Seminarnotizen

Seminar aus Funktionalanalysis

Konvergenz von Halbgruppen

Juni 2021

Ausgearbeitet von

David Wörgötter

01529138

Wien, 14. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen zu stark stetigen Halbgruppen 2

2 Konvergenz von stark stetigen Halbgruppen 4

3 Vorbemerkungen zu degenerierten Halbgruppen 10

4 Konvergenz von degenerierten Halbgruppen 13

A Anhang zu stark stetigen Halbgruppen 18

B Anhang zu degenerierten Halbgruppen 24

1 Vorbemerkungen zu stark stetigen Halbgruppen

Sei X ein Banachraum.

Definition 1.1. Eine Abbildung $T : [0, \infty) \to L_b(X)$ heißt Operatorhalbgruppe (oder einfach nur Halbgruppe), falls

1. $T(0) = \mathrm{I}$,
2. $T(s + t) = T(s)T(t)$ für alle $s, t \geq 0$,

wobei $L_b(X)$ die Menge aller linearen und beschränkten Abbildungen von X nach X ist und $\mathrm{I} : X \to X$ die identische Abbildung bezeichnet.

Definition 1.2. Eine Operatorhalbgruppe T auf einem Banachraum X heißt stark stetig, falls sie stark stetig bei 0 ist, d.h. falls für alle $x \in X$

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$$

gilt. In diesem Fall nennen wir T auch eine C_0-Halbgruppe.

Beispiel 1.3. Sei H ein Hilbertraum und $A \in L_b(H)$. Dann ist

$$t \mapsto \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

eine stark stetige Operatorhalbgruppe.

Lemma 1.4. *Sei T eine C_0-Halbgruppe. Dann gibt es $M, \omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$ so dass*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ t \in [0, \infty).$$

Weiters gilt, dass $T : [0, \infty) \to X$ stetig ist bezüglich der starken Operatortopologie. D.h.

$$\lim_{n \to \infty} T(t_n)x = T(t)x$$

für alle $x \in X$ und alle Folgen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ mit Grenzwert t.

Beweis. Vorlesung zur Funktionalanalysis 2, [7]. □

Im Folgenden definieren wir den wichtigen Begriff des infinitesimalen Generators einer stark stetigen Halbgruppe.

Definition 1.5. Sei T eine stark stetige Halbgruppe auf einem Banachraum X. Der infinitesimale Generator A von T ist punktweise definiert durch

$$Ax := \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \left(T(t)x - x \right), \ x \in \mathrm{dom}(A),$$

wobei

$$\mathrm{dom}(A) := \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \left(T(t)x - x \right) \text{ existiert} \right\}.$$

Es gilt folgendes Lemma:

Lemma 1.6. *Sei T eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalen Generator A. Dann gilt*

1. *$dom(A)$ ist ein linearer Unterraum von X und $A : dom(A) \to X$ ist ein (im allgemeinen unbeschränkter) linearer Operator,*
2. *$dom(A)$ ist dicht in X,*
3. *Für $x \in dom(A)$ gilt $T(t)x \in dom(A)$ für alle $t \in [0, \infty)$, sowie $AT(t)x = T(t)Ax$,*
4. *Der Operator A ist abgeschlossen, d.h. der Graph von A ist eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$,*
5. *T wird eindeutig durch A bestimmt, d.h. für jede weitere stark stetige Halbgruppe T' mit Generator A gilt $T' = T$.*

Beweis. Funktionalanalysis 2, [7].

□

Es stellt sich die Frage, weshalb der inifinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe interessant ist. Eine Antwort darauf gibt der folgende Satz (vgl. [7]).

Satz 1.7. *Sei T eine stark stetige Halbgruppe mit infinitesimalen Generator A. Sei weiters $x \in dom(A)$. Dann ist die Abbildung $u : [0, \infty) \to dom(A)$,*

$$u(t) := T(t)x,\ t \in [0, \infty)$$

auf $[0, \infty)$ stetig differenzierbar. Zudem ist u die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u' = Au,\ u(0) = x.$$

Wir müssen noch klären, was wir unter dem Begriff der Resolventenmenge für nicht überall definierte abgeschlossene Operatoren verstehen (vgl. [10, Kapitel 8]):

Definition 1.8. Sei $B : \mathrm{dom}(B) \to X$ ein (möglicherweise unbeschränkter) abgeschlossener linearer Operator, der auf einem Unterraum $\mathrm{dom}(B) \subseteq X$ definiert ist. Dann ist

$$\rho(B) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (B - \lambda I)^{-1} \in L_b(X)\}$$

die Resolventenmenge von B.

Für die Resolvente eines infinitesimalen Generators gelten folgende Aussagen:

Lemma 1.9. *Sei A der infinitesimalen Generator einer stark stetigen Halbgruppe T, und $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $t \geq 0$ die Abschätzung $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ gilt. Dann gilt*

1. *$T(t)(A - \lambda)^{-1} = (A - \lambda)^{-1}T(t)$ für alle $t \geq 0$ und alle $\lambda \in \rho(A)$,*
2. *für alle $\lambda \in (\omega, \infty)$ und alle $x \in X$ gilt*

$$(A - \lambda)^{-1}x = -\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau.$$

Beweis. Funktionalanalysis 2, [7]. □

Bemerkung 1.10. Es stellt sich die Frage, wann ein ein linearer Operator $A : \mathrm{dom}(A) \to X$ der infinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe ist. Der berühmte Satz von Hille-Yoshida (zu finden im Anhang) gibt auf diese Frage eine Antwort.

2 Konvergenz von stark stetigen Halbgruppen

Das folgende Kapitel geht zurück auf [6].
Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Banachräume mit Normen $\|\cdot\|$, $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei weiters T eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Generator A. Gegeben seien weiters Generatoren A_n auf X_n mit erzeugten Halbgruppen T_n auf X_n. Die Frage ist, unter welchen Bedingungen T (in einem geeigneten Sinn) durch die T_n approximiert wird.
Wir nehmen Folgendes an: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren beschränkte lineare Operatoren $P_n : X \to X_n$ und $E_n : X_n \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Es gibt ein $C > 0$ mit $\|E_n\| \leq C$ und $\|P_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(A2) $P_n E_n = \mathrm{I}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei I_n die Identität auf X_n sei.

Wir führen folgende Notation ein:

Definition 2.1. Sei X ein Banachraum, $M > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$. Dann sei

$$A \in G(M, \omega, X)$$

per Definition genau dann, wenn A der infinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe T auf X ist, welche

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t},\ t \in [0, \infty)$$

erfüllt.

Bemerkung 2.2. Im allgemeinen ist $A \in G(M, \omega, X)$ nur sehr schwer zu überprüfen. Falls H jedoch ein Hilbertraum und A Generator einer C_0-Halbgruppe T auf H ist, dann ist

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle_H \leq 0, \qquad x \in \mathrm{dom}(A),$$

hinreichend für $A \in G(1, 0, H)$. Der Beweis dazu findet sich im Anhang.

Satz 2.3. *(Trotter-Kato)*
Es gelte (A1) und (A2). Sei $A \in G(M, \omega, X)$ und T die von A auf X erzeugte C_0-Halbgruppe. Weiters seien für $n \in \mathbb{N}$ Generatoren $A_n \in G(M, \omega, X_n)$ von C_0-Halbgruppen T_n auf X_n gegeben.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Für jedes fixe $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n T_n(t) P_n x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen,

(b) Für jedes fixe $x \in X$ und alle $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n T_n(t) P_n x - T(t)x\| = 0,$$

(c) Es existiert ein $\lambda \in (\omega, \infty)$ sodass für alle $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|E_n(\lambda\,\mathrm{I}_n - A_n)^{-1} P_n x - (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1} x\right\| = 0. \tag{1}$$

Falls (7) mit einem $\lambda \in (\omega, \infty)$ gilt, so gilt (7) sogar für alle $\lambda \in (\omega, \infty)$.

