^2 + \frac{1}{j_2^2}b^2 + 2\frac{1}{j_1}\frac{1}{j_2}|ab| \leq \frac{1}{j_1^2} + \frac{1}{j_2^2} + 2\frac{1}{j_1}\frac{1}{j_2} \leq 2(\frac{1}{j_1^2} + \frac{1}{j_2^2})$.

also

$$\Big(\frac{s_1+s_2}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3}\Big(\sum_{j=k_1}^{k_2}\frac{1}{j^2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen der Definition von $\|.\|_{J_2}$ folgte

$$\Big\|\sum_{j=k_1}^{k_2}\frac{1}{j}u_j\Big\|_{J_2} \leq \sqrt{3}\Big(\sum_{j=k_1}^{k_2}\frac{1}{j^2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma 2.1.1 lieferte also Konvergenz gegen ein $u \in J$ bezüglich $\|.\|_{J_1}$. Andererseits hätte man aber wegen $f \in X'$, dass $f(u) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}f(u_j) = \infty$.↯ ■

2.2 Bidualraum

Satz 2.2.1. *Der James-Raum $(J, \|.\|_{J_1})$ erfüllt, aufgefasst als Teilraum seines Bidualraumes J'', dass* $\operatorname{codim}(J) = 1$. *Genauer ist J'' isometrisch isomorph zu $J \dot{+} \operatorname{span}\{(1,1,\dots)\} \leq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Norm q aus* (1.4.1), *wobei diese Zerlegung topologisch ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.1.3 ist $(\delta_{ij}, \delta'_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ eine monotone und schrumpfende Basis. Somit ist J'' nach Lemma 1.4.7 isometrisch isomorph zu dem Banachraum (A, q), dem Raum aller reeller Folgen, sodass q aus (1.4.1) endlich ist. Für $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in J$ gilt wegen der Stetigkeit von ι, dass es im Bidualraum genau $\sum_{j=1}^{\infty} a_j\delta_{ij}$ entspricht. Aus (1.4.2) und der w^*-Konvergenz[7] erkennt man, dass $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sich selbst in A entspricht. Diese Identifikation ist isometrisch isomorph, insbesondere ist $J \leq A$ abgeschlossen. Für ein beliebiges $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$ existiert $\mathbb{R} \ni b := \lim_{j\to\infty} b_j$. Denn wäre dem nicht so, so gäbe es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Folge $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \dots \in \mathbb{N}$, sodass $|b_{p_i} - b_{q_i}| \geq \varepsilon$, was offenbar ein Widerspruch zu $q((b_j)_{j\in\mathbb{N}}) < \infty$ wäre.↯ Eine Nullfolge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$ liegt wegen[8] $q \geq \|.\|_{J_1}$ auch in J. Das heißt, die Elemente von $A \setminus J$ sind genau die Folgen $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$ mit Grenzwert $b \neq 0$. Da konstante Folgen sicherlich in A liegen ist $A = J \dot{+} \operatorname{span}\{(1,1,\dots)\}$ gezeigt, indem man von jeder Folge die konstante Folge ihres Grenzwertes abzieht. Weil beide Unterräume abgeschlossen sind ist die Zerlegung topologisch. Der isometrische Isomorphismus identifiziert, wie bereits angemerkt, $J \leq A$ mit $J \leq J''$. Schließlich erhält er auch die Codimension. ■

Bemerkung 2.2.2. Es wurde im Beweis sogar gezeigt, dass der James-Raum J mit den Nullfolgen in A aus Lemma 1.4.7 übereinstimmt und dass alle Folgen in A konvergieren. //

Bemerkung 2.2.3. Im Beweis von Satz 2.2.1 wurde $q = \|.\|_{J_1}$ für Elemente von J benutzt. Für eine konstante Folge $(c, c, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $c \neq 0$ gilt $(c, c, \dots) \in A$ und $q((c, c, \dots)) = |c|$. Setzt man diese Folge aber in $\|.\|_{J_1}$ ein (was strenggenommen nicht geht, da es sich um keine Nullfolge handelt), so erhält man 0. //

Lemma 2.2.4. *Betrachte (A, q) aus Lemma 1.4.7 bezüglich J''. Dann gilt für $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A$, dass $q((b_j)_{j\in\mathbb{N}})$ genau $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mal dem Supremum von*

$$\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(b_{p_j} - b_{p_{j+1}})^2 + (b_{p_n} - b_{p_1})^2\Big)^{\frac{1}{2}} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}\Big\} \cup$$
$$\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(b_{p_j} - b_{p_{j+1}})^2 + b_{p_{n-1}}^2 + b_{p_1}^2\Big)^{\frac{1}{2}} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, p_1 < \dots < p_{n-1} \in \mathbb{N}\Big\}$$

[7] Die Punktauswertungsfunktionale $e_j, j \in \mathbb{N}$ sind nach Lemma 1.4.4 Punkt (II) die Koordinatenfunktionale.

