Henrik Winkler

ZUM INVERSEN SPEKTRALPROBLEM

FÜR ZWEIDIMENSIONALE

KANONISCHE SYSTEME

DISSERTATION

D I S S E R T A T I O N

Zum inversen Spektralproblem

für zweidimensionale kanonische Systeme

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades

eines Doktors der technischen Wissenschaften

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

von

Henrik Winkler

Matr. Nr. 9127734

geboren am 8. 11. 1965 in Dresden

Wien, im Mai 1993

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

In dieser Arbeit werden einige Aspekte des inversen Spektralproblems für zweidimensionale singuläre kanonische Differentialgleichungssysteme behandelt.

Es sei $\mathbf{H}$ eine auf $[0, \infty)$ gegebene reelle, symmetrische und nichtnegativ definite (2×2)-Matrixfunktion, deren Elemente lokal integrierbare Funktionen sind. Weiterhin soll $\mathbf{H}$ spurnormiert sein, d.h., die Summe der Diagonalelemente von $\mathbf{H}$ sei stets 1. Eine solche Matrixfunktion $\mathbf{H}$ wird kurz *Hamiltonian* genannt.

Es sei $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$ betrachten wir folgende Anfangswertaufgabe für eine (2×2)-Matrixfunktion $\mathbf{W}$:

$$\frac{d\mathbf{W}(x,z)}{dx}\mathbf{J} = z\mathbf{W}(x,z)\mathbf{H}(x), \quad \mathbf{W}(0,z) = \mathbf{I}, z \in C, x \in [0,\infty). \tag{0.1}$$

Die Matrixfunktion $\mathbf{W}$ wird als Matrizant bezeichnet. Der Matrizant $\mathbf{W}(x,z)$ hat für festes z mit $\Im z > 0$ und x mit $x > 0$ die Eigenschaft, daß die gebrochen–lineare Transformation

$$\omega \mapsto \frac{w_{11}(x,z)\omega + w_{12}(x,z)}{w_{21}(x,z)\omega + w_{22}(x,z)}, \quad \Im\omega \geq 0, \tag{0.2}$$

die abgeschlossene obere Halbebene $\bar{C}^+$ auf einen Kreis in der oberen Halbebene abbildet. Es sei $r(x,z)$ der Radius dieses Kreises. Aus der Spurnormiertheit des Hamiltonians $\mathbf{H}$ folgt nach [dB2] die Beziehung $\lim_{x\to\infty} r(x,z) = 0$. Damit liegt der Weylsche Grenzpunktfall vor. Durch

$$Q(z) := \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(x,z)\omega + w_{12}(x,z)}{w_{21}(x,z)\omega + w_{22}(x,z)}, \quad \Im\omega \geq 0, \tag{0.3}$$

wird für $\Im z > 0$ eine von ω unabhängige Funktion definiert, die als Weylscher Koeffizient bezeichnet wird. Der Weylsche Koeffizient Q ist eine Nevanlinnafunktion, d.h. eine auf der oberen Halbebene analytische Funktion, welche die obere Halbebene in die abgeschlossene obere Halbebene abbildet. Deshalb läßt sich Q in der Form

$$Q(z) = bz + a + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\sigma \tag{0.4}$$

mit Konstanten $b \geq 0$ und $a \in R$ und einem nichtnegativen Maß σ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{1+\lambda^2} < \infty \tag{0.5}$$

darstellen. Das nichtnegative Maß σ nennen wir das *Spektralmaß* des kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$.

In [dB2] hat L. de Branges gezeigt, daß es zu jedem nichtnegativen Maß σ mit der Eigenschaft (0.5) einen Hamiltonian $\mathbf{H}$ gibt, so daß σ das Spektralmaß des durch $\mathbf{H}$ bestimmten kanonischen Systems ist. Damit entsteht die Frage, inwiefern der Hamiltonian $\mathbf{H}$ durch den Weylschen Koeffizienten Q oder das Spektralmaß σ bestimmt ist und wie $\mathbf{H}$ gegebenenfalls aus diesen Gr"oßen konstruiert werden kann. Derartige Problemstellungen werden als inverses Spektralproblem für kanonische Systeme bezeichnet.

In den 40er und 50er Jahren dieses Jahrhunderts entwickelte M.G. Krein eine Spektraltheorie für Saiten mit nichthomogenen Massenverteilungen. Eine Saite $S[l, M]$ ist durch eine positive Zahl l $(\leq \infty)$ und eine auf $[0, l)$ oder $[0, l]$ gegebene nichtfallende Funktion M mit $M(0) \geq 0$ gegeben. Dabei wird l die Länge der Saite und M ihre Massenfunktion genannt, d.h. $M(x)$ ist die Gesamtmasse des Intervalls $[0, x]$. Die Gleichung

$$dy'(x) + \lambda y(x) dM(x) = 0 \tag{0.6}$$

wird als Differentialgleichung der Saite bezeichnet.

Zwischen kanonischen Systemen und Saiten bestehen enge Beziehungen. Es läßt sich zeigen, daß eine Saite und ein kanonisches System mit einem Hamiltonian von diagonaler Form äquivalent sind. In [K2] hat M.G. Krein den Weylschen Koeffizienten einer Saite betrachtet. Er hat gezeigt, daß zwischen Saiten und ihren Weylschen Koeffizienten eine eineindeutige Beziehung besteht.

Dieses Ergebnis von M.G. Krein läßt sich mit einfachen Mitteln unter Verwendung von tiefliegenden Resultaten von L. de Branges in [dB1-4] auf kanonische Systeme übertragen. Als ein Ergebnis dieser Arbeit zeigen wir, daß es zu jeder Nevanlinnafunktion Q genau einen Hamiltonian $\mathbf{H}$ gibt, so daß Q der Weylsche Koeffizient des durch $\mathbf{H}$ gegebenen kanonischen Systems ist (s.Theorem 2.6).

Zur expliziten Bestimmung von Saiten hat M.G. Krein in [K3] (siehe auch [DM]) eine Reihe von Transformationsformeln angegeben. Das Anliegen dieser Transformationsformeln ist, aus bekannten Spektralmaßen einfacher Saiten mittels einander entsprechender Transformationen des Spektralmaßes und der Massen-und Längenfunktion der Saite die zum transformierten Spektralmaß geh"orende Saite zu ermitteln. Aufgrund der äquivalenz von Saiten und kanonischen Systemen mit einem Hamiltonian von diagonaler Form gelten die entsprechend adaptierten Transformationsregeln auch für diese speziellen kanonischen Systeme. Es ist ein Anliegen dieser Arbeit, einige analoge Transformationsformeln für allgemeine kanonische Systeme anzugeben.

Wir erläutern nun den Inhalt der einzelnen Abschnitte der Arbeit.

Unabhängig von L. de Branges entwickelte I.S. Kac in [Ka] eine Spektraltheorie zweidimensionaler kanonischer Systeme. Als Hauptergebnis konstruiert er dort einen wesentlich selbstadjungierten Operator $\hat{\mathbf{S}}$, für den er die Existenz eines Spektralmaßes mit der Methode der richtenden Funktionale von M.G. Krein zeigen kann. Im Abschnitt 1.1 werden neben grundlegenden Begriffen die Ergebnisse von I.S. Kac zusammengestellt.

Im Abschnitt 1.2 werden Eigenschaften des Matrizanten $\mathbf{W}$ gezeigt, die im wesentlichen in der Arbeit [KL] zusammengestellt sind. Wir beweisen, daß $\mathbf{W}(x, z)$ für festes x eine normierte ρ-Matrix (s. Def.1.9) ist. Als eigenständiges Ergebnis wird eine Beziehung zwischen der oberen und der unteren Zeile des Matrizanten $\mathbf{W}$ gezeigt.

Im Abschnitt 1.3 werden zunächst Grundlagen aus L. de Branges Arbeiten [dB1-4] übernommen. Dabei wird gezeigt, daß aus der Spurnormiertheit des Hamiltonians $\mathbf{H}$ der Weylsche Grenzpunktfall folgt, und der Weylsche Koeffizient wird konstruiert. Anschließend werden einfache Beziehungen für Weylsche Koeffizienten gezeigt und die mit dem Operator $\hat{\mathbf{S}}$ assoziierte Fouriertransformation wird auf spezielle Funktionen angewandt.

Die oben erwähnte äquivalenz zwischen Saiten und kanonischen Systemen mit einem Hamiltonian $\mathbf{H}$ von diagonaler Form wird in Abschnitt 1.4 dargelegt. Somit k"onnen kanonische Systeme als Verallgemeinerungen von Saiten betrachtet werden.

Ein Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist die eineindeutige Beziehung zwischen Hamiltonian und Weylschem Koeffizienten . Dazu zeigen wir in Abschnitt 2.1 zunächst, daß in der Darstellung des Weylschen Koeffizienten Q genau dann ein lineares Glied bz mit $b > 0$ auftritt, wenn für den zugeh"origen Hamiltonian die Beziehung $\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für $x \in [0, b]$ gilt. Ein anscheinend neues Ergebnis ist eine Beziehung zwischen den Hamiltonianen und Matrizanten zweier kanonischer Systeme, deren Weylsche Koeffizienten sich um eine reelle Konstante unterscheiden. Anschließend wird die Eineindeutigkeitsbeziehung gezeigt.

Der Beweis dieses Theorems stützt sich wesentlich auf Ergebnisse von L. de Branges in [dB1-4], die er im Zusammenhang mit Untersuchungen zu Hilberträumen von ganzen Funktionen erhalten hat. In den Arbeiten [dB1-4] betrachtet L. de Branges ganze Funktionen E mit der Eigenschaft $|E(z)| > |E(\bar{z})|$ für $\Im z > 0$, sogenannte de Branges-Funktionen. Mit einer derartigen Funktion E ist ein Hilbertraum $K(E)$ assoziiert, dessen Elemente ganze Funktionen sind (s.Abschnitt 1.3).

Ein offenes Intervall $I \subset (0, \infty)$, auf dem der Hamiltonian $\mathbf{H}$ konstant und nicht invertierbar ist, nennen wir *H-unteilbares Intervall*. Ein Punkt $x \in [0, \infty)$, der nicht in einem H-unteilbaren Intervall liegt, heiße *dB-regulär*. Durch $E(x, \cdot) = w_{22}(x, \cdot) + iw_{21}(x, \cdot)$ wird für dB-reguläre Punkte x eine Familie von de Branges-Funktionen gegeben, deren zugeh"orige Hilberträume $K(E(x, \cdot)$ die Eigenschaft haben, daß für dB-reguläre Punkte a und b mit $a < b$ der Hilbertraum $K(E(a, \cdot))$ in $K(E(b, \cdot))$ isometrisch enthalten ist und die Vereinigung aller dieser Hilberträume $K(E(x, \cdot)$ dicht in L^2_σ liegt, wobei σ das Spektralmaß des durch den Hamiltonian $\mathbf{H}$ bestimmten kanonischen Systems ist. Ein tiefliegendes Ergebnis von L. de Branges in [dB4] besagt, daß es in L^2_σ genau eine derartige Familie von Hilberträumen ganzer Funktionen gibt. Dieses Ergebnis von L. de Branges liegt dem Beweis des Theorems 2.6 zugrunde. Im Abschnitt 2.2 zeigen wir, wie zu einem Spektralmaß σ der Gestalt $d\sigma = p(\lambda)^{-1}d\lambda$, wobei p ein Polynom mit der Eigenschaft $p > 0$ ist, ein zugeh"origer Hamiltonian $\mathbf{H}$ konstruiert werden kann. Damit verallgemeinern wir ein Ergebnis von M.G. Krein in [K3].

In [DM] geben H. Dym und H.P. Mc Kean eine Reihe von Transformationsformeln für die Hauptspektralmaße von Saiten an, die zum Teil schon von M.G. Krein in [K3] formuliert wurden. Wir geben im 3. Kapitel einige Verallgemeinerungen dieser Transformationsformeln für kanonische Systeme an.

In [K4] wendet M.G. Krein seine Untersuchungen über Saiten in der Extrapolationstheorie stationärer stochastischer Prozesse an. Er l"ost dort das Problem der "Vorhersage der Zukunft" eines reellen, im schwachen Sinne stationären Prozesses $\mathbf{x}$ von zweiter Ordnung, wenn der Prozeß auf einem gegebenen endlichen Zeitintervall $[-T, 0]$ mit $T > 0$ bekannt ist. Dabei geht es um die Projektion von $\mathbf{x}(t)$ mit $t > 0$ auf den von den Prozeßwerten $\{\mathbf{x}(t) | t \in [-T, 0]\}$ erzeugten Raum. Im Fall nichtreeller Prozesse werden anstelle von Saiten bei der L"osung dieses Problems kanonische Systeme verwendet.

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Langer, m"ochte ich an dieser Stelle für seine zahlreichen Anregungen und Hinweise und die ständige hilfsbereite Unterstützung dieser Arbeit ganz herzlich danken.

1. Grundlagen

1.1 Kanonische Systeme und zugeh"orige Operatoren

Es sei $\mathbf{H}$ eine auf $[0, L)$ mit $0 < L \leq \infty$ gegebene reelle, symmetrische und nichtnegativ-definite (2×2)-Matrixfunktion: $\mathbf{H}(x) = \mathbf{H}(x)^T \geq 0, \; x \in [0, L)$, deren Elemente $h_{11}, \; h_{12} = h_{21}$ und h_{22} auf $[0, L)$ lokal integrierbare Funktionen sind:

$$\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{12}(x) & h_{22}(x) \end{pmatrix} \quad x \in [0, L).$$

Weiterhin soll $\mathbf{H}$ auf $[0, L)$ spurnormiert sein, d.h., es gelte

$$tr\mathbf{H}(x) = h_{11}(x) + h_{22}(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in [0, L).$$

Im folgenden wird eine solche Matrixfunktion $\mathbf{H}$ als ein (spurnormierter) Hamiltonian bezeichnet.
Mit $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{J}\frac{dy(x)}{dx} = -z\mathbf{H}(x)y(x), \quad z \in C, \; x \in [0, L), \tag{1.1}$$

mit der Anfangswertbedingung

$$y(0) \in l.s.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei als L"osung $y(x) = (y_1(x) \; y_2(x))^T$ eine lokal absolutstetige Vektorfunktion mit Werten in C^2 gesucht ist. (Bekanntlich ist die L"osung eindeutig, s.[At].) Falls $L = \infty$ ist, heißt das System singulär, anderenfalls nennen wir es regulär. Im weiteren werden wir uns auf die Betrachtung singulärer Systeme beschränken. Wenn nicht anders angegeben, soll stets $L = \infty$ gelten.

Mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$ wird folgender Hilbertraum gebildet:

Definition 1.1: *Der Hilbertraum L^2_H sei die Menge aller äquivalenzklassen der auf $[0, \infty)$ gegebenen meßbaren, f. ü. endlichen Vektorfunktionen $f(x) = (f_1(x) \; f_2(x))^T$ mit der Eigenschaft*

$$\int_0^\infty f(x)^* \mathbf{H}(x) f(x) dx < +\infty, \tag{1.2}$$

wobei das innere Produkt durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty g(x)^* \mathbf{H}(x) f(x) dx \tag{1.3}$$

gegeben sei.

Für eine solche Vektorfunktion f folgt aus $\int_0^\infty f(x)^* \mathbf{H}(x) f(x) dx = 0$ nicht notwendig $f \equiv 0$, so daß die Bildung von äquivalenzklassen notwendig ist. Im weiteren wird jedoch zwischen Klassen und sie repräsentierenden Funktionen häufig nicht unterschieden.

Eine auf $[0, \infty)$ gegebene Funktion f heiße *rechts finit*, wenn es eine Zahl x_f gibt, so daß $f(x) = 0$ f. ü. für $x \geq x_f$ gilt.

Der Gleichung (1.1) kann die folgende lineare Relation $\mathbf{S}$ in L_H^2 zugeordnet werden:

Definition 1.2: *Das geordnete Paar $(f, g), f, g \in L_H^2$, geh"ore zu der Relation $\mathbf{S}$, wenn f rechts finit ist und folgende Beziehung gilt:*

$$\mathbf{J}\frac{df(x)}{dx} = -\mathbf{H}(x)g(x), \quad x \in [0, \infty), \quad f(0) \in l.s.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Der Definitionsbereich von $\mathbf{S}$ werde mit $D(\mathbf{S})$ bezeichnet.

In [Ka] entwickelt I.S.Kac eine Spektraltheorie kanonischer Systeme, deren Ergebnisse wir im weiteren benutzen werden. Als hauptsächliches Resultat konstruiert er zu einem kanonischen System einen wesentlich selbstadjungierten Operator $\hat{\mathbf{S}}$, für den er die Existenz eines Spektralmaßes zeigen kann.

Bei der Untersuchung von $D(\mathbf{S})$ spielen folgende Intervalle eine besondere Rolle:

Definition 1.3: *Das offene Intervall $I \subset [0, \infty)$ heißt* H-unteilbares Intervall, *wenn für ein $\phi \in [0, \pi)$ die Beziehung*

$$\mathbf{H}(x) \ = \ \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}^T \quad \textit{für alle} \quad x \in I \tag{1.5}$$

gilt; dabei wird ϕ der Typ *des Intervalls I genannt. Ein H-unteilbares Intervall vom Typ ϕ (kurz I_ϕ) heiße* maximal, *wenn es keine echte Teilmenge eines H-unteilbaren Intervalls ist.*

Insbesondere gilt $\det \mathbf{H}(x) = 0 \quad$ für $\quad x \in I_\phi$.

Im folgenden sei $\xi_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$. Das Lemma 2.1 aus [Ka] besagt:

Lemma 1.4: *Für eine Funktion $f \in D(\mathbf{S})$ und ein beliebiges H-unteilbares Intervall I_ϕ gibt es eine Konstante $c_{I_\phi, f} \in C$, so daß die Beziehung*

$$\xi_\phi^T f(x) = c_{I_\phi, f} \quad \textit{für alle} \quad x \in I_\phi$$

gilt.

Beweis: Durch Differenzieren von $\xi_\phi^T f(x)$ erhalten wir wegen $\xi_\phi^T \mathbf{J} \xi_\phi = 0$ für alle $\phi \in [0, \pi)$:

$$\frac{d}{dx}(\xi_\phi^T f(x)) = \xi_\phi^T \mathbf{J}\mathbf{H}(x)g(x) = \xi_\phi^T \mathbf{J}\xi_\phi \xi_\phi^T g(x) = 0.$$

$\blacksquare$

Mit $\hat{L}^2_H$ bezeichnen wir die lineare Hülle aller (äquivalenzklassen von) Vektorfunktionen $f \in L^2_H$, so daß für jedes I_ϕ eine Konstante $c_{I_\phi,f} \in C$ existiert mit $\xi^T_\phi f(x) = c_{I_\phi,f}$ für alle $x \in I_\phi$. In [Ka] (Lemma 3.1) wird gezeigt, daß $\hat{L}^2_H$ vollständig ist. Folglich gilt:

Lemma 1.5: *Der Raum $\hat{L}^2_H$ ist ein Hilbertraum.*

Wegen Lemma 1.4 ist der Definitionsbereich $D(\mathbf{S})$ in $\hat{L}^2_H$ enthalten. Die Einschränkung von $\mathbf{S}$ auf $\hat{L}^2_H$ werden wir mit $\hat{\mathbf{S}}$ bezeichnen, d.h., es gilt $(f,g) \in \hat{\mathbf{S}}$, wenn die Beziehungen $(f,g) \in \mathbf{S}$ und $g \in \hat{L}^2_H$ erfüllt sind.

Die zu $\hat{\mathbf{S}}$ adjungierte Relation $\hat{\mathbf{S}}^*$ wird bekanntlich wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{S}}^* := \{(f,g) \mid f,g \in \hat{L}^2_H, \quad \langle f,v\rangle = \langle g,u\rangle \quad \text{für alle} \quad (u,v) \in \hat{\mathbf{S}}\} \tag{1.6}$$

Lemma 1.6: *Die Relation $\hat{\mathbf{S}}$ ist symmetrisch, d.h., aus der Beziehung $(f,g) \in \hat{\mathbf{S}}$ folgt $(f,g) \in \hat{\mathbf{S}}^*$.*

Beweis: Es sei $(f,g) \in \hat{\mathbf{S}}$. Wir müssen zeigen, daß für alle $(u,v) \in \hat{\mathbf{S}}$ die Beziehung $\langle f,v\rangle = \langle g,u\rangle$ gilt. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\frac{d}{dx}(f(x)^*\mathbf{J}u(x)) = -f(x)^*\mathbf{H}(x)v(x) + g(x)^*\mathbf{H}(x)u(x),$$

woraus die gesuchte Beziehung folgt:

$$\int_0^\infty g(x)^*\mathbf{H}(x)u(x)dx - \int_0^\infty f^*(x)\mathbf{H}(x)v(x)dx = f^*(x)\mathbf{J}u(x)\mid_0^\infty = 0.$$

■

Bis zum Ende dieses Abschnitts soll der Hamiltonian $\mathbf{H}$ die folgenden zwei Bedingungen a) und b) erfüllen, die in dieser Arbeit oft benutzt werden:

a) Für jedes $\epsilon > 0$ gelte $\int_0^\epsilon h_{22}(x)dx > 0$.

b) Es gibt eine Zahl $b > 0$, so daß die Beziehung $rg\left(\int_0^b \mathbf{H}(x)dx\right) = 2$ gilt.

Die Bedingung a) besagt, daß $\mathbf{H}$ nicht mit einem H-unteilbaren Intervall vom Typ $\phi = 0$ beginnt, d.h., es gibt kein Intervall $[0,x_0)$ mit $x_0 > 0$, so daß $\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ auf $[0,x_0)$ ist. In der Terminologie von I.S. Kac bedeutet a), daß der "erste Ausnahmefall" nicht eintritt.