Man beachte, dass wegen $A \in G(M, \omega, X)$ und $A_n \in G(M, \omega, X_n)$ gilt, dass die Menge (ω, ∞) in $\rho(A) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n)$ enthalten ist.

Bemerkung 2.4. Angenommen es gelte $X_n = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und E_n und P_n seien jeweils die Identität auf X. Dann ist die Aussage des Satzes, dass (unter den restlichen Voraussetzungen) die Aussagen

(a) Für jedes fixe $x \in X$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n(t)x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen,

(b) Für alle $x \in X$ und jedes fixe $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n(t)x - T(t)x\| = 0,$$

(c) Es existiert ein $\lambda > \omega$ sodass für alle $x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} \left\|(\lambda \mathrm{I} - A_n)^{-1}x - (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}x\right\| = 0.$$

äquivalent sind. D.h. starke Konvergenz von (gewissen) Resolventen ist äquivalent zur starken Konvergenz der Halbgruppen.

Wir werden im Folgenden nur die Beweisidee eines Spezialfalls des Satzes geben, für den ausführlichen Beweis siehe Anhang.

Teilweiser Beweis von Satz 2.3.
Angenommen es gelte $X_n \subseteq X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, E_n sei die kanonische Einbettung von X_n in X und $P_n : X \to X_n$ sei eine Projektion auf X_n. Dann reicht es, zu zeigen, dass die Aussagen

(a) Für jedes fixe $x \in X$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n(t)P_nx - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen,

(b) Für jedes fixe $x \in X$ und jedes fixe $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n(t)P_nx - T(t)x\| = 0,$$

(c) Es existiert ein $\lambda \in (\omega, \infty)$ sodass für alle $x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} \left\|(\lambda \mathrm{I}_n - A_n)^{-1}P_nx - (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}x\right\| = 0.$$

äquivalent sind. Die Aussage (a) impliziert (b) ist trivial. Wir zeigen (b) impliziert (c): Sei $\lambda \in (\omega, \infty)$. Dann folgt

$$\left\|(\lambda \mathrm{I}_n - A_n)^{-1}P_nx - (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}x\right\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\|T_n(\tau)P_nx - T(\tau)x\| \,\mathrm{d}\tau.$$

Wegen
$$e^{-\lambda t}\,\|T_n(t)P_n x - T(t)x\| \le e^{(\omega-\lambda)t}(C+1)M\|x\|,$$
folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}\|T_n(\tau)P_n x - T(\tau)x\|\,\mathrm{d}\tau = 0$$
gilt. Damit folgt (c).
Wir geben nun die Beweisidee von (c) impliziert (a) wieder. Die genaue Ausführung findet sich im Anhang.
OBdA können wir annehmen, dass (c) mit $\lambda = 0$ gilt (denn für $\lambda \in (0,\infty)$ ist auch $t \mapsto e^{-\lambda t}T(t)$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $A - \lambda I$). Dadurch vereinfacht sich (c) zu
$$\lim_{n\to\infty}\left\|A^{-1}x - A_n^{-1}P_n x\right\| = 0$$
für alle $x \in X$.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ betrachte
$$(T_n(t)P_n - P_n T(t))x,\ t \ge 0.$$
Man kann zeigen, dass für alle $x \in X$
$$\lim_{n\to\infty}\|(T_n(t)P_n - P_n T(t))x\| = 0$$
gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen gilt.
Es bleibt zu zeigen, dass für alle $x \in X$
$$\lim_{n\to\infty}\|P_n T(t)x - T(t)x\| = 0$$
gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen. Für alle $x \in \mathrm{dom}(A)$ gilt, da P_n eine Projektion auf X_n ist,
$$P_n x - x = (P_n - \mathrm{I})(A^{-1} - A_n^{-1}P_n)Ax,$$
und damit $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ für alle $x \in \mathrm{dom}(A)$. Da $\mathrm{dom}(A)$ in X dicht ist, gilt $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ für alle $x \in X$. Es folgt für alle $x \in X$ und $t \ge 0$
$$\lim_{n\to\infty}\|P_n T(t)x - T(t)x\| = 0.$$
Da für fixes $x \in X$ und $T > 0$ die Menge $\{T(t)x \mid 0 \le t \le T\}$ kompakt ist, folgt, dass
$$\lim_{n\to\infty}\|P_n T(t)x - T(t)x\| = 0.$$
sogar gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen gilt (siehe Anhang).
Damit gilt insgesamt für alle $x \in X$
$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(t)P_n x - T(t)x\| = 0$$
gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen. □

Bemerkung 2.5. Im Allgemeinen ist es keine leichte Aufgabe, die Voraussetzungen des Satzes von Trotter-Kato zu überprüfen. Für $A \in G(M,\omega,X)$ kann Bemerkung 2.2 hilfreich sein. Für Bedingung (c) des Satzes von Trotter-Kato ist folgendes Resultat nützlich:
Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Trotter-Kato. Dann ist Aussage (c) im Satz von Trotter-Kato äquivalent zu den drei Aussagen

(C1) Es existiert $D \subseteq \operatorname{dom}(A)$ mit $\overline{D} = X$ und $\overline{(A-\lambda)D} = X$ für ein $\lambda > \omega$.

(C2) Für alle $u \in D$ gibt es eine Folge $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom}(A_n)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} E_n \overline{u}_n = u \text{ und } \lim_{n\to\infty} E_n A_n \overline{u}_n = Au,$$

(C3) $\lim_{n\to\infty} \|E_n P_n x - x\| = 0$ für alle $x \in X$.

Der Beweis dazu findet sich in [6, Proposition 3.1].

Beispiel 2.6. Wir betrachten das hyperbolische Problem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) + u_x(t,x) &= 0 \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,1), \\ u(t,0) &= 0 \qquad\quad t \in (0,\infty). \end{aligned} \tag{2}$$

Betrachte den Operator A definiert durch

$$A\phi := -\phi', \qquad \phi \in \operatorname{dom}(A),$$

wobei

$$\operatorname{dom}(A) := \left\{\phi \in L^2(0,1) \mid \phi \text{ ist absolut stetig auf } [0,1],\ \phi(0) = 0,\ \phi' \in L^2(0,1)\right\}.$$

Man kann zeigen, dass A der infinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe T auf $L^2(0,1)$ ist. Für $u_0 \in \operatorname{dom}(A)$ ist die Funktion $t \mapsto T(t)u_0$ die eindeutige Lösung von (2) zur Anfangsbedingung u_0.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_i := \frac{i}{n}$ für $i = 0, ..., n$. Für $k = 1, ..., n$ und $t > 0$ sei $u_k(t)$ eine Approximation von $u(t, x_k)$. Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_k(t) &= -\frac{u_k(t) - u_{k-1}(t)}{n^{-1}}, \qquad k = 1, ...n, \\ u_0(t) &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen, der infinitesimale Generator A_n der Lösungshalbgruppe auf $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$(A_n u)_k := -n(u_k - u_{k-1}) \qquad k = 1, ..., n.$$

Wir wollen Konvergenz (in einem geeigneten Sinn) von Lösungen u_n gegen Lösungen u von (2) zeigen.
Sei dazu $X = L^2(0,1)$ und $X_n = \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Seien A und A_n die Generatoren der Lösungshalbgruppen T bzw. T_n wie oben. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$E_n u := \sum_{k=1}^{n} u_k \chi_{(x_{k-1}, x_k]}, \qquad u \in \mathbb{R}^n,$$

und

$$(P_n \phi)_k := n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \phi(x)\, \mathrm{d}x, \qquad k = 1, ..., n, \phi \in X.$$

