



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

STURM-LIOUVILLE-OPERATOREN MIT MASSWERTIGEN KOEFFIZIENTEN  
UND DIE SPEKTRALASYMPTOTIK DES  $\mu$ - $\nu$ -LAPLACE-OPERATORS

Ausgeführt am Institut für  
Analysis und Scientific Computing  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von  
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald Woracek

durch  
Arpad Pinter, B.Sc.

Wiener Straße 29,  
3170 Hainfeld

Wien, am 26. September 2013

## Einleitung

In den 1830er Jahren begannen die beiden Mathematiker J. Sturm<sup>1</sup> und J. Liouville<sup>2</sup> sich mit Differentialgleichungen der Form

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x), \quad x \in (a, b), \quad (\text{SL})$$

auseinanderzusetzen. In einer Reihe von Artikeln erschufen sie einen ganz neuen, systematischen Zugang zu einer Klasse von gewöhnlichen Differentialgleichungen, der einen immensen Einfluss auf die damalige mathematische Gesellschaft hatte. Ihre Arbeit war ein Meilenstein in der Analysis und durch sie entwickelte sich ein ganzes neues Gebiet in der Mathematik, das als Sturm-Liouville-Theorie bekannt geworden ist.

Die Theorie behandelt die allgemeine reelle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form (SL), die auch als Sturm-Liouville-Differentialgleichung bezeichnet wird, mit gewissen vorgegebenen Randbedingungen. Am häufigsten werden getrennte Randbedingungen der Form

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot y(a) + \sin \alpha \cdot (py')(a) &= 0 \\ \cos \beta \cdot y(b) + \sin \beta \cdot (py')(b) &= 0 \end{aligned}$$

mit gewissen Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  betrachtet.

Die Koeffizienten  $p$ ,  $q$  und  $r$  sind dabei reellwertige Funktionen, sodass  $\frac{1}{p}$ ,  $q$  und  $r$  lokal integrierbar bzgl. dem Lebesguemaß sind und die Gewichtsfunktion  $r$  fast überall strikt positiv ist. Dieses Eigenwertproblem, das Sturm-Liouville-Problem, beschäftigt sich mit der Frage, für welche komplexen Spektralparameter  $\lambda$  eine nicht-triviale Lösung des Randwertproblems existiert. Solche  $\lambda$  bezeichnet man als Eigenwerte, die dazugehörigen nicht-trivialen Lösungen als Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda$ .

Wenn man den Differentialoperator  $L$  einführt, der durch

$$Lf := \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dx} \left( p \frac{df}{dx} \right) + qf \right)$$

definiert wird, lässt sich die Sturm-Liouville-Theorie aus einem funktionalanalytischen Blickwinkel betrachten und es können viele interessante Aussagen über den sogenannten Sturm-Liouville-Operator  $L$  getroffen werden.

Mittlerweile gibt es zahlreiche Modifikationen und Verallgemeinerungen des Sturm-Liouville-Problems, um die in der heutigen angewandten Mathematik und der mathematischen Physik aufgeworfenen Aufgaben lösen zu können.

In dieser Arbeit werden wir das Sturm-Liouville-Problem (SL) verallgemeinern, indem wir die lokal integrierbaren Koeffizienten  $p$ ,  $q$  und  $r$  durch maßwertige ersetzen. Wir werden uns auf den folgenden Sturm-Liouville-Operator konzentrieren

$$Tf := \frac{d}{d\rho} \left( -\frac{df}{d\varsigma} + \int f d\chi \right),$$

---

<sup>1</sup>Jacques Charles François Sturm (1803 - 1855)

<sup>2</sup>Joseph Liouville (1809 - 1882)

wobei  $\rho$ ,  $\varsigma$  und  $\chi$  gewisse Borelmaße sind und  $\frac{d}{d\rho}$  bzw.  $\frac{d}{d\chi}$  die Radon-Nikodym-Ableitung einer Funktion nach dem entsprechenden Maß ist. Da beim Operator  $T$  keine Koeffizienten  $p$ ,  $q$  und  $r$  auftreten, interpretieren wir stattdessen  $\rho$ ,  $\varsigma$  und  $\chi$  als maßwertige Koeffizienten.

Auf den ersten Blick erkennt man vielleicht nicht sofort, in welchem Zusammenhang dieser Operator tatsächlich mit dem klassischen Sturm-Liouville-Operator  $L$  steht. Jedoch wird sich herausstellen, dass  $L$  nur ein Spezialfall des von uns betrachteten Operators ist, und zwar durch eine geeignete Wahl der Maße.

Falls der Leser sich bis jetzt noch nicht abschrecken ließ, möchte ich an dieser Stelle noch einen kurzen Überblick über den Inhalt und den Aufbau dieser Arbeit machen. Das erste Kapitel dient als Einführung für die verwendete Notation und die Erklärung der grundlegenden Konzepte, die später durchgehend verwendet werden. Besonders auf das Unterkapitel über lineare Relationen möchte ich hinweisen, da wir in der späteren Arbeit sehr stark davon Verwendung machen werden. Für eine genauere Theorie über lineare Relationen verweise ich auf das Skriptum aus „Funktionalanalysis 2“ an der TU Wien [7] bzw. auf [4].

Das zweite Kapitel behandelt Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, bei denen statt klassischer Ableitungen Radon-Nikodym-Ableitungen nach positiven Borelmaßen betrachtet werden. Unter gewissen Voraussetzungen erhalten wir die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung eines solchen Anfangswertproblems und zeigen noch weitere Aussagen über die Regularität der Lösung. Die Aussagen und Beweise dieses Kapitels stammen aus [1, Appendix. A].

Im dritten Kapitel folgen wir ebenfalls der Vorgangsweise der Arbeit von Eckhardt und Teschl [1]. Wir führen den Sturm-Liouville-Operator  $T$  ein und verwenden die Resultate aus dem zweiten Kapitel, um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems mit  $T$  zu erhalten. Um das Rand- bzw. Eigenwertproblem für  $T$  lösen zu können, fassen wir  $T$  als lineare Relation auf. Wir führen die minimale und die maximale Relation zu  $T$  ein und suchen Randbedingungen für den Sturm-Liouville-Operator  $T$ , sodass die entsprechende lineare Relation selbstadjungiert ist. Bei getrennten Randbedingungen lösen wir das Rand- bzw. Eigenwertproblem und finden einige Aussagen über die Eigenschaften des Lösungsoperators und die Eigenwerte der entsprechenden selbstadjungierten linearen Relation.

Im abschließenden vierten Kapitel verwenden wir die Resultate aus der Dissertation von Uta Freiberg [2]. Indem wir das Maß  $\chi \equiv 0$  wählen, erhalten wir den  $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operator  $\Delta_{\mu,\nu}$ , der ein Spezialfall des im dritten Kapitel behandelten Sturm-Liouville-Operators ist. Speziell betrachten wir diesen Operator mit Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen und erhalten, dass die Eigenwerte von  $-\Delta_{\mu,\nu}$  nicht-negativ sind und eine aufsteigende Folge gegen unendlich bilden. Zum Schluss dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit der Fragestellung, falls  $\mu$  ein selbstähnliches Maß ist und  $\nu$  gewisse Homogenitätsbedingungen erfüllt, wie das asymptotische Verhalten der Eigenwerte beeinflusst wird.

Abschließend möchte ich mich noch bei meinen Professoren Harald Woracek und Michael Kaltenböck bedanken, dass sie mein Interesse an der Analysis geweckt haben. Ihre mathematische Präzision hat mich stets inspiriert und motiviert. Ihre zahlreichen Vorlesungen, die ich während meines Studiums besuchen konnte, haben mich immer sehr fasziniert und mein mathematisches Wissen gefördert. Danke!

Arpad Pinter

Wien, am 26. September 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen und Notation</b>	<b>1</b>
1.1	Maße, integrierbare und absolut stetige Funktionen . . . . .	1
1.2	Klassen von Operatoren . . . . .	4
1.3	Lineare Relationen . . . . .	6
1.4	Wichtige Resultate . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Anfangswertprobleme mit Radon-Nikodym-Ableitung</b>	<b>12</b>
2.1	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	12
2.2	Regularitätsaussagen . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Sturm-Liouville-Operatoren mit maßwertigen Koeffizienten</b>	<b>20</b>
3.1	Der Sturm-Liouville-Differentialausdruck . . . . .	20
3.2	Die minimale und maximale Relation $T_{\min}$ und $T_{\max}$ . . . . .	30
3.3	Weyls Alternative . . . . .	40
3.4	Selbstadjungierte lineare Relationen . . . . .	42
3.5	Randbedingungen für selbstadjungierte lineare Relationen . . . . .	43
3.6	Eigenschaften selbstadjungierter Sturm-Liouville-Relationen . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Die Spektralasymptotik des <math>\mu</math>-<math>\nu</math>-Laplace-Operators</b>	<b>54</b>
4.1	Der $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operators . . . . .	54
4.2	Vorbemerkungen zu selbstähnlichen Mengen und Maßen . . . . .	58
4.3	Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte des $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operators . . . . .	60

# 1 Grundlagen und Notation

## 1.1 Maße, integrierbare und absolut stetige Funktionen

### 1.1.1 Positive, signierte und komplexe Maße

Sei  $\Omega$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ . Das Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$  bezeichnen wir als Messraum.

Ein positives Maß  $\mu$  auf dem Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist eine Mengenfunktion  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , die  $\mu(\emptyset) = 0$  erfüllt und  $\sigma$ -additiv<sup>3</sup> ist. Die erste Eigenschaft ist äquivalent zur Existenz einer Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) < \infty$ . Damit wird gerade der Fall  $\mu \equiv \infty$  ausgeschlossen.

Ein positives Maß  $\mu$  heißt endlich, wenn  $\mu(\Omega) < \infty$  ist. Falls sogar  $\mu(\Omega) = 1$  ist, dann nennen wir  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Ein signiertes Maß  $\mu$  auf dem Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist eine Mengenfunktion  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty)$  bzw.  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow (-\infty, \infty]$ , die  $\mu(\emptyset) = 0$  erfüllt und  $\sigma$ -additiv ist. Man beachte, dass signierte Maße maximal einen der Werte  $\infty$  und  $-\infty$  annehmen.

Ein komplexes Maß  $\mu$  auf dem Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist eine Mengenfunktion  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , die  $\sigma$ -additiv ist. Bei komplexen Maßen folgt die Eigenschaft  $\mu(\emptyset) = 0$  bereits aus der  $\sigma$ -Additivität, da komplexe Maße den Wert  $\infty$  nicht annehmen.

Für ein signiertes (oder komplexes) Maß  $\mu$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  bezeichnen wir mit  $|\mu|$  die Variation von  $\mu$ , die durch

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \text{ für eine paarweise disjunkte Folge } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \right\}.$$

$|\mu|$  ist dann ein endliches positives Maß.

Für ein positives (signiertes oder komplexes) Maß  $\mu$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  sagen wir, dass eine Eigenschaft  $\mu$ -fast überall gilt, wenn die Ausnahmemenge  $N \in \mathcal{A}$ , die diese Eigenschaft nicht erfüllt, eine  $|\mu|$ -Nullmenge ist, d.h.  $|\mu|(N) = 0$ .

Ein positives (signiertes oder komplexes) Maß  $\nu$  ist absolut stetig bzgl. eines anderen positiven (signierten oder komplexen) Maßes  $\mu$ , wenn für alle Mengen  $A \in \mathcal{A}$  mit  $|\mu|(A) = 0$  folgt, dass  $\nu(A) = 0$ . In Zeichen schreiben wir dann  $\mu \ll \nu$ .

Ein positives (signiertes oder komplexes) Maß  $\mu$  heißt atomlos, wenn  $\mu(\{\omega\}) = 0$  für alle  $\omega \in \Omega$  gilt.

---

<sup>3</sup> $\sigma$ -Additivität: Ein Maß  $\mu$  auf dem Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  heißt  $\sigma$ -additiv, falls für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{A}$  die folgende Gleichheit gilt

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

### 1.1.2 Borelmaße

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Hausdorffraum. Mit  $\mathfrak{B}(X)$  bezeichnen wir die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $X$ , die von den Mengen aus  $\mathcal{T}$  erzeugt wird.

Unter einem positiven (signierten oder komplexen) Borelmaß  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{T})$  verstehen wir ein positives (signiertes oder komplexes) Maß auf  $(X, \mathfrak{B}(X))$ , das lokal endlich<sup>4</sup> ist.

Ist der topologische Hausdorffraum  $(X, \mathcal{T})$  zusätzlich lokalkompakt<sup>5</sup>, dann ist die lokale Endlichkeit eines Borelmaßes  $\mu$  äquivalent zur Eigenschaft, dass  $\mu(K) < \infty$  für alle kompakten Mengen  $K \subseteq X$  gilt.

Der Träger eines positiven Borelmaßes  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{T})$  wird als die Menge

$$\text{supp}(\mu) := \{x \in X \mid \forall U_x \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in U_x: \mu(U_x) > 0\}$$

definiert.

Sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes, reelles Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $\mu$  ein positives (signiertes oder komplexes) Borelmaß auf  $[a, b]$ .

Dann heißt eine Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Verteilungsfunktion<sup>6</sup> von  $\mu$ , wenn

$$\mu([c, d]) = F(d) - F(c)$$

für alle  $c, d \in [a, b]$ ,  $c < d$ , gilt.

Jedes Maß besitzt eine Verteilungsfunktion, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

### 1.1.3 Integrierbare Funktionen

Sei  $X$  eine Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt Borel-messbar oder kurz messbar, wenn alle Urbilder von Borelmengen unter  $f$  wieder Borelmengen sind, d.h.  $f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(X)$  für alle  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$ .

Sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes, reelles Intervall mit  $-\infty < a < b < \infty$  und  $\mu$  ein positives Borelmaß auf  $[a, b]$ .

Eine messbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt integrierbar bzgl.  $\mu$ , wenn  $\int_{[a, b]} |f(t)| d\mu(t) < \infty$  gilt.

Die Menge  $L^1([a, b], \mu)$  bezeichnet dann die Menge aller integrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  bzgl. dem Maß  $\mu$ .

Für ein signiertes (oder komplexes) Borelmaß  $\mu$  auf  $[a, b]$  nennen wir eine messbare Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar bzgl.  $\mu$ , wenn  $f$  integrierbar bzgl.  $|\mu|$  ist. Die Menge  $L^1([a, b], \mu)$  bezeichnet dann wieder die Menge aller integrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  bzgl. dem signierten (oder komplexen) Maß  $\mu$ . Außerdem gilt  $L^1([a, b], \mu) = L^1([a, b], |\mu|)$ .

---

<sup>4</sup>Lokale Endlichkeit: Ein Maß  $\mu$  auf einem topologischen Hausdorffraum  $(X, \mathcal{T})$  heißt lokal endlich, falls für alle  $x \in X$  eine Umgebung  $U \in \mathcal{T}$  mit  $\mu(U) < \infty$  existiert.

<sup>5</sup>Lokal kompakt: Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt lokalkompakt, wenn für jedes  $x \in X$  eine kompakte Umgebung von  $x$  existiert.

<sup>6</sup>Durch diese Definition ist die Verteilungsfunktion eines Maßes  $\mu$  linksstetig. Man beachte jedoch, dass in der Literatur meistens Verteilungsfunktion als rechtsstetig definiert werden bzw. dass für sie die Bedingung  $\mu((c, d]) = F(d) - F(c)$  für alle  $c, d \in [a, b]$ ,  $c < d$ , gelten muss.

### 1.1.4 Lokal integrierbare Funktionen

Sei  $(a, b)$  ein offenes, reelles Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $\mu$  ein positives Borelmaß auf  $(a, b)$ .

Eine messbare Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt lokal integrierbar bzgl.  $\mu$ , wenn für jedes abgeschlossene Intervall  $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$  mit  $\alpha, \beta \in (a, b)$ ,  $\alpha < \beta$ , gilt, dass  $f|_{[\alpha, \beta]}$  integrierbar auf  $[\alpha, \beta]$  bzgl. dem (auf  $[\alpha, \beta]$  eingeschränkten) Maß  $\mu|_{\mathcal{B}([\alpha, \beta])}$  ist, d.h.  $\int_{[\alpha, \beta]} |f(t)| d\mu(t) < \infty$  für alle  $\alpha, \beta \in (a, b)$  mit  $\alpha < \beta$ .

Die Menge  $L^1_{loc}((a, b), \mu)$  bezeichnet dann die Menge aller lokal integrierbaren Funktionen auf  $(a, b)$  bzgl. dem Maß  $\mu$ .

Für ein signiertes (oder komplexes) Borelmaß  $\mu$  auf  $(a, b)$  nennen wir eine messbare Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrierbar bzgl.  $\mu$ , wenn  $f$  lokal integrierbar bzgl.  $|\mu|$  ist. Die Menge  $L^1_{loc}((a, b), \mu)$  bezeichnet dann wieder die Menge aller lokal integrierbaren Funktionen auf  $(a, b)$  bzgl. dem signierten (oder komplexen) Maß  $\mu$ . Außerdem gilt  $L^1_{loc}([a, b], \mu) = L^1_{loc}([a, b], |\mu|)$ .

### 1.1.5 Absolute stetige Funktionen

Sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes, reelles Intervall mit  $-\infty < a < b < \infty$  und  $\mu$  ein positives (signiertes oder komplexes) Borelmaß auf  $[a, b]$ .

Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt absolut stetig bzgl.  $\mu$ , wenn sie eine Verteilungsfunktion eines Maßes  $\nu$  ist, das absolut stetig bzgl.  $\mu$  ist.

Mit der Menge  $AC([a, b], \mu)$  bezeichnen wir nun die Menge aller (linksstetigen) absolut stetigen Funktionen bzgl.  $\mu$ .

Mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym lässt sich zeigen, dass eine Funktion  $f$  genau dann in  $AC([a, b], \mu)$  liegt, wenn ein  $h \in L^1([a, b], \mu)$  existiert, sodass sich  $f$  darstellen lässt als

$$f(x) = \begin{cases} f(c) + \int_{[c, x]} h(t) d\mu(t), & \text{falls } c \leq x \leq b \\ f(c) - \int_{[x, c]} h(t) d\mu(t), & \text{falls } a \leq x < c \end{cases} \quad (1.1.1)$$

für ein beliebiges  $c \in [a, b]$ .

Zur Vereinfachung der Notation werden wir uns auf die folgende Schreibweise für das Integral einigen

$$\int_c^d h(t) d\mu(t) := \begin{cases} \int_{[c, d]} h(t) d\mu(t), & \text{falls } c \leq d \\ -\int_{[d, c]} h(t) d\mu(t), & \text{falls } d < c \end{cases}$$

für beliebige  $c, d \in [a, b]$ .

Für eine Funktion  $f \in AC([a, b], \mu)$  existiert auch immer der rechtsseitige Limes  $f(x+) := \lim_{t \searrow x} f(t)$  für alle  $x \in [a, b)$  und es gilt

$$f(x+) = \begin{cases} f(c) + \int_{[c, x]} h(t) d\mu(t), & \text{falls } c \leq x < b \\ f(c) - \int_{(x, c]} h(t) d\mu(t), & \text{falls } a \leq x \leq c \end{cases}$$

Wegen  $f(x+) = f(x) + h(x)\mu(\{x\})$  für  $x \in [a, b)$  können die Unstetigkeitsstellen von  $f$  nur an jenen Stellen  $x \in [a, b)$  auftreten, bei denen  $\mu(\{x\}) \neq 0$  gilt.

### 1.1.6 Lokal absolut stetige Funktionen

Sei  $(a, b)$  ein offenes, reelles Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $\mu$  ein positives (signiertes oder komplexes) Borelmaß auf  $(a, b)$ .

Eine Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt lokal absolut stetig bzgl.  $\mu$ , wenn für jedes abgeschlossene Intervall  $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$  gilt, dass  $f|_{[\alpha, \beta]}$  absolut stetig auf  $[\alpha, \beta]$  bzgl. dem (auf  $[\alpha, \beta]$  eingeschränkten) Maß  $\mu$  ist.

Mit der Menge  $AC_{loc}((a, b), \mu)$  bezeichnen wir nun die Menge aller (linksstetigen) lokal absolut stetigen Funktionen bzgl.  $\mu$ .

Eine Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  liegt genau dann in  $AC_{loc}((a, b), \mu)$ , wenn eine Funktion  $h \in L^1_{loc}((a, b), \mu)$  existiert, sodass sich  $f$  darstellen lässt als

$$f(x) = \begin{cases} f(c) + \int_{[c, x)} h(t) d\mu(t), & \text{falls } c \leq x < b \\ f(c) - \int_{(x, c]} h(t) d\mu(t), & \text{falls } a < x < c \end{cases}$$

für ein beliebiges  $c \in (a, b)$ .

Genauso wie vorher existiert auch für  $f \in AC_{loc}((a, b), \mu)$  der rechtsseitige Limes  $f(x+)$  und die Unstetigkeitsstellen von  $f$  können nur an jenen Stellen  $x \in (a, b)$  auftreten, bei denen  $\mu(\{x\}) \neq 0$  gilt.

## 1.2 Klassen von Operatoren

### 1.2.1 Beschränkte lineare Operatoren

Seien  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume und  $A: X \rightarrow Y$  ein linearer Operator. Die Operatornorm von  $A$  ist dann definiert durch

$$\|A\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Ist die Operatornorm  $\|A\| < \infty$ , dann nennt man  $A$  einen beschränkten, linearen Operator. Ansonsten heißt  $A$  unbeschränkt.

Die Menge aller beschränkten, linearen Operatoren von  $X$  nach  $Y$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{B}(X, Y)$ . Im Falle  $X = Y$  schreiben wir abkürzend  $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ .

Vorsehen mit der Operatornorm  $\|\cdot\|$  ist  $\mathcal{B}(X, Y)$  selbst ein Banachraum.

### 1.2.2 Kompakte Operatoren

Seien  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume. Eine lineare Abbildung  $K: X \rightarrow Y$  heißt kompakter Operator, wenn das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel  $B_1^X := \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\}$  unter der Abbildung  $K$  relativ kompakt<sup>7</sup> in  $Y$  ist, d.h.  $\overline{K(B_1^X)}$  ist kompakt in  $Y$ .

Äquivalent können wir  $K$  als kompakten Operator definieren, wenn für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  existiert, sodass  $(K(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge ist.

Die Menge aller kompakten linearen Operatoren von  $X$  nach  $Y$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}(X, Y)$ . Falls  $X = Y$  schreiben wir abkürzend  $\mathcal{K}(X) := \mathcal{K}(X, X)$ .

---

<sup>7</sup>Relativ kompakt: Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt relativ kompakt, wenn ihr topologischer Abschluss  $\bar{A}$  in  $X$  kompakt ist.



Jeder kompakte lineare Operator ist auch beschränkt und die Menge der kompakten Operatoren  $\mathcal{K}(X, Y)$  ist ein bzgl. der Operatornorm  $\|\cdot\|$  abgeschlossener linearer Unterraum von  $\mathcal{B}(X, Y)$ . Daher ist  $(\mathcal{K}(X, Y), \|\cdot\|)$  auch ein Banachraum.

### 1.2.3 Nukleare Operatoren

Sei  $H$  ein separabler<sup>8</sup> Hilbertraum. Ein beschränkter, linearer Operator  $R \in \mathcal{B}(H)$  heißt nuklearer Operator oder auch Spurklasseoperator, wenn für eine (und daher für jede) Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $H$  die nukleare Norm bzw. Spurnorm

$$\|R\|_{\text{nuk}} := \sum_{n=1}^{\infty} \langle (R^*R)^{1/2} e_n, e_n \rangle_H$$

endlich ist. Dabei bezeichnet  $R^*$  den adjungierten Operator zu  $R$  und  $A := (R^*R)^{1/2} \in \mathcal{B}(H)$  ist jener eindeutige positive<sup>9</sup> Operator, für den  $A^2 = R^*R$  gilt.

Die Menge aller nuklearen Operatoren auf  $H$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{N}(H)$ . Versehen mit der Spurnorm  $\|\cdot\|_{\text{nuk}}$  ist  $\mathcal{N}(H)$  sogar ein Banachraum.

Jeder nukleare Operator auf  $H$  ist auch kompakt, also gilt

$$\mathcal{N}(H) \subseteq \mathcal{K}(H) \subseteq \mathcal{B}(H).$$

Für einen Operator  $R \in \mathcal{N}(H)$  können wir die Spur  $\text{tr}$  folgendermaßen definieren

$$\text{tr } R := \sum_{n=1}^{\infty} \langle A e_n, e_n \rangle_H,$$

wobei die Reihe absolut konvergiert und unabhängig von der Wahl der gewählten Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Die Spur  $\text{tr}$  ist ein linearer Operator auf  $\mathcal{N}(H)$ , sie ist sogar ein stetiger Operator auf  $\mathcal{N}(H)$  bzgl. der Spurnorm  $\|\cdot\|_{\text{nuk}}$ , d.h.  $|\text{tr } A| \leq \|A\|_{\text{nuk}}$ .

Ist  $A \in \mathcal{N}(H)$  und  $B \in \mathcal{B}(H)$ , dann sind auch  $AB, BA \in \mathcal{N}(H)$  und es gilt

$$\|AB\|_{\text{nuk}} \leq \|A\|_{\text{nuk}} \|B\| \quad \text{und} \quad \|BA\|_{\text{nuk}} \leq \|A\|_{\text{nuk}} \|B\|. \quad (1.2.1)$$

Außerdem gilt  $\|A\| \leq \|A\|_{\text{nuk}}$  für jeden nuklearen Operator  $A \in \mathcal{N}(H)$ .

Ist  $A$  ein selbstadjungierter, kompakter Operator auf  $H$  und bezeichne  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die gemäß ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von  $A$ . Dann ist  $A$  genau dann nuklear, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$  ist. In diesem Fall ist dann  $\text{tr } A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ .

Ist  $A$  ein positiver, selbstadjungierter Operator auf  $H$ , dann ist  $A = (A^*A)^{1/2}$  und daher  $\|A\|_{\text{nuk}} = \text{tr } A$ .

### 1.2.4 Hilbert-Schmidt-Operatoren

Sei  $H$  ein separabler Hilbertraum. Ein beschränkter, linearer Operator  $A \in \mathcal{B}(H)$  heißt Hilbert-Schmidt-Operator, wenn für eine (und daher für jede) Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Hilbert-Schmidt-Norm

$$\|A\|_{HS} := \left( \sum_{n=1}^{\infty} \langle (A^*A) e_n, e_n \rangle_H \right)^{1/2} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|A e_n\|_H^2 \right)^{1/2}$$

<sup>8</sup>Separabel: Ein Hilbertraum  $H$  heißt separabel, wenn  $H$  eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält.

<sup>9</sup>Positivität: Ein selbstadjungierter Operator  $A \in \mathcal{B}(H)$  heißt positiv, wenn  $\langle Ax, x \rangle_H \geq 0$  für alle  $x \in H$ .

endlich ist.

Die Menge aller Hilbert-Schmidt-Operatoren auf  $H$  bezeichnen wir mit  $HS(H)$ .

Für Hilbert-Schmidt-Operatoren  $A, B \in HS(H)$  kann man auch das Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt definieren als

$$\langle A, B \rangle_{HS} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, Be_n \rangle_H,$$

wobei die Reihe unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Versehen mit dem Hilbert-Schmidt-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{HS}$  ist  $HS(H)$  ein Hilbertraum.

Jeder Hilbert-Schmidt-Operator auf  $H$  ist auch kompakt, also gilt

$$HS(H) \subseteq \mathcal{K}(H) \subseteq \mathcal{B}(H).$$

## 1.3 Lineare Relationen

### 1.3.1 Grundlagen

Seien  $X$  und  $Y$  Vektorräume über  $\mathbb{C}$ . Eine lineare Relation  $T$  auf  $X \times Y$  ist nichts anderes als ein linearer Teilraum von  $X \times Y$ , in Zeichen schreiben wir  $T \leq X \times Y$ .

Lineare Relationen verallgemeinern den Begriff der linearen Operatoren, denn jeder lineare Operator kann durch Identifikation mit seinem Graphen als lineare Relation angesehen werden. Sei dazu  $D$  ein linearer Teilraum von  $X$  und  $B: D \rightarrow Y$  ein linearer Operator, dann ist der Graph von  $B$ , den wir hier ebenfalls mit  $B$  bezeichnen, eine lineare Relation  $B \leq X \times Y$ .

Für eine lineare Relation  $T \leq X \times Y$  definieren wir

$$\begin{aligned} \text{dom}(T) &:= \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in T\}, \\ \text{ran}(T) &:= \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in T\}, \\ \text{ker}(T) &:= \{x \in X \mid (x, 0) \in T\}, \\ \text{mul}(T) &:= \{y \in Y \mid (0, y) \in T\}. \end{aligned}$$

Eine lineare Relation ist genau dann ein Operator, genauer der Graph eines Operators, wenn  $\text{mul}(T) = \{0\}$ .

Motiviert durch einen operatortheoretischen Standpunkt wollen wir nun die Addition, die Skalarmultiplikation, die Hintereinanderausführung und die Inversenbildung von linearen Relationen einführen.

Seien dazu  $X, Y, Z$  Vektorräume über  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Skalar,  $T, U \leq X \times Y$  und  $S \leq Y \times Z$  lineare Relationen, dann definieren wir

$$\begin{aligned} T + U &:= \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists y_1, y_2 \in Y : y = y_1 + y_2, (x, y_1) \in T, (x, y_2) \in U\} \\ \lambda T &:= \{(x, y) \in X \times Y \mid \exists y_1 \in Y : y = \lambda y_1, (x, y_1) \in T\} \\ ST &:= \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in T, (y, z) \in S\} \\ T^{-1} &:= \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in T\} \end{aligned}$$

Dabei ist  $ST$  eine lineare Relation auf  $X \times Z$  und  $T^{-1}$  eine auf  $Y \times X$  ist. Außerdem sei noch bemerkt, dass  $\text{dom}(T + U) \subseteq \text{dom}(T) \cap \text{dom}(U)$ ,  $\text{dom}(\lambda T) = \text{dom}(T)$  für  $\lambda \neq 0$ ,  $\text{dom}(ST) \subseteq$

$\text{dom}(T)$  und  $\text{dom}(T^{-1}) = \text{ran}(T)$ .

Man beachte auch, dass die Addition und die Hintereinanderausführung kommutativ sind, d.h. für  $T, U, V \leq X \times Y$  und  $S \leq Y \times Z, R \leq Z \times W$ , wobei  $W, X, Y, Z$  Vektorräume über  $\mathbb{C}$  sind, gilt

$$(T + U) + V = T + (U + V) \quad \text{und} \quad (RS)T = R(ST),$$

jedoch gelten im Allgemeinen die Distributivgesetze nicht. Sei noch zusätzlich  $P \leq Y \times Z$ , dann gilt genauer

$$S(T + U) \supseteq ST + SU \quad \text{und} \quad (P + S)T \subseteq PT + ST.$$

### 1.3.2 Die adjungierte lineare Relation

Von nun an seien  $X$  und  $Y$  Hilberträume mit Skalarprodukten  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ . Der Produktraum  $X \times Y$  versehen mit dem Summenskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times Y}$  ist ebenfalls ein Hilbertraum. Eine lineare Relation  $T \leq X \times Y$  heißt abgeschlossen, falls die Menge  $T$  in  $X \times Y$  bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X \times Y}$  abgeschlossen ist. Der Abschluss einer linearen Relation  $T$  ist wieder eine lineare Relation und wird mit  $\bar{T}$  bezeichnet.

Die Adjungierte einer linearen Relation  $T \leq X \times Y$  ist eine lineare Relation auf  $Y \times X$  und wird definiert als

$$T^* := \{(y, x) \in Y \times X \mid \forall (u, v) \in T: \langle u, x \rangle_X = \langle v, y \rangle_Y\}.$$

Die Adjungierte  $T^*$  von  $T$  ist immer eine abgeschlossene lineare Relation. Außerdem gelten die folgenden Beziehungen

$$T^{**} = \bar{T}, \quad \ker(T^*) = \text{ran}(T)^\perp \quad \text{und} \quad \text{mul}(T^*) = \text{dom}(T)^\perp. \quad (1.3.1)$$

Falls  $S, T \leq X \times Y$  lineare Relationen sind, dann folgt aus  $S \subseteq T$  sofort aus der Definition  $T^* \subseteq S^*$ . Des Weiteren gelten die folgenden Zusammenhänge für  $T \leq X \times Y$  und  $B \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1} \quad \text{und} \quad (T + B)^* = T^* + B^*, \quad (1.3.2)$$

wobei der beschränkte lineare Operator  $B$  als lineare Relation aufgefasst wird.

### 1.3.3 Das Spektrum und die Resolventenmenge

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \leq H \times H$  eine abgeschlossene lineare Relation, dann definieren wir die Resolventenmenge  $\rho(T)$  als die Menge aller  $z \in \mathbb{C}$ , sodass die lineare Relation  $R_z := (T - z)^{-1}$  ein überall definierter Operator ist, d.h.  $\text{dom}(R_z) = H$  und  $\text{mul}(R_z) = \{0\}$ .

Wenn wir die lineare Relation  $R_z$  als Operator auffassen, dann ist die Resolventenmenge  $\rho(T)$  definiert als

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{C} \mid (T - z)^{-1} \in \mathcal{B}(H)\}.$$

und sie ist immer eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .

Man bezeichnet  $R_z, z \in \rho(T)$ , auch als Resolvente von  $T$  bei  $z$  und es gilt die Resolventengleichung

$$R_z - R_w = (z - w)R_zR_w, \quad z, w \in \rho(T). \quad (1.3.3)$$

Daraus folgt auch, dass die Resolventenabbildung  $R: \rho(T) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  stetig ist.

Das Spektrum  $\sigma(T)$  einer abgeschlossenen linearen Relation  $T$  ist dann wie gewohnt das Komplement der Resolventenmenge

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Man kann nun das Spektrum von  $T$  in drei disjunkte Teilmengen zerlegen, nämlich in

- das Punktspektrum

$$\sigma_p(T) := \{z \in \sigma(T) \mid \ker(T - z) \neq \{0\}\},$$

- das kontinuierliche Spektrum

$$\sigma_c(T) := \{z \in \sigma(T) \mid \ker(T - z) = \{0\}, \operatorname{ran}(T - z) \neq H, \overline{\operatorname{ran}(T - z)} = H\},$$

- das Residualspektrum

$$\sigma_r(T) := \{z \in \sigma(T) \mid \ker(T - z) = \{0\}, \overline{\operatorname{ran}(T - z)} \neq H\}.$$

Ein Element  $z \in \sigma_p(T)$  aus dem Punktspektrum bezeichnet man als Eigenwert, der dazugehörige Raum  $\ker(T - z)$  heißt der Eigenraum zum Eigenwert  $z$  und alle von Null verschiedenen Vektoren des Eigenraums nennt man Eigenvektoren zum Eigenwert  $z$ .