Ist der Hamiltonian $\mathbf{H}$ invertierbar (insbesondere existieren dann keine H-unteilbaren Intervalle), so ergibt sich aus $\mathbf{J}f' = -\mathbf{H}g$ sofort die Beziehung $g = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}f'$, d.h., $\mathbf{S}$ ist injektiv und somit ein Operator. Im allgemeinen Fall zeigt I.S. Kac in [Ka], daß $\hat{\mathbf{S}}$ stets, d.h. auch bei Vorliegen von H-unteilbaren Intervallen, ein wesentlich selbstadjungierter Operator in $\hat{L}^2_H$ ist:

Theorem 1.7: *Der Definitionsbereich $D(\hat{\mathbf{S}})$ liegt dicht in $\hat{L}^2_H$ und der Abschluß von $\hat{\mathbf{S}}$ ist gleich $\hat{\mathbf{S}}^*$.*

Für den Operator $\hat{\mathbf{S}}$ wird nun eine Spektraldarstellung gesucht, dazu definieren wir:

Definition 1.8: *Ein auf R gegebenes, nichtnegatives Maß σ heißt Spektralmaß des Operators $\hat{\mathbf{S}}$, falls eine isometrische lineare Abbildung $\mathbf{T} : \hat{L}^2_H \mapsto L^2_\sigma$ existiert mit $\mathbf{T}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{T}^{-1} \subset \mathbf{M}_\lambda$, wobei $\mathbf{M}_\lambda$ der Multiplikationsoperator in L^2_σ ist: $\mathbf{M}_\lambda(f(\lambda)) := \lambda f(\lambda), \quad f \in L^2_\sigma$.*

In [Ka] wird die Existenz eines derartigen Maßes σ mit Hilfe der Methode der "richtenden Funktionale" von M.G. Krein [K1] gezeigt. Dazu wird folgendes Funktional betrachtet:

Für ein rechts finites $f \in \hat{L}^2_H$ sei

$$\mathbf{\Phi}(f, z) := \int_0^\infty u(x, \bar{z})^* \mathbf{H}(x) f(x) dx \tag{1.7}$$

wobei u die L"osung der Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{J}\frac{d}{dx}u(x, z) = -z\mathbf{H}(x)u(x, z), \quad u(0, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \tag{1.8}$$

ist.

Das Funktional $\mathbf{\Phi}$ hat folgende Eigenschaften:

1) $\mathbf{\Phi}(\cdot, z)$ ist linear

2) $\mathbf{\Phi}(f, \cdot)$ ist analytisch

3) Für ein rechts finites $f_0 \in \hat{L}^2_H$ und $z_0 \in R$ hat die Gleichung $(\hat{\mathbf{S}} - z_0)g = f_0$ genau dann eine L"osung $g \in D(\hat{\mathbf{S}})$, wenn $\mathbf{\Phi}(f_0, z_0) = 0$ gilt.

Damit ist $\mathbf{\Phi}$ ein richtendes Funktional für den Operator $\hat{\mathbf{S}}$ und nach [K1] existiert eine nichtnegatives Maß σ mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{\Phi}(f, \lambda)|^2 d\sigma = \|f\|^2_{\hat{L}^2_H} \tag{1.9}$$

für alle rechts finiten Funktionen $f \in \hat{L}^2_H$.

Da die Menge der rechts finiten Funktionen in $\hat{L}^2_H$ dicht liegt, kann $\mathbf{\Phi}$ zu einer isometrischen Abbildung auf $\hat{L}^2_H$ erweitert werden, so daß die Beziehung (1.9) im Sinne der Norm von $\hat{L}^2_H$ für alle Funktionen $f \in \hat{L}^2_H$ gilt.

Für $g \in D(\hat{\mathbf{S}})$ und $\lambda \in R$ erhält man mit $f := (\hat{\mathbf{S}} - \lambda)g$ aus 1) – 3):

$$\mathbf{\Phi}(\hat{\mathbf{S}}g, \lambda) - \lambda\mathbf{\Phi}(g, \lambda) = \mathbf{\Phi}(f, \lambda) = 0 \tag{1.10}$$

In den Arbeiten [dB1] - [dB4] führt L. de Branges kanonische Systeme in Verbindung mit Untersuchungen zu Hilberträumen von ganzen Funktionen ein. Operatorentheoretische Methoden wie in [Ka] bleiben dabei etwas im Hintergrund. Bei L. de Branges wird allerdings die Spektralfunktion aus dem Weyl'schen Koeffizienten des kanonischen Systems explizit konstruiert, so daß wir uns nach dieser kurzen Darstellung der Ergebnisse von [Ka] im weiteren auf die Theorie von L. de Branges stützen werden.

1.2 Kanonische Systeme und ρ-Matrizen

1.2.1 Matrizanten als ρ-Matrizen

Der Matrizant $\mathbf{W}(x,z)$ eines kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}(x)$, $x \in [0,\infty)$, wird durch folgende Anfangswertaufgabe definiert:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{W}(x,z)\mathbf{J} = z\mathbf{W}(x,z)\mathbf{H}(x), \quad \mathbf{W}(0,z) = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

In [KL] werden Eigenschaften der Matrixfunktion $\mathbf{W}(x,z)$ zusammengestellt. Dazu definieren wir:

Definition 1.9: *Eine Matrixfunktion $\mathbf{W}(z)$, $z \in C$, heißt ρ-Matrix, wenn sie die folgenden Bedingungen 1), 2) und 3) erfüllt:*

1) *Die Komponenten $w_{ij}(\cdot)$, $i,j = 1,2$, sind reelle ganze Funktionen.*

2) $\det \mathbf{W}(z) = 1$ *für alle $z \in C$*

3) $\frac{1}{i}(\mathbf{W}(z)\mathbf{J}\mathbf{W}(z)^* - \mathbf{J}) \geq 0$ *für $\Im z > 0$*

Gilt darüber hinaus die Bedingung

4) $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}$,

so heißt $\mathbf{W}$ eine normierte ρ-Matrix.

Im weiteren wollen wir zeigen, daß der durch (1.11) definierte Matrizant $\mathbf{W}(x,z)$ für festes $x \in [0,\infty)$ eine normierte ρ-Matrix ist (s.[KL]). Bekanntlich ist die Bedingung 1) erfüllt (s.[At]). Mit $\mathbf{J}^T = -\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$ erhalten wir

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{W}(x,z)\mathbf{J}\mathbf{W}(x,z)^T) = z\mathbf{W}(x,z)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,z)^T - z\mathbf{W}(x,z)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,z)^T = 0$$

woraus

$$\mathbf{W}(x,z)\mathbf{J}\mathbf{W}(x,z)^T = \mathbf{J} \tag{1.12}$$

resultiert. Diese Beziehung ist zu 2) äquivalent, was unmittelbar ersichtlich ist, wenn man die Beziehung (1.12) komponentenweise betrachtet. Aus

$$\frac{d}{dx}(\mathbf{W}(x,z)\mathbf{J}\mathbf{W}(x,z)^*) = (z-\bar{z})\mathbf{W}(x,z)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,z)^*$$

ergibt sich

$$\mathbf{W}(x,z)\mathbf{J}\mathbf{W}(x,z)^* - \mathbf{J} = (z-\bar{z})\int_0^x \mathbf{W}(t,z)\mathbf{H}(t)\mathbf{W}(t,z)^* dt, \tag{1.13}$$

woraus 3) folgt.

Aufgrund von 1) gilt für eine ρ-Matrix $\mathbf{W}(z)$ die Beziehung $\mathbf{W}(\bar{z})^* = \mathbf{W}(z)^T$, womit man $\mathbf{J}\mathbf{W}(z)^{-1} = \mathbf{W}(\bar{z})^*\mathbf{J}$ und $\mathbf{W}(z)^{-*}\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{W}(\bar{z})$ erhält. Mittels (1.13) folgt dann für $\Im z \neq 0$:

$$\begin{aligned}(z-\bar{z})^{-1}\mathbf{J}\mathbf{W}(z)^{-1}(\mathbf{W}(z)\mathbf{J}\mathbf{W}(z)^* - \mathbf{J})\mathbf{W}(z)^{-*}\mathbf{J}^* &\geq 0,\\ (z-\bar{z})^{-1}(\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{W}(z)^{-1}\mathbf{J}\mathbf{W}(\bar{z})^*\mathbf{J}) &\geq 0,\\ (\bar{z}-z)^{-1}(-\mathbf{J} + \mathbf{W}(\bar{z})^*\mathbf{J}\mathbf{W}(\bar{z}) &\geq 0\end{aligned}$$

und damit

3a) $\frac{1}{i}(\mathbf{W}(z)^*\mathbf{J}\mathbf{W}(z) - \mathbf{J}) \geq 0 \quad$ für $\Im z > 0$.

Allgemein gilt für (2×2)–Matrizen, daß die Bedingungen 3) und 3a) äquivalent sind.

Ist $\mathbf{W}(z)$ eine ρ-Matrix, so sind auch

$$\mathbf{W}_1(z) := \begin{pmatrix} w_{22}(z) & -w_{21}(z) \\ -w_{12}(z) & w_{11}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2(z) := \begin{pmatrix} w_{22}(z) & w_{12}(z) \\ w_{21}(z) & w_{11}(z) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{W}_3(z) := \begin{pmatrix} w_{11}(z) & -w_{21}(z) \\ -w_{12}(z) & w_{22}(z) \end{pmatrix}$$

ρ-Matrizen. Dabei ist $\mathbf{W}_1(z) = \mathbf{J}^T\mathbf{W}(z)\mathbf{J}$ und mit $\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gelten die Beziehungen $\mathbf{W}_2(z) = \mathbf{M}\mathbf{W}(z)\mathbf{M}$ und $\mathbf{W}_3(z) = \mathbf{J}^T\mathbf{M}\mathbf{W}(z)\mathbf{M}\mathbf{J}$.

Da für $\mathbf{W}_i(z), \quad i = 1,2,3$, die Bedingungen 1) und 2) offensichtlich erfüllt sind, ist noch 3) oder 3a) zu zeigen. Aus

$$(z-\bar{z})^{-1}\mathbf{J}^T(\mathbf{W}(z)\mathbf{J}\mathbf{W}(z)^* - \mathbf{J})\mathbf{J} \geq 0$$

folgt

$$(z-\bar{z})^{-1}(\mathbf{W}_1(z)\mathbf{J}\mathbf{W}_1(z)^* - \mathbf{J}) \geq 0,$$

und mit $\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M} = -\mathbf{J}$ und

$$(\bar{z}-z)^{-1}(\mathbf{M}\mathbf{W}(z)\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}\mathbf{W}(z)^*\mathbf{M} - \mathbf{J}) \geq 0$$

folgt mit $\mathbf{W}(z)^* = \mathbf{W}(\bar{z})^T$ die Beziehung

$$(\bar{z}-z)^{-1}(\mathbf{W}_2(\bar{z})^*\mathbf{J}\mathbf{W}_2(\bar{z}) - \mathbf{J}) \geq 0,$$

welche zu 3a) äquivalent ist. Die Gültigkeit der Beziehung 3) für $\mathbf{W}_3(z)$ folgt in analoger Weise. Ist $\mathbf{W}_3(z)$ eine ρ-Matrix, so ist $\mathbf{W}(z)$ ebenfalls eine ρ-Matrix. Damit wurde gezeigt, daß die Abbildungen

$$\mathbf{W}(z) \Leftrightarrow \mathbf{W}_1(z) \Leftrightarrow \mathbf{W}_2(z) \Leftrightarrow \mathbf{W}_3(z) \tag{1.14}$$

auf der Menge aller ρ-Matrizen bijektiv sind.

Aus 3a) läßt sich folgende Aussage ableiten:

3b) Für festes z mit $\Im z > 0$ bildet die gebrochen lineare Transformation

$$\omega \mapsto \frac{w_{11}(z)\omega + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\omega + w_{22}(z)}, \quad \omega \in \bar{C}^+ \tag{1.15}$$

die abgeschlossene obere Halbebene $\bar{C}^+ := \{\, \omega \mid \Im\omega \geq 0\}$ in sich ab.

Zum Beweis benutzen wir [dB1], Lemma1.

Lemma 1.10: *Die gebrochen lineare Transformation*

$$\omega \mapsto \frac{A\omega + B}{C\omega + D} \quad (AD - BC \neq 0) \tag{1.16}$$

bildet genau dann $\bar{C}^+$ in sich ab, wenn die Beziehungen

$i(\bar{A}C - A\bar{C}) \geq 0, \quad i(\bar{B}D - B\bar{D}) \geq 0$ *und*

$A\bar{D} - B\bar{C} + \bar{A}D - \bar{B}C \geq 2|AD - BC|$

gelten.

Aus der Beziehung $\mathbf{L}(z) := \frac{1}{i}(\mathbf{W}(z)^*\mathbf{J}\mathbf{W}(z) - \mathbf{J}) \geq 0$ folgen die Bedingungen des Lemmas für $A = w_{22}(z)$, $B = -w_{21}(z)$, $C = -w_{12}(z)$ und $D = w_{11}(z)$, denn $\mathbf{L}(z) \geq 0$ ist äquivalent zu $l_{11}(z) \geq 0$, $l_{22}(z) \geq 0$, $l_{12}(z) = \overline{l_{21}(z)}$ und $\det \mathbf{L}(z) \geq 0$. Wegen

$$\mathbf{L}(z) = i \begin{pmatrix} \overline{w_{11}(z)}w_{21}(z) - w_{11}(z)\overline{w_{21}(z)} & \overline{w_{11}(z)}w_{22}(z) - w_{12}(z)\overline{w_{21}(z)} - 1 \\ \overline{w_{12}(z)}w_{21}(z) - w_{11}(z)\overline{w_{22}(z)} + 1 & \overline{w_{12}(z)}w_{22}(z) - w_{12}(z)\overline{w_{22}(z)} \end{pmatrix}$$

entsprechen die Beziehungen $l_{11}(z) \geq 0$ und $l_{22}(z) \geq 0$ gerade den ersten beiden Bedingungen von Lemma 1.10. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \det \mathbf{L}(z) = & -1 - |\det \mathbf{W}(z)|^2 + \overline{w_{11}(z)}w_{22}(z) - w_{12}(z)\overline{w_{21}(z)} \\ & + w_{11}(z)\overline{w_{22}(z)} - \overline{w_{12}(z)}w_{21}(z) \geq 0, \end{aligned}$$

daraus folgt wegen $1 + |\det \mathbf{W}(z)|^2 \geq 2|\det \mathbf{W}(z)|$ gerade die dritte Bedingung von Lemma 1.10.

Da die Transformation $\omega \mapsto -\omega^{-1}$ die abgeschlossene obere Halbebene $\bar{C}^+$ auf sich abbildet, folgt, daß die gebrochen lineare Transformation

$$\omega \mapsto \left(\frac{A(-\omega^{-1})+B}{C(-\omega^{-1})+D}\right) = \frac{w_{11}(z)\omega + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\omega + w_{22}(z)}$$

die Halbebene $\bar{C}^+$ in sich abbildet.

Wir erhalten andererseits, daß aus 3b) und $\det \mathbf{W}(z) = 1$ die Beziehung 3a) folgt, denn dann sind die dritte Beziehung von Lemma 1.10 und die Beziehung $\det \mathbf{L}(z) \geq 0$ wegen $1 + |\det \mathbf{W}(z)|^2 = 2|\det \mathbf{W}(z)| = 2$ äquivalent.

Insgesamt wurde gezeigt:

Lemma 1.11: *Gelten die Bedingungen 1) und 2) für eine Matrixfunktion* $\mathbf{W}(z)$, *so sind die Bedingungen 3), 3a) und 3b) äquivalent.*

1.2.2 Analytische Eigenschaften des Matrizanten

Mit N bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen F, die analytisch in der oberen Halbebene C^+ sind und C^+ in $\bar{C}^+$ abbilden, weiter sei $\tilde{N} := N \cup \{\infty\}$. (Hier bezeichnet ∞ die Funktion $F \equiv \infty$.) Mit der Beziehung $F(z) = \overline{F(\bar{z})}$ werden alle Funktionen $F \in N$ auf die untere Halbebene fortgesetzt. Eine Funktion $F \in N$ wird auch als Nevanlinnafunktion bezeichnet.

Für eine ρ-Matrix $\mathbf{W}(z)$ geh"oren die Funktionen

$$\frac{w_{11}(z)}{w_{21}(z)}, \quad \frac{w_{12}(z)}{w_{22}(z)}, \quad -\frac{w_{11}(z)}{w_{12}(z)}, \quad -\frac{w_{21}(z)}{w_{22}(z)} \tag{1.17}$$

zur Klasse $\tilde{N}$, wie sich durch Einsetzen von $\omega = 0$ oder $\omega = \infty$ aus 3b) für $\mathbf{W}(z)$ oder $\mathbf{W}_i(z),\ i = 1,2,3$, ergibt.

Allgemein folgt aus $F \in N$ auch $-F^{-1} \in N$.

Eine ganze Funktion F geh"ore zur Cartwright-Klasse mit dem Exponentialtyp $h(F)$, falls

$h(F) = \limsup_{|z|\to\infty} |z|^{-1} \ln |F(z)|$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2) |\ln |F(x)|| dx < \infty$

gilt.

In [KL] (siehe auch [Ak]) wird gezeigt, daß die Funktionen $w_{ij}, \quad i,j = 1,2$, einer ρ-Matrix $\mathbf{W}(z)$ zur Cartwright-Klasse desselben Exponentialtyps geh"oren. Für den Matrizanten $\mathbf{W}(x,z)$ eines kanonischen Systems erhält man den Exponentialtyp h für festes x aus der Beziehung (s.[KL],[dB2])

$$h = \int_0^x \sqrt{\det \mathbf{H}(t)} dt. \tag{1.18}$$

Für eine normierte ρ-Matrix $\mathbf{W}(z)$ definieren wir folgendes Funktional:

$$s(\mathbf{W}) := tr\left(\mathbf{J}\frac{d}{dz}\mathbf{W}(z)|_{z=0}\right). \tag{1.19}$$

Ist die ρ-Matrix insbesondere der Matrizant $\mathbf{W}$ eines kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$, so ergibt sich die Beziehung

$$s(\mathbf{W}(x,\cdot)) = tr\left(\mathbf{J}\frac{d}{dz}\mathbf{W}(x,z)|_{z=0}\right) = tr\left(\int_0^x \mathbf{J}\mathbf{H}(t)\mathbf{J}dt\right) = x. \tag{1.20}$$

Weil für normierte ρ-Matrizen $\mathbf{W}_1(z)$ und $\mathbf{W}_2(z)$ die Beziehung (s.[KL])

$$s(\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2) = s(\mathbf{W}_1) + s(\mathbf{W}_2) \tag{1.21}$$

gilt, ist es naheliegend, das Funktional s als "Länge" für normierte ρ-Matrizen zu betrachten.

Zwischen der oberen und unteren Zeile des Matrizanten $\mathbf{W}(x,z)$ besteht folgende Beziehung:

Lemma 1.12: *Ist $\mathbf{W}(x,z)$ der Matrizant eines kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}(x)$, dann gilt für $\Im z \neq 0$:*

$$\begin{aligned} w_{12}(x,z) =& z w_{22}(x,z)\int_0^x w_{22}(t,z)^{-2}h_{11}(t)dt,\\ w_{11}(x,z) =& w_{22}(x,z)^{-1} + z w_{21}(x,z)\int_0^x w_{22}(t,z)^{-2}h_{11}(t)dt. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Beweis: Wir müssen zeigen, daß $w_{11}(x,z)$ und $w_{12}(x,z)$ der Gleichung (1.11) genügen:

$$\frac{dw_{12}(x,z)}{dx} = z(w_{11}(x,z)h_{11}(x) + w_{12}(x,z)h_{12}(x))$$

und

$$\frac{dw_{11}(x,z)}{dx} = -z(w_{11}(x,z)h_{12}(x) + w_{12}(x,z)h_{22}(x)).$$

Aus den Beziehungen

$$\frac{dw_{21}(x,z)}{dx} = -z(w_{21}(x,z)h_{12}(x) + w_{22}(x,z)h_{22}(x))$$

und

$$\frac{dw_{22}(x,z)}{dx} = z(w_{21}(x,z)h_{11}(x) + w_{22}(x,z)h_{12}(x))$$

erhalten wir mit (1.22):

$$\begin{aligned}\frac{dw_{12}(x,z)}{dx} =& z^2(w_{21}(x,z)h_{11}(x)+w_{22}(x,z)h_{12}(x))\int\limits_0^x w_{22}(t,z)^{-2}h_{11}(t)dt\\ &+zw_{22}(x,z)^{-1}h_{11}(x)\\ =& z(w_{11}(x,z)h_{11}(x)+w_{12}(x,z)h_{12}(x))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{dw_{11}(x,z)}{dx} =& -zw_{22}(x,z)^{-1}h_{12}(x)-z^2w_{21}(x,z)\int\limits_0^x w_{22}(t,z)^{-2}h_{11}(t)dt\\ &-z^2w_{22}(x,z)h_{22}(x)\int\limits_0^x w_{22}(t,z)^{-2}h_{11}(t)dt\\ =& -z(w_{11}(x,z)h_{12}(x)+w_{12}(x,z)h_{22}(x)).\end{aligned}$$

■

Unmittelbar aus (1.11) ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\left.\frac{dw_{21}(x,z)}{dz}\right|_{z=0} = -\int\limits_0^x h_{22}(t)dt \tag{1.23}$$

$$\left.\frac{dw_{22}(x,z)}{dz}\right|_{z=0} = \int\limits_0^x h_{12}(t)dt$$

$$\left.\frac{dw_{12}(x,z)}{dz}\right|_{z=0} = \int\limits_0^x h_{11}(t)dt$$

$$\left.\frac{dw_{11}(x,z)}{dz}\right|_{z=0} = -\int\limits_0^x h_{12}(t)dt.$$

Als nächstes wollen wir die Theorie von L. de Branges [dB1-4] über Hilberträume ganzer Funktionen betrachten, die tiefliegende Resultate zur Spektraltheorie kanonischer Systeme enthält.