Weiters sei X_n mit der Norm

$$\|u\|_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2, \qquad u \in X_n$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

versehen. Man überprüft leicht, dass für alle n tatsächlich $\|E_n\| \leq 1$ und $P_n \leq 1$, sowie $P_n E_n = \mathrm{I}_n$ gilt. Weiters gilt

$$\langle A_n u, u\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \left(u_{k-1}u_k - u_k^2\right) \leq 0,$$

aus Bemerkung 2.2 folgt, dass die A_n in $G(1, 0, X_n)$ sind. Auch für den Generator A gilt das, denn für Lösungen $u \in \mathrm{dom}(A)$ von (2) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 u u_t \,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(u^2\right)_x \mathrm{d}x = -u^2(1) \leq 0,$$

und damit $\|T(t)u\| \leq \|u\|$ für alle $t \geq 0$ und $u \in \mathrm{dom}(A)$. Für $u \in \mathrm{dom}(A)$ sei $\overline{u}_n := (u(x_1), ..., u(x_n) \in X_n$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|E_n\overline{u}_n - u\|_{L^2}^2 &\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\int_\tau^{x_k} |u'(\sigma)| \,\mathrm{d}\sigma\right)^2 \mathrm{d}\tau \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_k - \tau)\left(\int_\tau^{x_k} |u'(\sigma)|^2 \,\mathrm{d}\sigma\right) \mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|u'(\sigma)|^2\int_{x_{k-1}}^{\sigma}(x_k - \tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma \\
&\leq \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|u'(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2n^2}\|u'\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Also $\lim_{n\to\infty}\|E_n\overline{u}_n - u\|_{L^2}^2 \to 0$. Weiters gilt für alle $u \in \{u \in C^1([0,1]) \,|u(0) = 0\}$,

$$\begin{aligned}
\|E_n A_n\overline{u}_n - Au\|_{L^2}^2 &\leq n^2\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k}|u'(\tau) - u'(\sigma)|\mathrm{d}\sigma\right)^2\mathrm{d}\tau \\
&\leq n^2\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{1}{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|u'(\tau) - u'(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von u' folgt für $\varepsilon > 0$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}|u'(\tau) - u'(\sigma)|^2\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\sigma < \frac{1}{n}\varepsilon,$$

sofern n groß genug ist. Also

$$n^2\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{1}{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|u'(\tau) - u'(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\tau \leq \varepsilon$$

für alle hinreichend großen n, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\|E_n A_n\overline{u}_n - Au\|_{L^2}^2 = 0.$$

In ähnlicher Weise kann auch $(C2)$ aus Bemerkung 2.5 gezeigt werden. Aus dem Satz von Trotter-Kato und Bemerkung 2.5 (mit $D = \{u \in C^1([0,1]) \, | u(0) = 0\}$ folgt für alle $u \in L^2(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n T_n(t) P_n u - T(t)u\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen.

Für weitere Beispiele verweisen wir auf [6].

3 Vorbemerkungen zu degenerierten Halbgruppen

Seien $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, mit $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\cup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \mathbb{R}^d$. Durch Fortsetzung durch Null können wir $L^2(\Omega_n)$ als Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^d)$ auffassen.
Angenommen T sei eine stark stetige Halbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei T_n eine stark stetige Halbgruppe auf $L^2(\Omega_n)$. Wir könnten die Ergebnisse des vorigen Abschnitts anwenden, um die Konvergenz der Halbgruppen zu untersuchen (d.h. Abbildungen $E_n : L^2(\Omega_n) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ und $P_n : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\Omega_n)$ finden, welche $(A1)$ und $(A2)$ erfüllen, und den Satz von Trotter Kato anwenden....).
Ein Alternativer Zugang ist, die Halbgruppen T_n vermöge

$$\widetilde{T}_n(t)u := \begin{cases} T_n(t)u|_{\Omega_n}, & \text{auf } \Omega_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zu Halbgruppen $\widetilde{T}_n$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ fortzusetzen, und dann die Konvergenz dieser Halbgruppen zu studieren. Allerdings sind die $\widetilde{T}_n$ keine stark stetigen Halbgruppen mehr, da $\widetilde{T}_n(0) = P_n$ gilt, wobei $P_n : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\Omega_n)$ die orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega_n)$ bezeichnet. Es stellt sich heraus, dass die $\widetilde{T}_n$ stetige degenerierte Halbgruppen sind, deren Konvergenz wir im Folgenden untersuchen.

Sei X ein Banachraum.

Definition 3.1. Eine Abbildung $S : (0, \infty) \to L_b(X)$ heißt degenerierte Halbgruppe, falls

1. $S(s + t) = S(s)S(t)$ für $s, t \in (0, \infty)$,
2. S ist stark stetig auf $(0, \infty)$,
3. $\sup_{t\in(0,1)} \|S(t)\| < \infty$

gilt. Falls zusätzlich für alle $x \in X$ der Grenzwert $S(0)x := \lim_{t\to 0^+} S(t)x$ existiert, so nennen wir S eine stetige degenerierte Halbgruppe.

Bemerkung 3.2. Für eine stetige Halbgruppe S auf einem Banachraum X ist $S(0)$ eine beschränkte Projektion auf $X_1 := S(0)X$. Die Einschränkung $T(t)|_{X_1}$ ist eine stark stetige Halbgruppe. Zusätlich gilt wegen

$$S(t)S(0)x = S(t) \lim_{s\to 0} S(s)x = \lim_{s\to 0} S(t + s)x = S(t)x$$

auch $S(t)S(0) = S(t)$ (für alle $t > 0$).

In Analogie zu den stark stetigen Halbgruppen gilt folgendes Resultat:

Lemma 3.3. *Für jede degenerierte Halbgruppe S gibt es Konstanten $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

für alle $t \in (0, \infty)$.

Für die Untersuchung von degenerierten Halbgruppen ist der Begriff der Pseudoresolvente hilfreich (siehe [7, Kapitel VIII]).

Definition 3.4. Sei X ein Banachraum und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Eine Abbildung $R : \Omega \to L_b(X)$ heißt Pseudoresolvente, falls für alle $\lambda, \mu \in \Omega$ die Gleichung

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

gilt.

Es gilt folgende Aussage (für den Beweis siehe Anhang):

Lemma 3.5. *Sei $R : \Omega \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente. Dann sind $\ker(R(\lambda))$ und $\operatorname{ran}(R(\lambda))$ unabhängig von $\lambda \in \Omega$.*

Damit ist die folgende Definition wohldefiniert:

Definition 3.6. Sei X ein Banachraum, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $R : \Omega \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente. Sei $\lambda \in \Omega$ beliebig. Dann definieren wir $\ker(R) := \ker(R(\lambda))$ und $\operatorname{ran}(R) := \operatorname{ran}(R(\lambda))$.

Folgender Satz beschreibt die Verbindung zwischen degenerierten Halbgruppen und Pseudoresolventen (siehe [3, Proposition 2.2]):.

Satz 3.7. *Sei S eine degenerierte Halbgruppe auf einem Banachraum X und seien $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ gilt. Sei $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\}$.*
Dann ist die Abbildung $R : \Omega \to L_b(X)$,

$$R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)x \, \mathrm{d}t, \qquad x \in X$$

eine Pseudoresolvente. Wir nennen R die zu S zugehörige Pseudoresolvente.

Falls T eine stark stetige Halbgruppe mit zugehöriger Pseudoresolvente R, so gibt es einen abgeschlossenen Operator A (nämlich genau den infinitesimalen Generator von T) mit $(\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1} = R(\lambda)$ für alle hinreichend großen $\lambda \in \mathbb{R}$. Es stellt sich die Frage, wie es sich bei degenerierten Halbgruppen verhält. Es gilt (siehe Anhang):

Satz 3.8. *Sei $R : \Omega \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. $\ker(R) = \{0\}$,
2. *Es existiert ein abgeschlossener linearer Operator $A : \operatorname{ran}(R) \to X$ mit $\Omega \subseteq \rho(A)$ und $R(\lambda) = (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1}$ für alle $\lambda \in \Omega$.*

Der Operator A aus 2. ist (falls existent) eindeutig bestimmt.

Definition 3.9. Sei X ein Banachraum, S eine degenerierte Halbgruppe mit zugehöriger Pseudoresolvente R. Falls es einen Operator A wie in der 2. Aussage des obigen Satzes gibt, so nennen wir A den infinitesimalen Generator von S.