### 1.3.4 Symmetrische, selbstadjungierte und normale lineare Relationen

Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann nennen wir eine lineare Relation  $T \leq H \times H$  symmetrisch, falls  $T \subseteq T^*$ , selbstadjungiert, falls  $T = T^*$ , und normal, falls  $T^*T = TT^*$ . Ist  $T$  symmetrisch, so ist auch  $\bar{T}$  symmetrisch. Daher werden in weiterer Folge meist nur mehr abgeschlossene symmetrische lineare Relationen betrachten.

Selbstadjungierte lineare Relationen  $S$  sind immer abgeschlossen und es gelten die Beziehungen

$$\operatorname{mul}(S) = \operatorname{dom}(S)^\perp \quad \text{und} \quad \ker(S) = \operatorname{ran}(S)^\perp.$$

Daher ist  $S$  genau dann ein Operator, wenn  $S$  dicht definiert ist.

Einen schönen Zusammenhang zwischen einer abgeschlossenen symmetrischen linearen Relation  $T$  und ihrer Adjungierten  $T^*$  liefert die von Neumannsche Formel

$$T^* = T \oplus M_+(T) \oplus M_-(T), \tag{1.3.4}$$

wobei  $M_\pm(T) := \{(x, y) \in T^* \mid y = \pm ix\}$  als Defekträume bezeichnet werden.  $M_\pm(T)$  sind sogar lineare Operatoren und ihr Definitionsbereich ist

$$\operatorname{dom}(M_\pm(T)) = \ker(T^* \pm i) = \operatorname{ran}(T \mp i)^\perp.$$

Es sei zusätzlich noch erwähnt, dass die Kodimension von  $T$  im Hilbertraum<sup>10</sup>  $T^*$  gerade den Dimensionen der Defekträume entspricht, also

$$\operatorname{codim}_{T^*} T = \dim M_+(T) + \dim M_-(T). \tag{1.3.5}$$

---

<sup>10</sup>Als abgeschlossener linearer Teilraum des Hilbertraums  $H \times H$  ist auch  $T^*$  ein Hilbertraum.

### 1.3.5 Selbstadjungierte Erweiterungen

Wir sagen, dass eine symmetrische lineare Relation  $T$  eine selbstadjungierte Erweiterung  $S$  besitzt, wenn  $T \subseteq S$  und  $S$  selbstadjungiert ist. Falls  $T$  dicht definiert ist, so ist wegen

$$\{0\} = \text{dom}(T)^\perp \supseteq \text{dom}(S)^\perp = \text{mul}(S)$$

jede selbstadjungierte Erweiterung von  $T$  sogar ein Operator.

Es stellen sich nun die Fragen, ob überhaupt solche selbstadjungierten Erweiterungen existieren und wie man diese Erweiterungen bestimmen kann. Zur Beantwortung dieser Fragen erweist es sich als sinnvoll für eine symmetrische lineare Relation  $T$  die folgenden Zahlen

$$\begin{aligned} n_+(T) &:= \dim \text{ran}(T - i)^\perp, \\ n_-(T) &:= \dim \text{ran}(T + i)^\perp, \end{aligned}$$

zu definieren. Die Zahlen  $n_+(T)$  und  $n_-(T)$  heißen auch die Defektindizes von  $T$  und sie entsprechen gerade den Dimensionen der Defekträume

$$n_\pm(T) = \dim \text{dom}(M_\pm(T)) = \dim M_\pm(T),$$

wobei die zweite Gleichheit gilt, da  $M_\pm(T)$  Operatoren sind. Der Abschluss  $\overline{T}$  von  $T$  hat die selben Defektindizes wie  $T$ .

**Satz 1.3.1.** *Eine symmetrische lineare Relation  $T$  besitzt genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung, wenn  $n_+(T) = n_-(T)$ .*

*In diesem Fall sind alle selbstadjungierten Erweiterungen  $S$  von  $T$  gegeben durch*

$$S = T \oplus (I - V)M_+(T), \tag{1.3.6}$$

wobei  $I$  der Identitätsoperator bezeichnet und  $V$  ein isometrischer Operator von  $M_+(T)$  nach  $M_-(T)$  ist. Umgekehrt definiert (1.3.6) für jeden solchen isometrischen Operator  $V$  einen selbstadjungierte lineare Relation  $S$ .

Beweis. Den Beweis findet man in [4, Corollary 6.4] □

**Korollar 1.3.2.** *Sei  $T$  eine symmetrische lineare Relation mit gleichen, aber endlichen Defektindizes, d.h.  $n_+(T) = n_-(T) =: n \in \mathbb{N}$ .*

*Dann sind die selbstadjungierten Erweiterungen  $S$  von  $T$  genau die  $n$ -dimensionalen symmetrischen Erweiterungen von  $T$ , d.h.  $S = T \dot{+} M$ <sup>11</sup> für eine symmetrische lineare Relation  $M \subseteq T^*$  mit  $\dim M = n$ .*

Beweis. Den Beweis findet man in [1, Corollary B.6]. □

---

<sup>11</sup> $S = T \dot{+} M$  bedeutet hier, dass  $T \cap M = \{0\}$  und  $T + M = S$ , wobei '+' hier für die Addition zweier Teilräume von  $X \times X$  steht, jedoch nicht für die eben eingeführte Addition zweier linearer Relationen.

## 1.4 Wichtige Resultate

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir einige wichtige Sätze auflisten, die wir später für unsere Beweise benötigen werden.

**Satz 1.4.1** (Partielle Integration für Verteilungsfunktionen).

Seien  $\mu_F$  und  $\mu_G$  zwei komplexe Maße mit den dazugehörigen Verteilungsfunktionen  $F$  bzw.  $G$ . Dann gilt für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,

$$(i) \quad \int_{[a,b]} F(t-) d\mu_G(t) + \int_{[a,b]} G(t+) d\mu_F(t) = F(b+)G(b+) - F(a-)G(a-)$$

$$(ii) \quad \int_{[a,b)} F(t-) d\mu_G(t) + \int_{[a,b)} G(t+) d\mu_F(t) = F(b-)G(b-) - F(a-)G(a-)$$

$$(iii) \quad \int_{(a,b]} F(t-) d\mu_G(t) + \int_{(a,b]} G(t+) d\mu_F(t) = F(b+)G(b+) - F(a+)G(a+)$$

$$(iv) \quad \int_{(a,b)} F(t-) d\mu_G(t) + \int_{(a,b)} G(t+) d\mu_F(t) = F(b-)G(b-) - F(a+)G(a+)$$

Beweis. Den Beweis findet man in [5, Theorem 21.67]. □

**Bemerkung 1.4.2.** Sind insbesondere  $F$  und  $G$  zwei linksstetige Verteilungsfunktionen der komplexen Maße  $\mu_F$  bzw.  $\mu_G$ , so erhalten wir die Formel der partiellen Integration (1.4.1) in der Form, in der wir sie in den nachfolgenden Beweisen verwenden werden.

$$\int_{[a,b)} F(t) d\mu_G(t) = [F(b)G(b) - F(a)G(a)] - \int_{[a,b)} G(t+) d\mu_F(t) \quad (1.4.1)$$

Abkürzend wird an einigen Stellen die Notation  $[FG]_a^b$  für

$$[FG]_a^b := F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

verwendet.

**Satz 1.4.3** (Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren).

Sei  $R$  ein kompakter, normaler Operator auf dem Hilbertraum  $H$ .

Dann existiert ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem  $(e_1, e_2, \dots)$  in  $H$ , sowie eine (eventuell endliche) Folge  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ , falls die Folge unendlich ist, sodass

$$H = \ker(R) \oplus \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$$

und

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle_H e_k, \quad x \in H.$$

Dabei sind die  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  gerade die von 0 verschiedenen Eigenwerte von  $R$  und  $e_k$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_k$  für alle  $k = 1, 2, \dots$ .

Beweis. Für den Beweis siehe [10, Theorem VI.3.2]. □

**Satz 1.4.4** (von Mercer).

Sei  $K \subseteq \mathbb{R}$  eine kompakte Menge,  $\mu$  ein positives Maß auf den Borelmengen  $\mathfrak{B}(K)$ ,  $G: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiger Kern und  $R: L^2(K, \mu) \rightarrow L^2(K, \mu)$  der dazugehörige Integraloperator, d.h.

$$(Rf)(x) = \int_K G(x, y)f(y) d\mu(y), \quad f \in L^2(K, \mu), \quad x \in K.$$

Es gelte  $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$  für alle  $x, y \in K$ , sodass  $R$  selbstadjungiert ist.

Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  die gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit gezählten Eigenwerte von  $R$  mit den dazugehörigen Eigenfunktionen  $e_1, e_2, \dots$ .

Falls  $R$  positiv ist, gilt für  $(\mu \otimes \mu)$ -fast alle  $(x, y) \in K \times K$

$$G(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n(x) \overline{e_n(y)},$$

wobei die Konvergenz  $(\mu \otimes \mu)$ -fast überall absolut und gleichmäßig ist.

Beweis. Für den Beweis siehe [10, Satz VI.4.2]. □

**Satz 1.4.5** (Spezialfall des Taubertheorems für Stieltjestransformationen).

Sei  $N: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  eine nicht-fallende Funktion und existiere für eine feste Zahl  $\alpha \geq 0$  das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(t+z)^\alpha} dN(t),$$

für alle  $z > 0$ .

Aus

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(t+z)^\alpha} dN(t) \asymp z^\beta \quad \text{für } z \rightarrow \infty, \quad 0 \leq -\beta \leq \alpha,$$

folgt dann

$$N(x) \asymp x^{\alpha+\beta} \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Beweis. Den entsprechenden Satz und Beweis findet man in [8, Satz. III]. □

**Bemerkung 1.4.6.** Das im vorigen Satz verwendete Zeichen  $\asymp$  steht für „asymptotisch gleich“. Die Notation

$$f(z) \asymp g(z) \quad \text{für } z \rightarrow \infty$$

mit zwei Funktionen  $f, g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  bedeutet, dass  $C_1, C_2 > 0$  und ein  $z_0 \in (0, \infty)$  existieren, sodass

$$C_1 g(z) \leq f(z) \leq C_2 g(z), \quad z \geq z_0,$$

gilt.

## 2 Anfangswertprobleme mit Radon-Nikodym-Ableitung

### 2.1 Existenz und Eindeutigkeit

Sei  $(a, b)$  ein reelles Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $\omega$  ein positives Borelmaß auf  $(a, b)$ . Außerdem seien  $M: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n$  messbar und komponentenweise lokal integrierbar bzgl.  $\omega$ .

**Definition 2.1.1.** Sei  $c \in (a, b)$  und  $Y_c \in \mathbb{C}^n$ . Wir sagen, dass eine Funktion  $Y: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine **Lösung des Anfangswertproblems**

$$\frac{dY}{d\omega} = MY + F \quad (2.1.1)$$

mit der Anfangsbedingung

$$Y(c) = Y_c \quad (2.1.2)$$

ist, wenn die Komponenten von  $Y$  linksstetig und lokal absolut stetig bzgl.  $\omega$  sind, die Radon-Nikodym-Ableitung von  $Y$  die Gleichung (2.1.1)  $\omega$ -fast überall erfüllt und (2.1.2) gilt.

**Bemerkung 2.1.2.** Durch Integration erhält man, dass eine Funktion  $Y: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n$  genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1.1) und (2.1.2) ist, wenn  $Y$  die Integralgleichung

$$Y(x) = Y(c) + \int_c^x (M(t)Y(t) + F(t)) d\omega(t), \quad x \in (a, b), \quad (2.1.3)$$

löst.

**Lemma 2.1.3** (Gronwall).

Sei  $(a, b)$  ein Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $c \in (a, b)$  und  $\omega$  ein positives Borelmaß auf  $(a, b)$ . Außerdem sei  $v \in L^1_{loc}((a, b), \omega)$  reellwertig.

(i) Gelte  $0 \leq v(x) \leq K + \int_{[c, x]} v d\omega$  für alle  $x \in [c, b)$  und eine Konstante  $K \geq 0$ .  
Dann erfüllt  $v$  die Abschätzung

$$v(x) \leq K e^{\int_{[c, x]} d\omega}, \quad x \in [c, b).$$

(ii) Gelte  $0 \leq v(x) \leq K + \int_{(x, c]} v d\omega$  für alle  $x \in (a, c]$  und eine Konstante  $K \geq 0$ .  
Dann erfüllt  $v$  die Abschätzung

$$v(x) \leq K e^{\int_{(x, c]} d\omega}, \quad x \in (a, c].$$

Beweis. Zuerst zeigen wir die folgende Abschätzung

$$F(x)^{n+1} \geq (n+1) \int_{[c, x]} F(t)^n d\omega(t), \quad c \in [c, b). \quad (2.1.4)$$

Dazu definieren wir  $F(x) = \int_{[c, x]} d\omega$ ,  $x \in [c, b)$ , und behaupten, dass für  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $(F^n)(x) := F(x)^n$ ,  $x \in [c, b)$ , absolut stetig bzgl.  $\omega$  ist, mit der Radon-Nikodym-Ableitung

$$\frac{d(F^n)}{d\omega}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x)^i F(x+)^{(n-1)-i}, \quad x \in [c, b).$$



Wir zeigen diese Aussage induktiv. Der Fall  $n = 1$  folgt sofort aus der Definition von  $F$ . Gelte nun die Behauptung für  $n \in \mathbb{N}$ . Mit der Formel der partiellen Integration (1.4.1)

$$\begin{aligned} \int_{[c,x]} F(t)^n d\omega(t) &= F(x)^n F(x) - \int_{[c,x]} F(t+) \frac{d(F^n)}{d\omega}(t) d\omega(t) \\ &= F(x)^{n+1} - \int_{[c,x]} \left( \sum_{i=0}^{n-1} F(t)^i F(t+)^{n-i} \right) d\omega(t), \quad x \in [c, b]. \end{aligned}$$

Durch Umformen erhalten wir

$$F(x)^{n+1} = \int_{[c,x]} \left( \sum_{i=0}^n F(t)^i F(t+)^{n-i} \right) d\omega(t), \quad x \in [c, b]. \quad (2.1.5)$$

Somit gilt die Aussage auch für  $n + 1$ .

Mit der Ungleichung  $F(t+) \geq F(t)$ ,  $t \in [c, b)$ , in (2.1.5) folgt sofort die Abschätzung (2.1.4).

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis des Gronwall-Lemmas. Wir zeigen für alle  $n \in \mathbb{N}$  induktiv die Behauptung

$$v(x) \leq K \sum_{i=0}^n \frac{F(x)^i}{i!} + \frac{F(x)^n}{n!} \int_{[c,x]} v d\omega, \quad x \in [c, b].$$

Für  $n = 0$  ist das genau unsere Voraussetzung. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$  erfüllt ist und zeigen sie für  $n + 1$ . Für  $x \in [c, b)$  gilt dann

$$\begin{aligned} v(x) &\leq K + \int_{[c,x]} v(t) d\omega(t) \\ &\leq K + \int_{[c,x]} \left( K \sum_{i=0}^n \frac{F(t)^i}{i!} + \frac{F(t)^n}{n!} \int_{[c,t]} v d\omega \right) d\omega(t) \\ &\leq K \left( 1 + \sum_{i=0}^n \int_{[c,x]} \frac{F(t)^i}{i!} d\omega(t) \right) + \int_{[c,x]} \frac{F(t)^n}{n!} d\omega(t) \int_{[c,x]} v d\omega \\ &\leq K \sum_{i=0}^{n+1} \frac{F(x)^i}{i!} + \frac{F(x)^{n+1}}{(n+1)!} \int_{[c,x]} v d\omega, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Ungleichung die Induktionsannahme und in der letzten zweimal die Abschätzung (2.1.4) verwendet wurde.

Bildet man nun den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ , so ergibt sich die gewünschte Abschätzung.

Mit einer analogen Rechnung erhalten wir auch die zweite Aussage. □

**Bemerkung 2.1.4.** Bezeichne  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . Wegen der Äquivalenz von allen Normen auf endlichdimensionalen Banachräumen erhalten wir die Ungleichungen

$$\int_{[c,d]} |M_{ij}(t)| dt \leq \int_{[c,d]} \sum_{i,j=1}^n |M_{ij}(t)| dt \leq K_1 \int_{[c,d]} \|M(t)\| dt$$

und

$$\int_{[c,d]} \|M(t)\| dt \leq K_2 \sum_{i,j=1}^n \int_{[c,d]} |M_{ij}(t)| dt$$

für  $c, d \in (a, b)$  mit  $c < d$  und  $K_1, K_2 > 0$ .

Daraus folgt, dass  $M$  genau dann komponentenweise lokal integrierbar bzgl.  $\omega$  ist, wenn  $\|M(\cdot)\|$  lokal integrierbar bzgl.  $\omega$  ist. Analog können wir diese Aussage auch für  $F$  zeigen.

**Satz 2.1.5** (Existenz- und Eindeigkeitssatz).

Sei  $(a, b)$  ein reelles Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und  $\omega$  ein positives Borelmaß auf  $(a, b)$ . Außerdem seien  $M: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n$  messbar, sodass  $\|M(\cdot)\|$  und  $\|F(\cdot)\|$  lokal integrierbar bzgl.  $\omega$  sind.

Dann hat das Anfangswertproblem (2.1.1) mit (2.1.2) eine eindeutige Lösung für alle  $c \in (a, b)$  und  $Y_c \in \mathbb{C}^n$  genau dann, wenn die Matrix

$$I + \omega(\{x\})M(x) \tag{2.1.6}$$

regulär für alle  $x \in (a, b)$  ist.

Sind  $M, F$  und  $Y_c$  reell, dann ist auch die Lösung  $Y$  reell.