1.3 Spektraltheorie kanonischer Systeme

1.3.1 De Branges-Funktionen

In den Arbeiten [dB1-4] untersucht L. de Branges bestimmte Hilberträume, deren Elemente ganze Funktionen sind. Ein derartiger Hilbertraum K hat dabei folgende Eigenschaften:

(H1) Geh"ort eine ganze Funktion $F(z)$ mit einer nichtreellen Nullstelle ω zu dem Hilbertraum K, dann geh"ort die Funktion $F(z)(z-\bar{\omega})(z-\omega)^{-1}$ ebenfalls zu K und hat die gleiche Norm wie $F(z)$.

(H2) Für jedes nichtreelle ω ist das auf dem Hilbertraum K durch $l(F(\cdot)) := F(\omega)$ definierte lineare Funktional l stetig.

(H3) Geh"ort die Funktion $F(z)$ zu dem Hilbertraum K, so liegt $F^*(z) := \overline{F(\bar{z})}$ ebenfalls in K und hat die gleiche Norm wie $F(z)$.

Eine ganze Funktion E mit der Eigenschaft

$$|E(z)| > |E(\bar{z})| \quad \text{für} \quad \Im z > 0 \tag{1.24}$$

wird im weiteren als de Branges-Funktion bezeichnet. Die de Branges-Funktion $E(z)$ läßt sich in der Form $E(z) = A(z) - iB(z)$ mit reellen ganzen Funktionen $A(z)$ und $B(z)$ darstellen. Weiterhin definieren wir:

$$K(\omega, z) := \frac{B(z)\overline{A(\omega)} - A(z)\overline{B(\omega)}}{\pi(z-\bar{\omega})} \tag{1.25}$$

Die Menge $K(E)$ von ganzen Funktionen $F(z)$, die bei einer gegebenen de Branges-Funktion $E(z)$ die Bedingungen

$$\|F\|^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|^2 |E(t)|^{-2} dt < \infty \tag{1.26}$$

und

$$|F(z)|^2 \leq \|F\|^2 K(z,z) \tag{1.27}$$

erfüllen, wird mit dem inneren Produkt für $F, G \in K(E)$:

$$\langle F, G \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) G^*(t) |E(t)|^{-2} dt \tag{1.28}$$

zu einem Hilbertraum, für den die Bedingungen (H1)-(H3) gelten.

Es seien K_1 und K_2 zwei Hilberträume ganzer Funktionen. Der Hilbertraum K_1 ist in K_2 *isometrisch enthalten*, wenn aus $F \in K_1$ die Beziehung $F \in K_2$ folgt und $\|F\|_{K_1} = \|F\|_{K_2}$ gilt. Die Hilberträume K_1 und K_2 heißen *isometrisch gleich*, wenn K_1 isometrisch in K_2 und K_2 isometrisch in K_1 enthalten ist.

Eine Beantwortung der Frage, welche de Branges-Funktionen E isometrisch gleiche Hilberträume erzeugen, liefert Theorem 1 von [dB1]:

Theorem 1.13: *Es sei $E_1(z) = A_1(z) - iB_1(z)$ eine de Branges-Funktion und C_0, C_1, S_0, S_1 seien reelle Konstanten mit $C_0C_1 + S_0S_1 = 1$. Dann ist die durch*

$$(A_2(z)\ B_2(z)) = (A_1(z)\ B_1(z)) \begin{pmatrix} C_0 & S_0 \\ -S_1 & C_1 \end{pmatrix}$$

definierte Funktion $E_2(z) = A_2(z) - iB_2(z)$ eine de Branges-Funktion und die Hilberträume $K(E_1)$ und $K(E_2)$ sind isometrisch gleich.

Sind für eine de Branges Funktion $E(z)$ die Hilberträume $K(E)$ und $K(E_1)$ isometrisch gleich, dann gilt $E(z) = E_2(z)$ für eine bestimmte Wahl der Konstanten C_0, C_1, S_0, S_1.

L. de Branges untersucht nun in [dB2-4] kanonische Differentialgleichungssysteme, die im Zusammenhang mit Hilberträumen $K(E)$ stehen, allerdings unterscheiden sich seine Bezeichnungen von unseren. Mit

$\mathbf{W_1}(x,z) := \mathbf{J}^T\mathbf{W}(x,z)\mathbf{J}$ und $\mathbf{H_1}(x) := \mathbf{J}^T \int_0^x \mathbf{H}(t)dt\mathbf{J}$

erhalten wir ein kanonisches System in der Form

$$(\mathbf{W_1}(x,z) - \mathbf{I})\mathbf{J} = z\int_0^x \mathbf{W_1}(t,z)d\mathbf{H_1}(t), \tag{1.29}$$

wie es bei L. de Branges benutzt wird. (In [dB1-4] wird die Matrixfunktion $\mathbf{H}_1(t)$ mit $m(t)$ bezeichnet und $\mathbf{W}_1(x,z)$ mit $M(x,z)$. Mit den bei de Branges benutzten Funktionen A, B, C und D bestehen die Beziehungen $A(x,z) = w_{22}(x,z)$, $B(x,z) = -w_{21}(x,z)$, $C(x,z) = -w_{12}(x,z)$ und $D(x,z) = w_{11}(x,z)$.) Aufgrund der Spurnormiertheit des Hamiltonians $\mathbf{H}$ gelten automatisch die Bedingungen (7)-(10) von [dB2]. Bei der Formulierung der von [dB1-4] übernommenen Theoreme werden diese Bedingungen folglich nicht ben"otigt.

Ein Punkt $x \in [0,\infty)$ wird als *de Branges-singulär* (kurz: *dB-singulär*) bezeichnet, wenn er in einem H-unteilbaren Intervall I_ϕ liegt, anderenfalls soll er *dB-regulär* heißen.

Theorem 4 von [dB2] besagt :

Theorem 1.14: *Erfüllt der Hamiltonian* $\mathbf{H}$ *eines kanonischen Systems die Bedingung a), dann wird durch den Matrizanten* $\mathbf{W}(x,z)$ *ein System von de Branges-Funktionen* $E(x,z) = w_{22}(x,z) + iw_{21}(x,z)$ *erzeugt, so daß für dB-reguläre Punkte* a, b *mit* $a < b$ *der Hilbertraum* $K(E(a,\cdot))$ *isometrisch in* $K(E(b,\cdot))$ *enthalten ist.*

Sind a und b Endpunkte eines maximalen H-unteilbaren Intervalls, so ist das orthogonale Komplement von $K(E(a,\cdot))$ *in* $K(E(b,\cdot))$ *eindimensional.*

Für das System von de Branges-Funktionen $E(x,z)$ sei die Funktion $K(x,\omega,z)$ wie in (1.25) definiert. Weiter besagt Theorem 8 von [dB2], daß unter der Bedingung a) folgende Beziehung gilt:

$$\lim_{x\to\infty} K(x,z,z) = \infty \quad \text{für alle} \quad z \in C \setminus R. \tag{1.30}$$

1.3.2 Die Konstruktion des Weylschen Koeffizienten

Wir betrachten nun die gebrochen lineare Abbildung (1.15) für festes x und z mit $\Im z > 0$, welche die obere Halbebene auf einen in der oberen Halbebene gelegenen

Kreis $R(x,z)$ abbildet. Aus bekannten Eigenschaften der M"obiustransformation folgt, daß $\omega_0 = -\frac{\overline{w_{22}(x,z)}}{\overline{w_{21}(x,z)}}$ auf den Mittelpunkt von $R(x,z)$ abgebildet wird. Für den Radius $r(x,z)$ des Kreises $R(x,z)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} r(x,z) &= \left| \frac{w_{12}(x,z)}{w_{22}(x,z)} - \frac{w_{11}(x,z)\overline{w_{22}(x,z)} - w_{12}(x,z)\overline{w_{21}(x,z)}}{w_{21}(x,z)\overline{w_{22}(x,z)} - w_{22}(x,z)\overline{w_{21}(x,z)}} \right| \\ &= \mid w_{21}(x,z)\overline{w_{22}(x,z)} - w_{22}(x,z)\overline{w_{21}(x,z)} \mid^{-1} \\ &= (z-\bar{z})\pi K(x,z,z)^{-1}. \end{aligned}$$

Mit der Beziehung (1.30) folgt:

$$\lim_{x\to\infty} r(x,z) = 0 \quad \text{für} \quad \Im z > 0. \tag{1.31}$$

Damit liegt der Weylsche Grenzpunktfall vor und wir erhalten folgende Aussage:

Theorem 1.15: *Für eine beliebige Funktion $\Omega \in \tilde{N}$ und $z \in C^+$ gilt mit*

$$W_\Omega(x,z) := \frac{w_{11}(x,z)\Omega(z) + w_{12}(x,z)}{w_{21}(x,z)\Omega(z) + w_{22}(x,z)}$$

die Beziehung

$$\lim_{x\to\infty} W_\Omega(x,z) =: Q(z) \tag{1.32}$$

mit von Ω unabhängigem $Q \in N$.

Die Nevanlinnafunktion Q wird als der Weylsche Koeffizient des kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$ bezeichnet.

In [AG], S.150, wird gezeigt, daß sich jede Nevanlinnafunktion Q in eindeutiger Weise in der Form

$$Q(z) = bz + a + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\sigma \tag{1.33}$$

mit Konstanten $b \geq 0$ und $a \in R$ und einem nichtnegativen Maß σ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{1+\lambda^2} < \infty \tag{1.34}$$

darstellen läßt.

Ist die Nevanlinnafunktion Q der Weylsche Koeffizient eines kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$, so wird das Maß σ das Spektralmaß des kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$ genannt.

Für eine gegebene Funktion $Q \in N$ läßt sich σ mit der Stieltjes-Livshits'schen Inversionsformel bestimmen (s.[Ak]): Es gilt mit $\Delta(x) := \int\limits_0^x d\sigma$ die Beziehung

$$\frac{\Delta(b+0)+\Delta(b-0)}{2} - \frac{\Delta(a+0)+\Delta(a-0)}{2} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im Q(t+i\epsilon)dt. \quad (1.35)$$

Bei L.de Branges wird die Spektralfunktion etwas anders eingeführt, Theorem 9 von [dB2] besagt:

Gilt die Beziehung $\int_0^x h_{22}(t)dt > 0$ für alle $x > 0$, dann existiert ein eindeutiges nichtnegatives Maß μ auf den Borelmengen von R mit den Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty \quad (1.36)$$

und (für $z = x + iy, \quad y > 0$)

$$\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{(\lambda - x)^2 + y^2} = \Re \lim_{t\to\infty} -\frac{iw_{12}(t,z)}{w_{22}(t,z)}. \quad (1.37)$$

Ist $a > 0$ ein dB-regulärer Punkt, dann ist $K(E(a,\cdot))$ isometrisch in L^2_μ enthalten, und die Vereinigung aller Räume $K(E(a,\cdot))$, a dB-regulär, liegt dicht in L^2_μ.

Die Maße μ und σ stimmen überein, was aus der Beziehung

$$\Re \left(\lim_{t\to\infty} -\frac{iw_{12}(t,z)}{w_{22}(t,z)} \right) = \Im Q(z) \quad (1.38)$$

folgt.

Als nächstes geben wir einige einfache Beziehungen für Weylsche Koeffizienten an.

Lemma 1.16: *Gegeben seien zwei kanonische Systeme mit den Hamiltonianen* $\mathbf{H}$ *und* $\tilde{\mathbf{H}}$*, wobei* $\mathbf{H}(l+x) = \tilde{\mathbf{H}}(x)$ *für ein* $l > 0$ *und* $x \in [0,\infty)$ *gelten soll. Für die Weylschen Koeffizienten* Q *und* $\tilde{Q}$ *folgt dann:*

$$Q(z) = \frac{w_{11}(l,z)\tilde{Q}(z) + w_{12}(l,z)}{w_{21}(l,z)\tilde{Q}(z) + w_{22}(l,z)} \quad (1.39)$$

Ist $(0,l)$ *insbesondere ein H-unteilbares Intervall vom Typ* ϕ*, so gilt für* $\phi \neq 0$*:*

$$Q(z) = \cot(\phi) + \cfrac{1}{-zl\sin^2(\phi) + \cfrac{1}{\tilde{Q}(z) - \cot(\phi)}} \quad (1.40)$$

und für $\phi = 0$*:*

$$Q(z) = lz + \tilde{Q}(z). \quad (1.41)$$

Beweis: Aus den Beziehungen

$$\frac{d\mathbf{W}(l+x,z)}{dx}\mathbf{J} = z\mathbf{W}(l+x,z)\tilde{\mathbf{H}}(x)$$

und

$$\frac{d(\mathbf{W}(l,z)\tilde{\mathbf{W}}(x,z))}{dx}\mathbf{J} = z\mathbf{W}(l,z)\tilde{\mathbf{W}}(x,z)\mathbf{H}(x)$$

folgt, daß die Matrixfunktionen $\mathbf{W}(l+x,z)$ und $\mathbf{W}(l,z)\tilde{\mathbf{W}}(x,z)$ derselben Anfangswertaufgabe genügen. Folglich gilt $\mathbf{W}(l+x,z) = \mathbf{W}(l,z)\tilde{\mathbf{W}}(x,z)$ für $x \geq 0$. Mit

$$Q(z) = \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(l+x,z)}{w_{12}(l+x,z)} = \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(l,z)\tilde{w}_{11}(x,z) + w_{12}(l,z)\tilde{w}_{21}(x,z)}{w_{21}(l,z)\tilde{w}_{11}(x,z) + w_{22}(l,z)\tilde{w}_{21}(x,z)}$$

erhalten wir (1.39). Ist $(0,l)$ ein H-unteibares Intervall vom Typ ϕ, folgt

$$\mathbf{W}(l,z) = \mathbf{I} - zl\mathbf{HJ} = \begin{pmatrix} 1 - zl\sin\phi\cos\phi & zl\cos^2\phi \\ -zl\sin^2\phi & 1 + zl\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix}$$

Setzen wir die Komponenten von $\mathbf{W}(l,z)$ in (1.39) ein, läßt sich die Kettenbruchentwicklung (1.40) durch folgende Rechnung bestimmen:

$$\frac{(1 - zl\sin\phi\cos\phi)\tilde{Q}(z) + zl\cos^2\phi}{-zl\sin^2\phi\tilde{Q}(z) + 1 + zl\sin\phi\cos\phi} = \cot\phi + \frac{\tilde{Q}(z) - \cot\phi}{-zl\sin^2\phi(\tilde{Q}(z) - \cot\phi) + 1}$$

■

Beispiele:

1) Sei $\mathbf{H}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ für $x \in [0,\infty)$, dann ist

$$\mathbf{W}(x,z) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{xz}{2}) & \sin(\frac{xz}{2}) \\ -\sin(\frac{xz}{2}) & \cos(\frac{xz}{2}) \end{pmatrix}.$$

Weiter erhalten wir für $\Im z > 0$

$$Q(z) = \lim_{x\to\infty} -\cos(\frac{xz}{2})(\sin(\frac{xz}{2}))^{-1} = i$$

und mit der Stieltjes-Livshits'schen Inversionsformel folgt $d\sigma = d\lambda$.

2) Ist $\mathbf{H}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ für $x > l$, $l > 0$ und vom Typ ϕ auf $[0,l)$, so folgt nach Lemma 15 für $\phi \neq 0$ bzw. $\phi = 0$:

$$Q(z) = \cot(\phi) + \cfrac{1}{-zl\sin^2(\phi) + \cfrac{1}{i - \cot(\phi)}}$$

bzw.

$$Q(z) = lz + i.$$

Wir erhalten dann für $\phi \neq 0$ die Beziehung

$$\lim_{y \searrow 0} \Im Q(x+iy) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + 2xl \sin\phi \cos\phi + x^2 l^2 \sin^2\phi}$$

und damit

$$d\sigma = \frac{1}{\pi} \frac{d\lambda}{1 + 2\lambda l \sin\phi \cos\phi + \lambda^2 l^2 \sin^2\phi},$$

bzw. für $\phi = 0$:

$$d\sigma = d\lambda.$$

1.3.3 Die Fouriertransformation

Mit dem in Abschnitt.1.1 definierten Operator $\hat{\mathbf{S}}$ ist folgende Fouriertransformation verbunden:(s.Th.3 von [dB3], [Ka]) Die Bedingungen a) und b) von Abschnitt 1.1 seien erfüllt. Für eine rechts finite Funktion $u \in \hat{L}^2_H$ sei:

$$F(u,z) = \int_0^\infty (w_{21}(t,z) w_{22}(t,z)) \mathbf{H}(t) u(t) dt. \tag{1.42}$$

Dann definiert die Abbildung $u \mapsto F(u,z)$ eine Isometrie von $\hat{L}^2_H$ in L^2_σ.

Nach ([Ka], Th.12.2) ist die zu (1.42) inverse Transformation, die L^2_σ auf $\hat{L}^2_H$ abbildet, durch

$$\mathcal{F}^{-1}(F,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (w_{21}(x,\lambda) w_{22}(x,\lambda))^T F(\lambda) d\sigma, \quad F \in L^2_\sigma \tag{1.43}$$

im Sinne von $\hat{L}^2_H$ gegeben.

Im weiteren wollen wir die Fouriertransformation für spezielle Funktionen betrachten.

Der Punkt $x > 0$ sei dB-regulär. Für die Funktionen $u_1(t) := (\chi_{[0,x)}(t)\ 0)^T$ und $u_2(t) := (0\ \chi_{[0,x)}(t))^T$, erhalten wir aus (1.42) unter Verwendung von (1.11) die folgenden Beziehungen: $F(u_1,z) = z^{-1}(w_{22}(x,z) - 1)$ und $F(u_2,z) = -z^{-1} w_{21}(x,z)$.

Unter Ausnutzung der Isometrie

$$\int_0^\infty u_i(t)^T \mathbf{H}(t) u_j(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u_i,\lambda) F(u_j,\lambda) d\sigma \quad i,j = 1,2$$

ergeben sich die Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{w_{21}(x,\lambda)}{\lambda}\right)^2 d\sigma &= \int_0^x h_{22}(t)dt \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{w_{22}(x,\lambda)-1}{\lambda}\right)^2 d\sigma &= \int_0^x h_{11}(t)dt \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w_{21}(x,\lambda)(w_{22}(x,\lambda)-1)}{\lambda^2} d\sigma &= -\int_0^x h_{12}(t)dt
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

Hat das Spektralmaß σ im Nullpunkt eine positive Masse $\sigma([0]) > 0$, erhält man mit

$$F(\lambda) = \begin{cases} (\sigma([0])^{-1} & \text{für } \lambda = 0 \\ 0 & \text{für } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

aus (1.43) die Beziehung $u(x) = (0\ 1)^T$ für alle $x \in [0, \infty)$. Die Fouriertransformation (1.42) ergibt dann:

$$\sigma([0])^{-1} = \int_0^\infty h_{22}(t)dt, \tag{1.45}$$

womit wir eine direkte Beziehung zwischen Hamiltonian und Spektralmaß erhalten haben.

1.4 Saiten und kanonische Systeme

Eine Saite $S[l, M]$ ist durch eine positive Zahl l ($\leq \infty$) und eine auf $[0, l)$ oder $[0, l]$ gegebene nichtfallende Funktion M mit $M(0) \geq 0$ gegeben. Dabei wird l die Länge der Saite und M ihre Massenverteilung genannt, d.h., $M(x)$ ist die Gesamtmasse von $[0, x]$ (vgl.[KL]). Die Gleichung

$$dy'(x) + \lambda y(x) dM(x) = 0 \tag{1.46}$$

wird als Differentialgleichung der Saite bezeichnet. Im folgenden betrachten wir eine Saite mit freiem linken Ende, d.h. in (1.46) gelte die Randbedingung

$$y'_-(0) = 0.$$

Die Saite $S[l, M]$ wird singulär genannt, falls $l + M(l) = \infty$ ist, anderenfalls ($l + M(l) < \infty$) wird sie als regulär bezeichnet.