Bemerkung 3.10. Diese Definition des infinitesimalen Generators einer degenerierten Halbgruppe hat einige Schwächen. So hat z.B. nicht jede degenerierte Halbgruppe einen Generator, und in reflexiven Räumen sind die Halbgruppen mit Generator genau die stark stetigen Halbgruppen, siehe weiter unten.

Lemma 3.11. *Sei X ein Banachraum und S eine degenerierte Halbgruppe auf X mit zugehöriger Pseudoresolvente R.*
Dann gilt: S ist genau dann eine stark stetige Halbgruppe, wenn $\ker(R) = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran}(R)} = X$ gilt.

Beweis. Falls S stark stetig ist mit $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, dann gilt für den infinitesimalen Generator A, dass $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$ und $(\lambda \mathrm{I} - A)^{-1} = R(\lambda)$ für alle $\lambda > \omega$. Es folgt $\ker(R) = \ker((\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}) = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran}(R)} = \overline{\operatorname{dom}(A)} = X$.
Sei nun S eine degenerierte Halbgruppe mit $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ und mit zugehöriger Pseudoresolvente R, welche $\ker(R) = \{0\}$ und $\overline{\operatorname{ran}(R)} = X$ erfüllt. Aus $\ker(R) = \{0\}$ folgt, dass es einen abgeschlossenen Operator $A : \operatorname{ran}(R) \to X$ gibt, mit $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$ und für $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der Halbgruppeneigenschaft von S

$$(\lambda \mathrm{I} - A)^{-n} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\lambda(t_1 + \ldots + t_n)} S(t_1 + \ldots + t_n)x \; \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n$$

und damit

$$\|(\lambda \mathrm{I} - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

für alle $x \in X$ und $\lambda \in (\omega, \infty)$. Wegen $\overline{\operatorname{ran}(R)} = X$ ist A dicht definiert, und nach dem Satz von Hille-Yoshida ist A der Generator einer stark stetigen Halbgruppe T, welche für $\lambda \in (\omega, \infty)$ die Gleichung

$$(\lambda \mathrm{I} - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \; \mathrm{d}t, \qquad x \in X$$

erfüllt. Aus dem Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte folgt $T(t) = S(t)$ für alle $t > 0$, damit ist S stark stetig. □

Auf reflexiven Banachräumen gilt folgendes Resultat (siehe [4, Proposition 2.1] bzw. [8]):

Satz 3.12. *Sei X ein reflexiver Banachraum und $\omega \in \mathbb{R}$. Sei $R : (\omega, \infty) \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente mit*

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda)\| < \infty.$$

Dann gilt: Der Banachraum X ist die direkte Summe von $\ker(R)$ und $\overline{\operatorname{ran}(R)}$.

Diese Aussage hat einige interessante Konsequenzen, z.B.

Lemma 3.13. *Sei X ein reflexiver Banachraum und S eine degenerierte Halbgruppe auf X, welche einen Generator hat. Dann ist X bereits stark stetig.*

Beweis. Sei R die zu S zugehörige Pseudoresolvente, d.h.

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \; \mathrm{d}t$$

für alle $x \in X$ und $\lambda \in (0, \infty)$. Eine einfache Abschätzung des Integrals liefert $\limsup_{\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda)\| < \infty$. Daher ist X die direkte Summe von $\ker(R)$ und $\overline{\operatorname{ran}(R)}$.
Da S einen Generator hat, folgt für die zu S zugehörige Pseudoresolvente R, dass $k\,er(R) = \{0\}$ gilt. Daher gilt $\overline{\operatorname{ran}(R)} = X$ und somit folgt die Aussage aus einem Lemma weiter oben. □

Lemma 3.14. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist jede degenerierte Halbgruppe auf X stetig.*

Beweis. Siehe Anhang. □

Lemma 3.15. *Sei X ein reflexiver Banachraum und S eine (nach obigem Lemma automatisch stetige) degenerierte Halbgruppe mit*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Sei $R : (\omega, \infty) \to L_b(X)$ die zugeordnete Pseudoresolvente.
Dann gilt: $x \mapsto S(0)x := \lim_{t\to 0} S(t)x$ ist eine beschränkte Projektion auf $\overline{\operatorname{ran}(R)}$.

Beweis. Da der starke Grenzwert von beschränkten Operatoren beschränkt ist, ist $S(0)$ beschränkt. Für $\lambda \in (\omega, \infty)$ betrachten wir die zugeordnete Pseudoresolvente

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t, \qquad x \in X. \tag{3}$$

Aus (3) folgt durch eine einfache Integralabschätzung

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|\lambda R(\lambda)\| < \infty,$$

und daher ist X die direkte Summe von $\ker(R)$ und $\overline{\operatorname{ran}(R)}$.
Es reicht nun zu zeigen, dass $S(0)|_{\overline{\operatorname{ran}(R)}} = \mathrm{I}$ und $S(0)|_{\ker(R)} = 0$ gilt.
Für alle $z = R(\lambda)x$ gilt mit dominierter Konvergenz

$$\begin{aligned}
S(0)z &= \lim_{t\to 0} S(t)z \\
&= \lim_{t\to 0} S(t) \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)x \,\mathrm{d}\tau \\
&= \lim_{t\to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(t+\tau)x \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)x \,\mathrm{d}\tau \\
&= z,
\end{aligned}$$

also $S(0)|_{\operatorname{ran}(R)} = \mathrm{I}$. Da $S(0)$ beschränkt ist, gilt die Gleichheit auf $\overline{\operatorname{ran}(R)}$.
Sei nun $x \in \ker(R)$, d.h. $R(\lambda)x = 0$ für alle $\lambda > \omega$, bzw.

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t = 0$$

für alle $\lambda > 0$. Aus dem Eindeutigkeitssatz für die Laplacetransformation (siehe Anhang) folgt $S(t)x = 0$ für alle $t > 0$, und damit auch $S(0)x = 0$. □

und

4 Konvergenz von degenerierten Halbgruppen

In reflexiven Banachräumen gilt folgendes schöne Ergebnis (siehe [4, 4.2] und Lemma 3.5):

Satz 4.1. *Seien $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ degenerierte Halbgruppen auf einem festen reflexiven Banachraum X und seien $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|S_n(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei R_n die zu S_n zugehörige Pseudoresolvente. Angenommen es existiere ein $\lambda_0 \in (\omega, \infty)$, sodass für alle $x \in X$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} R_n(\lambda_0)x$ existiert. Dann gilt

1. *$R(\lambda)x := \lim_{n\to\infty} R_n(\lambda)x$ existiert für alle $x \in X$ und $\lambda > \omega$. Die Abbildung $(\omega,\infty) \ni \lambda \to R(\lambda)$ ist eine Pseudoresolvente. Seien $\operatorname{ran}(R)$ und $\ker(R)$ das Bild, bzw. der Kern eines (und damit aller) $R(\lambda)$,*

2. *$S(t)x := \lim_{n\to\infty} S_n(t)x$ existiert für alle $x \in \overline{\operatorname{ran}(R)}$, wobei die Konvergenz gleichmäßig auf $[0,T]$ für alle $T > 0$,*

3. *S ist eine stark stetige Halbgruppe auf $\overline{\operatorname{ran}(R)}$, und für den Generator A von S gilt $(\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1}x = R(\lambda)x$ für alle $x \in \overline{\operatorname{ran}(R)}$ und $\lambda > \omega$,*

4. *$\lim_{n\to\infty} \int_0^t S_n(\tau)x \,\mathrm{d}\tau = 0$ gleichmäßig auf $[0,T]$ für alle $T > 0$ und $x \in \ker(R)$.*

Betrachten wir als nächstes auf reflexiven Räumen die Konvergenz von degenerierten Halbgruppen auf dem ganzen Raum (siehe [5]).

Korollar 4.2. Seien $S, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ degenerierte Halbgruppen auf einem festen reflexiven Banachraum X und seien $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t > 0$$

und

$$\|S_n(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien weiters R und R_n die zu S bzw. S_n zugehörigen Pseudoresolventen ($n \in \mathbb{N}$). Angenommen es existiere ein $\lambda_0 \in (0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} R_n(\lambda_0)x = R(\lambda_0)x$ für alle $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Für alle $T > 0$ und $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(t)x - S(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf $(0,T]$,

(b) Es gibt ein $T > 0$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n(t)x - S(t)x\| = 0$$

für alle $x \in X$ gleichmäßig auf $(0,T]$,

(c) $\lim_{n\to\infty} S_n(0)x = S(0)x$ für alle $x \in X$.