[8] Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $p_1 < \dots < p_n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{j=1}^{n-1}(a_{p_j} - a_{p_{j+1}})^2 + (a_{p_n} - a_{p_1})^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_{j=1}^{p_n} a_j\delta_{ij}\|_{J_1} \leq q((a_j)_{j\in\mathbb{N}})$.

entspricht.

Beweis. Vermöge (1.4.1) hat man $q((b_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\|(b_1,\dots,b_k,0,\dots)\|_{J_1}$. Das Lemma vom iterierten Supremum liefert also als Norm $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mal dem Supremum von

$$\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(b_{p_j}-b_{p_{j+1}})^2+(b_{p_{n-1}}-b_{p_n}\mathbf{1}_{\{1,\dots,k\}}(p_n))^2+(b_{p_n}\mathbf{1}_{\{1,\dots,k\}}(p_n)-b_{p_1})^2\Big)^{\frac{1}{2}}:$$
$$n\in\mathbb{N}_{\geq 2},k\in\mathbb{N},p_1<\dots<p_n\in\mathbb{N},p_{n-1}\leq k\Big\},$$

was genau der Behauptung entspricht. ■

Satz 2.2.5. *Der James-Raum $(J,\|.\|_{J_1})$ ist isometrisch isomorph zu J''.*

Beweis. Sei $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beliebig aus (A,q) aus Lemma 1.4.7. Es gilt auch $(0,b_1,b_2,\dots)\in A$, denn $\|(0,b_1,\dots,b_n,0,\dots)\|_{J_1}=\|(b_1,\dots,b_n,0,\dots)\|_{J_1}$ für $n\in\mathbb{N}$ und folglich $(-b,b_1-b,b_2-b,\dots)\in A$ mit $\mathbb{R}\ni b:=\lim_{j\to\infty}b_j$. Der Grenzwert existiert wegen Bemerkung 2.2.2 und diese Bemerkung zeigt auch $(-b,b_1-b,b_2-b,\dots)\in J$, da es sich um eine Nullfolge handelt. Man hat als $\|.\|_{J_1}$-Norm nach Definition $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mal dem Supremum von

$$\Big\{\Big(\sum_{j=1}^{n-1}(b_{p_j-1}-b_{p_{j+1}-1})^2+(b_{p_n-1}-b_{p_1-1})^2\Big)^{\frac{1}{2}}:n\in\mathbb{N}_{\geq 2},1<p_1<\dots<p_n\in\mathbb{N}\Big\}\cup$$
$$\Big\{\Big(\sum_{j=2}^{n-1}(b_{p_j-1}-b_{p_{j+1}-1})^2+b_{p_2-1}^2+b_{p_n-1}^2\Big)^{\frac{1}{2}}:n\in\mathbb{N}_{\geq 2},1=p_1<\dots<p_n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Das heißt wegen Lemma 2.2.4 dann $\|(-b,b_1-b,b_2-b,\dots)\|_{J_1}=q((b_j)_{j\in\mathbb{N}})$. Die Abbildung

$$\Theta:\begin{cases}A\to J\\(b_j)_{j\in\mathbb{N}}\mapsto(-b,b_1-b,b_2-b,\dots)\end{cases}$$

mit $b:=\lim_{j\to\infty}b_j$ ist klarerweise linear und folglich ein isometrischer Isomorphismus auf ihr Bild. Um Surjektivität zu zeigen, sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beliebig aus $J\leq A$. Es ist auch $(a_2,a_3,\dots)$ aus J wie man leicht mit $\|.\|_{J_2}$ aus (2.1.1) und Lemma 2.1.1 sieht, also liegt vermöge Satz 2.2.1 die Folge $(a_2-a_1,a_3-a_1,\dots)$ in A. Offenbar gilt $\Theta((a_2-a_1,a_3-a_1,\dots))=(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Weil (A,q) nach Lemma 1.4.7 isometrisch isomorph zu J'' ist (nach Lemma 2.1.3 ist $(\delta_{ij},\delta'_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ eine monotone und schrumpfende Basis von J), ist der Satz bewiesen. ■

Literatur

[1] Robert E. Megginson. *An introduction to Banach space theory.* English. Bd. 183. New York, NY: Springer, 1998, S. xix + 596. ISBN: 0-387-98431-3/hbk.

[2] Marián Fabian u. a. *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis.* English. Berlin: Springer, 2011, S. xiii + 820. ISBN: 978-1-4419-7514-0/hbk; 978-1-4419-7515-7/ebook.

[3] Kenneth Hoffman. *Banach spaces of analytic functions.* English. Prentice-Hall Series in Modern Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962, S. xiii+217.

[4] Joram Lindenstrauss und Lior Tzafriri. *Classical Banach spaces I. Sequence spaces.* English. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977, S. xiii+188. ISBN: 3-540-08072-4.