Die Funktionen $\phi(x, \lambda)$ und $\psi(x, \lambda)$ seien L"osungen von (1.46) mit folgenden Anfangsbedingungen:

$$\phi(0,\lambda) = 1 \quad \phi'_-(0,\lambda) = 0 \quad \psi(0,\lambda) = 0 \quad \psi'_-(0,\lambda) = 1. \tag{1.47}$$

Insbesondere erfüllt die Funktion ϕ die vorgegebenen Randbedingungen bei $x = 0$.
Die Funktionen ϕ und ψ genügen den Integralgleichungen

$$\phi(x, \lambda) = 1 + \lambda \int\limits_0^x (x - s)\phi(s, \lambda) dM(s), \tag{1.48}$$

$$\psi(x, \lambda) = x + \lambda \int\limits_0^x (x - s)\psi(s, \lambda) dM(s).$$

Die Saite $S[l, M]$ sei nun singulär mit $M(x) > 0$ für alle $x > 0$, dann gilt (vgl.[KL])

$$\lim_{x \to l} \frac{\psi(x, \lambda)}{\phi(x, \lambda)} = \int\limits_0^\infty \frac{d\tau(\mu)}{\mu - \lambda} \tag{1.49}$$

mit einem nichtnegativen Maß τ, das die Bedingung

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\tau(\mu)}{1 + \mu} < \infty \tag{1.50}$$

erfüllt.
Das Maß τ wird Hauptspektralmaß der singulären Saite $S[l, M]$ genannt. (Einer regulären Saite läßt sich auch ein Hauptspektralmaß zuordnen s.[KL].)
Zwischen einer Saite und einem kanonischen System mit einem Hamiltonian von diagonaler Form gibt es enge Beziehungen (s.[KL]), die wir im weiteren angeben. Dazu betrachten wir die Gleichung (1.11) mit einem diagonalen Hamiltonian

$$\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & 0 \\ 0 & h_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} w'_{12}(x, z) & -w'_{11}(x, z) \\ w'_{22}(x, z) & -w'_{21}(x, z) \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} w_{11}(x, z)h_{11}(x) & w_{12}(x, z)h_{22}(x) \\ w_{21}(x, z)h_{11}(x) & w_{22}(x, z)h_{22}(x) \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich leicht die Beziehungen $w_{11}(x, z) = w_{11}(x, -z)$, $w_{22}(x, z) = w_{22}(x, -z)$, $w_{12}(x, z) = -w_{12}(x, -z)$ und $w_{21}(x, z) = -w_{21}(x, -z)$ ablesen. Daraus erhält man $Q(z) = -Q(-z)$ und mit der Stieltjes-Livshits'schen Inversionsformel folgt, wenn sie auch auf der unteren Halbebene unter Beachtung von $Q(z) = \overline{Q(\bar{z})}$, dh. $\Im Q(z) = -\Im Q(\bar{z})$ angewandt wird, daß das zugeh"orige Spektralmaß σ symmetrisch ist, dh. $d\sigma = -d\sigma(-\lambda)$.

Definieren wir

$$\xi(x) := \int\limits_0^x h_{11}(t) dt, \quad M(\xi) := \int_0^{\max\{x; \xi(x) = \xi\}} h_{22}(t) dt$$

und

$$\psi'(\xi, z^2) = w_{11}(x, z) \quad z\psi(\xi, z^2) = w_{12}(x, z)$$

$$z^{-1}\phi'(\xi, z^2) = w_{21}(x, z) \quad \phi(\xi, z^2) = w_{12}(x, z) \tag{1.52}$$

so läßt sich zeigen, daß für $\lambda = z^2$ die Funktionen $\phi(\xi, \lambda)$ und $\psi(\xi, \lambda)$ L"osungen von (1.48) sind. (vgl.[KL])

Aus (1.49) ergibt sich:

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\tau(\mu)}{\mu - z^2} = \frac{1}{z} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z} = -\frac{\sigma([0])}{z^2} + 2\int_{0+}^\infty \frac{d\sigma}{\lambda^2 - z^2} \tag{1.53}$$

mit $\tau([0]) = \sigma([0])$ und $d\tau(\lambda^2) = 2d\sigma$.

Definieren wir umgekehrt für eine Saite $S[l, M]$:

$$x := \xi + M(\xi), \quad p(x) := \frac{d\xi}{dx}, \quad q(x) := \frac{dM}{dx},$$

so gilt $p(x) + q(x) = 1$ f.ü. und der $S[l, M]$ entsprechende Hamiltonian ist

$$\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix}.$$

Während das Spektralmaß τ in den Arbeiten von M.G. Krein [K2-3] zur Untersuchung von Saiten verwendet wird, benutzen H. Dym und H.P. McKean in [DM] das symmetrische Spektralmaß σ.
M.G. Krein hat in [K3] gezeigt, daß zu jedem Maß τ, das der Bedingung (1.50) genügt, genau eine (reguläre oder singuläre) Saite $S[l, M]$ mit $M(x) > 0$ für alle $x > 0$ existiert, deren Hauptspektralmaß τ ist. (Ein Beweis dieser Aussage ist auch in [DM] enthalten.)

Beginnt die Saite $S[l, M]$ mit einem massefreien Intervall der Länge b, so ist durch die Beziehung

$$Q_S(z) = b + \int_0^\infty \frac{d\tau(\mu)}{\mu - z} \tag{1.54}$$

der Weylsche Koeffizient Q_S der Saite $S[l, M]$ gegeben. Somit ist die Saite $S[l, M]$ durch ihren Weylschen Koeffizienten Q_S eindeutig bestimmt.

2. Inverse Probleme

2.1 Das inverse Spektralproblem

2.1.1 Die linearen Glieder des Weylschen Koeffizienten

Jedem durch einen Hamiltonian $\mathbf{H}$ bestimmten kanonischen System lassen sich gemäß Abschnitt 1.3 in eindeutiger Weise ein Weylscher Koeffizient Q und ein Spektralmaß σ zuordnen. Damit entsteht die Frage, inwiefern der Hamiltonian $\mathbf{H}$ durch den Weylschen Koeffizienten oder das Spektralmaß bestimmt ist. Dieses Problem wird auch als inverses Spektralproblem bezeichnet. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß der Hamiltonian durch den Weylschen Koeffizienten eindeutig gegeben ist.

Da der Weylsche Koeffizient Q nach (1.33) durch das Spektralmaß σ und die linearen Glieder $bz+a$ festgelegt wird, gibt es dann zu einem gegebenen Spektralmaß σ eine durch die Größen b und a parametrisierte Familie von kanonischen Systemen. Zunächst werden wir zeigen, welche Bedeutung das Glied bz für die Gestalt des Hamiltonians $\mathbf{H}$ hat.

Lemma 2.1: *Der Weylsche Koeffizient $Q(z)$ eines kanonischen Systems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$ hat in der Darstellung (1.33) genau dann ein lineares Glied bz mit $b > 0$, wenn $(0, b)$ ein maximales H-unteilbares Intervall vom Typ $\phi = 0$ ist.*

Beweis: Zu nächst nehmen wir an, daß der Hamiltonian $\mathbf{H}$ die Bedingung a) aus Abschnitt 1.1 erfüllt. Wegen $b = \lim_{y\to\infty} y^{-1}\Im Q(iy)$ folgt dann aus (1.35) und (1.36) die Beziehung

$$b = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda^2 + y^2} = 0$$

Andererseits folgt aus $b = 0$, daß die Bedingung a) erfüllt ist. Ansonsten gäbe es ein $x > 0$ mit $\int_0^x h_{22}(t)dt = 0$, folglich wäre $(0, x)$ ein H-unteilbares Intervall vom Typ $\phi = 0$ und nach Lemma (1.16) wäre $b > 0$.

Ist nun $(0, b)$ ein maximales H-unteilbares Intervall vom Typ $\phi = 0$, so folgt nach Lemma (1.16) die Beziehung $Q(z) = bz + \tilde{Q}(z)$, dabei gehört $\tilde{Q}(z)$ zu einem Hamiltonian, der die Bedingung a) erfüllt, folglich hat $\tilde{Q}(z)$ kein in z lineares Glied der obigen Form und bz tritt in der Darstellung (1.33) auf.

Existiert in (1.33) ein Glied bz mit $b > 0$, so ist nach Lemma (1.16) das Intervall $(0, b)$ vom Typ $\phi = 0$ und auch maximal, denn sonst hätte $\tilde{Q}(z)$ ein Glied $\tilde{b}z$ mit $\tilde{b} > 0$, was ausgeschlossen ist.

$\blacksquare$

Der folgende Satz von de Branges besagt, daß die Hilberträume $K(E(a,\cdot))$ bei gegebenem Spektralmaß σ eindeutig bestimmt sind. (Theorem 7 aus [dB4])

Theorem 2.2: *Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Hamiltonian* $\mathbf{H}$*, der die Bedingung a) aus Abschnitt 1.1 erfüllt. Das zugehörige Spektralmaß sei* σ *und* $K(E(a,\cdot))$ *die Familie isometrisch in* L^2_σ *eingebetteter Hilberträume ganzer Funktionen. Weiter sei* E_1 *eine de Branges-Funktion der Cartwright-Klasse ohne reelle Nullstellen und* $K(E_1)$ *liege isometrisch in* L^2_σ*.*

Dann gibt es einen dB-regulären Punkt $a > 0$*, so daß* $K(E_1)$ *isometrisch gleich* $K(E(a,\cdot))$ *ist.*

Zu einem Spektralmaß σ gibt es also genau eine Familie bezüglich der Inklusion vollständig geordneter, in L^2_σ eingebetteter Hilberträume ganzer Funktionen $K(E(a,\cdot))$.

Ein weiteres interessantes Ergebnis, daß sich unter Ausnutzung von Resultaten aus [dB1-2] beweisen läßt, ist Theorem 3.1 von [KL]:

Theorem 2.3: *Eine Matrixfunktion* $\mathbf{W}(z) \neq \mathbf{I}$ *ist genau dann eine normierte* ρ*-Matrix, wenn sie für ein* $L > 0$ *und einen auf* $[0,L]$ *gegebenen Hamiltonian* $\mathbf{H}$ *der Matrizant an der Stelle* L *ist, dh.* $\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}(L,z)$*.*
Dabei sind L *und der Hamiltonian* $\mathbf{H}$ *auf* $[0,L]$ *eindeutig bestimmt.*

Nach diesem Theorem kann man folglich eine beliebige normierte ρ-Matrix $\mathbf{W}(z)$ als Matrizant $\mathbf{W}(L,z)$ eines kanonischen Systems auffassen.

Als nächstes wollen wir zeigen, welche Bedeutung die Konstante a in der Darstellung (1.33) des Weylschen Koeffizienten Q für die Gestalt des Hamiltonians $\mathbf{H}$ hat.

Lemma 2.4: *Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Hamiltonian* $\mathbf{H}(x)$*, dem zugehörigen Matrizanten* $\mathbf{W}(x,z)$ *sowie dem Weylschen Koeffizienten* $Q(z)$*.*
Für $s \in R$ *und* $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *wird durch*

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet := \mathbf{S}\mathbf{H}(x)\mathbf{S}^T dx \tag{2.1}$$

ein kanonisches System mit dem Matrizanten

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = \mathbf{S}\mathbf{W}(x,z)\mathbf{S}^{-1} \tag{2.2}$$

und dem Weylschen Koeffizienten

$$Q^\bullet(z) = Q(z) + s \tag{2.3}$$

definiert.

(Die Größen des neuen Systems werden wie in [DM] mit $\bullet$ markiert.)

Beweis: Da $\mathbf{H}^\bullet$ spurnormiert sein soll, sei

$$x^\bullet = tr\left(\mathbf{S}\int\limits_0^x \mathbf{H}(t)dt\mathbf{S}^T\right).$$

Eine elementare Rechnung zeigt, daß $x^\bullet \geq \mu x$ mit

$$0 < \mu := \min_{0\leq t\leq 1}\{s^2 t - 2|s|\sqrt{t(1-t)} + 1\}$$

gilt. Somit ist $\mathbf{H}^\bullet$ auf $[0,\infty)$ definiert.

Daß die durch (2.2) gegebene Matrixfunktion $\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)$ der Matrizant von $\mathbf{H}^\bullet$ ist, ergibt sich aus der Gleichung (1.11), denn es gilt

$$d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{J} = \mathbf{S}d\mathbf{W}(x,z)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{J} = z\mathbf{S}\mathbf{W}(x,z)\mathbf{H}(x)\mathbf{J}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}dx$$

und mit $\mathbf{S}^T = \mathbf{J}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}$ folgt

$$d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{J} = z\mathbf{S}\mathbf{W}(x,z)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{H}(x)\mathbf{S}^T dx = z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet.$$

Die Beziehung (2.3) erhält man aus den Gleichungen

$$w_{11}^\bullet(x^\bullet, z) = w_{11}(x,z) + sw_{21}(x,z), \quad w_{21}^\bullet(x^\bullet, z) = w_{21}(x,z)$$

und

$$Q^\bullet(z) = \lim_{x^\bullet\to\infty}\frac{w_{11}^\bullet(x^\bullet, z)}{w_{21}^\bullet(x^\bullet, z)} = \lim_{x\to\infty}\frac{w_{11}(x,z)}{w_{21}(x,z)} + s = Q(z) + s.$$

■

Bemerkung: Aus der Beziehung (2.1) ergibt sich

$$\int_0^{x^\bullet} h_{22}^\bullet(t)dt = \int\limits_0^x h_{22}(t)dt,$$

so daß in übereinstimmung mit (1.43)

$$\int_0^\infty h_{22}^\bullet(t)dt = \int\limits_0^\infty h_{22}(t)dt \tag{2.4}$$

folgt, da eine änderung der Konstanten a das Spektralmaß σ nicht beeinflußt.

Wir möchten nun zeigen, daß zu jeder Nevanlinnafunktion Q genau ein Hamiltonian existiert, so daß Q der zugehörige Weylsche Koeffizient ist. Das Theorem

12 von [dB2] besagt, daß es zu jedem nichtnegativen Borelmaß σ auf R mit der Eigenschaft $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{1+\lambda^2} < \infty$ ein kanonisches System gibt, dessen Spektralmaß σ ist.

Da eine Nevanlinnafunktion Q durch ihr Spektralmaß und die linearen Glieder bz und a eindeutig bestimmt ist, haben wir mit Lemma (2.1) und Lemma (2.4) bereits gezeigt, daß zu jeder Nevanlinnafunktion Q ein kanonisches System mit Q als Weylschem Koeffizienten existiert. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, benötigen wir noch einen Hilfssatz.

2.1.2 Eine Beziehung für ρ-Matrizen

Lemma 2.5: *Gegeben sei eine normierte ρ-Matrix $\mathbf{W}(z)$.*
Für beliebiges $\alpha \in [0, \pi)$ ist jede der Funktionen

$$\phi_{1,\alpha}(z) = w_{11}(z) \cos\alpha + w_{12}(z) \sin\alpha$$

und

$$\phi_{2,\alpha}(z) = w_{21}(z) \cos\alpha + w_{22}(z) \sin\alpha \tag{2.5}$$

entweder konstant (möglicherweise Null) oder hat mindestens eine Nullstelle. Alle Nullstellen dieser Funktionen sind reell und einfach. Für festes α liegt zwischen zwei benachbarten Nullstellen der einen Funktion genau eine Nullstelle der anderen.

Gilt $\phi_{2,\alpha}(z) = const. = \sin\alpha$ (bzw. $\phi_{1,\alpha}(z) = const. = \cos\alpha$), so gibt es ein $L \geq 0$ und ein $l \in [0, L]$, so daß $\mathbf{W}(z)$ gleich dem Matrizanten $\mathbf{W}(L, z)$ eines kanonischen Systems mit dem Hamiltonian

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } 0 \leq x < l, \\ \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} & \text{für } l \leq x < L, \end{cases}$$

bzw.

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } 0 \leq x < l, \\ \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{pmatrix} & \text{für } l \leq x < L \end{cases}$$

ist.

Beweis: Da $\dfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)}$ eine Nevanlinnafunktion ist, müssen die Nullstellen von $\phi_{1,\alpha}(z)$ und $\phi_{2,\alpha}(z)$ bekanntlich einfach und reell sein, und zwischen zwei benachbarten Nullstellen der einen Funktion muß eine Nullstelle der anderen liegen.

Wir nehmen an, daß $\phi_{2,\alpha}(z) = w_{21}(z)\cos\alpha + w_{22}(z)\sin\alpha$ keine Nullstelle hat.

Zunächst sei $\alpha \neq 0$: Dann gilt $\dfrac{w_{22}(z)}{w_{21}(z)} \neq -\cot\alpha$, und da $\dfrac{w_{22}(z)}{w_{21}(z)}$ eine meromorphe Nevanlinnafunktion ist, gibt es folgende Möglichkeiten:

a) $\dfrac{w_{22}(z)}{w_{21}(z)} = -\cot\alpha - \dfrac{a}{z}$ mit $a > 0$

oder

b) $\dfrac{w_{22}(z)}{w_{21}(z)} = const. = \infty$ wegen $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}$.

Im Fall a) erhalten wir

$$\begin{aligned} w_{22}(z) =& (za^{-1}\cot\alpha + 1)f(z) \\ w_{21}(z) =& -za^{-1}f(z) \\ \phi_{2,\alpha}(z) =& \sin\alpha f(z) \end{aligned} \tag{2.6}$$

mit einer nullstellenfreien reellen ganzen Funktion $f(z)$, die der Bedingung $f(0) = 1$ genügt. Da $\dfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)}$ eine polstellenfreie meromorphe Nevanlinnafunktion ist, muß $\dfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)} = bz + c$ mit $b \geq 0$ gelten. Aus $\phi_{1,\alpha}(z) = \sin\alpha f(z)(bz + c)$ folgt $c = \cot\alpha$.

Mit $\det \mathbf{W}(z) = 1$ erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} w_{11}(z)(za^{-1}\cot\alpha + 1)f(z) + w_{12}(z)za^{-1}f(z) =& 1 \\ w_{11}(z)\cos\alpha + w_{12}(z)\sin\alpha =& (bz + \cot\alpha)f(z)\sin\alpha. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} w_{11}(z) =& f(z)^{-1} - za^{-1}f(z)(bz + \cot\alpha) \\ w_{12}(z) =& -\cot\alpha f(z)^{-1} + (za^{-1}\cot\alpha + 1)f(z)(bz + \cot\alpha). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$\dfrac{w_{11}(z)}{w_{21}(z)} = bz + \cot\alpha + \dfrac{1}{-za^{-1}f(z)^2} \in N$. Da eine Folge $(z_n), |z_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{|z_n a^{-1} f(z_n)^2|} = 0$, ist $za^{-1}f(z)^2$ eine Nevanlinnafunktion, folglich gilt $f(z) = const. = 1$.

Damit erhalten wir die Darstellungen:

$w_{11}(z) = 1 - za^{-1}(bz + \cot\alpha)$ $\quad w_{12}(z) = za^{-1}\cot\alpha(bz + \cot\alpha) + bz$

$w_{21}(z) = -za^{-1}$ $\quad w_{22}(z) = 1 + za^{-1}\cot\alpha$

Es ist leicht zu sehen, daß $\mathbf{W}(z)$ der Matrizant $\mathbf{W}(x,z)$ des kanonischen Systems an der Stelle $x = b + a{-}1\sin^{-2}\alpha$ mit dem Hamiltonian

$$\mathbf{H}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } 0 \le t < b \\ \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} & \text{für } b \le t < b + a{-}1\sin^{-2}\alpha \end{cases}$$

ist. Im Fall b) gilt $w_{21}(z) = 0$.

Für $\sin\alpha = 0$ erhalten wir wegen $\phi_{2,0}(0) = 0$ ebenfalls $w_{21}(z) = 0$.

Aus $\det \mathbf{W}(z) = 1$ folgt, daß $w_{11}(z)$ und $w_{22}(z)$ keine Nullstellen haben, somit hat die Nevanlinnafunktion $\dfrac{w_{12}(z)}{w_{22}(z)}$ keine Polstellen, deshalb gilt $w_{12}(z) = bzw_{22}(z)$ mit $b \ge 0$.

Sei $b > 0$: Wegen $\dfrac{w_{12}(z)}{w_{11}(z)} = bzw_{22}(z)^2$ erhalten wir $w_{11}(z) = 1$, $w_{22}(z) = 1$ und $w_{12}(z) = bz$, folglich ist $(0,l)$ H-unteilbar vom Typ 0. Für $b = 0$ folgt $\mathbf{W}(z) = \mathbf{I}$.

Für $\phi_{1,\alpha}$ lassen sich alle Betrachtungen analog durchführen.

■

Folgerung : *Die Funktion* $\dfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)}$ *sei rational und habe für* $\alpha \ne 0$ *bzw.* $\alpha = 0$ *die Kettenbruchentwicklung (s.[Pe])*

$$\frac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)} = l_0 z + a_1 + \cfrac{1}{-m_1 z + \cfrac{1}{l_1 z + a_2 + \cfrac{1}{-m_2 z + \cdots + \cfrac{1}{-m_n z + \cfrac{1}{l_n z + a_{n+1}}}}}}$$

bzw.

$$\frac{\phi_{1,0}(z)}{\phi_{2,0}(z)} = l_0 z + a_1 + \cfrac{1}{-m_1 z + \cfrac{1}{l_1 z + a_2 + \cfrac{1}{-m_2 z + \cdots + \cfrac{1}{-m_n z}}}}$$

$$l_0 \ge 0, \quad m_k > 0, \quad l_k \ge 0, \quad l_k z + a_{k+1} \not\equiv 0 \quad k = 1, \ldots, n$$

Es sei

$$\cot\phi_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, \quad x_0 = 0, \quad x_k = \sum_{i=1}^{k} l_{i-1} + m_i \sin^{-2}\phi_i \quad k = 1, \cdots, n$$

und $L = x_n + l_n$.

Dann gehören $\phi_{1,\alpha}(z)$ *und* $\phi_{2,\alpha}(z)$ *zu einem Matrizanten* $\mathbf{W}(x,z)$ *mit* $x > L$, *dessen zugehöriger Hamiltonian folgende Gestalt hat:*

Für $1 \leq k \leq n$ *sei*

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_{k-1} \leq x < x_{k-1} + l_{k-1}, \\ \begin{pmatrix} \cos^2 \phi_k & \sin \phi_k \cos \phi_k \\ \sin \phi_k \cos \alpha & \sin^2 \phi_k \end{pmatrix} & \text{für } x_{k-1} + l_{k-1} \leq x < x_k, \end{cases}$$

und

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } x_n \leq x < L, \\ \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} & \text{für } L \leq x, \end{cases}$$

bzw.

$$\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad x_n \leq x.$$

Beweis: Ist die Funktion $\dfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)}$ linear, so folgt die Aussage aus Lemma 2.5.