Beweis. Aussage (a) impliziert (b) ist trivial. Anwenden der Dreiecksungleichung liefert (b) impliziert (c). Es bleibt zu zeigen, dass (c) die Aussage (a) impliziert.
Aus Satz 4.1 folgt Aussage (a) für alle $x \in \overline{\operatorname{ran}(R)}$. Da $S(0)$ eine Projektion auf $\operatorname{ran}(R)$ ist, folgt für alle $T > 0$ und $x \in X$

$$\begin{aligned}
\|S_n(t)x - S(t)x\| &= \|S_n(t)S_n(0)x - S(t)S(0)x\| \\
&\leq \|S_n(t)(S_n(0)x - S(0)x)\| + \|(S_n(t) - S(t))S(0)x\| \\
&\leq Me^{\max(0,\omega)T}\|S_n(0)x - S(0)x\| + \|(S_n(t) - S(t))S(0)x\| \\
&\qquad\qquad \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Betrachten wir als nächstes Situation in allgemeinen Banachräumen. Wir benötigen folgende Definition (siehe [4]):

Definition 4.3. Für $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ sei

$$\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \bigm| |\arg z| < \theta\}.$$

Sei X ein Banachraum und $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Eine Abbildung $S : \Sigma_\theta \to L_b(X)$ heißt holomorphe, degenerierte Halbgruppe, falls

1. $S(z + z') = S(z)S(z')$ für alle $z, z' \in \Sigma_\theta$,
2. die Abbildung $\Sigma_\theta \ni z \mapsto S(z)$ ist holomorph (bezüglich der Abbildungsnorm auf $L_b(X)$,
3. $\sup_{z \in \Sigma_\theta, |z|<1} < \infty$

gilt.
Falls $\|S(z)\| \leq M$ für alle $z \in \Sigma_\theta$, so nennen wir S eine beschränkte holomorphe degenerierte Halbgruppe.

Man kann zeigen, dass für die zugehörige Pseudoresolvente $R : \mathbb{C}_+ \to L_b(X)$,

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t, \qquad x \in X$$

einer beschränkten holomorphen degenerierten Halbgruppe stets

$$\|\lambda R(\lambda)\| \leq M$$

gilt, wobei $M > 0$ eine hinreichend große Konstante ist. (Beweis analog wie für analytische stark stetige Halbgruppen).
Im Folgenden sei $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0$. Wir haben schon gesehen, dass wir mit jeder degenerierten Halbgruppe eine Pseudoresolvente assoziieren können. Für beschränkte holomorphe degenerierte Halbgruppen gilt in einem gewissen Sinn die Umkehrung (siehe [4, Theorem 5.1]).

Satz 4.4. *Sei X ein Banachraum und $M > 0$ und sei $R : \mathbb{C}_+ \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente mit*

$$\|\lambda R(\lambda)\| \leq M$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Dann existieren von M abhängige Konstanten $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\widetilde{M} \geq 0$ und eine beschränkte, holomorphe degenerierte Halbgruppe S auf Σ_θ mit $\|S(z)\| \leq \widetilde{M}$ für alle $z \in \Sigma_\theta$ und

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \,\mathrm{d}t$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Wir nennen S die mit R assoziierte beschränkte holomorphe degenerierte Halbgruppe.

Mithilfe dieses Satzes können wir folgendes Approximationsresultat beweisen (siehe [4, Theorem 5.2]).

Satz 4.5. *Sei X ein Banachraum und $M \geq 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $R_n : \mathbb{C}_+ \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente mit*

$$\|\lambda R_n(\lambda)\| \leq M$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}_+$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n die mit R_n assoziierte beschränkte degenerierte holomorphe Halbgruppe. Falls es ein $\lambda > 0$ gibt, sodass $\lim_{n\to 0} R_n(\lambda)x$ für alle $x \in X$ existiert, dann gilt

1. *Für alle* $x \in X$ *existiert und alle* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *existiert* $R(\lambda)x := \lim_{n\to\infty} R_n(\lambda)x$. *Die auf diese Weise definierte Funktion* $R : \mathbb{C}_+ \to L_b(X)$ *ist eine Pseudoresolvente,*

2. *Es existiert eine beschränkte degenerierte holomorphe Halbgruppe* S *mit* $\lim_{n\to\infty} S_n(t)x = S(t)x$ *für alle* $x \in X$ *gleichmäßig für* $t \in [\delta, T]$ *für alle* $0 < \delta < T$. *Weiters ist* R *genau die zu* S *zugehörige Pseudoresolvente.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma (siehe Beweis von [4, Theorem 1.6]).

Lemma 4.6. *Seien* $M, \omega \geq 0$ *und sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *offen und zusammenhängend, so dass* $(0, \infty) \subseteq \Omega$ *gilt. Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $f_n : \Omega \to X$ *holomorph mit*

$$\|f_n(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

für alle $t \in (0, \infty)$. *Weiters sei die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf* Ω *lokal beschränkt, d.h. für alle* $z \in \Omega$ *existiert eine Umgebung* U_z *von* z *mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{w\in U_z} \|f_n(w)\| < \infty.$$

Falls für alle $\lambda > \omega$ *die Laplace-Transformierten*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_n(t) \mathrm{d}t$$

für $n \to \infty$ *konvergieren, dann konvergiert* f_n *für* $n \to \infty$ *gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von* Ω.

Beweis von Satz 4.5. Teil 1. folgt aus [4, Theorem 3.7]. Wir beweisen Teil 2.
Aus Satz 4.4 folgt, dass es ein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und ein $\widetilde{M} \geq 0$ gibt, sodass die assoziierten Halbgruppen S_n für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \Sigma_\theta$ die Ungleichung

$$\|S_n(z)\| \leq \widetilde{M}$$

erfüllen. Laut Voraussetzung gibt es ein $\lambda > 0$, sodass $\lim_{n\to\infty} R_n(\lambda)x$ für alle $x \in X$ existiert. Aus 1. folgt, dass $\lim_{n\to\infty} R(\lambda)x$ für alle $x \in X$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}_+$ existiert.
Aus obigem Lemma folgt daher, dass für alle $x \in X$ gilt, dass $S(z)x := \lim_{n\to\infty} S_n(z)x$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Σ_θ existiert. Dann ist $S(z) \leq \widetilde{M}$ für alle $z \in \Sigma_\theta$. Weiters ist S nach dem Satz von Vitali holomorphe (siehe Anhang). Für alle $z, z' \in \Sigma_\theta$ und $x \in X$ gilt zudem

$$\begin{aligned}
&\|S_n(z)S_n(z')x - S(z)S(z')x\| \\
&\quad \leq \|S_n(z)S_n(z')x - S(z)S_n(z')x\| + \|S(z)S_n(z')x - S(z)S(z')x\| \\
&\quad \leq \|S_n(z')S_n(z)x - S_n(z')S(z)x\| + \|S_n(z')S(z)x - S(z)S_n(z')x\| \\
&\qquad\qquad + \|S(z)S_n(z')x - S(z)S(z')x\| \to 0,
\end{aligned}$$

dies impliziert $S(z+z') = S(z)S(z')$, damit ist S eine degenerierte beschränkte holomorphe Halbgruppe.
Es bleibt zu zeigen, dass R die zu S zugehörige Pseudoresolvente ist. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und 1. folgt

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \ \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_n(t)x \ \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} R_n(\lambda)x = R(\lambda)x$$

für alle $x \in X$ und alle λ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. □

Zum Abschluss geben wir noch folgendes Korollar (siehe [5]):