**Bemerkung 2.1.6.** Die Matrix (2.1.6) ist für alle  $x \in (a, b)$  mit  $\omega(\{x\}) = 0$  gleich der Einheitsmatrix  $I$ . Für jene  $x \in (a, b)$  mit  $\omega(\{x\}) \neq 0$  ist der Funktionswert  $M(x)$  der (komponentenweise) lokal integrierbaren Funktion  $M$  eindeutig definiert. Somit ist die Matrix tatsächlich für alle  $x \in (a, b)$  wohldefiniert.

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass das Anfangswertproblem (2.1.1) mit (2.1.2) eine eindeutige Lösung für alle  $c \in (a, b)$  und  $Y_c \in \mathbb{C}^n$  hat. Wäre die Matrix (2.1.6) für ein  $x_0 \in (a, b)$  nicht regulär, dann müsste  $\omega(\{x_0\}) \neq 0$  gelten und wir könnten zwei verschiedene Vektoren  $y_1$  und  $y_2$  finden, sodass

$$[I + \omega(\{x_0\})M(x_0)]y_1 = [I + \omega(\{x_0\})M(x_0)]y_2$$

Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  die Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.1) mit  $Y(x_0) = y_1$  bzw.  $Y(x_0) = y_2$ . Indem wir den rechtsseitigen Limes bei  $x_0$  in der Integraldarstellung (2.1.3) bilden, erhalten wir

$$\begin{aligned} Y_1(x_0+) &= Y_1(x_0) + \omega(\{x_0\})(M(x_0)Y_1(x_0) + F(x_0)) \\ &= [I + \omega(\{x_0\})M(x_0)]y_1 + \omega(\{x_0\})F(x_0) \\ &= [I + \omega(\{x_0\})M(x_0)]y_2 + \omega(\{x_0\})F(x_0) = Y_2(x_0+) \end{aligned}$$

Für  $x \in (x_0, b)$  gilt dann

$$\begin{aligned} \|Y_1(x) - Y_2(x)\| &= \|(Y_1(x) - Y_1(x_0+)) - (Y_2(x) - Y_2(x_0+))\| \\ &\leq \int_{(x_0, x)} \|M(t)\| \|Y_1(t) - Y_2(t)\| d\omega(t) \end{aligned}$$

Aus dem Gronwall-Lemma 2.1.3 folgt für  $\|Y_1(\cdot) - Y_2(\cdot)\| \in L_{loc}^1((x_0, b), \|M(\cdot)\|d\omega)$ , dass  $\|Y_1(x) - Y_2(x)\| = 0$  bzw.  $Y_1(x) = Y_2(x)$  für alle  $x \in (x_0, b)$ .

Wählt man nun  $c \in (x_0, b)$  und den Anfangswert  $Y_c := Y_1(c) = Y_2(c)$ , dann sind  $Y_1$  und  $Y_2$  zwei verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.1) mit (2.1.2), also ein Widerspruch.

Sei nun die Matrix (2.1.6) für alle  $x \in (a, b)$  regulär. Da  $M$  und  $F$  nur (komponentenweise) lokal integrierbar sind, müssen wir uns auf Teilintervalle  $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$  mit  $\alpha, \beta \in (a, b), \alpha < \beta$  beschränken. Wenn wir nun die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung auf  $(\alpha, \beta)$  für alle  $\alpha, \beta \in (a, b)$  mit  $\alpha < c < \beta$  zeigen können, so muss auch auf  $(a, b)$  eine eindeutige Lösung existieren, die eingeschränkt auf die Teilintervalle  $(\alpha, \beta)$  mit den dort entsprechenden Lösungen

übereinstimmt.

Eindeutigkeit der Lösung:

Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  zwei Lösungen des Anfangswertproblems (2.1.1) mit (2.1.2) auf  $(\alpha, \beta)$ . Dann löst  $Y := Y_1 - Y_2$  das homogene Anfangswertproblem  $\frac{dY}{d\omega} = MY$  und  $Y(c) = 0$ . Wir erhalten

$$\|Y(x)\| \leq \int_c^x \|M(t)\| \|Y(t)\| d\omega(t), \quad x \in [c, \beta),$$

und mit dem Gronwall-Lemma 2.1.3 folgt  $Y(x) = 0$  für alle  $x \in [c, \beta)$ .

Für  $x \in (\alpha, c)$  gilt hingegen

$$Y(x) = - \int_{[x,c)} M(t)Y(t) d\omega(t) = - \int_{(x,c)} M(t)Y(t) d\omega(t) - \omega(\{x\})M(x)Y(x).$$

Durch Umformen ergibt sich

$$Y(x) = -[I + \omega(\{x\})M(x)]^{-1} \int_{(x,c)} M(t)Y(t) d\omega(t), \quad x \in (\alpha, c)$$

und wir erhalten

$$\|Y(x)\| \leq \|[I + \omega(\{x\})M(x)]^{-1}\| \int_{(x,c)} \|M(t)\| \|Y(t)\| d\omega(t), \quad x \in (\alpha, c).$$

Da  $\|M(\cdot)\|$  lokal integrierbar bzgl.  $\omega$  ist, gilt wegen

$$\sum_{x \in (\alpha, c), \omega(\{x\}) \neq 0} \omega(\{x\}) \|M(x)\| \leq \int_{[\alpha, c]} \|M(t)\| d\omega(t) < \infty, \quad (2.1.7)$$

dass  $\omega(\{x\}) \|M(x)\| \leq \frac{1}{2}$  für alle bis auf endlich viele  $x \in (\alpha, c)$  gilt. Für diese  $x$  folgt

$$\|[I + \omega(\{x\})M(x)]^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega(\{x\})M(x))^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\omega(\{x\}) \|M(x)\|)^n \leq 2.$$

Insgesamt ist daher  $\|[I + \omega(\{x\})M(x)]^{-1}\|$  beschränkt für alle  $x \in (\alpha, c)$  und mit dem Gronwall-Lemma 2.1.3 erhalten wir auch  $Y(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha, c)$ .

Existenz der Lösung:

Nun wollen wir eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1.1) und (2.1.2) konstruieren. Dazu definieren wir für

$$Y_0(x) = Y_c + \int_c^x F(t) d\omega(t), \quad x \in [c, \beta),$$

und induktiv für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$

$$Y_n(x) = \int_c^x M(t)Y_{n-1}(t) d\omega(t), \quad x \in [c, \beta).$$

Diese Funktionen sind alle beschränkt durch

$$\|Y_n(x)\| \leq \sup_{t \in [c, x]} \|Y_0(t)\| \frac{(\int_c^x \|M(t)\| d\omega(t))^n}{n!} \quad (2.1.8)$$

$$\leq \sup_{t \in [c, \beta)} \|Y_0(t)\| \frac{(\int_c^\beta \|M(t)\| d\omega(t))^n}{n!}, \quad x \in [c, \beta). \quad (2.1.9)$$

Die zweite Ungleichung ist offensichtlich. Die erste zeigen wir induktiv. Für  $n = 0$  ist die Aussage offensichtlich. Falls die Aussage nun für  $n \in \mathbb{N}$  gilt, so erhält man für  $n + 1$

$$\begin{aligned} \|Y_{n+1}(x)\| &\leq \int_c^x \|M(t)\| \|Y_n(t)\| d\omega(t) \\ &\leq \sup_{t \in [c, x]} \|Y_0(t)\| \int_c^x \|M(t)\| \frac{(\int_c^x \|M(t)\| d\omega(t))^n}{n!} d\omega(t) \\ &\leq \sup_{t \in [c, x]} \|Y_0(t)\| \frac{(\int_c^x \|M(t)\| d\omega(t))^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in [c, \beta], \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Ungleichung die Induktionsannahme und in der letzten die Abschätzung 2.1.4 mit dem positiven Borelmaß  $\|M(\cdot)\|d\omega$  verwendet wurde.

Somit konvergiert die Reihe  $Y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(x)$ ,  $x \in [c, \beta]$ , absolut und gleichmäßig. Daraus folgt

$$\begin{aligned} Y(x) &= Y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x M(t) Y_{n-1}(t) d\omega(t) \\ &= Y_c + \int_c^x F(t) + M(t) \left( \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n-1}(t) \right) d\omega(t) \\ &= Y_c + \int_c^x M(t) Y(t) + F(t) d\omega(t), \quad x \in [c, \beta]. \end{aligned}$$

Wir haben nun eine Lösung  $Y$  auf  $[c, \beta)$  konstruiert. Wir müssen nur mehr die Lösung auf ganz  $(\alpha, \beta)$  erweitern. Dazu teilen wir das Intervall  $(\alpha, c)$  in Teilintervalle auf und erweitern die Lösung schrittweise auf das nächste Teilintervall.

Für die Teilintervallgrenzen  $(x_k)_{k=0}^N$  mit  $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_N = c$  wählen wir jene Punkte  $x \in (\alpha, c)$ , für die  $\omega(\{x\})M(x) \geq \frac{1}{2}$ . Das sind nur endlich viele Punkte wegen (2.1.7). Gegebenfalls zerteilen wir die so erhaltenen Teilintervalle in endlich viele weitere Teilintervalle, sodass für alle  $k = 0, \dots, N-1$  gilt

$$\int_{(x_k, x_{k+1})} \|M(t)\| d\omega(t) < \frac{1}{2}. \quad (2.1.10)$$

Das ist aufgrund der lokalen Integrierbarkeit von  $\|M(\cdot)\|$  sicherlich möglich.

Wir nehmen nun an, dass wir für  $k = 1, \dots, N$  bereits eine Lösung  $Y$  auf  $[x_k, \beta)$  konstruiert haben und zeigen, dass  $Y$  auf  $[x_{k-1}, \beta)$  erweitert werden kann. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor. Zuerst konstruieren wir eine Erweiterung der Lösung für das Intervall  $(x_{k-1}, x_k)$ . Im zweiten Schritt wird dann der  $Y(x_{k-1})$  bestimmt.

Definieren wir

$$Z_0(x) = Y(x_k) + \int_{[x, x_k)} F(t) d\omega(t), \quad x \in (x_{k-1}, x_k),$$

und induktiv für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n(x) = \int_{[x, x_k)} M(t) Z_{n-1}(t) d\omega(t), \quad x \in (x_{k-1}, x_k).$$

Mit Hilfe von (2.1.10) erhalten wir ganz einfach durch Induktion, dass diese Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  beschränkt sind, nämlich durch

$$\|Z_n(x)\| \leq \left( \|Y(x_k)\| + \int_{[x_{k-1}, x_k)} \|F(t)\| d\omega(t) \right) \frac{1}{2^n}, \quad x \in (x_{k-1}, x_k).$$

Somit konvergiert die Reihe  $Y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(x)$ ,  $x \in (x_{k-1}, x_k)$ , absolut und erkennt genauso wie oben, dass nun  $Y$  eine Lösung auf  $(x_{k-1}, \beta)$  ist.

Wegen der Darstellung (2.1.3) existiert der rechtsseitige Grenzwert von  $Y(x_{k-1}+)$  und wegen der Regularitätsannahme der Matrix  $I + \omega(\{x_{k-1}\})M(x_{k-1})$  können wir

$$Y(x_{k-1}) := [I + \omega(\{x_{k-1}\})M(x_{k-1})]^{-1}(Y(x_{k-1}+) - \omega(\{x_{k-1}\})F(x_{k-1}))$$

definieren. Durch Umformen gilt dann  $Y(x_{k-1}+) = Y(x_{k-1}) + \omega(\{x_{k-1}\})(M(x_{k-1})Y(x_{k-1}) + F(x_{k-1}))$ . Also ist  $Y$  tatsächlich eine Lösung auf  $[x_{k-1}, \beta)$ .

Nach endlich vielen Schritten erhält man so eine Lösung auf ganz  $(\alpha, \beta)$ .

Sind die entsprechenden Daten  $M$ ,  $F$  und  $Y_c$  reell, dann erkennt man leicht, dass alle auftretenden Funktionen bei der Konstruktion der Lösung auch reell sind und daher die Lösung ebenfalls reell sein muss.  $\square$

**Bemerkung 2.1.7.** Der Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 2.1.5 zeigt uns, dass die Bedingung (2.1.6) nur für die Eindeutigkeit der Lösung links vor dem Anfangspunkt  $c \in (a, b)$ , also für alle  $x \in (a, b)$ , benötigt wird. Es ist immer möglich, die Lösung eindeutig nach rechts fortzusetzen.

Ein einfaches Beispiel nehmen wir  $n = 1$  an und betrachten das Intervall  $(-2, 2)$ . Wir wählen  $M \equiv 1$ ,  $F \equiv 0$ ,  $c = 0$ ,  $Y_c = 0$  und  $\omega = -\delta_{-1}$  das Dirac-Maß bei  $-1$ . Dann ist die Bedingung (2.1.6) bei  $x = -1$  nicht erfüllt. Die entsprechende Integralgleichung

$$Y(x) = \int_0^x Y(t) d\omega(t), \quad x \in (-2, 2).$$

hat als Lösungen die Funktionen

$$Y_d(x) = \begin{cases} d, & \text{für } -2 < x \leq -1 \\ 0, & \text{für } -1 < x < 2 \end{cases}$$

für jedes  $d \in \mathbb{C}$ . Die Lösungen sind daher nicht eindeutig links vom Anfangspunkt  $c = 0$ .

**Korollar 2.1.8.** Sei die Matrix  $I + \omega(\{x\})M(x)$  regulär für alle  $x \in (a, b)$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\frac{dY}{d\omega} = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(c+) = Y_c$$

eine eindeutige Lösung für alle  $c \in (a, b)$  und  $Y_c \in \mathbb{C}^n$ .

Sind  $M$ ,  $F$  und  $Y_c$  reell, dann ist auch die Lösung  $Y$  reell.

Beweis. Wegen der Integraldarstellung (2.1.3) gilt

$$Y(c+) = Y(c) + \omega(\{c\})(M(c)Y(c) + F(c))$$

und durch Umformen gilt  $Y(c) = (I + \omega(\{c\})M(c))^{-1}(Y(c+) - \omega(\{c\})F(c))$ .

Somit ist eine Funktion  $Y$  eine Lösung des obigen Anfangswertproblems genau dann, wenn es eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\frac{dY}{d\omega} = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(c) = (I + \omega(\{c\})M(c))^{-1}(Y_c - \omega(\{c\})F(c)).$$

$\square$

## 2.2 Regularitätsaussagen

**Definition 2.2.1.** Eine messbare Funktion  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **integrierbar bei a** [bzw. **bei b**] bzgl.  $\omega$ , wenn für alle  $c \in (a, b)$  gilt, dass  $f \in L^1((a, c], \omega)$  [bzw.  $f \in L^1([c, b), \omega)$ ] ist.

**Bemerkung 2.2.2.** Eine Funktion  $f \in L^1_{loc}((a, b), \omega)$  ist genau dann integrierbar bei  $a$  bzgl.  $\omega$ , wenn für ein  $c \in (a, b)$  gilt, dass  $f \in L^1((a, c], \omega)$ . (Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

**Satz 2.2.3.** Seien  $\|M(\cdot)\|$  und  $\|F(\cdot)\|$  integrierbar bei  $a$  bzgl.  $\omega$  und  $Y$  eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1.1) mit (2.1.2).

Dann existiert der Limes  $Y(a) := \lim_{x \searrow a} Y(x)$ .  
(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Wegen unserer Annahme können wir  $c \in (a, b)$  so nahe bei  $a$  wählen, dass

$$\int_{(a,c]} \|M(t)\| d\omega(t) \leq \frac{1}{2}.$$

Zuerst zeigen wir, dass  $\|Y(\cdot)\|$  auf  $(a, c]$  beschränkt ist. Für  $x \in (a, c)$  gilt

$$\|Y(x)\| \leq \|Y(c)\| + \int_{[x,c]} \|M(t)\| \|Y(t)\| d\omega(t) + \int_{[x,c]} \|F(t)\| d\omega(t).$$

Nun wählen wir  $s \in (a, c)$  beliebig und erhalten

$$\begin{aligned} \max_{x \in [s,c]} \|Y(x)\| &\leq \|Y(c)\| + \int_{[s,c]} \|M(t)\| \|Y(t)\| d\omega(t) + \int_{[s,c]} \|F(t)\| d\omega(t) \\ &\leq \|Y(c)\| + \max_{x \in [s,c]} \|Y(x)\| \int_{(a,c]} \|M(t)\| d\omega(t) + \int_{(a,c]} \|F(t)\| d\omega(t) \\ &\leq \|Y(c)\| + \int_{(a,c]} \|F(t)\| d\omega(t) + \frac{1}{2} \max_{x \in [s,c]} \|Y(x)\|. \end{aligned}$$

Wegen der Linkstetigkeit ist  $Y$  auf  $[s, c]$  beschränkt, also ist das Maximum endlich und wir können die Ungleichung umformen zu

$$\frac{1}{2} \max_{x \in [s,c]} \|Y(x)\| \leq \|Y(c)\| + \int_{(a,c]} \|F(t)\| d\omega(t) =: K.$$

Da  $s \in (a, c)$  beliebig war, folgt  $\max_{x \in (a,c]} \|Y(x)\| \leq 2K$ .

Um die eigentliche Aussage zu zeigen, wählen wir für  $\varepsilon > 0$  ein  $d \in (a, c]$  so nahe bei  $a$ , dass

$$\int_{(a,d]} \|M(t)\| d\omega(t) \leq \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Dann gilt für alle  $x_1, x_2 \in (a, d]$  mit  $x_1 < x_2$

$$\|Y(x_1) - Y(x_2)\| \leq \int_{[x_1,x_2]} \|M(t)\| \|Y(t)\| d\omega(t) \leq 2K \int_{(a,d]} \|M(t)\| d\omega(t) \leq \varepsilon,$$

d.h.  $(Y(x))_{x \in (a,c]}$  ist ein Cauchy-Netz in  $\mathbb{C}$  für  $x \searrow a$ . Daher existiert der Grenzwert  $Y(a) = \lim_{x \searrow a} Y(x)$  und  $Y(a) \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Korollar 2.2.4.**

(i) Seien  $\|M(\cdot)\|$  und  $\|F(\cdot)\|$  integrierbar bei  $a$  bzgl.  $\omega$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\frac{dY}{d\omega} = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(a) = Y_a \quad (2.2.1)$$

eine eindeutige Lösung für alle  $Y_a \in \mathbb{C}^n$ .