Ist $\dfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)}$ bereits ein Matrizant $\mathbf{W}(x,z)$ mit einem Hamiltonian $\mathbf{H}(x)$ zugeordnet, so folgt wie im Beweis von Lemma 1.16, daß dem Hamiltonian

$$\tilde{\mathbf{H}}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}^T & \text{für } 0 \leq x < l \\ \mathbf{H}(x - l) & \text{für } l \leq x \end{cases}$$

die Funktion

$$\frac{\tilde{\phi}_{1,\alpha}(z)}{\tilde{\phi}_{2,\alpha}(z)} = \cot \phi + \cfrac{1}{-\sin^2 \phi l z + \cfrac{1}{\cfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)} - \cot \phi}}$$

für $\phi \neq 0$ und

$$\frac{\tilde{\phi}_{1,\alpha}(z)}{\tilde{\phi}_{2,\alpha}(z)} = lz + \frac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)}$$

für $\phi = 0$ entspricht.

Durch die Betrachtung der Kettenbruchentwicklung von $\dfrac{\phi_{1,\alpha}(z)}{\phi_{2,\alpha}(z)}$ folgt dann die Behauptung.

$\blacksquare$

Wir kommen nun zum wesentlichen Ergebnis dieses Abschnittes:

2.1.3 Das Hauptergebnis

Theorem 2.6: *Zu jeder Funktion $Q \in \tilde{N}$ gibt es genau einen auf $[0, \infty)$ definierten Hamiltonian $\mathbf{H}$, so daß Q der Weylsche Koeffizient des zu $\mathbf{H}$ gehörenden kanonischen Systems ist.*

Zum Beweis von Theorem 2.6 benötigen wir Theorem 6 von [dB4]:

Theorem 2.7: *Es sei $\mathbf{W}(x, z)$ der Matrizant eines kanonischen Systems, und $\mathbf{W}(z)$ sei eine normierte ρ-Matrix mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{W}(z)^{-1}\mathbf{W}(b, z)$ für ein $b \geq 0$ ebenfalls eine ρ-Matrix ist.*
Dann gilt $\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}(a, z)$ für ein a mit $0 \leq a \leq b$.

Beweis von Theorem 2.6: Zu zeigen ist die Eindeutigkeit von $\mathbf{H}$ bei gegebenem Weylschen Koeffizienten Q. Wegen Lemma 2.1 können wir voraussetzen, daß die Bedingung a) erfüllt ist. Damit können wir Theorem 2.2 anwenden.

Angenommen, es existieren zwei kanonische Syteme mit den Hamiltonianen $\mathbf{H}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ und dem gleichen Weylschen Koeffizienten Q.
Sei $L < \infty$ ein dB-regulärer Punkt von $\mathbf{H}$. Da $\mathbf{H}$ und $\tilde{\mathbf{H}}$ das gleiche Spektralmaß $d\sigma$ entspricht, gibt es nach Theorem 2.2 einen dB-regulären Punkt $\tilde{L}$ von $\tilde{\mathbf{H}}$, so daß die de Branges-Funktionen $E(z) = w_{22}(L, z) + iw_{21}(L, z)$ und $\tilde{E}(z) = \tilde{w}_{22}(\tilde{L}, z) + i\tilde{w}_{21}(\tilde{L}, z)$ isometrisch gleiche Hilberträume $K(E)$ und $K(\tilde{E})$ erzeugen.

Aufgrund von Theorem 1.12 und $\mathbf{W}(L, 0) = \tilde{\mathbf{W}}(\tilde{L}, 0) = \mathbf{I}$ folgt

$$(w_{21}(L, z) \; w_{22}(L, z)) = (\tilde{w}_{21}(\tilde{L}, z) \; \tilde{w}_{22}(\tilde{L}, z))\mathbf{S} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun das nach Lemma 2.4 transformierte System mit

$$\hat{\mathbf{W}}(\hat{x}, z) := \mathbf{S}\tilde{\mathbf{W}}(\tilde{x}, z)\mathbf{S}^{-1}, \tag{2.7}$$

dann gilt $\hat{\mathbf{W}}(\hat{L}, z) = \mathbf{W}(L, z)$ und durch Anwendung des Funktionals $s(\mathbf{W})$ aus Abschnitt 1.2 folgt

$$L = s(\mathbf{W}(L, z)) = s(\hat{\mathbf{W}}(\hat{L}, z)) = \hat{L}.$$

Es sei $0 < \hat{l} < L$. Dann ist $\hat{\mathbf{W}}(\hat{l}, z)^{-1}\mathbf{W}(L, z)$ eine ρ-Matrix, da es der Matrizant des kanonischen Systems mit auf $[\hat{l}, L]$ eingeschränktem $\hat{\mathbf{H}}$ an der Stelle L ist.
Unter Anwendung von Theorem 2.7 folgt $\hat{\mathbf{W}}(\hat{l}, z)^{=}\mathbf{W}(l, z)$ für ein l mit $0 \leq l \leq L$ und wie oben folgt $\hat{l} = l$.
Damit gilt $\hat{\mathbf{W}}(x, z) = \mathbf{W}(x, z)$ für alle $x \in [0, L]$, und es folgt $s_0 = const.$ für alle Intervalle $[0, L]$ mit dB-regulärem L.

Im weiteren unterscheiden wir zwei Fälle.

1) Es existiert eine Folge dB-regulärer Punkte L_n mit $L_n \to \infty$.

Dann gilt $Q(z) = \hat{Q}(z)$ und aufgrund der Transformation (2.7) auch $Q(z) = \hat{Q}(z) + s_0$, somit gilt $s_0 = 0$, $\mathbf{W}(x,z) = \tilde{\mathbf{W}}(x,z)$ und damit $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}$.

2) Es existiert ein dB-reguläres $b > 0$, so daß (b, ∞) ein H-unteilbares Intervall ist.

Dann gilt $\mathbf{W}(b,z) = \hat{\mathbf{W}}(b,z)$, und nach Theorem 2.2 muß (b,∞) auch bezüglich $\hat{\mathbf{H}}$ unteilbar sein. Wir nehmen an, daß $\mathbf{H}$ auf (b,∞) vom Typ ϕ und $\hat{\mathbf{H}}$ vom Typ $\hat{\phi}$ ist. Mit $t = \cot\phi$ und $\hat{t} = \cot\hat{\phi}$ erhalten wir dann:

$$Q(z) = \frac{w_{11}(b,z)t + w_{12}(b,z)}{w_{21}(b,z)t + w_{22}(b,z)} = \hat{Q}(z) + s_0 = \frac{w_{11}(b,z)\hat{t} + w_{12}(b,z)}{w_{21}(b,z)\hat{t} + w_{22}(b,z)} + z_0 \qquad (2.8)$$

Für $z = 0$ folgt $t = \hat{t} + s_0$. Für $t = \hat{t}$ erhalten wir $s_0 = 0$ und es folgt $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}$. Für $t \neq \hat{t}$ folgt aus (2.8) wegen $\det \mathbf{W}(b,z) = 1$ die Beziehung

$$1 = (w_{21}(b,z)t + w_{22}(b,z))(w_{21}(b,z)\hat{t} + w_{22}(b,z)).$$

Somit hat $w_{21}(b,z)t + w_{22}(b,z)$ keine Nullstelle und aus Lemma 2.5 folgt die Gleichung $w_{21}(b,z)t + w_{22}(b,z) = const. = 1$

Demnach ist $\mathbf{W}(b,z)$ der Matrizant eines kanonischen Systems mit

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq x < b_1, \\ \begin{pmatrix} \cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi \\ \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi \end{pmatrix} \text{ für } b_1 \leq x < b \end{cases}$$

was ausgeschlossen ist.

Damit haben wir auch im Fall 2) die Beziehung $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}$ gezeigt.

■

Die Zuordnung der Hamiltoniane zu einem gegebenem Spektralmaß wird durch die Lemmata 2.1 und 2.4 bestimmt.
2.1.4 Endliche Spektralmaß e

Hat das Spektralmaß σ ein endliches Gesamtmaß s_0, $s_0 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma < \infty$, so kann der Weylsche Koeffizient Q wegen $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda d\sigma}{1+\lambda^2} < \infty$ in der Form $Q(z) = bz + a + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z}$ dargestellt werden.

Lemma 2.8: *Der Weylsche Koeffizient Q eines kanonischen Systems, dessen Spektralmaß σ ein positives endliches Gesamtmaß s_0 habe, sei in der Form*

$$Q(z) = a + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z} \qquad a \in R$$

gegeben. Mit den durch $\cot\phi := a$ *und* $l := (s_0 \sin^2\phi)^{-1}$ *gegebenen Größen* ϕ *und* l *gilt für den Hamiltonian* $\mathbf{H}$ *des kanonischen Systems:*

Das Intervall $(0, l)$ *ist H-unteilbar und maximal vom Typ* ϕ*.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß die durch

$$Q_m(z) := \frac{1}{mz + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z}\right)^{-1}} \tag{2.9}$$

bestimmte Funktion Q_m genau dann zu $\tilde{N}$ gehört, wenn $m \leq s_0^{-1}$ gilt. Aus (2.9) ergibt sich die Beziehung (für $\Im z > 0$):

$$\frac{\Im Q_m(z)}{\Im z} = \left| m + zm \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z} \right|^{-2} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{|\lambda - z|^2} - m \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z} \right|^2 \right].$$

Aus der Cauchyschen Ungleichung

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z} \right|^2 \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{|\lambda - z|^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma$$

folgt für $m \leq s_0^{-1}$ die Beziehung $\Im Q_m(z) \geq 0$ für $\Im z > 0$. Aus $Q_m \in \tilde{N}$ folgt

$$m \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{|\lambda - z|^2} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z} \right|^{-2}.$$

Mit $z = iy$ erhalten wir für $y \to \infty$ die Beziehung

$$m \leq \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 d\sigma}{\lambda^2 + y^2}}{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\lambda d\sigma}{\lambda^2 + y^2}\right)^2 + \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2\lambda d\sigma}{\lambda^2 + y^2}\right)^2} \mapsto \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma},$$

und damit $m \leq s_0^{-1}$.

Aus (2.9) ergibt sich für den Weylschen Koeffizienten Q:

$$Q(z) = a + \frac{1}{-mz + \frac{1}{Q_m(z)}}, \quad Q_m \in \tilde{N} \quad \text{für} \quad m \leq s_0^{-1}.$$

Daraus folgt mit Lemma 1.16 und dem Eindeutigkeitstheorem 2.6, daß $(0, l)$ ein maximales H-unteilbares Intervall vom Typ ϕ ist.

■

2.2 Die Verallgemeinerung eines Ergebnisses von M.G. Krein

In [K3] hat M.G. Krein gezeigt, wie man für Saiten mit einem gegebenen speziellen Spektralmaß $d\tau(\lambda) = p(\lambda)^{-1}d\lambda$, wobei p ein positives Polynom ist, die zugeh"orige Massenfunktion bestimmen kann. In diesem Abschnitt wollen wir dieses Verfahren für kanonische Systeme verallgemeinern.
Dazu ben"otigen wir folgendes Lemma:

Lemma 2.9: *Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Hamiltonian* $\mathbf{H}(x)$ *und dem zugeh"origen Matrizanten* $\mathbf{W}(x,z)$. *Für* $l > 0$ *sei*

$$\mathbf{H}^i(x) := \begin{cases} \mathbf{H}(l-x) & \textit{für } 0 \leq x \leq l \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \textit{für } l < x \end{cases}.$$

Dann ist $\mathbf{H}^i(x)$ *der Hamiltonian eines kanonischen Systems mit dem Weylschen Koeffizienten* $Q^i(z) = -\dfrac{w_{22}(l,-z)}{w_{21}(l,-z)}$.

Beweis: Wir zeigen, daß

$$\mathbf{W}^i(x,z) = \begin{cases} \mathbf{W}(l,-z)^{-1}\mathbf{W}(l-x,-z) & \text{für } 0 \leq x \leq l \\ \mathbf{W}(l,-z)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & (x-l)z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } l < x \end{cases} \tag{2.10}$$

der Matrizant des kanonischen Sytems mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}^i$ ist. Für $0 \leq t \leq l$ erhalten wir aus

$$\frac{d\mathbf{W}(t,-z)}{dt}\mathbf{J} = -z\mathbf{W}(t,-z)\mathbf{H}(t)$$

mit $t = l - x$ die Beziehung

$$\frac{d\mathbf{W}(l-x,-z)}{dx}\mathbf{J} = z\mathbf{W}(l-x,-z)\mathbf{H}(l-x)$$

und damit

$$\frac{d\mathbf{W}^i(x,z)}{dx}\mathbf{J} = z\mathbf{W}^i(x,z)\mathbf{H}^i(x) \quad \mathbf{W}^i(0,z) = \mathbf{I}.$$

Für $x > l$ ist (2.10) offensichtlich. Aus $\mathbf{W}^i(l,z) = \mathbf{W}(l,-z)^{-1}$ und

$$\mathbf{W}^i(l,z) = \begin{pmatrix} w_{22}(l,-z) & -w_{12}(l,-z) \\ -w_{21}(l,-z) & w_{11}(l,-z) \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$Q^i(z) = -\frac{w_{22}(l,-z)}{w_{21}(l,-z)}.$$

■

Der Hamiltonian $\mathbf{H}$ eines gegebenen kanonischen Systems genüge für $l \geq 0$ der Beziehung $\mathbf{H}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ für $x > l$.
Dann gilt für den Matrizanten $\mathbf{W}(x,z)$:

$$\mathbf{W}(x,z) = \mathbf{W}(l,z) \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}z(x-l)) & \sin(\frac{1}{2}z(x-l)) \\ -\sin(\frac{1}{2}z(x-l)) & \cos(\frac{1}{2}z(x-l)) \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad x \geq l.$$

Für den Weylschen Koeffizienten Q erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(z) =& \frac{w_{11}(l,z)i + w_{12}(l,z)}{w_{21}(l,z)i + w_{22}(l,z)} \\ Q(z) =& \frac{i(w_{11}(l,z)\overline{w_{22}(l,z)} - w_{12}(l,z)\overline{w_{21}(l,z)})}{|w_{21}(l,z)i + w_{22}(l,z)|^2}, \\ &+ \frac{w_{11}(l,z)\overline{w_{21}(l,z)} + w_{12}(l,z)\overline{w_{22}(l,z)}}{|w_{21}(l,z)i + w_{22}(l,z)|^2} \end{aligned}$$

und damit für $\Im z > 0$:

$$\lim_{z \searrow \lambda} \Im Q(z) = \frac{1}{|w_{21}(l,\lambda)i + w_{22}(l,\lambda)|^2}$$

Aus der Stieltjes–Livshits'schen Inversionsformel folgt:

$$d\sigma = \frac{d\lambda}{w_{21}(l,\lambda)^2 + w_{22}(l,\lambda)^2}.$$

Ist $[0,l]$ die abgeschlossene Vereinigung endlich vieler maximaler H-unteilbarer Intervalle, dann sind $w_{21}(l,\lambda)$ und $w_{22}(l,\lambda)$ Polynome in λ, und es ergibt sich

$$d\sigma = p(\lambda)^{-1} d\lambda,$$

wobei p ein Polynom mit den Eigenschaften $p(\lambda) > 0$ und $p(0) = 1$ ist.

Ein derartiges Polynom p läßt sich in der Form $p(\lambda) = |q(\lambda)|^2$ mit einem Polynom q darstellen, dessen sämtliche Nullstellen einen negativen Imaginärteil haben. Es sei

$$q(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{z_0}\right)^{n_0} \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{z_k}\right)^{n_k},$$

wobei $\{z_i \mid i = 0, \ldots, k\}$ die Menge der Nullstellen von $p(\lambda)$ mit negativem Imaginärteil ist.

Aus $|z - z_i| > |\bar{z} - z_i|$ für $\Im z > 0$ folgt für q die Beziehung

$$|q(z)| > |q(\bar{z})| \quad \text{für} \quad \Im z > 0.$$

Damit ist q eine de Branges-Funktion.

Weiter definieren wir:

$$g(z) := \frac{1}{2}(q(z) + \overline{q(\bar{z})}) \quad h(z) := \frac{1}{2i}(q(z) - \overline{q(\bar{z})})$$

woraus $g(z) = \bar{g}(\bar{z})$ und $h(z) = \bar{h}(\bar{z})$ folgt.

Somit sind g und h reelle Polynome mit den Eigenschaften

$$q(z) = g(z) + ih(z), \quad g(0) = 1, \ h(0) = 0.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}\Im\left(\frac{g(z)}{h(z)}\right) =& \Im\left(i\frac{q(z)+\overline{q(\bar{z})}}{q(z)-\overline{q(\bar{z})}}\right) = \Re\left(\frac{q(z)+\overline{q(\bar{z})}}{q(z)-\overline{q(\bar{z})}}\right) \\ =& \frac{|q(z)|^2 - |\overline{q(\bar{z})}|^2}{|q(z)-\overline{q(\bar{z})}|^2}\end{aligned}$$

womit wir die Beziehung $\Im\left(-\frac{g(-z)}{h(-z)}\right) \geq 0$ für $\Im z > 0$ erhalten. Damit ist gezeigt, daß $-\frac{g(-z)}{h(-z)}$ eine Nevanlinnafunktion ist.

Die Funktion $-\frac{g(-z)}{h(-z)}$ hat eine Kettenbruchentwicklung der Gestalt

$$-\frac{g(-z)}{h(-z)} = l_1 z + a_1 + \cfrac{1}{-m_1 z + \cfrac{1}{l_2 z + a_2 + \cdots + \cfrac{1}{-m_k z}}}$$

mit $m_i > 0, \quad l_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, k \quad l_i z + a_i \not\equiv 0$ für $i = 2, \ldots, k$, denn hätte das letzte Glied des Kettenbruches die Gestalt $l_k z + a_k$, so wäre $\lim_{z\to 0} -\frac{g(-z)}{h(-z)} = \sum_{i=1}^{k} a_i$, was wegen $g(0) = 1$ und $h(0) = 0$ ausgeschlossen ist.

Hier ist $n = k + \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(l_i)$ mit $\operatorname{sgn}(l_i) = 0$ für $l_i = 0$ und $\operatorname{sgn}(l_i) = 1$ für $l_i > 0$. Der zu dem kanonischen System mit dem Weylschen Koeffizienten $-\frac{g(-z)}{h(-z)}$ geh"orige Hamiltonian $\tilde{\mathbf{H}}$ läßt sich folgendermaßen konstruieren:

Mit $\cot\phi_i := \sum_{j=1}^{i} a_j$, $x_0 = 0$, $x_i = l_i + m_i \sin^{-2}\phi_i + x_{i-1}$ gilt für $i = 1, \ldots, k$:

$$\tilde{\mathbf{H}}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + l_i), x \in [x_k, \infty) \\ \begin{pmatrix} \cos^2\phi_i & \sin\phi_i\cos\phi_i \\ \sin\phi_i\cos\phi_i & \sin^2\phi_i \end{pmatrix} & \text{für } x \in [x_{i-1} + l_i, x_i) \end{cases}$$

Nach Lemma (2.9) sind $g(z) = w_{22}(x_k, z)$ und $h(z) = w_{21}(x_k, z)$ die Elemente des zu dem "umgekehrten" Hamiltonian $\mathbf{H}(x) = \tilde{\mathbf{H}}(x_k - x), \quad x \in [0, x_k]$ geh"orenden Matrizanten $\mathbf{W}(x_k, z)$. Wird $\mathbf{H}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ für $x > x_k$ gesetzt, ergibt sich als Spektralmaß folglich $d\sigma = p(\lambda)^{-1} d\lambda$.

Damit wurde folgendes gezeigt:

Theorem 2.10: *Zu einem Spektralmaß der Gestalt*

$$d\sigma = p(\lambda)^{-1} d\lambda,$$

wobei p ein Polynom mit $p(\lambda) > 0$, $p(0) = 1$ und $\deg p = 2n$ ist, gibt es einen Hamiltonian der folgenden Gestalt:

Es gibt ein $l \geq 0$ mit $\mathbf{H}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{I}$ für $x \geq l$ und $[0, l]$ ist die (abgeschlossene) Vereinigung von n maximalen H-unteilbaren Intervallen, wobei für den Typ ϕ des ersten Intervalls $\phi \neq 0$ gilt.

Umgekehrt geh"ort zu jedem derartigen Hamiltonian ein Spektralmaß der obigen Gestalt.

Gleichzeitig k"onnen wir mit Hilfe der Nullstellen von $p(\lambda)$ den zugeh"origen Hamiltonian explizit konstruieren.

Beispiel: Wir betrachten das Spektralmaß σ mit

$$d\sigma = (\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda + 1)^{-1} d\lambda.$$

Die Nullstellen von $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda + 1$ mit negativem Imaginärteil sind

$$z_{1,2} = -\frac{i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) - i\sin(\frac{\pi}{8})),$$

und wir erhalten

$$\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\left(1 - \frac{z}{z_2}\right) = -z^2 + (1-i)z + 1$$

$$g(z) = -z^2 + z + 1 \quad h(z) = -z \quad -\frac{g(-z)}{h(-z)} = z + 1 - \frac{1}{z}.$$

Daraus folgt, daß

$$\mathbf{H}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } x \in [0, 2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } x \in [2, 3) \\ \frac{1}{2}\mathbf{I} & \text{für } x \in [3, \infty) \end{cases}$$

ein zu dem Spektralmaß σ geh"orender Hamiltonian ist.