Korollar 4.7. Sei X ein Banachraum und seien $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $M > 0$. Seien S und S_n ($n \in \mathbb{N}$) auf dem gemeinsamen Sektor Σ_θ definierte holomorphe degenerierte Halbgruppen mit $\|S(z)\| \leq M$ und

$$\|S_n(z)\| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \Sigma_\theta$. Seien weiters R und R_n die zu S bzw. S_n zugehörigen Pseudoresolventen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|S_n(t)x - S(t)x\| \,\mathrm{d}t = 0$ für alle $x \in X$ und alle $T > 0$,

2. $\lim_{n\to\infty} R_n(\lambda)x = R(\lambda)x$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}_+$ und $x \in X$,

3. Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} R_n(\lambda)x = R(\lambda)x$ für alle $x \in X$,

4. für alle $x \in X$ und $0 < \delta < T$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[\delta,T]} \|S_n(t)x - S(t)x\| = 0.$$

Beweis. 1. impliziert 2. folgt durch Laplace-Transformation von S_n und S. 2. impliziert 3. ist trivial. 3. impliziert 2. folgt aus 4.5. 4. impliziert 1. folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz. 2. impliziert 4. folgt ebenfalls aus Satz 4.5. und dem Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte (siehe Anhang). □

Für weitere Resultate zur Konvergenz von degenerierten Halbgruppen (insbesondere in Hilberträumen) verweisen wir auf [5].

A Anhang zu stark stetigen Halbgruppen

Der Satz von Hille-Yoshida beantwortet die Frage, wann ein gegebener Operator $A : \mathrm{dom}(A) \to X$ der infinitesimale Generator einer (eindeutig bestimmten) stark stetigen Halbgruppe auf X ist.

Satz A.1. *(von Hille-Yoshida)*
Sei $A : dom(A) \to X$ ein auf einem Unterraum $dom(A) \subseteq X$ definierter linearer Operator. Dann ist A genau dann der infinitesimale Generator einer (eindeutig bestimmten) stark stetigen Halbgruppe $T : [0, \infty) \to X$, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. *A ist abgeschlossen (d.h. der Graph von A ist eine abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$) und $dom(A)$ ist dicht in X,*

2. *Es gibt $\omega, M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, sodass*

$$(\omega, \infty) \in \rho(A) \tag{4}$$

und

$$\|(A - \lambda I)^{-1})^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \tag{5}$$

für alle $\lambda \in (\omega, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Ist A der infinitesimale Generator einer stark stetigen Halbgruppe T, so gilt (4) *und* (5) *mit $M > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$ gilt.*

Beweis. Funktionalanalysis 2, [7]. □

Bemerkung 2.2 gibt eine Möglichkeit, für einen infinitesimalen Generator A auf einem Hilbertraum H die Beziehung $A \in G(1, 0, H)$ nachzuweisen. Laut Bemerkung 2.2 ist $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$ für alle $x \in \mathrm{dom}(A)$ hinreichend für $A \in G(1, 0, H)$.

Beweis von Bemerkung 2.2. Sei A infinitesimaler Generator einer stark stetigen Halbruppe T auf einem Hilbertraum H, welche $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0$ für alle $x \in \mathrm{dom}(A)$ erfüllt. Sei $\lambda > 0$ und $x \in \mathrm{dom}(A)$. Dann gilt

$$\|(A - \lambda)x\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|Ax\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle Ax, \lambda x\rangle \geq \lambda^2\|x\|^2$$

d.h.

$$\|(A - \lambda)x\| \geq \lambda\|x\|.$$

Es folgt, dass $A - \lambda$ injektiv ist. Aus dem Satz von Hille-Yoshida folgt, dass $A - \lambda$ für alle hinreichend großen λ_0 surjektiv ist. Daraus folgt, dass $A - \lambda$ für alle $\lambda > 0$ surjektiv ist: Denn aus $\|(A - \lambda_0)x\| \geq \lambda\|x\|$ folgt $\|(A - \lambda_0)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$, und damit $(0, 2\lambda_0) \subseteq \rho(A)$. Insgesamt folgt daher aus $\|(A - \lambda_0)x\| \geq \lambda\|x\|$, dass $(0, \infty) \in \rho(A)$ und

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Damit folgt (5) mit $M = 1$ und $\omega = 0$, und die Aussage folgt aus dem Satz von Hille-Yoshida. □

Für den Beweis des Satzes von Trotter-Kato ist folgende Aussage nützlich (vgl. [9, Kapitel 3, Lemma 3.7]):

Lemma A.2. *Sei X ein Banachraum und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Operatoren auf X, welche in der starken Operatortopologie gegen $T \in L_b(X)$ konvergiert. Sei $S \subseteq X$ kompakt. Dann konvergiert $T_n x$ gegen Tx gleichmäßig für alle $x \in S$.*

Wir kommen nun zur sauberen Ausarbeitung des Beweises des Satzes von Trotter-Kato. Wir erinnern kurz an das Setting :
Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Banachräume mit Normen $\|\cdot\|, (\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei weiters T eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Generator A. Gesucht sind Generatoren A_n auf X_n, sodass die von den Generatoren A_n erzeugten Halbgruppen die Halbgruppe T (in einem geeigneten Sinn) approximieren.
Wir nehmen Folgendes an: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren beschränkte lineare Operatoren $P_n : X \to X_n$ und $E_n : X_n \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

(A1) Es gibt ein $C > 0$ mit $\|E_n\| \leq C$ und $\|P_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(A2) $P_n E_n = \mathrm{I}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei I_n die Identität auf X_n sei.

Satz A.3. *(Trotter-Kato)*
Es gelte (A1) und (A2). Sei $A \in G(M,\omega,X)$ und T die von A auf X erzeugte C_0-Halbgruppe. Weiters seien für $n \in \mathbb{N}$ Generatoren $A_n \in G(M,\omega,X_n)$ von C_0-Halbgruppen T_n auf X_n gegeben.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Für jedes fixe $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n T_n(t) P_n x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen,

(b) Für jedes fixe $x \in X$ und alle $t \in [0,\infty)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n T_n(t) P_n x - T(t)x\| = 0,$$

(c) Es existiert ein $\lambda \in (\omega,\infty)$ sodass für alle $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| E_n(\lambda\,\mathrm{I}_n - A_n)^{-1} P_n x - (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1} x \right\| = 0. \tag{6}$$

Falls (7) mit einem $\lambda \in (\omega,\infty)$ gilt, so gilt (7) sogar für alle $\lambda \in (\omega,\infty)$.

Man beachte, dass wegen $A \in G(M,\omega,X)$ und $A_n \in G(M,\omega,X_n)$ gilt, dass die Menge (ω,∞) in $\rho(A) \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n)$ enthalten ist.

Beweis. Der Beweis besteht aus 2 Schritten.
Schritt 1:
Angenommen es gelte $X_n \subseteq X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, E_n sei die kanonische Einbettung von X_n in X und $P_n : X \to X_n$ sei eine Projektion auf X_n. Dann reicht es, zu zeigen, dass die Aussagen

(a) Für jedes fixe $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(t) P_n x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen,

(b) Für jedes fixe $x \in X$ und jedes fixe $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(t)P_n x - T(t)x\| = 0,$$

(c) Es existiert ein $\lambda \in (\omega, \infty)$ sodass für alle $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(\lambda \mathrm{I}_n - A_n)^{-1} P_n x - (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1} x\right\| = 0.$$

äquivalent sind. Die Aussage (a) impliziert (b) ist trivial. Wir zeigen (b) impliziert (c): Sei $\lambda \in (\omega, \infty)$. Dann folgt

$$\left\|(\lambda \mathrm{I}_n - A_n)^{-1} P_n x - (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1} x\right\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \|T_n(\tau)P_n x - T(\tau)x\| \,\mathrm{d}\tau.$$