Sind  $M$ ,  $F$  und  $Y_a$  reell, dann ist auch die Lösung  $Y$  reell.

(ii) Seien  $\|M(\cdot)\|$  und  $\|F(\cdot)\|$  integrierbar bei  $b$  bzgl.  $\omega$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\frac{dY}{d\omega} = MY + F \quad \text{mit} \quad Y(b) = Y_b \quad (2.2.2)$$

eine eindeutige Lösung für alle  $Y_b \in \mathbb{C}^n$  genau dann, wenn  $I + \omega(\{x\})M(x)$  regulär für alle  $x \in (a, b)$  ist.

Sind  $M$ ,  $F$  und  $Y_b$  reell, dann ist auch die Lösung  $Y$  reell.

Beweis.

(i) Eine Funktion  $Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^n$ , die rechtsstetig bei  $a$  ist, ist genau dann eine Lösung von (2.2.1), wenn  $Y$  die Integralgleichung

$$Y(x) = Y(a) + \int_{(a,x)} (M(t)Y(t) + F(t)) d\omega(t), \quad x \in [a, b),$$

erfüllt.

(ii) Eine Funktion  $Y: (a, b] \rightarrow \mathbb{C}^n$ , die linksstetig bei  $b$  ist, ist genau dann eine Lösung von (2.2.2), wenn  $Y$  die Integralgleichung

$$Y(x) = Y(b) - \int_{[x,b)} (M(t)Y(t) + F(t)) d\omega(t), \quad x \in (a, b],$$

erfüllt.

Mit einem im Wesentlichen gleichen Beweis wie in Satz 2.1.5 erhalten wir die entsprechenden Behauptungen.  $\square$

### 3 Sturm-Liouville-Operatoren mit maßwertigen Koeffizienten

#### 3.1 Der Sturm-Liouville-Differentialausdruck

Sei  $(a, b)$  ein beliebiges Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  und seien  $\rho, \varsigma$  und  $\chi$  positive, signierte oder komplexe Borelmaße auf  $(a, b)$ .

Unser Ziel ist es, den Differentialausdruck

$$Tf := \frac{d}{d\rho} \left( -\frac{df}{d\varsigma} + \int f d\chi \right), \quad f \in \mathfrak{D}_T. \quad (3.1.1)$$

sinnvoll zu definieren, sodass  $T$  ein wohldefinierter Differentialoperator wird. Die Menge  $\mathfrak{D}_T$  bezeichnet dabei den maximalen Definitionsbereich von  $T$  und soll aus allen Funktionen  $f \in AC_{loc}((a, b), \varsigma)$  bestehen, für die  $Tf$  definiert ist. Dazu muss zusätzlich  $f \in L_{loc}^1((a, b), \chi)$  gelten und die Funktion

$$\psi_f(x) := -\frac{df}{d\varsigma}(x) + \int_c^x f d\chi, \quad x \in (a, b), \quad (3.1.2)$$

muss für ein  $c \in (a, b)$  in  $AC_{loc}((a, b), \rho)$  liegen. Da  $\psi_f$  wegen der Radon-Nikodym-Ableitung  $\frac{df}{d\varsigma}$  nur  $|\varsigma|$ -fast überall bestimmt ist, meinen wir damit, dass ein linksstetiger, bzgl.  $\rho$  lokal absolut stetiger Repräsentant von  $\psi_f$  existieren soll.

Zusammengefasst definieren wir den maximalen Definitionsbereich  $\mathfrak{D}_T$  von  $T$  als

$$\mathfrak{D}_T = \left\{ f \in AC_{loc}((a, b), \varsigma) : f \in L_{loc}^1((a, b), \chi), \left( -\frac{df}{d\varsigma} + \int_c \cdot d\chi \right) \in AC_{loc}((a, b), \rho) \text{ für } c \in (a, b) \right\}.$$

Das Problem ist jedoch, dass  $Tf$  für  $f \in \mathfrak{D}_T$  noch immer nicht wohldefiniert ist, denn es könnten zwei Repräsentanten von  $\psi_f$  existieren, die zwar verschieden sind, aber  $|\varsigma|$ -fast überall übereinstimmen.

Damit wir die Eindeutigkeit von  $\psi_f$  bzw. die Wohldefiniertheit von  $T$  erreichen, müssen wir unvermeidlich weitere Annahmen an die Maße  $\rho, \varsigma$  und  $\chi$  stellen.

Eine mögliche Annahme ist

$$\text{supp}(|\varsigma|) = (a, b), \quad (A.1.a)$$

denn zwei linksstetige Funktionen, die  $|\varsigma|$ -fast überall gleich sind, müssen bereits nach Lemma 3.1.1 (ii) auf ganz  $(a, b) = \text{supp}(|\varsigma|)^\circ$  übereinstimmen. Daher ist  $\psi_f$  eindeutig auf  $(a, b)$ .

Ebenso können wir aber auch die Annahme

$$\text{supp}(|\rho|) \subseteq \text{supp}(|\varsigma|) \quad \text{und} \quad \rho \text{ ist atomlos} \quad (A.1.b)$$

treffen. Wegen der Atomlosigkeit von  $\rho$  sind Funktionen aus  $AC_{loc}((a, b), \rho)$  stetig. Zwei stetige Funktionen, die  $|\varsigma|$ -fast überall gleich sind, stimmen nach Lemma 3.1.1 (i) bereits auf  $\text{supp}(|\varsigma|)$  überein. Also ist  $\psi_f$  auf  $\text{supp}(|\varsigma|)$  eindeutig bestimmt. Als  $AC_{loc}((a, b), \rho)$ -Funktion ist  $\psi_f$  auf  $\text{supp}(|\rho|)^c$  konstant, insbesondere auf  $\text{supp}(|\varsigma|)^c \subseteq \text{supp}(|\rho|)^c$ . Aus der Stetigkeit folgt dann die Eindeutigkeit von  $\psi_f$  auf ganz  $(a, b)$ .



**Lemma 3.1.1.** Sei  $\mu$  ein positives Borelmaß auf  $(a, b)$ .

- (i) Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\mu$ .  
Dann ist  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \text{supp}(\mu)$ .
- (ii) Sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  eine links- oder rechtsstetige Funktion mit  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\mu$ .  
Dann ist  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \text{supp}(\mu)^\circ$ <sup>12</sup>.

Beweis.

- (i) Angenommen, es ist  $f(x) \neq 0$  für ein  $x \in \text{supp}(\mu)$ . Dann folgt aus der Stetigkeit von  $f$ , dass eine Umgebung  $U$  von  $x$  existiert, sodass  $f(y) \neq 0$ ,  $y \in U$ . Da  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\mu$  ist, muss  $U$  eine  $\mu$ -Nullmenge sein. Wegen  $x \in \text{supp}(\mu)$  muss aber nach Definition des Trägers  $\mu(U) > 0$  gelten. Das ist aber ein Widerspruch.
- (ii) Wir zeigen die Aussage für eine linksstetige Funktion  $f$ , für rechtsstetige  $f$  verläuft der Beweis ähnlich. Angenommen, es ist  $f(x) \neq 0$  für ein  $x \in \text{supp}(\mu)^\circ$ . Dann existiert wegen der Linksstetigkeit von  $f$  ein  $c \in (a, x)$ , sodass  $f(y) \neq 0$ ,  $y \in (c, x)$ . Da  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\mu$  ist, muss  $(c, x) \subseteq \text{supp}(\mu)^c$  gelten. Daraus würde aber folgen, dass  $x \in \text{supp}(\mu)^\circ$  ein Randpunkt sein müsste, was aber ein Widerspruch ist.

□

**Definition 3.1.2.** Sei  $f \in \mathfrak{D}_T$ . Dann bezeichnet man die Funktion

$$f^{[1]} := \frac{df}{d\zeta} \in L^1_{loc}((a, b), |\zeta|)$$

als **erste Quasiableitung** von  $f$ .

**Bemerkung 3.1.3.**

- (i) Die Annahmen (A.1.a) bzw. (A.1.b) benötigen wir nur für die Wohldefiniertheit des Operators  $T$ . Für die weiteren Beweise der nachfolgenden Sätze werden sie nicht benötigt.
- (ii) In der Definition von (3.1.2) tritt zwar eine Konstante  $c \in (a, b)$  auf. Jedoch ist  $Tf$  von  $c$  unabhängig für  $f \in \mathfrak{D}_T$ .  
Wenn nämlich  $(\psi_f)_c, (\psi_f)_d$  die entsprechenden Funktionen aus (3.1.2) zu  $c, d \in (a, b)$  bezeichnen, unterscheiden sich die beiden Funktionen nur um die Konstante  $\int_c^d f d\chi$ . Somit ist einerseits  $(\psi_f)_c$  aus  $AC_{loc}((a, b), \rho)$  genau dann, wenn es  $(\psi_f)_d$  ist. Andererseits gilt  $\frac{d}{d\rho}(\psi_f)_c = \frac{d}{d\rho}(\psi_f)_d$ .
- (iii) Für  $f \in \mathfrak{D}_T$  ist  $Tf \in L^1_{loc}((a, b), \rho)$  genau die Radon-Nikodym-Ableitung der Funktion (3.1.2) bzgl.  $\rho$ . Durch Integration erhalten wir die Darstellung

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f^{[1]} d\zeta, \quad x \in (a, b) \tag{3.1.3}$$

$$f^{[1]}(x) = f^{[1]}(c) + \int_c^x f d\chi - \int_c^x Tf d\rho, \quad x \in (a, b), \tag{3.1.4}$$

für ein  $c \in (a, b)$ .

---

<sup>12</sup>Für eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raumes bezeichnet  $A^\circ$  das Innere der Menge  $A$ . Das ist die größte offene Menge, die in  $A$  enthalten ist.

(iv) Aus der Darstellung (3.1.4) erkennen wir sofort, dass  $f^{[1]}$  linksstetig ist. Für  $f \in \mathfrak{D}_T$  existieren auch die rechtsseitigen Limiten

$$f(x+) := \lim_{t \searrow x} f(t) \quad \text{und} \quad f^{[1]}(x+) := \lim_{t \searrow x} f^{[1]}(t), \quad x \in (a, b),$$

und es gilt

$$f(x+) = f(x) + f^{[1]}(x)\varsigma(\{x\}), \quad x \in (a, b), \quad (3.1.5)$$

$$f^{[1]}(x+) = f^{[1]}(x) + f(x)\chi(\{x\}) - Tf(x)\rho(\{x\}), \quad x \in (a, b). \quad (3.1.6)$$

Dabei kann  $f^{[1]}(x)\varsigma(\{x\})$  bzw.  $f(x)\chi(\{x\}) - Tf(x)\rho(\{x\})$  als „Sprungwert“ der linksstetigen Funktion  $f$  bzw.  $f^{[1]}$  interpretiert werden.

(v) Die Unstetigkeitsstellen von  $f$  sind jene Stellen  $x \in (a, b)$ , für die  $\varsigma(\{x\}) \neq 0$  gilt. Aus  $\rho(\{x\}) = \chi(\{x\}) = 0$  hingegen folgt die Stetigkeit von  $f^{[1]}$  bei  $x \in (a, b)$ . Ist  $\varsigma$  atomlos, dann ist  $f$  stetig. Sind  $\rho$  und  $\chi$  beide atomlos, dann ist  $f^{[1]}$  stetig.

**Beispiel 3.1.4.** Seien die Maße  $\varsigma$ ,  $\chi$  und  $\rho$  absolut stetig bzgl. dem Lebesgue-Maß  $\lambda$  mit den Dichten  $\frac{1}{p}$ ,  $q$  und  $r$ , d.h.

$$\rho(A) := \int_A r \, d\lambda, \quad \varsigma(A) := \int_A \frac{1}{p} \, d\lambda, \quad \chi(A) := \int_A q \, d\lambda,$$

für jede Borelmenge  $A \in \mathfrak{B}((a, b))$ .

Die Maße  $\rho$ ,  $\varsigma$  und  $\chi$  sind genau dann Borelmaße, wenn  $\frac{1}{p}, q, r \in L^1_{loc}((a, b), \lambda)$  sind.

Mit einer einfachen Rechnung erhalten wir für  $f \in AC_{loc}((a, b), \varsigma)$  bzw.  $\psi \in AC_{loc}((a, b), \rho)$

$$\frac{df}{d\varsigma} = p \frac{df}{d\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{d\psi}{d\rho} = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\lambda}$$

Insgesamt folgt damit für ein  $c \in (a, b)$

$$\frac{d}{d\rho} \left( -\frac{df}{d\varsigma} + \int_c^\cdot f \, d\chi \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{d\lambda} \left( -p \frac{df}{d\lambda} + \int_c^\cdot f q \, d\lambda \right) = \frac{1}{r} \left[ -\frac{d}{d\lambda} \left( p \frac{df}{d\lambda} \right) + f q \right], \quad f \in \mathfrak{D}_T.$$

Eine Funktion  $f$  ist genau dann in  $\mathfrak{D}_T$ , wenn  $f$  und  $f^{[1]} = p \frac{df}{d\lambda}$  lokal absolut stetig bzgl. dem Lebesgue-Maß sind, d.h.

$$\mathfrak{D}_T = \{f \in AC_{loc}((a, b), \lambda) : f^{[1]} \in AC_{loc}((a, b), \lambda)\}.$$

Falls wir  $' := \frac{d}{d\lambda}$  definieren, ist in diesem Fall der Differentialoperator  $T$  gegeben als

$$(Tf)(x) = \frac{1}{r(x)} [(p(x)f'(x))' + f(x)q(x)], \quad f \in \mathfrak{D}_T, \quad x \in (a, b),$$

und entspricht gerade dem gewöhnlichen Sturm-Liouville-Differentialoperator.

**Satz 3.1.5.** Sei  $g \in L^1_{loc}((a, b), \rho)$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $u \in \mathfrak{D}_T$  von

$$(T - z)u = g \quad \text{mit} \quad u(c) = d_1, u^{[1]}(c) = d_2 \quad (3.1.7)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ ,  $c \in (a, b)$  und  $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn

$$\rho(\{x\})\varsigma(\{x\}) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(\{x\})\varsigma(\{x\}) \neq 1$$

für alle  $x \in (a, b)$ .

Sind zusätzlich  $g$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  und  $z$  reell, dann ist auch die Lösung  $u$  reell.

**Beweis.** Eine Funktion  $u \in \mathfrak{D}_T$  ist eine Lösung von  $(T - z)u = g$  mit  $u(c) = d_1$  und  $u^{[1]}(c) = d_2$  genau dann, wenn

$$u(x) = d_1 + \int_c^x u^{[1]} d\varsigma, \quad x \in (a, b) \quad (3.1.8)$$

$$u^{[1]}(x) = d_2 + \int_c^x u d\chi - \int_c^x (zu + g) d\rho, \quad x \in (a, b). \quad (3.1.9)$$

Nun definiere das positive Borelmaß  $\omega := |\varsigma| + |\chi| + |\rho|$ , dann gilt  $\varsigma, \chi, \rho \ll \omega$ . Außerdem gilt  $\int g d\rho \ll \omega$  und  $\chi - z\rho \ll \omega$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Bezeichne mit  $m_{12}$ ,  $m_{21}(z)$  und  $f_2$  die Radon-Nikodym-Ableitungen von  $\varsigma$ ,  $\chi - z\rho$  und  $\int g d\rho$  bzgl.  $\omega$ .

Dann lassen sich die vorigen Gleichungen schreiben als

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ u^{[1]}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + \int_c^x \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21}(z) & 0 \end{pmatrix}}_{=: M_z} \begin{pmatrix} u \\ u^{[1]} \end{pmatrix} d\omega + \int_c^x \begin{pmatrix} 0 \\ f_2 \end{pmatrix} d\omega, \quad x \in (a, b). \quad (3.1.10)$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz 2.1.5 existiert eine eindeutige Lösung von (3.1.7) für alle  $z \in \mathbb{C}$ ,  $c \in (a, b)$  und  $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn die Matrix

$$A_z(x) := I + \omega(\{x\})M_z(x)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  und alle  $x \in (a, b)$  regulär ist.

Wegen  $\omega(\{x\})m_{12}(x) = \varsigma(\{x\})$  und  $\omega(\{x\})m_{21}(x) = \chi(\{x\}) - z\rho(\{x\})$  erhalten wir

$$A_z(x) = \begin{pmatrix} 1 & \varsigma(\{x\}) \\ \chi(\{x\}) - z\rho(\{x\}) & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}, x \in (a, b).$$

Die Determinante dieser Matrix  $\det A_z(x) = 1 - \chi(\{x\})\varsigma(\{x\}) + z\rho(\{x\})\varsigma(\{x\})$  ist ein lineares Polynom in  $z$  und hat genau dann keine Nullstellen, wenn

$$\rho(\{x\})\varsigma(\{x\}) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(\{x\})\varsigma(\{x\}) \neq 1$$

für alle  $x \in (a, b)$  gilt. □

**Bemerkung 3.1.6.** Für die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für alle Anfangswertprobleme wurde zwar nur die Bedingung

$$\rho(\{x\})\varsigma(\{x\}) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(\{x\})\varsigma(\{x\}) \neq 1$$

für alle  $x \in (a, b)$  benötigt, jedoch wollen wir in weiterer Folge annehmen, dass die stärkere Aussage

$$\rho(\{x\})\varsigma(\{x\}) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(\{x\})\varsigma(\{x\}) = 0 \quad (3.1.11)$$

für alle  $x \in (a, b)$  gilt, da sie in einer entscheidenden Weise beim Beweis der Lagrange-Identität (3.1.12) einfließen wird.