3. Transformationen kanonischer Systeme

3.1 Erste Transformationsformeln

Zur expliziten Bestimmung von Saiten, die bei der Extrapolationstheorie stationärer Prozesse ben”otigt werden, hat M.G. Krein in [K3] (siehe auch [DM]) eine Reihe von Transformationsformeln für Saiten angegeben. Das Anliegen dieser Formeln besteht darin, aus “einfachen” Spektralmaßen mit bekannten zugeh”origen Saiten durch einander entsprechende Transformationen des Spektralmaßes und der Massen- und Längenfunktion der Saite die zum transformierten Spektralmaß geh”orende Saite explizit zu berechnen. Aufgrund der äquivalenz von Saiten und kanonischen Systemen mit einem Hamiltonian von diagonaler Form gelten die Transformationsregeln auch für diese speziellen kanonischen Systeme. In diesem Kapitel verallgemeinern wir einige dieser Transformationsregeln für beliebige kanonische Systeme. Zunächst geben wir einige einfache Regeln an.

Regel 1: Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Hamiltonian $\mathbf{H}$, dem Matrizanten $\mathbf{W}$, dem Weylschen Koeffizienten Q und dem Spektralmaß σ. Weiter sei K eine positive Konstante.
Für das durch

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet) = \mathbf{H}(x) \quad \text{und} \quad x^\bullet = Kx \tag{3.1}$$

bestimmte kanonische System gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) =& \mathbf{W}(x, Kz) \\ Q^\bullet(z) =& Q(Kz) \\ d\sigma^\bullet(\lambda) =& d\sigma(K\lambda). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Beweis: Das transformierte System muß der Gleichung (1.11) genügen:

$$\begin{aligned} d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{J} =& d\mathbf{W}(x, Kz)\mathbf{J} = zK\mathbf{W}(x, Kz)\mathbf{H}(x)dx \\ =& z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet. \end{aligned}$$

Die restlichen Beziehungen sind leicht ersichtlich.

■

Regel 2: Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Hamiltonian $\mathbf{H}$, dem Matrizanten $\mathbf{W}$, dem Weylschen Koeffizienten Q und dem Spektralmaß σ.
Für das durch

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet = \mathbf{P}\mathbf{H}(x)\mathbf{P}^T dx, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}, \quad K > 0 \tag{3.3}$$

bestimmte kanonische System gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) =& \mathbf{P}\mathbf{W}(x, z)\mathbf{P}^{-1} \\ Q^\bullet(z) =& K^2 Q(z) \\ d\sigma^\bullet(\lambda) =& K^2 d\sigma. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet,z)\mathbf{J} =& - \mathbf{P}d\mathbf{W}(x,z)\mathbf{J}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}\\ =& - z\mathbf{P}\mathbf{W}(x,z)\mathbf{H}(x)\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}dx\\ =& z\mathbf{P}\mathbf{W}(x,z)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{H}(x)\mathbf{P}dx\\ =& z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet,z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet\end{aligned}$$

Aus $w^\bullet_{11}(x^\bullet,z) = w_{11}(x,z)$ und $w^\bullet_{21}(x^\bullet,z) = K^{-2}w_{21}(x,z)$ folgt die Formel für $Q^\bullet(z)$.

■

Für die "Verschiebung" des Spektralmaßes σ gilt folgende Regel:

Regel 3: Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Hamiltonian $\mathbf{H}$, dem Matrizanten $\mathbf{W}$, dem Weylschen Koeffizienten Q und dem Spektralmaß σ.
Für $a \in R$ ist durch

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet =& \mathbf{W}(x,-a)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,-a)^T dx\\ x^\bullet(x) =& tr\left(\int\limits_0^x \mathbf{W}(t,-a)\mathbf{H}(t)\mathbf{W}(t,-a)^T dt\right)\end{aligned}\tag{3.5}$$

ein kanonisches System mit

$$\begin{aligned}\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet,z) =& \mathbf{W}(x,z-a)\mathbf{W}(x,-a)^{-1}\\ Q^\bullet(z) =& Q(z-a)\\ d\sigma^\bullet(\lambda) =& d\sigma(\lambda-a)\end{aligned}\tag{3.6}$$

bestimmt.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß das transformierte System der Gleichung (1.11) genügt.

Mit $\mathbf{W}(x,z)^T = -\mathbf{J}\mathbf{W}(x,z)^{-1}\mathbf{J}$ und $d(\mathbf{J}\mathbf{W}(x,z)^T) = -z\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,z)^T dx$ folgt:

$$\begin{aligned}d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet,z)\mathbf{J} =& d(\mathbf{W}(x,z-a)\mathbf{W}(x,-a)^{-1}\mathbf{J})\\ =& d(\mathbf{W}(x,z-a)\mathbf{J})\mathbf{W}(x,-a)^T + \mathbf{W}(x,z-a)d(\mathbf{J}\mathbf{W}(x,-a)^T)\\ =& (z-a)\mathbf{W}(x,z-a)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,-a)^T dx\\ &+ a\mathbf{W}(x,z-a)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,-a)^T dx\\ =& z\mathbf{W}(x,z-a)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,-a)^T dx\\ =& z\mathbf{W}(x,z-a)\mathbf{W}(x,-a)^{-1}\mathbf{W}(x,-a)\mathbf{H}(x)\mathbf{W}(x,-a)^T dx\\ =& z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet,z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet.\end{aligned}$$

Für $t \in R$ gilt

$$\begin{aligned}w^\bullet_{11}(x^\bullet,z)t + w^\bullet_{12}(x^\bullet,z) =& w_{11}(x,z-a)(w_{22}(x,-a)t - w_{12}(x,-a))\\ &+ w_{12}(x,z-a)(-w_{21}(x,-a)t + w_{11}(x,-a))\\ w^\bullet_{21}(x^\bullet,z)t + w^\bullet_{22}(x^\bullet,z) =& w_{21}(x,z-a)(w_{22}(x,-a)t - w_{12}(x,-a))\\ &+ w_{22}(x,z-a)(-w_{21}(x,-a)t + w_{11}(x,-a)).\end{aligned}$$

Mit der Beziehung

$$R(x,t) = \frac{w_{22}(x,-a)t - w_{12}(x,-a)}{-w_{21}(x,-a)t + w_{11}(x,-a)}$$

folgt

$$\frac{w^\bullet_{11}(x^\bullet,z)t + w^\bullet_{12}(x^\bullet,z)}{w^\bullet_{21}(x^\bullet,z)t + w^\bullet_{22}(x^\bullet,z)} = \frac{w_{11}(x,z-a)R(x,t) + w_{12}(x,z-a)}{w_{21}(x,z-a)R(x,t) + w_{22}(x,z-a)}$$

Für $x \to \infty$ ergibt die rechte Seite wegen $R(x,t) \in R \cup \{\infty\}$ für alle $t \in R$ den Grenzwert $Q(z-a)$.
Aus $\lim_{x\to\infty} x^\bullet(x) < \infty$ würde folgen, daß das mit einem H-unteilbaren Intervall vom Typ ϕ mit $\cot\phi = t$ fortgesetzte transformierte System den Weylschen Koeffizienten $Q(z-a)$ hat. Weil t beliebig sein kann, ergibt sich ein Widerspruch zu dem Eindeutigkeitssatz (2.6).
Demnach ist das transformierte System auf $[0,\infty)$ definiert und es gilt
$Q^\bullet(z) = Q(z-a)$.

■

Nun wollen wir zeigen, wie sich das kanonische System ändert, wenn dem Spektralmaß σ eine (positive oder negative) Punktmasse im Nullpunkt hinzugefügt wird. Im weiteren bezeichne δ_x das Einheitsmaß im Punkt x.

Regel 4: Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Hamiltonian $\mathbf{H}$, dem Matrizanten $\mathbf{W}$, dem Weylschen Koeffizienten Q und dem Spektralmaß σ.
Für $m \in R$ mit $m + \sigma([0]) \geq 0$ definieren wir:

$$\begin{aligned} S(x) =& 1 + m\int_0^x h_{22}(t)dt \\ A(x) =& 2\int_0^x S(t)h_{12}(t)dt \\ \mathbf{P}(x) =& \begin{pmatrix} S(x) & -mS(x)A(x) \\ 0 & S(x)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet =& \mathbf{P}(x)\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)^T dx \\ x^\bullet(x) =& tr\left(\int_0^x \mathbf{P}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t)^T dt\right) \\ l^\bullet =& \lim_{x\to\infty} x^\bullet(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet,z) = \begin{pmatrix} 1 & -mz^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,z) \begin{pmatrix} S(x)^{-1} & mS(x)^{-1}A(x) + mz^{-1} \\ 0 & S(x) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

und

$$\begin{aligned} Q^\bullet(z) =& Q(z) - mz^{-1} \\ \sigma^\bullet =& \sigma + m\delta_0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Durch (3.8) und (3.9) ist ein kanonisches System auf $[0, l^\bullet]$ gegeben. Falls $l^\bullet < \infty$ ist, sei $(l^\bullet, \infty)$ ein $\mathbf{H}^\bullet$-unteilbares Intervall vom Typ $\phi = 0$. Dann ist $\mathbf{H}^\bullet$ der Hamiltonian eines kanonischen Systems mit dem durch (3.10) gegebenen Weylschen Koeffizienten $Q^\bullet(z)$ und dem Spektralmaß $\sigma^\bullet$.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß durch (3.8) und (3.9) ein kanonisches System auf $[0, l^\bullet)$ gegeben ist. Wegen $\mathbf{W}^\bullet(0, z) = \mathbf{I}$ und $\mathbf{H}^\bullet \geq 0$ bleibt die Beziehung

$$d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = -z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)\mathbf{J}dx^\bullet$$

zu zeigen. Es gilt

$$d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = \begin{pmatrix} 1 & -mz^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d\left[\mathbf{W}(x, z)\begin{pmatrix} S(x)^{-1} & mS(x)^{-1}A(x) + mz^{-1} \\ 0 & S(x) \end{pmatrix}\right]$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & -mz^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{W}(x, z)z\mathbf{H}(x)\mathbf{J}\begin{pmatrix} S(x)^{-1} & mS(x)^{-1}A(x) + mz^{-1} \\ 0 & S(x) \end{pmatrix} dx$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & -mz^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{W}(x, z)d\begin{pmatrix} S(x)^{-1} & mS(x)^{-1}A(x) + mz^{-1} \\ 0 & S(x) \end{pmatrix}.$$

Mit der Beziehung

$$\begin{aligned} & d\begin{pmatrix} S(x)^{-1} & mS(x)^{-1}A(x) + mz^{-1} \\ 0 & S(x) \end{pmatrix} \\ =& m\begin{pmatrix} -S(x)^{-2}h_{22}(x) & 2h_{12}(x) - mS(x)^{-2}A(x)h_{22}(x) \\ 0 & h_{22}(x) \end{pmatrix} dx \end{aligned}$$

erhalten wir:

$$d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = -\begin{pmatrix} 1 & -mz^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{W}(x, z)dx \times$$

$$\times \begin{pmatrix} zS^{-1}h_{12} + mS^{-2}h_{22} & -zSh_{11} + (zmS^{-1}A - m)h_{12} + m^2S^{-2}Ah_{22} \\ zS^{-1}h_{22} & -zSh_{12} + mzS^{-1}Ah_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus

$$
\begin{aligned}
&- z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)\mathbf{J}dx^\bullet \\
&= - z \begin{pmatrix} 1 & -mz^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,z) \begin{pmatrix} S(x)^{-1} & mS(x)^{-1}A(x) + mz^{-1} \\ 0 & S(x) \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} S(x) & -mS(x)A(x) \\ 0 & S(x)^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{H}(x) \begin{pmatrix} S(x) & -mS(x)A(x) \\ 0 & S(x)^{-1} \end{pmatrix}^T dx
\end{aligned}
$$

erhalten wir ebenfalls:

$$
\begin{aligned}
&- z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)\mathbf{J}dx^\bullet = - \begin{pmatrix} 1 & -mz^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,z)dx \times \\
&\times \begin{pmatrix} zS^{-1}h_{12} + mS^{-2}h_{22} & -zSh_{11} + (zmS^{-1}A - m)h_{12} + m^2S^{-2}Ah_{22} \\ zS^{-1}h_{22} & -zSh_{12} + mzS^{-1}Ah_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Setzen wir zunächst $\sigma([0]) + m > 0$ voraus, gilt $S(x) > 0$ für alle $x > 0$. Aus (3.9) folgt

$$
\frac{w^\bullet_{11}(x^\bullet, z)}{w^\bullet_{21}(x^\bullet, z)} = \frac{w_{11}(x,z)}{w_{12}(x,z)} - mz^{-1},
$$

und wir bekommen:

$$
\lim_{x\to\infty} \frac{w^\bullet_{11}(x^\bullet, z)}{w^\bullet_{21}(x^\bullet, z)} = Q(z) - mz^{-1}.
$$

Daraus ist ersichtlich, daß für $l^\bullet < \infty$ der Hamiltonian $\mathbf{H}^\bullet$ mit einem H-unteilbaren Intervall vom Typ 0 fortgesetzt werden muß; in diesem Fall gilt nämlich:

$$
Q^\bullet(z) = \frac{w^\bullet_{11}(l^\bullet, z)}{w^\bullet_{21}(l^\bullet, z)} = Q(z) - mz^{-1}
$$

Für $\sigma([0]) + m = 0$ muß ein Fall gesondert betrachtet werden:
Ist (l_0, ∞) unteilbar vom Typ 0, so gilt für $\sigma([0]) > 0$ die Beziehung

$$
\int_0^{l_0} h_{22}(t)dt = \sigma([0])^{-1}.
$$

Dann wird $S(x)^{-1}$ für $x \to l_0$ unendlich, und wegen

$$
x^\bullet \geq \int_0^{x^\bullet} h^\bullet_{22}(t)dt = S(x)^{-1} \int_0^x h_{22}(t)dt
$$

folgt $x^\bullet \to \infty$ für $x \to l_0$.
Da in diesem Fall $Q(z) = \dfrac{w_{11}(l_0,z)}{w_{12}(l_0,z)}$ gilt, folgt wiederum die Beziehung (3.10).

■

In [DM] findet sich eine analoge Transformationsregel für Saiten, die sich aus der Regel 4 sofort ergibt, wenn man einen diagonalen Hamiltonian $\mathbf{H}$ betrachtet.

Nun wollen wir eine Transformationsregel für den Fall herleiten, daß dem Spektralmaß $d\sigma$ an einer von Null verschiedenen Stelle a eine (positive oder negative) Punktmasse m mit $\sigma([a]) + m \geq 0$ hinzugefügt wird.
Hier ergeben sich die Transformationsformeln durch eine Kombination der Regeln 3 und 4, denn durch "Verschieben" des Spektralmaßes um $-a$, dem Hinzufügen einer Punktmasse m im Nullpunkt und anschließendem "Zurückschieben" ergibt sich gerade die geforderte Transformation des Hinzufügens einer Punktmasse m im Punkt a.
Wir erhalten somit für den Hamiltonian $\mathbf{H}^\bullet$ des transformierten Systems:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet &= \mathbf{W}_1(x_1,-a)\mathbf{H}_1(x_1)\mathbf{W}_1(x_1,-a)^T dx_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & ma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}_2(x_2,z) \begin{pmatrix} S(x_2)^{-1} & mS(x_2)^{-1}A(x_2) - ma^{-1} \\ & \\ 0 & S(x_2) \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} S(x_2) & -mS(x_2)A(x_2) \\ & \\ 0 & S(x_2)^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{H}_2(x_2) \begin{pmatrix} S(x_2) & -mS(x_2)A(x_2) \\ & \\ 0 & S(x_2)^{-1} \end{pmatrix}^T \\
&\times \begin{pmatrix} S(x_2)^{-1} & mS(x_2)^{-1}A(x_2) - ma^{-1} \\ & \\ 0 & S(x_2) \end{pmatrix}^T \\
&\times \mathbf{W}_2(x_2,z) \begin{pmatrix} 1 & ma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T dx_2
\end{aligned}$$

Dabei muß beachtet werden, daß $\mathbf{H}_2$ n"otigenfalls mit einem H-unteilbaren Intervall vom Typ 0 ergänzt wird.

Mit $v(x) := \begin{pmatrix} w_{21}(x,a) \\ w_{22}(x,a) \end{pmatrix}$ und $S(x) = 1 + m \int\limits_0^x v(t)^T \mathbf{H}(t) v(t) dt$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet = \begin{pmatrix} 1 & ma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,a)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -ma^{-1}S(x)^{-1} \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,a)\mathbf{H}(x) \times \\
\times \mathbf{W}(x,a)^T \begin{pmatrix} 1 & -ma^{-1}S(x)^{-1} \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \mathbf{W}(x,a)^{-T} \begin{pmatrix} 1 & ma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T dx
\end{aligned}$$

Eine leichte Umformung ergibt mit $\mathbf{P}(x) = \mathbf{I} + \mathbf{J}v(x)v(x)^T mS(x)^{-1}a^{-1}$:

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet = \begin{pmatrix} 1 & ma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}(x)\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix} 1 & ma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T dx \; eqno(3.11)$$

In dem Fall, daß $\mathbf{H}_1$ für $l_1 > 0$ mit einem H-unteilbaren Intervall vom Typ 0 ergänzt wird, folgt aus der Regel 3, daß $\mathbf{H}^\bullet$ mit einem Intervall des Typs ϕ_0 fortgesetzt werden muß, wobei ϕ_0 durch

$$\cot\phi_0 = \frac{w_{11}^{(1)}(l_1, -a)}{w_{21}^{(1)}(l_1, -a)} = Q(0) + ma^{-1}$$

bestimmt ist.

Für $x_1 \geq l_1$ gilt nämlich

$$\mathbf{W}_1(x_1, -a) = \mathbf{W}_1(l_1, -a)(\mathbf{I} + a(x_1 - l_1)\mathbf{H}_1(x_1)\mathbf{J})$$

und damit folgt für $x^\bullet \geq l^\bullet$:

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet = \mathbf{W}_1(l_1, -a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{W}_1(l_1, -a)^T dx_1$$

woraus der Typ von $\mathbf{H}^\bullet$ für $x^\bullet \geq l^\bullet$ ersichtlich ist.

Den Weylschen Koeffizienten $Q^\bullet(z)$ und das Spektralmaß $\sigma^\bullet$ des transformierten Systems erhält man aus

$$\begin{aligned} Q^\bullet(z) =& Q(z) + m(a - z)^{-1} \\ \sigma^\bullet =& \sigma + m\delta_a \end{aligned} \tag{3.12}$$

Der Matrizant $\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)$ wird analog dem Hamiltonian $\mathbf{H}^\bullet$ bestimmt, es gilt

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{m}{a-z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x, z) \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}v(x)v(x)^T S(x)^{-1} \left(\frac{m}{a} + \frac{m}{z-a}\right)\right) \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{m}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

womit die Gr"oßen des transformierten Systems gegeben sind.

3.2 Transformationen mittels rationaler Dichte

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie sich das kanonische System transformiert, wenn man von einem Spektralmaß σ zu einem Spektralmaß $\sigma^\bullet$ der Gestalt $d\sigma^\bullet(\lambda) = p(\lambda)d\sigma$ übergeht, wobei $p(\lambda)$ oder $p(\lambda)^{-1}$ ein positives Polynom zweiten Grades sein soll. Zuerst verifizieren wir die Transformationsformeln für Veränderungen des Spektralmaßes der Form $d\sigma^\bullet(\lambda) = (|z_0|^2 - 2\Re z_0\lambda + \lambda^2)d\sigma$ durch einen Ansatz unter Verwendung von Resultaten von [dB1-4] und [DM].

Im weiteren sei z_0 eine komplexe Zahl mit negativem Imaginärteil: $\Im z_0 < 0$.
Für die de Branges-Funktion $e(z)$ gelte $e(z_0) = 0$. Aus [Bo] S.230 folgt, daß die Funktion

$$e^\bullet(z) = e(z)\left(|z_0|\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)\right)^{-1} \tag{3.14}$$

dann wiederum eine de Branges-Funktion ist. Für reelles $\lambda \in R$ erhalten wir:

$$|e^\bullet(\lambda)|^2 = |e(\lambda)|^2(|z_0|^2 - 2\Re z_0\lambda + \lambda^2)^{-1} \tag{3.15}$$

Eine ganze Funktion $f^\bullet \in K(e^\bullet)$ hat dann die Eigenschaft, daß die Funktion

$$f(z) := f^\bullet(z)|z_0|\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \tag{3.16}$$

in $K(e)$ enthalten ist und in diesem Raum wegen

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f^\bullet(\lambda)|^2|e^\bullet(\lambda)|^{-2}d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f^\bullet(\lambda)|^2|e(\lambda)|^{-2}(|z_0|^2 - 2\Re z_0\lambda + \lambda^2)d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2|e(\lambda)|^{-2}d\lambda\end{aligned}$$

die gleiche Norm wie $f^\bullet$ in $K(e^\bullet)$ hat.
Ist der Hilbertraum $K(e)$ isometrisch in L^2_σ enthalten, so ergibt sich mit

$$d\sigma^\bullet(\lambda) = (|z_0|^2 - 2\Re z_0\lambda + \lambda^2)d\sigma \tag{3.17}$$

aus

$$\int_0^x |f^\bullet(\lambda)|^2 d\sigma^\bullet(\lambda) = \int_0^x |f^\bullet(\lambda)|^2(|z_0|^2 - 2\Re z_0\lambda + \lambda^2)d\sigma = \int_0^x |f(\lambda)|^2 d\sigma$$

die Beziehung $K(e^\bullet) \subset L^2_{\sigma^\bullet}$.