Wegen

$$e^{-\lambda t} \|T_n(t)P_n x - T(t)x\| \leq e^{(\omega-\lambda)t}(C+1)M\|x\|,$$

folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} \|T_n(\tau)P_n x - T(\tau)x\| \,\mathrm{d}\tau = 0$$

gilt. Damit folgt (c).
Nun zeigen wir (c) impliziert (a).
OBdA können wir annehmen, dass (c) mit $\lambda = 0$ gilt (denn für $\lambda \in (0, \infty)$ ist auch $t \mapsto e^{-\lambda t}T(t)$ eine stark stetige Halbgruppe mit Generator $A - \lambda I$). Dadurch vereinfacht sich (c) zu

$$\lim_{n\to\infty} \left\|A^{-1}x - A_n^{-1} P_n x\right\| = 0$$

für alle $x \in X$.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ betrachte

$$e_{n,x}(t) := (T_n(t)P_n - P_n T(t))x, \ t \geq 0.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathrm{dom}(A)$ sei

$$u_n(t) = A_n^{-1} e_{n,x}(t), \ t \geq 0.$$

Es gilt $u_n \in C^1(0, \infty; X_n)$, da $A_n^{-1}T_n(t)P_n x = T_n A_n^{-1}(t)P_n x$ und $A_n^{-1}P_n x \in \mathrm{dom}(A)$, sowie aufgrund der Tatsache, dass $A_n^{-1}P_n$ ein beschränkter Operator ist. Weiters gilt

$$\begin{aligned} &u_n' = A_n u_n + P_n \Delta_n A T(t)x, \\ &u_n(0) = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\Delta_n := A^{-1} - A_n^{-1} P_n.$$

Mittels Variation der Konstanten folgt für $t \geq 0$ und $x \in \mathrm{dom}(A)$

$$u_{n,x}(t) = \int_0^t T_n(t-\tau)P_n \Delta_n A T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau, \ t \geq 0,$$

und damit schließlich

$$e_{n,x}(t) = A_n \int_0^t T_n(t-\tau)P_n \Delta_n A T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau, \ t \geq 0.$$

Für $x \in X$ und $t \geq 0$ lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} e_{n,x}(t) = \lim_{n\to\infty} \|T_n(t)P_n x - P_n T(t)x\| = 0$$

gilt.
Für $x \in \operatorname{dom}(A^2)$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} u_{n,x}(t) = &-A_n^{-1}P_n\Delta_n AT(t)x + A_n^{-1}T_n(t)P_n\Delta_n Ax \\ &+ A_n^{-1}\int_0^t T_n(t-\tau)P_n\Delta_n A^2T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau,\ t \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Dabei wurde $A_nT_n(t-\tau)y = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}T_n(t-\tau)y,\ y \in X_n$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}T(\tau)x = AT(\tau)x,\ x \in \operatorname{dom}(A)$ verwendet. Damit folgt für $x \in \operatorname{dom}(A^2)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_{n,x}(t) = &P_n\Delta_n AT(t)x + T_n(t)P_n\Delta_n Ax \\ &+ \int_0^t T_n(t-\tau)P_n\Delta_n A^2T(\tau)x \,\mathrm{d}\tau,\ t \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Betrachte den ersten Term auf der rechten Seite. Aus der vorausgesetzten Aussage (c) folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} P_n\Delta_n AT(t)x = 0$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in \operatorname{dom}(A)$. Da für alle $T > 0$ und festes $x \in \operatorname{dom}(A)$ die Menge $\{T(t)Ax \mid 0 \leq t \leq T\}$ kompakt ist, folgt mit Lemma A.2, dass

$$\lim_{n\to\infty} P_n\Delta_n AT(t)x = 0$$

gleichmäßig für alle kompakten t-Intervalle. Für den zweiten Term folgt analog

$$\lim_{n\to\infty} T_n(t)P_n\Delta_n Ax = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen (man beachte, dass $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ gilt). Weiters ist für $x \in \operatorname{dom}(A)$ und $T > 0$ die Menge $\{A^2T(\tau)x \mid 0 \leq \tau \leq T\}$ kompakt, und es folgt, dass $\|\Delta_n A^2T(\tau)x\|$ gleichmäßig auf kompakten t-Intervallen gegen Null konvergiert. Somit gilt für alle $x \in \operatorname{dom}(A)$

$$\lim_{n\to\infty} e_{n,x}(t) = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen. Da für jedes t der Operator $e_{nx}(t)$ beschränkt ist, und $\operatorname{dom}(A^2)$ in X dicht ist (wie man leicht mit der Bijektivität und Beschränktheit von A^{-1} zeigen kann), folgt

$$\lim_{n\to\infty} e_{n,x}(t) = \lim_{n\to\infty} \|(T_n(t)P_n - P_nT(t))x\| = 0$$

für alle $x \in X$ gleichmäßig auf kompakten t-Intervallen.
Es bleibt zu zeigen, dass für alle $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \|P_nT(t)x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen. Für alle $x \in \operatorname{dom}(A)$ gilt, da P_n eine Projektion auf X_n ist,

$$P_nx - x = (P_n - \mathrm{I})(A^{-1} - A_n^{-1}P_n)Ax,$$

und damit $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ für alle $x \in \operatorname{dom}(A)$. Da $\operatorname{dom}(A)$ in X dicht ist, gilt $\lim_{n\to\infty} P_n x = x$ für alle $x \in X$. Es folgt für alle $x \in X$ und $t \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n T(t)x - T(t)x\| = 0.$$

Da für fixes $x \in X$ und $T > 0$ die Menge $\{T(t)x \mid 0 \leq t \leq T\}$ kompakt ist, folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n T(t)x - T(t)x\| = 0.$$

sogar gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen gilt (siehe Lemma A.2).
Damit gilt insgesamt für alle $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(t)P_n x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen.
Schritt 2:
Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, d.h. X_n muss kein Unterraum von X mehr sein. Dieser Fall kann auf den Spezialfall in Schritt 1 zurückgeführt werden.
Definiere $\widetilde{X}_n := \operatorname{range} E_n$. Aus der Beschränktheit von E_n und P_n, sowie $P_n E_n = \mathrm{I}_n$ folgt, dass die $\widetilde{X}_n$ abgeschlossen sind.
Definiere weiters $\widetilde{P}_n := E_n P_n$ und $\widetilde{E}_n$ sei die kanonische Einbettung von $\widetilde{X}_n$ in X. Aus (A1) folgt $\widetilde{P}_n \leq C^2$ und $\widetilde{E}_n \leq 1$.
Weiters ist $\widetilde{P}_n$ eine Projektion auf $\widetilde{X}_n$: Für $x_n = E_n z_n \in \operatorname{range} E_n$ folgt

$$\widetilde{P_n}\widetilde{E_n} x_n = E_n P_n x_n = E_n P_n E_n z_n = E_n z_n = x_n$$

und

$$\widetilde{P}_n^2 x = E_n P_n E_n P_n x = E_n P_n x = \widetilde{P}_n x$$

für alle $x \in x$. Aus der Projektionseigenschaft folgt auch $\widetilde{E}_n \widetilde{P}_n = \widetilde{I}_n$, wobei $\widetilde{I}_n$ die Identität auf $\widetilde{X}_n$ bezeichnet.
Weiters sei $\widetilde{A}_n(t) := E_n A_n(t) P_n|_{\widetilde{X_n}}$. Dann ist $\widetilde{A}_n$ der infinitesimale Generator der Halbgruppe $\widetilde{T}(t) := E_n T_n(t) P_n|_{\widetilde{X}_n}$ und $\operatorname{dom}(\widetilde{A}) = E_n \operatorname{dom}(A)$.
Aus Schritt 1 folgt, dass die Aussagen

(a) Für jedes fixe $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{T}_n(t)\widetilde{P}_n x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen,

(b) Für jedes fixe $x \in X$ und jedes fixe $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{T}_n(t)\widetilde{P}_n x - T(t)x\| = 0,$$

(c) Es existiert ein $\lambda \in (\omega, \infty)$ sodass für alle $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(\lambda\widetilde{\mathrm{I}}_n - \widetilde{A}_n)^{-1}\widetilde{P}_n x - (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1}x\right\| = 0.$$