**Definition 3.1.7.** Für  $f, g \in \mathfrak{D}_T$  ist die **Wronski-Determinante**  $W(f, g): (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert als

$$W(f, g)(x) := f(x)g^{[1]}(x) - g(x)f^{[1]}(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f^{[1]}(x) & g^{[1]}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in (a, b).$$

**Satz 3.1.8** (Lagrange-Identität).

Für alle  $f, g \in \mathfrak{D}_T$  und  $\alpha, \beta \in (a, b)$ ,  $\alpha < \beta$ , gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} (g(t)Tf(t) - f(t)Tg(t)) d\rho(t) = W(f, g)(\beta) - W(f, g)(\alpha). \quad (3.1.12)$$

Beweis. Wegen der Darstellung (3.1.3) ist  $g$  eine Verteilungsfunktion des Maßes  $\int g^{[1]} d\zeta$  und wegen der Darstellung (3.1.4) mit  $z = 0$  ist

$$F(x) := -f^{[1]}(x) + \int_{\alpha}^x f d\chi, \quad x \in (a, b),$$

eine Verteilungsfunktion des Maßes  $\int Tf d\rho$ .

Somit erhalten wir durch die Formel der partiellen Integration für Verteilungsfunktionen (1.4.1)

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)Tf(t) d\rho(t) &= [gF]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(t+)g^{[1]}(t) d\zeta(t) \\ &= -[gf^{[1]}]_{\alpha}^{\beta} + \left( \int_{\alpha}^{\beta} f d\chi \right) g(\beta) - \int_{\alpha}^{\beta} F(t)g^{[1]}(t) d\zeta(t), \end{aligned}$$

wobei im letzten Integral  $F(t+)$  durch  $F(t)$  ersetzt werden kann, da die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $F$  wegen der Annahme (3.1.11) eine  $\zeta$ -Nullmenge ist.

Dieses Integral kann nun weiter berechnet werden als

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t)g^{[1]}(t) d\zeta(t) = - \int_{\alpha}^{\beta} f^{[1]}(t)g^{[1]}(t) d\zeta(t) + \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\alpha}^t f d\chi \right) g^{[1]}(t) d\zeta(t).$$

Für das zweite Integral auf der rechten Seite verwenden wir wieder die Formel der partiellen Integration mit den Verteilungsfunktionen  $g$  und  $H(x) := \int_{\alpha}^x f d\chi$  der Maße  $\int g^{[1]} d\zeta$  bzw.  $\int f d\chi$  und erhalten

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\alpha}^t f d\chi \right) g^{[1]}(t) d\zeta(t) = \left( \int_{\alpha}^{\beta} f d\chi \right) g(\beta) - \int_{\alpha}^{\beta} g(t+)f(t) d\chi.$$

Wegen Annahme (3.1.11) kann wieder  $g(t+)$  durch  $g(t)$  ersetzt werden.

Insgesamt ergibt sich dann

$$\int_{\alpha}^{\beta} gTf d\rho = -[gf^{[1]}]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f^{[1]}g^{[1]} d\zeta + \int_{\alpha}^{\beta} gf d\chi$$

Mit einer analogen Rechnung für  $\int_{\alpha}^{\beta} fTg d\rho$  erhält man schlussendlich

$$\int_{\alpha}^{\beta} (gTf - fTg) d\rho = [fg^{[1]} - gf^{[1]}]_{\alpha}^{\beta} = [W(f, g)]_{\alpha}^{\beta}.$$

□

**Korollar 3.1.9.**

(i) Seien  $f, g \in \mathfrak{D}_T$ . Dann ist die Wronski-Determinante  $W(f, g) \in AC_{loc}((a, b), \rho)$  mit Radon-Nikodym-Ableitung

$$\frac{dW(f, g)}{d\rho} = gTf - fTg.$$

(ii) Die Wronski-Determinante  $W(u_1, u_2)$  zweier Lösungen  $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}_T$  von  $(T - z)u = 0$  ist konstant.

(iii) Für zwei Lösungen  $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}_T$  von  $(T - z)u = 0$  gilt  $W(u_1, u_2) \neq 0$  genau dann, wenn  $u_1$  und  $u_2$  linear unabhängig sind.

Beweis.

(i) Die Aussage folgt sofort aus der Lagrange-Identität (3.1.12).

(ii) Für die Radon-Nikodym-Ableitung von  $W(u_1, u_2)$  gilt

$$\frac{dW(u_1, u_2)}{d\rho} = u_2Tu_1 - u_1Tu_2 = u_2 \underbrace{(T - z)u_1}_{=0} - u_1 \underbrace{(T - z)u_2}_{=0} = 0.$$

Somit muss  $W(u_1, u_2)$  konstant sein.

(iii) Seien  $u_1$  und  $u_2$  linear abhängig. Dann folgt aus der Definition der Wronski-Determinante sofort, dass  $W(u_1, u_2) = 0$  ist.

Gelte umgekehrt  $W(u_1, u_2) = 0$ , so sind für alle  $x \in (a, b)$  die Vektoren

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_1^{[1]}(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_2(x) \\ u_2^{[1]}(x) \end{pmatrix}$$

linear abhängig. Für ein  $c \in (a, b)$  gilt dann  $\begin{pmatrix} u_1(c) \\ u_1^{[1]}(c) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u_2(c) \\ u_2^{[1]}(c) \end{pmatrix}$  mit  $k \in \mathbb{C}$ . Da sowohl  $u_1$  als auch  $ku_2$  Lösungen von  $(T - z)u = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $u(c) = u_1(c)$  und  $u^{[1]}(c) = u_1^{[1]}(c)$  sind, folgt aus dem Existenz- und Eindeigkeitsatz 3.1.5, dass  $u_1(x) = ku_2(x)$  für alle  $x \in (a, b)$  und daher  $u_1$  und  $u_2$  linear abhängig sind.

□

**Definition 3.1.10.** Für  $z \in \mathbb{C}$  nennen wir zwei linear unabhängige Lösungen von  $(T - z)u = 0$  ein **Fundamentalsystem** von  $(T - z)u = 0$ .

**Bemerkung 3.1.11.** Nach dem Existenz- und Eindeigkeitsatz und den Eigenschaften der Wronski-Determinante existiert immer ein Fundamentalsystem von  $(T - z)u = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

Nach dem vorigen Korollar erhalten wir ein Fundamentalsystem von  $(T - z)u = 0$ , indem wir linear unabhängige Vektoren  $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$  wählen und  $u_1, u_2$  als Lösungen von  $(T - z)u = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $u(c) = d_1, u^{[1]}(c) = d_2$  bzw.  $u(c) = e_1, u^{[1]}(c) = e_2$  bestimmen, für ein beliebiges  $c \in (a, b)$ .

Insbesondere gilt  $\dim \ker(T - z) = 2$ .

**Satz 3.1.12.** *Sei  $z \in \mathbb{C}$  und  $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}_T$  ein Fundamentalsystem von  $(T - z)u = 0$ . Außerdem sei  $c \in (a, b)$ ,  $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$  und  $g \in L_{loc}^1((a, b), \rho)$ . Dann existieren  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ , sodass die Lösung  $f$  von*

$$(T - z)f = g \quad \text{mit} \quad f(c) = d_1, f^{[1]}(c) = d_2$$

für  $x \in (a, b)$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \frac{u_1(x)}{W(u_1, u_2)} \int_c^x u_2 g \, d\rho - \frac{u_2(x)}{W(u_1, u_2)} \int_c^x u_1 g \, d\rho \\ f^{[1]}(x) &= c_1 u_1^{[1]}(x) + c_2 u_2^{[1]}(x) + \frac{u_1^{[1]}(x)}{W(u_1, u_2)} \int_c^x u_2 g \, d\rho - \frac{u_2^{[1]}(x)}{W(u_1, u_2)} \int_c^x u_1 g \, d\rho \end{aligned}$$

Wenn  $u_1, u_2$  das Fundamentalsystem mit

$$u_1(c) = u_2^{[1]}(c) = 1 \quad \text{und} \quad u_2(c) = u_1^{[1]}(c) = 0$$

ist, dann gilt  $c_1 = d_1$  und  $c_2 = d_2$ .

**Beweis.** Wir definieren die Funktion

$$h(x) := u_1(x) \int_c^x u_2 g \, d\rho - u_2(x) \int_c^x u_1 g \, d\rho, \quad x \in (a, b)$$

Nun wollen wir  $h^{[1]} = \frac{dh}{d\varsigma}$  berechnen. Durch Integration für Verteilungsfunktionen erhalten wir für alle  $\alpha, \beta \in (a, b)$ ,  $\alpha < \beta$ ,

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta u_1^{[1]}(t) \left( \int_c^t u_2 g \, d\rho \right) d\varsigma(t) &= \left[ u_1 \int_c^\cdot u_2 g \, d\rho \right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u_1(t+) u_2(t) g(t) \, d\rho(t) \\ &= \left[ u_1 \int_c^\cdot u_2 g \, d\rho \right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u_1(t) u_2(t) g(t) \, d\rho(t) \end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit wurde verwendet, dass  $u(t)$  und  $u(t+)$   $\rho$ -fast überall übereinstimmen, denn für Unstetigkeitsstellen  $x \in (a, b)$  von  $u_1 \in \mathfrak{D}_T \subseteq AC_{loc}((a, b), \varsigma)$  gilt immer  $\varsigma(\{x\}) \neq 0$  und wegen der Annahme (3.1.11) folgt  $\rho(\{x\}) = 0$ .

Mit einer analogen Rechnung mit vertauschten Rollen von  $u_1$  und  $u_2$  folgt dann

$$\int_\alpha^\beta \left( u_1^{[1]}(t) \int_c^t u_2 g \, d\rho - u_2^{[1]}(t) \int_c^t u_1 g \, d\rho \right) d\varsigma(t) = \left[ u_1 \int_c^\cdot u_2 g \, d\rho - u_2 \int_c^\cdot u_1 g \, d\rho \right]_\alpha^\beta = [h]_\alpha^\beta$$

Somit ist

$$h^{[1]}(x) = u_1^{[1]}(x) \int_c^x u_2 g \, d\rho - u_2^{[1]}(x) \int_c^x u_1 g \, d\rho, \quad x \in (a, b).$$

Motiviert durch die Darstellung (3.1.9) und unter mehrmaliger Verwendung der partiellen Integration erhalten wir für alle  $\alpha, \beta \in (a, b)$ ,  $\alpha < \beta$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} u_1(t) \left( \int_c^t u_2 g d\rho \right) d(\chi - z\rho)(t) \\
&= \left[ \int_c^{\cdot} u_2 g d\rho \int_c^{\cdot} u_1 d(\chi - z\rho) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_c^{t+} u_1 d(\chi - z\rho) \right) u_2(t) g(t) d\rho(t) \\
&= \left[ \int_c^{\cdot} u_2 g d\rho \left( u_1^{[1]} - u_1^{[1]}(c) \right) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \left( u_1^{[1]}(t+) - u_1^{[1]}(c) \right) u_2(t) g(t) d\rho(t) \\
&= \left[ u_1^{[1]} \int_c^{\cdot} u_2 g d\rho \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u_1^{[1]}(t+) u_2(t) g(t) d\rho(t)
\end{aligned}$$

Mit einer analogen Rechnung mit vertauschten Rollen von  $u_1$  und  $u_2$  erhalten wir somit

$$\int_{\alpha}^{\beta} h d(\chi - z\rho) = [h^{[1]}]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \left( u_1^{[1]}(t+) u_2(t) - u_2^{[1]}(t+) u_1(t) \right) g(t) d\rho(t)$$

Das letzte Integral vereinfacht sich aufgrund der Tatsache, dass die Unstetigkeitsstellen von  $u_1$  und  $u_2$   $\rho$ -Nullmengen sind, zu

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} \left( u_1^{[1]}(t+) u_2(t) - u_2^{[1]}(t+) u_1(t) \right) g(t) d\rho(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( u_1^{[1]}(t+) u_2(t+) - u_2^{[1]}(t+) u_1(t+) \right) g(t) d\rho(t) \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} W(u_1, u_2)(t+) g(t) d\rho(t) = \int_{\alpha}^{\beta} W(u_1, u_2)(t) g(t) d\rho(t),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, da wegen Korollar 3.1.9 (ii) die Wronski-Determinante  $W(u_1, u_2)$  als konstante Funktion stetig ist.

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\alpha}^{\beta} h d\chi - \int_{\alpha}^{\beta} (zh - W(u_1, u_2)g) d\rho = h^{[1]}(\beta) - h^{[1]}(\alpha)$$

und erkennen aus der Darstellung (3.1.8), dass  $(T - z)h = W(u_1, u_2)g$  gilt. Somit ist die angegebene Funktion  $f$  eine Lösung von  $(T - z)f = g$ , wobei bemerkt sei, dass  $W(u_1, u_2) \neq 0$  für das Fundamentalsystem  $u_1, u_2$  von  $(T - z)u = 0$ .

Damit  $f$  die Anfangsbedingungen erfüllt muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden

$$\begin{pmatrix} u_1(c) & u_2(c) \\ u_1^{[1]}(c) & u_2^{[1]}(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Wronski-Determinante  $W(u_1, u_2) \neq 0$  ist, existiert eine eindeutige Lösung  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$  des Gleichungssystems. Durch Nachrechnen ergibt sich

$$c_1 = \frac{W(f, u_2)(c)}{W(u_1, u_2)(c)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{W(u_1, f)(c)}{W(u_1, u_2)(c)}.$$

□

**Satz 3.1.13** (Plücker-Identität).

Für alle  $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathfrak{D}_T$  gilt

$$W(f_1, f_2)W(f_3, f_4) + W(f_1, f_3)W(f_4, f_2) + W(f_1, f_4)W(f_2, f_3) = 0. \quad (3.1.13)$$

Beweis. Wenn wir die Determinante der singulären Matrix

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1^{[1]} & f_2^{[1]} & f_3^{[1]} & f_4^{[1]} \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1^{[1]} & f_2^{[1]} & f_3^{[1]} & f_4^{[1]} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes berechnen, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} [f_1 f_2^{[1]} W(f_3, f_4) - f_1 f_3^{[1]} W(f_2, f_4) + f_1 f_4^{[1]} W(f_2, f_3) \\ &\quad - f_2 f_1^{[1]} W(f_3, f_4) + f_2 f_3^{[1]} W(f_1, f_4) - f_2 f_4^{[1]} W(f_1, f_3) \\ &\quad + f_3 f_1^{[1]} W(f_2, f_4) - f_3 f_2^{[1]} W(f_1, f_4) + f_3 f_4^{[1]} W(f_1, f_2) \\ &\quad - f_4 f_1^{[1]} W(f_2, f_3) + f_4 f_2^{[1]} W(f_1, f_3) - f_4 f_3^{[1]} W(f_1, f_2)] \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich dann sofort die Behauptung.  $\square$

**Definition 3.1.14.**

- (i)  $T$  heißt **regulär bei a** [bzw. **bei b**], wenn für ein (und daher für alle)  $c \in (a, b)$  gilt, dass  $|\rho|((a, c])$ ,  $|\varsigma|((a, c])$ ,  $|\chi|((a, c])$  [bzw.  $|\rho|([c, b))$ ,  $|\varsigma|([c, b))$ ,  $|\chi|([c, b))$ ] endlich sind.
- (ii)  $T$  heißt **regulär**, wenn  $T$  regulär bei  $a$  und bei  $b$  ist.

**Satz 3.1.15.** Sei  $T$  regulär bei  $a$ ,  $z \in \mathbb{C}$  und  $g \in L_{loc}^1((a, b), \rho)$  integrierbar bei  $a$  bzgl.  $|\rho|$ . Dann existiert für jede Lösung  $f \in \mathfrak{D}_T$  von  $(T - z)f = g$  der Limes

$$f(a) := \lim_{x \searrow a} f(x) \quad \text{und} \quad f^{[1]}(a) := \lim_{x \searrow a} f^{[1]}(x)$$

und ist endlich.

(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Eine Lösung  $f \in \mathfrak{D}_T$  von  $(T - z)f = g$  löst die Integralgleichung (3.1.10). Wenn wir nun zeigen, dass die im Beweis von Satz 3.1.5 definierten Funktionen  $m_{12}(z)$ ,  $m_{21}$  und  $f_2$  integrierbar bei  $a$  bzgl.  $\omega = |\varsigma| + |\chi| + |\rho|$  sind, dann können wir Satz 2.2.3 anwenden und erhalten die Aussage.

Wegen der Definition von  $m_{21}$  gilt  $\varsigma(A) = \int_A m_{21} d\omega$ ,  $A \in \mathfrak{B}((a, b))$ , und für  $c \in (a, b)$  erhalten wir daher

$$\int_{(a, c]} |m_{21}| d\omega = |\varsigma|((a, c]) < \infty,$$

also ist  $m_{21}$  integrierbar bei  $a$  bzgl.  $\omega$ . Analog sieht man die Aussage für  $m_{12}(z)$ .