Folglich findet man einen Ansatz für eine Transformationsregel der angegebenen Form, indem man zu $E(x,z) = w_{22}(x,z) + iw_{21}(x,z)$ mit regulärem x eine de Branges-Funktion $e(z)$ mit $e(z_0) = 0$ und $K(E(x,\cdot)) = K(e)$ bestimmt und zu $e^\bullet(z)$ dann eine zu einem Matrizanten geh"orende de Branges-Funktion $E^\bullet(x^\bullet, z)$ ermittelt.

Nach Theorem 1.14 müssen wir z.B. reelle Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ finden, so daß wir mit

$$(w_{21}(x,z)\ w_{22}(x,z))\begin{pmatrix} C(x) & S(x) \\ 0 & C(x)^{-1}\end{pmatrix} = (e_1(x,z)\ e_2(x,z))$$

und $e(x,z) = e_2(x,z) + ie_1(x,z)$ die Beziehung $e(x,z_0) = 0$ erhalten. Aus

$$iC(x)w_{21}(x,z_0) + S(x)w_{21}(x,z_0) + S(x)^{-1}w_{22}(x,z_0) = 0$$

folgt die Beziehung

$$iC(x)^2 + S(x)C(x) = -\frac{w_{22}(x,z_0)}{w_{21}(x,z_0)}$$

und damit

$$C(x)^2 = -\Im\left(\frac{w_{22}(x,z_0)}{w_{21}(x,z_0)}\right) \quad S(x)C(x) = -\Re\left(\frac{w_{22}(x,z_0)}{w_{21}(x,z_0)}\right). \tag{3.18}$$

Mit

$$\begin{aligned}
e^\bullet(x^\bullet,z) =& e(z)\left(|z_0|\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\right)^{-1} \\
=& iC(x)w_{21}(x,z) + S(x)w_{21}(x,z) + C(x)^{-1}w_{22}(x,z)\times \\
& \times(|z_0|^2 - 2z\Re z_0 + z^2)^{-1}|z_0|\left(1-\frac{zz_0}{|z_0|^2}\right)
\end{aligned}$$

und dem Ansatz

$$e^\bullet(x^\bullet,z) = iC^\bullet(x^\bullet)w^\bullet_{21}(x^\bullet,z) + S^\bullet(x^\bullet)w^\bullet_{21}(x^\bullet,0) + C^\bullet(x^\bullet)^{-1}w^\bullet_{22}(x^\bullet,z)$$

erhalten wir wegen $e^\bullet(x^\bullet,0) = C^\bullet(x^\bullet)^{-1}$ die Beziehung $C^\bullet(x^\bullet) = |z_0|C(x)$.
Mit

$$G(z) := (|z_0|^2 - 2z\Re z_0 + z^2)^{-1} \tag{3.19}$$

erhalten wir durch die Betrachtung der Imaginärteile in den Beziehungen von $e^\bullet(x^\bullet,z)$ für reelles z:

$$w^\bullet_{21}(x^\bullet,z) = G(z)\left(1-\frac{z}{|z_0|^2}\left(\Im z_0\frac{S(x)}{C(x)} + \Re z_0\right)w_{21}(x,z) - \frac{z\Im z_0}{|z_0|^2C(x)^2}w_{22}(x,z)\right)$$

Der Ansatz $S^\bullet(x^\bullet) = |z_0|S(x)$ ergibt in analoger Weise:

$$\begin{aligned}
w^\bullet_{22}(x^\bullet,z) =& G(z)\left(z\Im z_0(S(x)^2 + C(x)^2)w_{21}(x,z)\right) \\
& + G(z)\left(|z_0|^2 + z\left(\Im z_0\frac{S(x)}{C(x)} - \Re z_0\right)\right)w_{22}(x,z)
\end{aligned}$$

Das Spektralmaß σ sei endlich mit $s_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma$. Eine leichte Rechnung ergibt folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)G(\lambda)^{-1}d\sigma = s_0 z + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda(|z_0|^2-1) - 2\Re z_0}{1+\lambda^2}d\sigma + \\
+ G(z)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\sigma}{\lambda - z}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Daraus ist ersichtlich, daß für die Nevanlinnafunktion Q mit der Darstellung

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda - z}$$

die Funktion $Q^\bullet$ mit

$$Q^\bullet(z) = zs_0 + G(z)^{-1}Q(z)$$

eine Nevanlinnafunktion mit dem Spektralmaß $d\sigma^\bullet(\lambda) = G(\lambda)^{-1}d\sigma$ ist.

Durch diese Betrachtungen wird folgende Transformationsregel motiviert:

Regel 5: Gegeben sei ein kanonisches System mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$, dem Matrizanten $\mathbf{W}$, dem Weylschen Koeffizienten Q und dem Spektralmaß σ.

Es gelte $s_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma < \infty$ und $\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $0 \leq x \leq s_0^{-1}$.

Für $z_0 \in C$ mit $\Im z_0 < 0$ und $x \geq s_0^{-1}$ sei:

$$C(x) = \sqrt{-\Im\left(\frac{w_{22}(x,z_0)}{w_{21}(x,z_0)}\right)} \quad S(x) = -\Re\left(\frac{w_{22}(x,z_0)}{w_{21}(x,z-0)}\right)C(x)^{-1} \tag{3.21}$$

$$\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} \Re z_0 - \Im z_0 \dfrac{S(x)}{C(x)} & -\dfrac{\Im z_0}{|z_0|^2 C(x)^2} \\ \Im z_0 \left(S(x)^2 + C(x)^2\right) & |z_0|^{-2}\left(\Re z_0 + \Im z_0 \dfrac{S(x)}{C(x)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

$$x^\bullet(x) = tr\left(\int_{s_0^{-1}}^{x} \mathbf{P}(t)^T \mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t)dt\right) \quad l^\bullet = \lim_{x\to\infty} x^\bullet(x) \tag{3.23}$$

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet = \mathbf{P}(x)^T\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)dx \tag{3.24}$$

und

$$\mathbf{R}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{z}{|z_0|^2}\left(\Im z_0 \dfrac{S(x)}{C(x)} + \Re z_0\right) & z\Im z_0\left(S(x)^2 + C(x)^2\right) \\ -\dfrac{z\Im z_0}{|z_0|^2 C(x)^2} & |z_0|^2 + z\left(\Im z_0 \dfrac{S(x)}{C(x)} - \Re z_0\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = \begin{pmatrix} 1 & s_0 z G(z) \\ 0 & G(z) \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,z)\mathbf{R}(x,z). \tag{3.25}$$

Die Nevanlinnafunktion $F(z)$ sei durch $F(z) := \lim_{x\to\infty} \dfrac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}$ definiert.

Weiter sei

$$\begin{aligned} Q^\bullet(z) =& s_0 z + G(z)^{-1} Q(z) \\ d\sigma^\bullet(\lambda) =& (|z_0|^2 - 2\Re z_0 \lambda + \lambda^2) d\sigma \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dann gilt:
Durch (3.21)-(3.25) wird auf $[0, l^\bullet)$ ein kanonisches System mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)$ und dem Matrizanten $\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)$ gegeben.

Die Beziehungen (3.21)-(3.25) und (3.26) sind verträglich, d.h. der Hamiltonian des kanonischen Systems mit dem Weylschen Koeffizienten $Q^\bullet(z)$ stimmt auf $[0, l^\bullet)$ mit $\mathbf{H}^\bullet$ überein.

Insbesondere gilt: Für $0 < \Im F(\bar{z}_0) < \infty$ folgt $l^\bullet = \infty$.

Ist (L, ∞) ein H-unteilbares Intervall vom Typ ϕ, dann gilt $l^\bullet < \infty$. Wird in diesem Fall $\mathbf{H}^\bullet$ so ergänzt, daß $(l^\bullet, \infty)$ ein $\mathbf{H}^\bullet$-unteilbares Intervall vom Typ $\phi^\bullet$ mit $\cot \phi^\bullet := |z_0|^2 \cot \phi$ ist, so gelten die Beziehungen (3.26).

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß durch (3.21)-(3.25) ein kanonisches System auf $[0, l^\bullet]$ gegeben ist:

Für $x = s_0^{-1}$ folgt $\mathbf{W}(s_0^{-1}, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z s_0^{-1} & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C(s_0^{-1})^2 = -\frac{s_0 \Im z_0}{|z_0|^2}$,

$$S(s_0^{-1}) C(s_0^{-1}) = \frac{s_0 \Re z_0}{|z_0|^2}, \quad \mathbf{R}(s_0^{-1}, z) = \begin{pmatrix} 1 & -s_0 z \\ z s_0^{-1} & |z_0|^2 - 2z\Re z_0 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man aus (3.25) und $x^\bullet = 0$ für $x = s_0^{-1}$ die Beziehung $\mathbf{W}^\bullet(0, z) = \mathbf{I}$.
Wegen $\det \mathbf{R}(x, z) = G(z)^{-1}$ folgt $\det \mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = 1$.
Als nächstes zeigen wir, daß $\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)$ der Matrizant von $\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)$ ist:

Durch Differenzieren von $-\dfrac{w_{22}(x, z_0)}{w_{21}(x, z_0)}$ und anschließender Trennung von Real- und Imaginärteil ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{dC(x)^2}{dx} =& \Im z_0 \left(-h_{11}(x) + 2S(x)C(x)h_{12}(x) + \left(C(x)^4 - S(x)^2 C(x)^2 \right) h_{22}(x) \right) \\ & + \Re z_0 \left(2C(x)^2 h_{12}(x) - 2S(x)C(x)^3 h_{22}(x) \right) \\ \frac{dS(x)C(x)}{dx} =& \Im z_0 \left(-2C(x)^2 h_{12}(x) + 2S(x)C(x)^3 h_{22}(x) \right) \\ & + \Re z_0 \left(-h_{11}(x) + 2S(x)C(x)h_{12}(x) + \left(C(x)^4 - S(x)^2 C(x)^2 \right) h_{22}(x) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\frac{dC(x)^{-2}}{dx} =& \Im z_0 \left(\frac{1}{C(x)^4} h_{11}(x) - 2\frac{S(x)}{C(x)^3} h_{12}(x) + \left(\frac{S^2(x)}{C^2(x)} - 1 \right) h_{22}(x) \right) \\
&+ \Re z_0 \left(-\frac{2}{C(x)^2} h_{12}(x) + 2\frac{S(x)}{C(x)} h_{22}(x) \right) \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{C(x)} \right) =& \Im z_0 \left(\frac{S(x)}{C(x)^3} h_{11}(x) - 2\left(1 + \frac{S(x)^2}{C(x)^2} \right) h_{12}(x) \right) \\
&+ \Im z_0 \left(\frac{S(x)^3}{C(x)} + S(x)C(x) \right) h_{22}(x) \\
&+ \Re z_0 \left(-\frac{1}{C(x)^2} h_{11}(x) + \left(C(x)^2 + S(x)^2 \right) h_{22}(x) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(S(x)^2 + C(x)^2 \right) =& \Im z_0 \left(\left(\frac{S(x)^2}{C(x)^2} - 1 \right) h_{11}(x) - 2\left(\frac{S(x)^3}{C(x)} + S(x)C(x) \right) h_{12}(x) \right) \\
&+ \Im z_0 \left(S(x)^2 + C(x)^2 \right)^2 h_{22}(x) \\
&+ \Re z_0 \left(-2\frac{S(x)}{C(x)} h_{11}(x) + 2\left(S(x)^2 + C(x)^2 \right) h_{12}(x) \right).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen erhalten wir durch eine elementare Rechnung die folgende Identität:

$$\begin{aligned}
&|z_0|^2 \mathbf{H}(x) + \Im z_0 \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} S(x)^2 + C(x)^2 & \frac{S(x)}{C(x)} \\ \frac{S(x)}{C(x)} & C(x)^{-2} \end{pmatrix} = \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |z_0|^2 \end{pmatrix} \mathbf{P}(x)^T \mathbf{H}(x) \mathbf{P}(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |z_0|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit

$$|z_0|^2 \mathbf{H}(x) = -\mathbf{H}(x)\mathbf{J} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |z_0|^2 \end{pmatrix} \mathbf{J} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |z_0|^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x) = \Im z_0 \mathbf{J} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} S(x)^2 + C(x)^2 & \frac{S(x)}{C(x)} \\ \frac{S(x)}{C(x)} & C(x)^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |z_0|^{-2} \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$-\mathbf{H}(x)\mathbf{J} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |z_0|^2 \end{pmatrix} \mathbf{J} - \mathbf{J}\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |z_0|^2 \end{pmatrix} \mathbf{P}(x)^T \mathbf{H}(x) \mathbf{P}(x).$$

Weiter erhalten wir mit $\mathbf{P}(x)^T\mathbf{J}\mathbf{P}(x) = \mathbf{J}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{H}(x)\mathbf{J}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & |z_0|^2\end{pmatrix} + z\mathbf{J}\mathbf{P}(x)\mathbf{J}\right] + \mathbf{J}\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x)\mathbf{J} = \\
&-\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & |z_0|^2\end{pmatrix} + z\mathbf{J}\mathbf{P}(x)\mathbf{J}\right]\mathbf{P}(x)^T\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)\mathbf{J}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathbf{R}(x,z) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & |z_0|^2\end{pmatrix} + z\mathbf{J}\mathbf{P}(x)\mathbf{J}$$

ergibt sich

$$\left(\frac{d}{dx}\mathbf{W}(x,z)\right)\mathbf{R}(x,z) + \mathbf{W}(x,z)\frac{d}{dx}\mathbf{R}(x,z) = -z\mathbf{W}(x,z)\mathbf{R}(x,z)\mathbf{P}(x)^T\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)\mathbf{J},$$

woraus die Beziehung

$$d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{J} = -z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet$$

folgt, welche zu zeigen war.

Mit $\mathbf{R}(x,z) = \begin{pmatrix}A(x,z) & B(x,z)\\ C(x,z) & D(x,z)\end{pmatrix}$ folgt aus (3.25) für $t \in R$:

$$\begin{aligned}
&\frac{w_{11}^\bullet(x^\bullet,z)t + w_{12}^\bullet(x^\bullet,z)}{w_{21}^\bullet(x^\bullet,z)t + w_{22}^\bullet(x^\bullet,z)} = \\
&G(z)^{-1}\frac{w_{11}(x,z)(A(x,z)t + B(x,z)) + w_{12}(x,z)(C(x,z)t + D(x,z))}{w_{21}(x,z)(A(x,z)t + B(x,z)) + w_{22}(x,z)(C(x,z)t + D(x,z))} + s_0 z
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Im weiteren betrachten wir den Fall, daß $F(z)$ keine reelle Konstante oder unendlich ist. Wegen $0 < \Im F(\bar{z}_0) < \infty$ existiert der Grenzwert $\mathbf{P}_0 := \lim_{x\to\infty}\mathbf{P}(x)$ und aus $\det\mathbf{P}(x) = 1$ folgt $\det\mathbf{P}_0 = 1$.

Es sei $\mathbf{M}$ eine beliebige nichtnegativ-definite reelle Matrix $\mathbf{M} \geq 0$ mit $tr(\mathbf{M}) = 1$. Aus $\det\mathbf{M} > 0$ folgt wegen $\det\mathbf{P}_0^T\mathbf{M}\mathbf{P}_0 = \det\mathbf{M}$ die Beziehung $tr\left(\mathbf{P}_0^T\mathbf{M}\mathbf{P}_0\right) > 0$. Gilt $\det\mathbf{M} = 0$, ist $\mathbf{M}$ von der Gestalt

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}^T, \quad \phi \in [0,\pi).$$

Daraus folgt ebenfalls $tr\left(\mathbf{P}_0^T\mathbf{M}\mathbf{P}_0\right) > 0$, denn $tr\left(\mathbf{P}_0^T\mathbf{M}\mathbf{P}_0\right) = 0$ impliziert $\mathbf{P}_0^T\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} = 0$, im Widerspruch zu $\det\mathbf{P}_0^T = 1$.

Da $tr\left(\mathbf{P}_0^T\mathbf{M}\mathbf{P}_0\right)$ eine stetige Funktion in den Komponenten m_{11}, m_{12}, m_{22} auf dem durch $m_{11} + m_{22} = 1, \quad m_{12}^2 \le m_{11} m_{22}$ gegebenen kompakten Gebiet in R^3 ist, folgt $\inf_{\{\mathbf{M}\}}\{tr\left(\mathbf{P}_0^T \mathbf{M} \mathbf{P}_0\right)\} \ge \epsilon > 0$. Dann gibt es ein $L > 0$ mit

$$\inf_{\{\mathbf{M}\}}\{tr\left(\mathbf{P}(x)^T \mathbf{M} \mathbf{P}(x)\right)\} \ge \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad x \ge L,$$

woraus $l^\bullet = \infty$ folgt.

In (3.27) sei $t \in R$ so gewählt, daß $\lim_{x\to\infty} -\dfrac{A(x,z)t + B(x,z)}{C(x,z)t + D(x,z)} \not\equiv F(z)$ gilt. Eine derartige Wahl von t ist stets m"oglich, da wegen $\det \mathbf{R}(x,z) = G(z)^{-1}$ die Beziehung $\lim_{x\to\infty} \dfrac{A(x,z)}{C(x,z)} \ne \lim_{x\to\infty} \dfrac{B(x,z)}{D(x,z)}$ gilt. Dann folgt (3.26) aus

$$\begin{aligned}
Q^\bullet(z) = & \lim_{x^\bullet\to\infty} \frac{w_{11}^\bullet(x^\bullet,z)t + w_{12}^\bullet(x^\bullet,z)}{w_{21}^\bullet(x^\bullet,z)t + w_{22}^\bullet(x^\bullet,z)} \\
= & G(z)^{-1} \lim_{x\to\infty} \frac{w_{11}(x,z)}{w_{21}(x,z)} \frac{\left(\dfrac{w_{12}(x,z)}{w_{11}(x,z)} + \dfrac{A(x,z)t + B(x,z)}{C(x,z)t + D(x,z)}\right)}{\left(\dfrac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)} + \dfrac{A(x,z)t + B(x,z)}{C(x,z)t + D(x,z)}\right)} + s_0 z \\
= & G(z)^{-1} Q(z) + s_0 z
\end{aligned}$$

Im weiteren setzen wir voraus, daß (l,∞) ein H-unteilbares Intervall vom Typ ϕ ist. Wir zeigen, daß dann

$$\int_l^\infty \mathbf{P}(x)^T \begin{pmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\cos\phi \\ \sin\phi\end{pmatrix}^T \mathbf{P}(x) dx < \infty \tag{3.28}$$

gilt.
Dazu betrachten wir $(\cos\phi \;\; \sin\phi)\mathbf{P}(x)$. Zunächst sei $\sin\phi \ne 0$. Für $x > l$ gilt:

$$\begin{aligned}
w_{22}(x,z) = & w_{21}(l,z) z (x-l)\cos^2\phi + w_{22}(l,z)(1 + z(x-l)\sin\phi\cos\phi) \\
w_{21}(x,z) = & w_{21}(l,z)(1 - z(x-l)\sin\phi\cos\phi) + w_{22}(l,z)(-z(x-l)\sin^2\phi)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Schreiben wir kurz

$$w_0 = W_{21}(l,z_0), \quad w_1 = W_{22}(l,z_0), \quad t = x - l, \quad g = \frac{w_0 \sin\phi}{w_0\cos\phi + w_1\sin\phi} \tag{3.30}$$

so ergibt sich

$$\frac{w_{22}(x,z_0)}{w_{21}(x,z_0)} = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi} + \frac{1}{g - z_0 t \sin^2\phi}, \tag{3.31}$$

und wir erhalten

$$C(x)^2 = \frac{\Im\left(g - z_0 t\sin^2\phi\right)}{|g - z_0 t \sin^2\phi|^2}, \quad S(x)C(x) = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} - \frac{\Re\left(g - z_0 t\sin^2\phi\right)}{|g - z_0 t\sin^2\phi|^2}.$$

Wegen $\Im\left(\frac{w_1}{w_0}\right) < 0$ gilt hier $\Im g > 0$. Mit $u(t) = g - z_0 t \sin^2\phi$ ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\frac{S(x)}{C(x)} =& \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{|u(t)|^2}{\Im u(t)} - \frac{\Re u(t)}{\Im u(t)},\\
S(x)^2 + C(x)^2 =& \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}\frac{|u(t)|^2}{\Im u(t)} - 2\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{\Re u(t)}{\Im u(t)} + \frac{1}{\Im u(t)}.
\end{aligned}$$

Für die erste Komponente von $(\cos\phi \ \ \sin\phi)\mathbf{P}(x)$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
&\cos\phi\left(\Re z_0 - \Im z_0\frac{S(x)}{C(x)}\right) + \sin\phi\Im z_0\left(S(x)^2 + C(x)^2\right)\\
=&\frac{\cos\phi\left(-\Im z_0\Re g + \Im g\Re z_0\right) + \sin\phi\Im z_0}{\Im\left(g - z_0 t\sin^2\phi\right)}.
\end{aligned}$$

Für die zweite Komponente ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}
&|z_0|^{-2}\left(-\cos\phi\Im z_0 C(x)^{-2} + \sin\phi\left(\Re z_0 + \Im z_0\frac{S(x)}{C(x)}\right)\right)\\
=&|z_0|^{-2}\sin\phi\frac{-\Im z_0\Re g + \Re z_0\Im g}{\Im\left(g - z_0 t\sin^2\phi\right)}.
\end{aligned}$$

Für $\sin\phi = 0$ erhalten wir für $x > l$:

$$w_{22}(x, z_0) = z_0 t w_0 + w_1, \quad w_{21}(x, z_0) = w_0.$$

Aus $g = \frac{w_1}{w_0}$ folgen die Beziehungen:

$$C(x)^2 = -\Im z_0 t - \Im g, \quad S(x)C(x) = -\Re z_0 t - \Re g$$

und

$$\Re z_0 - \Im z_0\frac{S(x)}{C(x)} = \frac{-\Im z_0\Re g + \Re z_0\Im g}{\Im\left(g + z_0 t\right)}, \quad -\frac{\Im z_0}{|z_0|^2 C(x)^2} = |z_0|^{-2}\frac{\Im z_0}{\Im\left(g + z_0 t\right)}.$$

Durch die Betrachtung der erhaltenen Ausdrücke für $(\cos\phi \ \ \sin\phi)\mathbf{P}(x)$ ist die Beziehung (3.28) offensichtlich.