äquivalent sind.
Umformulieren und verwenden der Definitionen von $\widetilde{P}_n$, $\widetilde{E}_n$, $\widetilde{T}(t)$ und $\widetilde{A}_n$ liefert, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Für jedes fixe $x \in X$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n T_n(t) P_n x - T(t)x\| = 0$$

gleichmäßig auf allen kompakten t-Intervallen,

(b) Für jedes fixe $x \in X$ und alle $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|E_n T_n(t) P_n x - T(t)x\| = 0,$$

(c) Es existiert ein $\lambda \in (\omega, \infty)$ sodass für alle $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|E_n(\lambda\,\mathrm{I}_n - A_n)^{-1} P_n x - (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1} x\right\| = 0. \tag{7}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

B Anhang zu degenerierten Halbgruppen

Folgendes Lemma ist aus [7, Kapitel VIII]:

Lemma B.1. *Sei $R : \Omega \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente. Dann sind $\ker(R(\lambda))$ und $\operatorname{ran}(R(\lambda))$ unabhängig von $\lambda \in \Omega$.*

Beweis. Nach Definition einer Pseudoresolvente gilt

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

für alle $\mu, \lambda \in \Omega$. Vertauschen von λ und μ liefert

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda),$$

und damit

$$R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$$

für alle $\mu, \lambda \in \Omega$. Durch elementares Rechnen mit diesen Beziehungen folgt die Aussage des Lemmas. □

Folgender Satz findet sich ebenfalls in [7, Kapitel VIII]

Satz B.2. *Sei $R : \Omega \to L_b(X)$ eine Pseudoresolvente. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

1. $\ker(R) = \{0\}$,
2. *Es existiert ein abgeschlossener linearer Operator $A : \operatorname{ran}(R) \to X$ mit $\Omega \subseteq \rho(A)$ und $R(\lambda) = (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1}$ für alle $\lambda \in \Omega$.*

Der Operator A aus 2. ist (falls existent) eindeutig bestimmt, und wird auch Generator von R genannt.

Beweis. Die Richtung (2.) impliziert (1.) ist klar, da $\lambda\,\mathrm{I} - A$ invertierbar ist. Es bleibt noch (1.) impliziert (2.) zu zeigen. Es gelte $\ker(R) = 0$ (man erinnere sich daran, dass $\ker(R)$ definiert war als der Kern eines (und damit aller) $R(\lambda)$). Dann existiert $R(\lambda)^{-1} : \operatorname{ran}(R) \to X$ für alle $\lambda \in \Omega$. Es gilt

$$\lambda\,\mathrm{I} - R(\lambda)^{-1} = \mu\,\mathrm{I} - R(\mu)^{-1}$$

für alle $\lambda, \mu \in \Omega$. Das folgt aus $R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$ (siehe Lemma davor) und

$$\begin{aligned} R(\lambda)R(\mu)\left(\lambda\,\mathrm{I} - R(\lambda)^{-1} - \mu\,\mathrm{I} + R(\mu)^{-1}\right) &= (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) - R(\lambda)R(\mu)\left(R(\lambda)^{-1} - R(\mu)^{-1}\right) \\ &= (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) - (R(\mu) - R(\lambda)) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist der lineare Operator $A := \lambda\,\mathrm{I} - R(\lambda)^{-1}$ unabhängig von λ, und als Summe eines beschränkten und eines abgeschlossenen Operators (man beachte, da $R(\lambda)$ abgeschlossen ist, ist auch $R(\lambda)^{-1}$ abgeschlossen) ist A abgeschlossen. Weiters folgt für alle $\mu \in \Omega$ die Gleichheit $R(\mu) = (\mu\,\mathrm{I} - A)^{-1}$ und damit auch $\mu \in \rho(A)$ für alle $\mu \in \Omega$.

Es bleibt zu zeigen, dass ein solches A eindeutig ist. Das folgt unmittelbar daraus, dass, falls ein solches A existiert, $\ker(R(\lambda)) = \{0\}$ gilt und daher $R(\lambda)$ invertierbar ist. Damit folgt $R(\lambda) = (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1} \Leftrightarrow A = \lambda\,\mathrm{I} - R(\lambda)^{-1}$. Damit ist A eindeutig.

□

Lemma B.3. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist jede degenerierte Halbgruppe auf X stetig.*

Beweis. Sei S eine degenerierte Halbgruppe auf S und $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $t > 0$ die Ungleichung

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

gilt. Sei R die zu S zugehörige Pseudoresolvente, d.h.

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, \mathrm{d}t$$

für alle $x \in X$ und $\lambda \in (0, \infty)$. Eine einfache Abschätzung des Integrals liefert $\limsup_{n\to\infty} \|\lambda R(\lambda)\| < \infty$. Daher ist X die direkte Summe von $\ker(R)$ und $\overline{\operatorname{ran}(R)}$. Für alle $x \in \ker(R)$ gilt $S(t)x = 0$ (siehe Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte weiter unten). Die Abbildung $(0, \infty) \ni t \mapsto S(t)|_{\overline{\operatorname{ran}(R)}}$ ist eine degenerierte Halbgruppe mit zugehöriger Pseudoresolvente $R|_{\overline{\operatorname{ran}(R)}}$. Wegen $\ker(R|_{\overline{\operatorname{ran}(R)}}) = \{0\}$ folgt aus Lemma 3.11, dass $(0, \infty) \ni t \mapsto S(t)|_{\overline{\operatorname{ran}(R)}}$ eine stark stetige Halbgruppe ist. Damit existiert $S(0)x := \lim_{t\to 0} S(t)x$ für alle $x \in X$. □

Für holomorphe Halbgruppen ist der folgende Satz von Vitali oft nützlich (siehe [2])

Satz B.4. *(von Vitali)*
Sei X ein Banachraum und sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \Omega \to X$ eine holomorphe Funktion, so dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal beschränkt ist (d.h. für jedes $z \in \Omega$ gibt es eine Umgebung U_z und eine Zahl $M_z > 0$ mit $\|f_n(w)\| \leq M_z$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $w \in U_z$.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von Ω gegen eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to X$,*
2. *die Menge $\Omega_0 := \{z \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existiert$\}$ hat einen Häufungspunkt in Ω,*
3. *es existiert ein $z_0 \in \Omega$, sodass $\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z_0)$ existiert für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Auch der folgende Eindeutigkeitssatz zu Laplace-Transformierten ist nützlich (siehe [1, Theorem 1.7.3]):

Satz B.5. *Sei X ein Banachraum und seien $S, T : (0, \infty) \to L_b(X)$ stark stetige Abbildungen. Angenommen es existieren $M \geq 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t > 0$$

und

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t > 0.$$

Sei $x \in X$ so, dass für alle $\lambda \in (\omega, \infty)$ die Gleichheit

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, \mathrm{d}t$$

gilt. Dann folgt $S(t)x = T(t)x$ für alle $t > 0$.

Literatur

[1] Arendt, W.; Batty, C.J.K.; Hieber M.; Neubrander F.: *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. Second Edition.*, 96 *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser, Basel, 2011.

[2] Arendt, W.; Nikolski, N.: *Vector-valued holomorphic functions revisited.* Math Z, 234:p. 777–805, 2000.

[3] Arendt, W.: *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems.* Israel J. Math, 59:p.327–352, 1987.

[4] Arendt, W.: *Approximation of Degenerate Semigroups.* Taiwanese J. Math., 5(2):p.279 – 295, 2001.

[5] Chill, R.; ter Elst, A.F.M.: *Weak and Strong Approximation of Semigroups on Hilbert Spaces.* Integr. Equ. Oper. Theory, 90(9), 2018.

[6] Ito, K.; Kappel, F.: *The Trotter-Kato Theorem And Approximation of PDEs.* Mathematics of Computation, 67(221):p. 21–44, 1998.

[7] Kaltenbäck, M.: *Funktionalanalysis 2.* Vorlesungsskript an der TU Wien, 2019. https://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/skripten/main.pdf.

[8] Kato, T.: *Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semi-groups.* Proc. Japan Acad., (35):p.467–468, 1959.

[9] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, 1995.

[10] Yoshida, K.: *Functional Analysis.* Springer, 1980.