Die Funktion  $f_2$  ist gerade die Radon-Nikodym-Ableitung des Maßes  $\int g d\rho$  bzgl.  $\omega$  und es gilt

$$\int_{(a, c]} |f_2| d\omega = \int_{(a, c]} |g| d|\rho| < \infty,$$



Also ist auch  $f_2$  integrierbar bei  $a$  bzgl.  $\omega$ . □

**Korollar 3.1.16.** Sei  $T$  regulär bei  $a$ ,  $z \in \mathbb{C}$  und  $g \in L_{loc}^1((a, b), \rho)$  integrierbar bei  $a$  bzgl.  $|\rho|$ . Dann existiert eine eindeutige Lösung  $f \in \mathfrak{D}_T$  von

$$(T - z)f = g \quad \text{mit} \quad f(a) = d_1, f^{[1]}(a) = d_2 \quad (3.1.14)$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ .

Sind zusätzlich  $g, d_1, d_2$  und  $z$  reell, dann ist auch die Lösung  $u$  reell.  
(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Korollar 2.2.4. Die zusätzliche Bedingung beim Endpunkt  $b$  ist wegen der Annahme (3.1.11) immer erfüllt. □

**Definition 3.1.17.** Sei  $\rho$  ein positives Borelmaß auf  $(a, b)$ .

- (i) Wir definieren  $\alpha_\rho := \inf \text{supp}(\rho)$  und  $\beta_\rho := \sup \text{supp}(\rho)$ .
- (ii) Wir sagen  $\rho$  hat **Masse bei**  $\alpha_\rho$  [bzw. **bei**  $\beta_\rho$ ], wenn

$$\alpha_\rho > a \text{ und } \rho(\{\alpha_\rho\}) \neq 0 \quad [\text{bzw. } \beta_\rho < b \text{ und } \rho(\{\beta_\rho\}) \neq 0]$$

gilt.

- (iii) Ein Intervall  $(\alpha, \beta)$  mit  $\alpha, \beta \in (a, b)$ ,  $\alpha < \beta$ , heißt ein **Spalt** von  $\text{supp}(\rho)$ , wenn  $(\alpha, \beta) \subseteq \text{supp}(\rho)^c$  ist und die Intervallgrenzen  $\alpha, \beta \in \text{supp}(\rho)$  liegen.

Wir werden nun die bisher getroffenen Annahmen and die Maße  $\rho, \varsigma$  und  $\chi$  zusammenfassen und noch einige neue hinzunehmen, die wir für die späteren Aussagen und Beweise benötigen werden.

**Annahme 3.1.18.**

- (i)  $\rho$  ist ein positives Maß und der Träger von  $\rho$  besteht aus mehr als einem Punkt.
- (ii)  $\varsigma$  ist ein signiertes Maß.
- (iii)  $\chi$  ist ein signiertes Maß.
- (iv) Das Maß  $\varsigma$  hat keine gemeinsamen Punktmassen mit  $\chi$  und  $\rho$ , d.h.

$$\varsigma(\{x\})\chi(\{x\}) = \varsigma(\{x\})\rho(\{x\}) = 0.$$

- (v) Für jeden Spalt  $(\alpha, \beta)$  von  $\text{supp}(\rho)$  und jede Funktion  $f \in \mathfrak{D}_T$  mit  $f(\alpha-) = f(\beta+) = 0$  folgt auch  $f(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha, \beta)$ .
- (vi) Entweder (A.1.a) oder (A.1.b) ist erfüllt.

**Bemerkung 3.1.19.**

(i) Wegen der Reellwertigkeit der Maße  $\rho$ ,  $\chi$  und  $\varsigma$  ist  $T$  ein reeller Differentialausdruck, d.h.

$$f \in \mathfrak{D}_T \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathfrak{D}_T \quad \text{und} \quad T\bar{f} = \overline{Tf}.$$

- (ii)  $\rho$  nehmen wir als positives Maß an, damit wir später im Hilbertraum  $L^2((a, b), \rho)$  arbeiten können und die ganze Hilbertraumtheorie zur Verfügung haben.
- (iii) Die Annahme, dass der Träger  $\text{supp}(\rho)$  aus mehr als einem Punkt besteht, ist wichtig, da sonst  $L^1_{loc}((a, b), \rho)$  eindimensional wäre und daher alle Lösungen von  $(T - z)u = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , linear abhängig wären.
- (iv) Die Spaltbedingung 3.1.18 (v) wird eine entscheidende Rolle beim Lemma 3.2.1 und damit auch beim Satz 3.2.4 spielen.
- (v) Die Annahme (A.1.a) oder (A.1.b) wird lediglich für die Wohldefiniertheit des Sturm-Liouville-Operators gefordert.

**Lemma 3.1.20.** *Unter der Voraussetzung, dass für jeden Spalt  $(\alpha, \beta)$  von  $\text{supp}(\rho)$*

$$\varsigma|_{[\alpha, \beta]}, \chi|_{[\alpha, \beta]} \quad \text{oder} \quad -\varsigma|_{[\alpha, \beta]}, -\chi|_{[\alpha, \beta]}$$

*positive Maße sind, gilt die Annahme 3.1.18 (v).*

Beweis. Sei  $(\alpha, \beta)$  ein Spalt von  $\text{supp}(\rho)$  und  $f \in \mathfrak{D}_T$  mit  $f(\alpha-) = f(\beta+) = 0$ .

Mit  $\rho(\alpha, \beta) = 0$  und  $f(\alpha) = f(\alpha-) = 0$  folgt nach einer analogen Rechnung wie im Beweis von Satz 3.1.12 die folgende Gleichheit

$$\begin{aligned} \overline{f(\beta)} Tf(\beta) \rho(\{\beta\}) &= \int_{[\alpha, \beta]} Tf(t) \overline{f(t)} d\rho(t) \\ &= \int_{[\alpha, \beta]} \|f^{[1]}(t)\|^2 d\varsigma(t) + \int_{[\alpha, \beta]} \|f(t)\|^2 d\chi(t). \end{aligned}$$

Falls  $f$  bei  $\beta$  unstetig ist, gilt wegen Bemerkung 3.1.3 (iv)  $\varsigma(\{\beta\}) \neq 0$  und wegen Annahme (3.1.11) folgt  $\rho(\{\beta\}) = 0$ . Ist  $f$  jedoch stetig bei  $\beta$ , so gilt  $f(\beta) = f(\beta+) = 0$ . Auf jeden Fall ist die linke Seite der Gleichheit 0 und aufgrund unserer Voraussetzungen müssen beide Integrale auf der rechten Seite verschwinden. Wir folgern daraus, dass  $f^{[1]} = \frac{df}{d\varsigma} = 0$  fast überall bzgl.  $\varsigma|_{[\alpha, \beta]}$ . Wegen der Darstellung (3.1.3) ist daher  $f$  konstant auf  $[\alpha, \beta]$  und wegen  $f(\alpha) = f(\alpha-) = 0$  gleich 0.  $\square$

### 3.2 Die minimale und maximale Relation $T_{\min}$ und $T_{\max}$

Unser Ziel ist es nun lineare Operatoren im Hilbertraum  $L^2((a, b), \rho)$  einzuführen, die durch den Differentialausdruck  $T$  erzeugt werden.

Als ersten Schritt wollen wir versuchen die Abbildung

$$T: \mathfrak{D}_T \rightarrow L^1_{loc}((a, b), \rho)$$

in eine Abbildung

$$\tilde{T}: L_{loc}^1((a, b), \rho) \cap \mathfrak{D}_T \rightarrow L_{loc}^1((a, b), \rho)$$

überzuführen, indem wir  $\mathfrak{D}_T$  in  $L_{loc}^1((a, b), \rho)$  einbetten. Jedoch wird uns das nächste Lemma zeigen, dass dies nicht immer zum Ziel führen muss.

**Lemma 3.2.1.**

(i) Sei  $f \in \mathfrak{D}_T$  mit  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$ . Dann gilt für gewisse  $c_a, c_b \in \mathbb{C}$

$$Tf = \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho \text{ weder bei } \alpha_\rho \text{ noch bei } \beta_\rho \text{ Masse hat,} \\ c_a \mathbb{1}_{\{\alpha_\rho\}}, & \text{falls } \rho \text{ nur bei } \alpha_\rho \text{ Masse hat,} \\ c_b \mathbb{1}_{\{\beta_\rho\}}, & \text{falls } \rho \text{ nur bei } \beta_\rho \text{ Masse hat,} \\ c_a \mathbb{1}_{\{\alpha_\rho\}} + c_b \mathbb{1}_{\{\beta_\rho\}}, & \text{falls } \rho \text{ bei } \alpha_\rho \text{ und bei } \beta_\rho \text{ hat,} \end{cases}$$

fast überall bzgl.  $\rho$  gilt.

Falls  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$  hat, dann ist

$$c_a = Tf(\alpha_\rho) = \frac{f^{[1]}(\alpha_\rho^-)}{\rho(\{\alpha_\rho\})}. \quad (3.2.1)$$

Falls  $\rho$  Masse bei  $\beta_\rho$  hat, dann ist

$$c_b = Tf(\beta_\rho) = -\frac{f^{[1]}(\beta_\rho^+)}{\rho(\{\beta_\rho\})}. \quad (3.2.2)$$

(ii) Habe  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$ . Für jede Konstante  $c_\alpha \in \mathbb{C}$  existiert eine Funktion  $f \in \mathfrak{D}_T$  mit  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$ , sodass

$$Tf = c_\alpha \mathbb{1}_{\{\alpha_\rho\}}$$

fast überall bzgl.  $\rho$  gilt.

(Ein analoges Resultat gilt auch, wenn  $\rho$  Masse bei  $\beta_\rho$  hat.)

Beweis.

(i) Sei  $f \in \mathfrak{D}_T$  mit  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$  gegeben. Wir zeigen zuerst, dass  $f(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha_\rho, \beta_\rho)$  gilt.

Für  $x \in \text{supp}(\rho)$  mit  $\rho(\{x\}) \neq 0$  gilt offensichtlich  $f(x) = 0$ . Mit Lemma 3.1.1 (ii) folgt auch  $f(x) = 0$  für alle  $x \in \text{supp}(\rho)^\circ$ .

Sei nun  $(\alpha, \beta)$  ein Spalt von  $\text{supp}(\rho)$ , also  $\alpha, \beta \in \text{supp}(\rho)$ . Mit analogen Überlegungen wie in Lemma 3.1.1 muss  $f(\alpha^-) = f(\beta^+) = 0$  sein. Mit Annahme 3.1.18 (v) gilt somit  $f(x) = 0$  für alle  $x \in [\alpha, \beta]$ .

Somit sind alle Punkte  $x \in \text{supp}(\rho)$ , für die möglicherweise  $f(x) \neq 0$  gilt, jene Randpunkte von  $\text{supp}(\rho)$ , für die monotone Folgen  $(x_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(x_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\text{supp}(\rho)$  mit  $x_n^+ \searrow x$  und  $x_n^- \nearrow x$  existieren. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt entweder  $f(x_n^- +) = 0$  oder  $f(x_n^- -) = 0$ . Somit erhalten wir entweder  $f(x^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^- -) = 0$  oder  $f(x^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^- +) = 0$ . Auf jeden Fall ist  $f(x^-) = 0$ . Ebenso zeigt man auch  $f(x^+) = 0$ .

Insgesamt haben wir bereits  $f(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha_\rho, \beta_\rho)$  gezeigt.

Die Funktion  $\psi_f$ , definiert in (3.1.2), ist mit der Annahme (A.1.a) oder (A.1.b) eindeutig bestimmt in  $AC_{loc}((a, b), \rho)$ , daher muss  $\psi_f(x) = 0$ ,  $x \in (\alpha_\rho, \beta_\rho)$  sein und damit auch  $f^{[1]}(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha_\rho, \beta_\rho)$ .

Aus

$$\int_{(\alpha_\rho, x)} Tf(t) d\rho(t) = \psi_f(x) - \psi_f(\alpha_\rho+), \quad x \in (\alpha_\rho, \beta_\rho).$$

folgt nun, dass  $Tf = 0$  fast überall bzgl.  $\rho|_{(\alpha_\rho, \beta_\rho)}$ .

Abschließend zeigen wir noch  $f(\alpha_\rho) = 0$  für  $\alpha_\rho > a$ , um (3.2.1) zu erhalten. Sei also  $\alpha_\rho > a$ . Es gilt

$$f(\alpha_\rho) = f(\alpha_\rho+) - \varsigma(\{\alpha_\rho\})f^{[1]}(\alpha_\rho) = -\varsigma(\{\alpha_\rho\})f^{[1]}(\alpha_\rho)$$

Falls  $\varsigma(\{\alpha_\rho\}) = 0$  ist, sind wir fertig. Sei also  $\varsigma(\{\alpha_\rho\}) \neq 0$ . Wegen Annahme (3.1.11) gilt dann  $\chi(\{\alpha_\rho\}) = \rho(\{\alpha_\rho\}) = 0$  und wegen Bemerkung 3.1.3 (iv) ist  $f^{[1]}$  stetig bei  $\alpha_\rho$ , d.h.  $f^{[1]}(\alpha_\rho) = f^{[1]}(\alpha_\rho+) = 0$ . Also folgt dann ebenso  $f(\alpha_\rho) = 0$ .

Habe  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$ . Aus (3.1.6) für  $x = \alpha_\rho$  folgt dann

$$0 = f^{[1]}(\alpha_\rho+) = f^{[1]}(\alpha_\rho-) - Tf(\alpha_\rho)\rho(\{\alpha_\rho\})$$

und durch Umformen die Formel (3.2.1).

(ii) Habe  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$ . Sei  $c_a \in \mathbb{C}$  und definiere die Funktion  $f$  durch

$$f(x) = \begin{cases} c_a \rho(\{\alpha_\rho\}) u_a, & \text{für } a < x \leq \alpha_\rho, \\ 0, & \text{für } \alpha_\rho < x < b, \end{cases}$$

wobei  $u_a$  die Lösung von  $Tu = 0$  mit Anfangswerten  $u_a(\alpha-) = 0$  und  $u_a^{[1]}(\alpha-) = 1$  ist. Dann ist  $f \in \mathfrak{D}_T$  mit  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$  und es gilt  $f^{[1]}(\alpha-) = c_a \rho(\{\alpha_\rho\})$ . Mit der Formel (3.2.1) erhalten wir sofort  $Tf = c_a \mathbb{1}_{\{\alpha_\rho\}}$  fast überall bzgl.  $\rho$ .

□

**Bemerkung 3.2.2.** Hat  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$  oder bei  $\beta_\rho$ , dann zeigt uns das Lemma 3.2.1, dass

$$\tilde{T}: L^1_{loc}((a, b), \rho) \cap \mathfrak{D}_T \rightarrow L^1_{loc}((a, b), \rho)$$

nicht wohldefiniert ist.  $\tilde{T}$  ist nämlich genau dann wohldefiniert und damit ein Operator, wenn  $\rho$  weder bei  $\alpha_\rho$  noch bei  $\beta_\rho$  Masse hat.

Damit wir dieses Problem umgehen können und da es eine schöne Theorie dazu gibt, bietet es sich an,  $\tilde{T}$  als lineare Relation aufzufassen, vgl. das Kapitel 1.3 über lineare Relationen.

Als ersten Schritt definieren wir die folgende lineare Relation.

**Definition 3.2.3.** Sei  $T_{loc} \leq L^1_{loc}((a, b), \rho) \times L^1_{loc}((a, b), \rho)$  jene lineare Relation, die durch

$$T_{loc} = \{(f_{L^1}, Tf): f \in \mathfrak{D}_T\}$$

definiert wird.

**Satz 3.2.4.** *Die lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_T &\rightarrow T_{\text{loc}} \\ f &\mapsto (f_{L^1}, Tf) \end{aligned}$$

*ist bijektiv.*

Beweis. Offensichtlich ist die Abbildung linear und surjektiv. Um die Injektivität nachzuprüfen, wählen wir  $f \in \mathfrak{D}_T$ , sodass  $f = 0$  und  $Tf = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$  gilt. Wie im Beweis von Lemma 3.2.1 ist  $f(x) = 0$  und daher auch  $f^{[1]}(x) = 0$  für alle  $x \in (\alpha_\rho, \beta_\rho)$ .

Wenn wir  $c \in (\alpha_\rho, \beta_\rho)$  wählen, dann ist  $f$  gerade eine Lösung des Anfangswertproblems  $Tf = 0$  mit den Anfangsbedingungen  $f(c) = 0$  und  $f^{[1]}(c) = 0$ . Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz 3.1.5 muss daher  $f = 0$  sein und zwar als Element von  $\mathfrak{D}_T$ .  $\square$

**Bemerkung 3.2.5.** In weiterer Folge werden wir daher die Elemente von  $T_{\text{loc}}$  mit den Elementen von  $\mathfrak{D}_T$  identifizieren.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir von nun an für Elemente von  $T_{\text{loc}}$  immer  $\mathfrak{f} = (f, Tf)$  statt  $\mathfrak{f} = (f_{L^1}, Tf)$ . Für  $\mathfrak{f} \in T_{\text{loc}}$  bezeichnet dann  $f$  die zu  $\mathfrak{f}$  gehörende eindeutig bestimmte Funktion  $f \in \mathfrak{D}_T$ . Dabei schreiben wir Elemente von  $T_{\text{loc}}$  immer mit frakturiellen Buchstaben  $\mathfrak{f}$ ,  $\mathfrak{g}$  oder  $\mathfrak{h}$ . Für Elemente von  $\mathfrak{D}_T$  verwenden wir hingegen die kleingeschriebenen Buchstaben  $f$ ,  $g$  oder  $h$ .