Damit ist bewiesen, daß in diesem Fall $l^\bullet < \infty$ gilt. Als nächstes werden wir die Beziehung (3.26) unter der Voraussetzung zeigen, daß $(l^\bullet, \infty)$ ein H-unteilbares Intervall vom Typ $\phi^\bullet$ mit $\cot\phi^\bullet = |z_0|^2\cot\phi$ ist.

Zunächst sei $\sin\phi \neq 0$:

Mit $t(x) := |z_0|^2 S(x)C(x)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A(x,z)t(x)+B(x,z) &= \left(|z_0|^2 - z\Re z_0\right) S(x)C(x) + z\Im z_0 C(x)^2 \\
C(x,z)t(x)+D(x,z) &= |z_0|^2 - z\Re z_0 \\
\frac{A(x,z)t(x)+B(x,z)}{C(x,z)t(x)+D(x,z)} &= S(x)C(x) + \frac{z\Im z_0 C(x)^2}{|z_0|^2 - z\Re z_0}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{w_{11}(x,z)(A(x,z)t(x)+B(x,z)) + w_{12}(x,z)(C(x,z)t(x)+D(x,z))}{w_{21}(x,z)(A(x,z)t(x)+B(x,z)) + w_{22}(x,z)(C(x,z)t(x)+D(x,z))}$$

$$= \frac{\dfrac{w_{11}(x,z)S(x)C(x)+w_{12}(x,z)}{w_{21}(x,z)S(x)C(x)+w_{22}(x,z)} + \dfrac{w_{11}(x,z)}{w_{21}(x,z)} \dfrac{z\Im z_0}{|z_0|^2 - z\Re z_0} \dfrac{C(x)^2}{S(x)C(x)+\frac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}}}{1 + \dfrac{z\Im z_0}{|z_0|^2 - z\Re z_0} \dfrac{C(x)^2}{S(x)C(x)+\frac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}}}.$$

Wir untersuchen nun das Grenzverhalten von

$$\frac{C(x)^2}{S(x)C(x)+\dfrac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}} \quad \text{für} \quad x \to \infty :$$

Mit der Beziehung (3.31) folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{C(x)^2}{S(x)C(x)+\dfrac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}} &= \frac{-\dfrac{1}{2i}\left(-\dfrac{1}{z_0 \sin^2\phi} + \dfrac{1}{\bar{z}_0 \sin^2\phi}\right)}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z_0 \sin^2\phi} + \dfrac{1}{\bar{z}_0 \sin^2\phi}\right) - \dfrac{1}{z \sin^2\phi}} \\
&= \frac{z\Im z_0}{|z_0|^2 - z\Re z_0}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x\to\infty} t(x) = |z_0|^2 \cot\phi := \cot\phi^\bullet$$

ergibt sich aus (3.27):

$$\begin{aligned}
\frac{w^\bullet_{11}(l^\bullet,z)\cot\phi^\bullet + w^\bullet_{12}(l^\bullet,z)}{w^\bullet_{21}(l^\bullet,z)\cot\phi^\bullet + w^\bullet_{22}(l^\bullet,z)} &= G(z)^{-1} \frac{Q(z) + Q(z)\left(\dfrac{z\Im z_0}{|z_0|^2 - z\Re z_0}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{z\Im z_0}{|z_0|^2 - z\Re z_0}\right)^2} + s_0 z \\
&= G(z)^{-1}Q(z) + s_0 z.
\end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, daß $(l^\bullet, \infty)$ ein $\mathbf{H}^\bullet$-unteilbares Intervall vom Typ $\phi^\bullet$ sein muß, damit sich (3.26) ergibt.

Nun sei $\sin\phi = 0$. Wir betrachten

$$\frac{w_{11}^\bullet(x^\bullet,z)}{w_{21}^\bullet(x^\bullet,z)} = G(z)^{-1} \frac{\dfrac{w_{11}(x,z)}{w_{21}(x,z)}A(x,z) + \dfrac{w_{12}(x,z)}{w_{22}(x,z)}\dfrac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}C(x,z)}{A(x,z) + \dfrac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}C(x,z)} + s_0 z.$$

Mit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)C(x)}{C(x)^2} = \frac{\Re z_0}{\Im z_0} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{w_{22}(x,z)}{w_{21}(x,z)}C(x,z) = \frac{z^2}{|z_0|^2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{w_{11}^\bullet(l^\bullet,z)}{w_{21}^\bullet(l^\bullet,z)} =& G(z)^{-1} \frac{Q(z)\left(1 - \dfrac{z\Re z_0}{|z_0|^2} + \dfrac{z^2}{|z_0|^2}\right)}{1 - \dfrac{z\Re z_0}{|z_0|^2} + \dfrac{z^2}{|z_0|^2}} + s_0 z \\ =& G(z)^{-1}Q(z) + s_0 z,\end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, daß $(l^\bullet, \infty)$ $\mathbf{H}^\bullet$-unteilbar vom Typ 0 sein muß, damit (3.26) gilt.

Insbesondere wurde gezeigt, daß die Beziehungen (3.21)–(3.26) für Spektralmaße gelten, deren Träger eine endliche Punktmenge ist. Ein kanonisches System mit einem derartigen Spektralmaß wird mit einem H-unteilbaren Intervall beendet.

Zu einem kanonischen System mit den für diese Regel geforderten Eigenschaften werden wir nun mit einem in [dB2] S.151 benutzten Stetigkeitsprinzip zeigen, daß die Beziehungen (3.21)–(3.25) und die Beziehung (3.26) miteinander verträglich sind. Dazu wird dieses kanonische System in einem bestimmten Sinn durch Systeme approximiert, für die diese Beziehungen bereits gelten.

In [dB2] wird gezeigt, daß zu einem kanonischen System mit einem Hamiltonian $\mathbf{H}$, einem Weylschen Koeffizienten Q und dem Matrizanten $\mathbf{W}$ eine Folge kanonischer Systeme mit Spektralmaßen σ_n mit endlichem Träger existiert, so daß die Weylschen Koeffizienten Q_n dieser Folge gegen $Q(z)$ lokal gleichmäßig in C^+ konvergieren. Weiter gilt $\mathbf{H}_n \to \mathbf{H}$ in folgendem Sinne: Für beschränkte Mengen $B \subset [0,\infty)$ gilt

$$\int_a^x \mathbf{H}_n(t)dt \to \int_a^x \mathbf{H}(t)dt \quad \text{gleichmäßig für} \quad x \in B. \tag{3.32}$$

Für festes x konvergiert $\mathbf{W}_n(x,z)$ lokal gleichmäßig in C gegen $\mathbf{W}(x,z)$. Werden die Weylschen Koeffizienten gemäß (3.26) transformiert, so folgt unmittelbar $Q_n^\bullet \to$

$Q^\bullet$. Aus der Konvergenz der Matrizanten folgt $\mathbf{P}_n(x) \to \mathbf{P}(x)$ punktweise. Damit folgt $\mathbf{P}_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}^T \mathbf{H} \mathbf{P}$ im Sinne von (3.32). Für den zu $Q_n^\bullet$ geh"orenden Hamiltonian $\mathbf{H}_n^\bullet$ gilt die Beziehung (3.24). Weiter konvergiert $\mathbf{H}_n^\bullet$ gegen $\mathbf{H}^\bullet$ im Sinne von (3.32). Daraus erhalten wir die Beziehung (3.24) mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}^\bullet$, was zu zeigen war.

■

Setzen wir $z_0 = iy$, so k"onnen wir für $y \to 0$ eine weitere Transformationsregel aus der Regel 5 ableiten.
Unter Beachtung von

$$\lim_{y\to 0} -\Re\left(\frac{w_{22}(x,iy)}{w_{21}(x,iy)}\right) = \frac{2\int\limits_0^x \int_0^t h_{22}(s)ds h_{12}(t)dt}{\left(\int\limits_0^x h_{22}(t)dt\right)^2} \tag{3.33}$$

und

$$\lim_{y\to 0} -y\Im\left(\frac{w_{22}(x,iy)}{w_{21}(x,iy)}\right) = -\int\limits_0^x h_{22}(t)dt \tag{3.34}$$

erhalten wir mit

$$M(x) := \int\limits_0^x h_{22}(t)dt \quad \text{und} \quad K(x) := 2\int\limits_0^x M(t)h_{12}(t)dt \tag{3.35}$$

die folgenden Beziehungen:

Regel 6: Gegeben sei ein kanonisches System mit dem Hamiltonian $\mathbf{H}$, dem Matrizanten $\mathbf{W}$, dem Weylschen Koeffizienten Q und dem Spektralmaß σ.

Es gelte $s_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma < \infty$ und $\mathbf{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $0 \le x \le s_0^{-1}$.

Für $x \ge s_0^{-1}$ gilt:

Durch

$$\mathbf{P}(x) := \begin{pmatrix} 0 & M(x) \\ -M(x)^{-1} & -K(x)M(x)^{-1} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet := \mathbf{P}(x)^T \mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)dx \tag{3.37}$$

$$x^\bullet(x) = tr\left(\int_{s_0^{-1}}^x \mathbf{P}(t)^T \mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t)dt\right) \quad l^\bullet := \lim_{x\to\infty} x^\bullet(x) \tag{3.38}$$

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) := \begin{pmatrix} 1 & s_0 z^{-1} \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,z) \begin{pmatrix} 1 + zK(x)M(x)^{-1} & -zM(x)^{-1} \\ zM(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

ist ein kanonisches System auf $[0, l^\bullet)$ gegeben.

Für $l^\bullet < \infty$ sei $(l^\bullet, \infty)$ ein H-unteilbares Intervall vom Typ $\frac{\pi}{2}$.

Dann gilt

$$Q^\bullet(z) = s_0 z + z^2 Q(z) \quad d\sigma^\bullet(\lambda) = \lambda^2 d\sigma. \tag{3.40}$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß durch (3.35)-(3.39) ein kanonisches System auf $[0, l^\bullet)$ gegeben ist.

Aus der Beziehung

$$\mathbf{J}\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} -h_{22}(x)M(x)^{-2} & 2h_{12}(x) - h_{22}(x)K(x)M(x)^{-2} \\ 0 & h_{22}(x) \end{pmatrix}$$

folgt durch eine leichte Rechnung

$$-\mathbf{H}(x)\mathbf{J}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{J} + \mathbf{J}\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}(x)^T\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x).$$

Daraus erhalten wir mit $\mathbf{R}(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\mathbf{J}\mathbf{P}(x)\mathbf{J}$ und $\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^T = \mathbf{J}$:

$$-\mathbf{H}(x)\mathbf{J}\mathbf{R}(x,z) + \mathbf{J}\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x)\mathbf{J} = -\mathbf{R}(x,z)\mathbf{P}(x)^T\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)\mathbf{J},$$

woraus sich

$$(d\mathbf{W}(x,z))\,\mathbf{R}(x,z) + \mathbf{W}(x,z)d\mathbf{R}(x,z) = -z\mathbf{W}(x,z)\mathbf{R}(x,z)\mathbf{P}(x)^T\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)\mathbf{J}dx$$

ergibt. Dieser Ausdruck ist zu der Beziehung

$$d\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = -z\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z)\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)\mathbf{J}dx^\bullet$$

äquivalent.

Aus (3.39) folgt

$$\frac{w_{12}^\bullet(x^\bullet, z)}{w_{22}^\bullet(x^\bullet, z)} = z^2\frac{w_{11}(x,z)}{w_{21}(x,z)} + s_0 z.$$

Gilt $l^\bullet < \infty$, erhalten wir

$$\frac{w_{12}^\bullet(l^\bullet, z)}{w_{22}^\bullet(l^\bullet, z)} = z^2 Q(z) + s_0 z,$$

woraus ersichtlich ist, daß das Intervall $(l^\bullet, \infty)$ vom Typ $\frac{\pi}{2}$ sein muß, damit (3.40) gilt.

■

Insbesondere folgt aus (3.37) die Beziehung

$$\int_0^{x^\bullet} h_{11}^\bullet(t)dt = \int_{s_0^{-1}}^{x} M(t)^{-2} h_{22}(t)dt = -M(x)^{-1} + s_0.$$

Mit $s_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma^\bullet(\lambda)}{\lambda^2} + \sigma([0])$ und $\lim_{x\to\infty} M(x)^{-1} = \sigma([0])$ erhalten wir damit die Beziehung

$$\int_0^{l^\bullet} h_{11}^\bullet(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma^\bullet(\lambda)}{\lambda^2}. \tag{3.41}$$

Durch eine Rücktransformation der Regel 5 ergibt sich eine weitere Transformationsregel. Aus (3.25) folgt nämlich:

$$w_{12}^\bullet(x^\bullet, z) - s_0 z w_{22}^\bullet(x^\bullet, z) = w_{11}(x, z)B(x, z) + w_{12}(x, z)D(x, z)$$

$$w_{11}^\bullet(x^\bullet, z) - s_0 z w_{21}^\bullet(x^\bullet, z) = w_{11}(x, z)A(x, z) + w_{12}(x, z)C(x, z)$$

Wegen $\det \mathbf{R}(x, z_0) = G(z_0)^{-1} = 0$ gilt

$$\frac{B(x, z_0)}{A(x, z_0)} = \frac{D(x, z_0)}{C(x, z_0)} = |z_0|^2 \left(iC(x)^2 - S(x)C(x)\right),$$

und wir erhalten folgende Ausdrücke für $C(x)^2$ und $S(x)C(x)$ im transformierten System:

$$\begin{aligned} C(x)^2 =& \frac{1}{|z_0|^2} \Im \left(\frac{w_{12}^\bullet(x^\bullet, z_0) - s_0 z_0 w_{22}^\bullet(x^\bullet, z_0)}{w_{11}^\bullet(x^\bullet, z_0) - s_0 z_0 w_{21}^\bullet(x^\bullet, z_0)} \right) \\ S(x)C(x) =& -\frac{1}{|z_0|^2} \Re \left(\frac{w_{12}^\bullet(x^\bullet, z_0) - s_0 z_0 w_{22}^\bullet(x^\bullet, z_0)}{w_{11}^\bullet(x^\bullet, z_0) - s_0 z_0 w_{21}^\bullet(x^\bullet, z_0)} \right). \end{aligned}$$

Indem man in (3.22)-(3.26) das gegebene kanonische System durch das transformierte System ausdrückt, ergibt sich folgende Regel:

Regel 7: Gegeben sei ein kanonisches System mit einem Spektralmaß σ. Es sei

$$s_0 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (|z_0|^2 - 2\Re z_0 \lambda + \lambda^2)^{-1} d\sigma.$$

(Wegen (1.34) gilt $s_0 < \infty$.) Durch eine einfache Transformation gemäß Lemma 2.4 sei das lineare Glied des Weylschen Koeffizienten Q so gewählt, daß die durch

$$Q^\bullet(z) = G(z)\left(Q(z) - s_0 z\right) \tag{3.42}$$

bestimmte Funktion $Q^\bullet$ eine Nevanlinnafunktion ist. (Aufgrund der Beziehung (3.20) ist eine derartige Wahl des linearen Gliedes stets m"oglich.) Für die Spektralmaße σ von Q und $\sigma^\bullet$ von $Q^\bullet$ gilt dann:

$$d\sigma^\bullet(\lambda) = \left(|z_0|^2 - 2\Re z_0 \lambda + \lambda^2\right)^{-1} d\sigma. \tag{3.43}$$

Für $0 \leq x^\bullet \leq s_0^{-1}$ gelte

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zx^\bullet & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}^\bullet(x^\bullet) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch die Beziehungen

$$C(x)^2 = \frac{1}{|z_0|^2} \Im \left(\frac{w_{12}(x, z_0) - s_0 z_0 w_{22}(x, z_0)}{w_{11}(x, z_0) - s_0 z_0 w_{21}(x, z_0)} \right) \tag{3.44}$$

$$S(x)C(x) = -\frac{1}{|z_0|^2} \Re \left(\frac{w_{12}(x, z_0) - s_0 z_0 w_{22}(x, z_0)}{w_{11}(x, z_0) - s_0 z_0 w_{21}(x, z_0)} \right) \tag{3.45}$$

$$\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{|z_0|^2} \left(\Re z_0 + \Im z_0 \frac{S(x)}{C(x)} \right) & \frac{\Im z_0}{|z_0|^2 C(x)^2} \\ -\Im z_0 \left(S(x)^2 + C(x)^2 \right) & \Re z_0 - \Im z_0 \frac{S(x)}{C(x)} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet) dx^\bullet = \mathbf{P}(x)^T \mathbf{H}(x) \mathbf{P}(x) dx \tag{3.46}$$

$$x^\bullet(x) = s_0^{-1} + tr \left(\int_0^x \mathbf{P}(t)^T \mathbf{H}(t) \mathbf{P}(t) dt \right) \tag{3.47}$$

$$\mathbf{R}(x, z) = \begin{pmatrix} |z_0|^2 + z \left(-\Re z_0 + \Im z_0 \frac{S(x)}{C(x)} \right) & -z \Im z_0 \left(S(x)^2 + C(x)^2 \right) \\ \frac{z \Im z_0}{|z_0|^2 C(x)^2} & 1 - \frac{z}{|z_0|^2} \left(\Re z_0 + \Im z_0 \frac{S(x)}{C(x)} \right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = \begin{pmatrix} G(z) & -s_0 z G(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x, z) \mathbf{R}(x, z) \tag{3.48}$$

wird ein kanonisches System bestimmt, das mit (3.42) verträglich ist. Setzen wir $z_0 = iy$, so ergibt sich für $y \to 0$ eine weitere Transformationsregel.

Regel 8: Es gelte

$$s_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\lambda^2} < \infty.$$

Mit

$$L(x) = s_0 - \int_0^x h_{11}(t) dt \quad \text{und} \quad B(x) = 2 \int_0^x L(t) h_{12}(t) dt$$

sei

$$\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} B(x)L(x)^{-1} & -L(x)^{-1} \\ L(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}^\bullet(x^\bullet)dx^\bullet = \mathbf{P}(x)^T\mathbf{H}(x)\mathbf{P}(x)dx$$

$$x^\bullet(x) = s_0^{-1} + tr\left(\int_0^x \mathbf{P}(t)^T\mathbf{H}(t)\mathbf{P}(t)dt\right)$$

$$\mathbf{W}^\bullet(x^\bullet, z) = \begin{pmatrix} z^{-2} & -s_0z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}(x,z) \begin{pmatrix} 0 & zL(x) \\ -zL(x)^{-1} & 1 - zB(x)L(x)^{-1} \end{pmatrix}$$

Im Sinne der Umkehrung von Regel 6 gilt dann

$$Q^\bullet(z) = z^{-2}\left(Q(z) - s_0z\right) \quad d\sigma^\bullet(\lambda) = \lambda^{-2}d\sigma$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß auf $[0, l^\bullet)$ ein kanonisches System gegeben ist. Mit der Beziehung

$$\mathbf{J}\frac{d}{dx}\mathbf{P}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & 0 \\ 2h_{12}(x) + \dfrac{B(x)h_{11}(x)}{L(x)^2} & -\dfrac{h_{11}(x)}{L(x)^2} \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

[AG] Achieser, N.I., Glasmann, I.M. *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert–Raum.* Akademie–Verlag, Berlin, 1954.

[Ak] Akhiezer, N.I. *The Classical Moment Problem.* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1965.

[At] Atkinson, F.V. *Discrete and Continuous Boundary Problems.* Academic Press, New York, 1964.

[Bo] Boas, R. *Entire Functions.* Academic Press, New York, 1964.

[dB1-4] de Branges, L. "Some Hilbert spaces of entire functions." *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), 259–295; **99** (1961), 118–152; **100** (1960), 73–115; **105** (1962), 43–83.

[DM] Dym, H., McKean, H.P. *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem.* Academic Press, New York, 1976.

[Ka] Kac, I.S. "Linear relations, generated by a canonical differential equation on an interval with a regular endpoint, and expansibility in eigenfunctions" (Russian). Odessa, 1984.

[K1] Krein, M.G. "On Hermitian operators with directing functionals " (Ukrainian). *Sbirnik Prc Institutu Matematiki AN URSR* **10** (1948), 83-106.

[K2] Krein, M.G. "On a generalization of investigations of Stieltjes" (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **87** (1952), 881-884.

[K3] Krein, M.G. "On some cases of the effective determination of the density of a non-homogeneous string from its spectral funktion" (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **93** (1953), 617-620.

[K4] Krein, M.G. "On a fundamental approximation problem in the theory of extrapolation and filtration of stationary random processes" (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **94** (1954), 13-16.

[KK] Kac, I.S., Krein, M.G. "On the spectral functions of the string." *Amer. Math. Soc. Transl.* (2), **103** (1974), 19-102.

[KL] Krein, M.G., Langer H. "Continuation of Hermitian positive definite functions and related questions". unver"offentlichtes Manuskript

[Pe] Perron, O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1929.