**Satz 3.2.6.** *Der Multi-Valued-Part  $\text{mul}(T_{\text{loc}}) := \{g \in L^1_{\text{loc}}((a, b), \rho) : (0, g) \in T_{\text{loc}}\}$  von  $T_{\text{loc}}$  ist gegeben als*

$$\text{mul}(T_{\text{loc}}) = \text{span} \{ \mathbb{1}_{\{\alpha_\rho\}}, \mathbb{1}_{\{\beta_\rho\}} \}.$$

*Insbesondere gilt*

$$\dim \text{mul}(T_{\text{loc}}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho \text{ weder bei } \alpha_\rho \text{ noch bei } \beta_\rho \text{ Masse hat} \\ 1, & \text{falls } \rho \text{ nur bei } \alpha_\rho \text{ bzw. nur bei } \beta_\rho \text{ Masse hat} \\ 2, & \text{falls } \rho \text{ bei } \alpha_\rho \text{ und bei } \beta_\rho \text{ Masse hat} \end{cases}$$

*und  $T_{\text{loc}}$  ist genau dann ein Operator, wenn  $\rho$  keine Masse in  $\alpha_\rho$  und  $\beta_\rho$  besitzt.*

Beweis. Mit Lemma 3.2.1 erhalten wir sofort die Aussage.  $\square$

**Bemerkung 3.2.7.** Für zwei Elemente  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in T_{\text{loc}}$  definieren wir die Wronski-Determinante als

$$W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(x) := W(f, g)(x) = f(x)g^{[1]}(x) - f^{[1]}(x)g(x), \quad x \in (a, b).$$

Wie im klassischen Fall gilt auch hier die Lagrange-Identität

$$W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(\beta) - W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(\alpha) = \int_\alpha^\beta g(t)Tf(t) - f(t)Tg(t) d\rho(t) \quad (3.2.3)$$

für alle  $\alpha, \beta \in (a, b)$  mit  $\alpha < \beta$ .

Außerdem erhalten wir aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz 3.1.5 und aus Bemerkung 3.1.11

$$\text{ran}(T - z) = L^1_{\text{loc}}((a, b), \rho) \quad \text{und} \quad \dim \ker(T - z) = 2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wir schränken nun  $T_{\text{loc}} \leq L^1_{\text{loc}}((a, b), \rho) \times L^1_{\text{loc}}((a, b), \rho)$  auf  $L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho)$  ein, um eine lineare Relation auf dem Hilbertraum  $L^2((a, b), \rho)$  zu erhalten und die umfangreiche Theorie der Hilberträume anwenden zu können.

Mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$  bezeichnen wir von nun an das Skalarprodukt auf  $L^2((a, b), \rho)$ .

**Definition 3.2.8.** Sei  $T_{\text{max}} \leq L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho)$  jene lineare Relation, die durch

$$T_{\text{max}} := \{(f, Tf) \in T_{\text{loc}} : f, Tf \in L^2((a, b), \rho)\} = T_{\text{loc}} \cap L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho)$$

definiert ist.

**Bemerkung 3.2.9.** Im Allgemeinen ist  $T_{\text{max}}$  kein Operator, denn es gilt

$$\text{mul}(T_{\text{max}}) = \text{mul}(T_{\text{loc}}).$$

Diese Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass alle Elemente von  $\text{mul}(T_{\text{loc}}) = \text{span}\{\mathbb{1}_{\{\alpha_\rho\}}, \mathbb{1}_{\{\beta_\rho\}}\}$  quadratisch integrierbar bzgl.  $\rho$  sind.

Damit wir eine symmetrische lineare Relation erhalten, schränken wir  $T_{\text{max}}$  weiter ein.

**Definition 3.2.10.** Sei  $T_0 \leq L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho)$  jene lineare Relation, die durch

$$T_0 := \{(f, Tf) \in T_{\text{loc}} : f \in \mathfrak{D}_T, \text{supp}(f) \text{ ist kompakt in } (a, b)\}$$

definiert ist.

**Bemerkung 3.2.11.**

- (i) Wie sich später herausstellen wird, ist  $T_0$  sogar ein Operator, d.h.  $\text{mul}(T_0) = \{0\}$ .
- (ii) Da  $T$  ein reeller Differentialausdruck im Sinne von Bemerkung 3.1.19 (i) ist, sind auch die linearen Relationen  $T_{\text{max}}$  und  $T_0$  reell. D.h. es gilt  $f \in T_{\text{max}}$  [bzw.  $f \in T_0$ ] genau dann, wenn  $\bar{f} := (\bar{f}, \overline{Tf}) \in T_{\text{max}}$  [bzw.  $\bar{f} \in T_0$ ].

**Definition 3.2.12.**

- (i) Eine messbare Funktion  $f$  auf  $(a, b)$  heißt **quadratisch integrierbar bei a** [bzw. **bei b**] bzgl.  $\rho$ , wenn  $f \in L^2((a, c), \rho)$  [bzw.  $f \in L^2((c, b), \rho)$ ] für alle  $c \in (a, b)$  gilt.
- (ii) Außerdem sagen wir, dass ein  $f \in T_{\text{loc}}$  in  $T_{\text{max}}$  **nahe bei a** [bzw. **nahe bei b**] liegt, wenn sowohl  $f$  als auch  $Tf$  quadratisch integrierbar bei  $a$  [bzw. bei  $b$ ] bzgl.  $\rho$  sind.

**Bemerkung 3.2.13.** Für  $f \in L^2((a, b), \rho)$  ist  $f$  offensichtlich quadratisch integrierbar bei  $a$  und bei  $b$ . Damit gilt für  $f \in T_{\text{max}}$ , dass  $f$  in  $T_{\text{max}}$  sowohl nahe bei  $a$  als auch nahe bei  $b$  liegt.

**Satz 3.2.14.** Sei  $T$  regulär bei  $a$  und liege  $\mathfrak{f}$  in  $T_{\max}$  nahe bei  $a$ . Dann existieren die Limiten

$$f(a) := \lim_{x \searrow a} f(x) \quad \text{und} \quad f^{[1]}(a) := \lim_{x \searrow a} f^{[1]}(x)$$

und sind endlich.

(Ein analoges Resultat gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Unter diesen Annahmen gilt  $Tf \in L^2((a, c], \rho)$  und  $\rho((a, c])$  ist endlich für alle  $c \in (a, b)$ . Mit der Jensen-Ungleichung oder mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt sofort  $Tf \in L^1((a, c], \rho)$  für alle  $c \in (a, b)$ , d.h.  $Tf$  ist integrierbar bei  $a$ . Mit Satz 3.1.15 folgt sofort die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.2.15.**

(i) Liegen  $\mathfrak{f}$  und  $\mathfrak{g}$  in  $T_{\max}$  nahe bei  $a$ , dann existiert der Limes

$$W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(a) := \lim_{x \searrow a} W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(x)$$

und ist endlich.

Sei zusätzlich  $T$  regulär bei  $a$ , dann gilt

$$W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(a) = f(a)\bar{g}^{[1]}(a) - f^{[1]}(a)\bar{g}(a).$$

(Ein analoges Resultat gilt auch für  $b$ .)

(ii) Sind  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in T_{\max}$ , dann gilt

$$\langle Tf, g \rangle_\rho - \langle f, Tg \rangle_\rho = W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(b) - W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(a).$$

Beweis.

(i) Da  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$  in  $T_{\max}$  nahe bei  $a$  liegen, sind  $f, Tf, g, Tg \in L^2((a, \beta), \rho)$  für ein  $\beta \in (a, b)$ . Wegen dem Satz über die dominierte Konvergenz kann für  $\alpha \in (a, \beta)$  der Limes  $\alpha \rightarrow a$  auf der rechten Seite der Lagrange-Identität (3.2.3) gebildet werden und dieser Limes ist endlich. Ist  $T$  zusätzlich regulär, dann folgt mit Satz 3.2.14 sofort die zweite Aussage.

(ii) Sind  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in T_{\max}$ , so liegen wegen Bemerkung 3.2.13  $\mathfrak{f}$  und  $\mathfrak{g}$  in  $T_{\max}$  nahe bei  $a$  und bei  $b$ , also existiert sowohl  $W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(a)$  als auch  $W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(b)$ . Die Lagrange-Identität (3.2.3) liefert nun die Behauptung durch Bildung der Limiten  $\alpha \rightarrow a$  und  $\beta \rightarrow b$ .  $\square$

Damit wir die Adjungierte von  $T_0$ , vgl. Abschnitt 1.3.2,

$$T_0^* = \{(f, g) \in L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho) : \langle f, Tu \rangle_\rho = \langle g, u \rangle_\rho \forall (u, Tu) \in T_0\}$$

berechnen können, benötigen wir das folgende Lemma aus der Linearen Algebra.

**Lemma 3.2.16.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$  und  $L_1, \dots, L_n, L \in V^*$ .  
Dann folgt aus  $\bigcap_{i=1}^n \ker L_i \subseteq \ker L$ , dass  $L \in \text{span}\{L_1, \dots, L_n\}$ .

Beweis. ObdA seien  $L_1, \dots, L_n$  linear unabhängig in  $V^*$ . Definiere den Untervektorraum  $U := \bigcap_{i=1}^n \ker L_i$  von  $V$ , dann gilt  $\text{codim } U = n$ . Der Komplementärraum  $W$  von  $U$ , d.h.  $W \dot{+} U = V$  und  $W \cap U = \{0\}$ , ist daher  $n$ -dimensional.

Wähle eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $W$ , dann hat das lineare Gleichungssystem

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(v_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

eine eindeutige Lösung  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , da  $L_1, \dots, L_n$  linear unabhängig sind.

Daher gilt  $L(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(v)$  zumindest für alle  $v \in W$ , aber wegen unserer Annahme auch für alle  $v \in U$ , daher für alle  $v \in V$ . Also ist  $L = \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i$ .  $\square$

**Satz 3.2.17.** Die Adjungierte von  $T_0$  ist genau  $T_{\max}$ , d.h.  $T_0^* = T_{\max}$ .

Beweis. Aus Lemma 3.2.15 (ii) folgt für alle  $\mathfrak{g} \in T_{\max}$  und alle  $\mathfrak{f} \in T_0 \subseteq T_{\max}$

$$\langle Tf, g \rangle_\rho = \langle f, Tg \rangle_\rho = \lim_{\beta \nearrow b} W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(\beta) - \lim_{\alpha \searrow a} W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(\alpha) = 0,$$

da mit  $f$  und  $Tf$  auch  $W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})$  einen kompakten Träger in  $(a, b)$  hat. Daher gilt  $T_{\max} \subseteq T_0^*$ . Sei nun  $(f, g) \in T_0^*$  gegeben,  $\tilde{f} \in \mathfrak{D}_T$  eine Lösung von  $T\tilde{f} = g$  und  $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}_T$  ein Fundamentalsystem von  $Tu = 0$  mit  $W(u_1, u_2) = 1$ . Bezeichne mit  $L_0^2((a, b), \rho)$  den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen bzgl.  $\rho$  mit kompaktem Träger in  $(a, b)$ .

Definiere die linearen Funktionale

$$L(h) = \langle h, f - \tilde{f} \rangle_\rho = \int_{(a,b)} \overline{(f(t) - \tilde{f}(t))} h(t) d\rho(t), \quad h \in L_0^2((a, b), \rho)$$

$$L_j(h) = \langle h, u_j \rangle_\rho = \int_{(a,b)} \overline{u_j(t)} h(t) d\rho(t), \quad h \in L_0^2((a, b), \rho), \quad j = 1, 2.$$

Diese Funktionale sind wohldefiniert für alle  $h \in L_0^2((a, b), \rho)$ , da die linksstetigen Funktionen  $\tilde{f}$ ,  $u_1$  und  $u_2$  auf der kompakten Menge  $\text{supp}(h)$  beschränkt sind.

Wir zeigen nun  $\ker L_1 \cap \ker L_2 \subseteq \ker L$ . Sei also  $h \in \ker L_1 \cap \ker L_2$  und wähle  $c \in (a, \inf \text{supp } h)$ . Dann ist

$$u(x) = \overline{u_1(x)} \int_c^x \overline{u_2(t)} h(t) d\rho(t) - \overline{u_2(x)} \int_c^x \overline{u_1(t)} h(t) d\rho(t), \quad x \in (a, b),$$

wegen Satz 3.1.12 eine Lösung von  $Tu = h$  und  $u$  hat einen kompakten Träger, da  $g$  einen kompakten Träger hat und in  $\ker L_1 \cap \ker L_2$  liegt. Daher ist  $u \in T_0$ .

Unter Verwendung der Lagrange-Identität (3.2.3) für Elemente von  $T_{\text{loc}}$  und der Definition der Adjungierten einer linearen Relation folgt

$$\begin{aligned} \int_{(a,b)} \overline{(f(t) - \tilde{f}(t))} Tu(t) d\rho(t) &= \langle Tu, f \rangle_\rho - \int_{(a,b)} \overline{\tilde{f}(t)} Tu(t) d\rho(t) \\ &= \langle u, Tf \rangle_\rho - \int_{(a,b)} \overline{T\tilde{f}(t)} u(t) d\rho(t) = 0 \end{aligned}$$



Somit ist  $h \in \ker L$ .

Wegen Lemma 3.2.16 existieren  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ , sodass

$$\int_{(a,b)} \overline{(f(t) - \tilde{f}(t) - c_1 u_1(t) - c_2 u_2(t))} h(t) d\rho(t) = 0,$$

für alle  $h \in L_0^2((a, b), \rho)$ , woraus folgt, dass  $f$  und  $\tilde{f} + c_1 u_1 + c_2 u_2$  fast überall bzgl.  $\rho$  übereinstimmen. Wegen  $T(\tilde{f} + c_1 u_1 + c_2 u_2) = g$  gilt  $(f, g) = (\tilde{f} + c_1 u_1 + c_2 u_2, g) \in T_{\text{loc}}$ . Damit gilt  $(f, g) \in T_{\text{loc}} \cap L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho) = T_{\text{max}}$ .  $\square$

**Definition 3.2.18.** Sei  $T_{\text{min}} \subseteq L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho)$  der Abschluss von  $T_0$ , d.h.  $\overline{T_{\text{min}}} = T_0$ .

**Bemerkung 3.2.19.** Insbesondere erkennen wir aus dem vorigen Satz, dass  $T_{\text{max}}$  abgeschlossen ist. Außerdem ist  $T_0$  symmetrisch, denn

$$T_0 \subseteq T_{\text{max}} = T_0^*.$$

Die minimale Relation  $T_{\text{min}}$  ist als Abschluss von  $T_0$  eine abgeschlossene, symmetrische lineare Relation und es gilt

$$T_{\text{min}} = \overline{T_0} = T_0^{**} = T_{\text{max}}^* \quad \text{und} \quad T_{\text{min}}^* = T_{\text{max}}^{**} = T_{\text{max}}.$$

**Lemma 3.2.20.** Wenn  $f_a$  in  $T_{\text{max}}$  nahe bei  $a$  und  $f_b$  in  $T_{\text{max}}$  nahe bei  $b$  liegt, dann existiert ein  $f \in T_{\text{max}}$ , sodass  $f = f_a$  in einer Umgebung von  $a$  und  $f = f_b$  in einer Umgebung von  $b$ .

Beweis. Sei  $u_1, u_2$  ein Fundamentalsystem von  $Tu = 0$  mit  $W(u_1, u_2) = 1$ .

Zuerst zeigen wir, dass  $\alpha, \beta \in (a, b)$  mit  $\alpha < \beta$  existieren, sodass die Funktionale

$$F_j^{\alpha, \beta}(g) := \int_{\alpha}^{\beta} u_j(t) g(t) d\rho(t), \quad g \in L^2((a, b), \rho), \quad j = 1, 2,$$

linear unabhängig sind.

Angenommen, diese Behauptung gilt nicht. Dann existiert für alle  $\alpha, \beta \in (a, b)$  mit  $\alpha < \beta$  eine Konstante  $\lambda_{\alpha, \beta}$ , sodass

$$F_1^{\alpha, \beta}(g) = \lambda_{\alpha, \beta} F_2^{\alpha, \beta}(g), \quad g \in L^2((a, b), \rho)$$

gilt. Man erkennt aber sofort, dass  $\lambda_{\alpha, \beta}$  unabhängig von  $\alpha$  und  $\beta$  ist, daher schreiben wir nur mehr  $\lambda$ . Somit folgt

$$\int_{\alpha}^{\beta} [u_1 - \lambda u_2] g d\rho = 0$$

für alle  $g \in L^2((a, b), \rho)$  und alle  $\alpha, \beta \in (a, b)$  mit  $\alpha < \beta$ . Daher ist  $u_1 - \lambda u_2 = 0$  in  $L^2((a, b), \rho)$  und mit der Identifikation aus Satz 3.2.4 auch als Element von  $\mathfrak{D}_T$ . Das ist aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von  $u_1$  und  $u_2$ .

Wir wählen daher  $\alpha, \beta \in (a, b)$  mit  $\alpha < \beta$ , sodass  $F_1 := F_1^{\alpha, \beta}$  und  $F_2 := F_2^{\alpha, \beta}$  linear unabhängig sind.

Als nächsten Schritt zeigen wir, dass für alle  $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{C}$  immer ein  $u \in \mathfrak{D}_T$  existiert, sodass

$$u(\alpha) = d_1, \quad u^{[1]}(\alpha), \quad u(\beta) = d_3, \quad \text{und} \quad u^{[1]}(\beta) = d_4.$$

Dazu sei  $g \in L^2((a, b), \rho)$  und  $u \in \mathfrak{D}_T$  eine Lösung von  $Tu = g$  mit den Anfangsbedingungen

$$u(\alpha) = d_1 \quad \text{und} \quad u^{[1]}(\alpha) = d_2.$$

Mit Satz 3.1.12 lässt sich  $u$  bei  $\beta$  darstellen als

$$\begin{pmatrix} u(\beta) \\ u^{[1]}(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 u_1(\beta) + c_2 u_2(\beta) \\ c_1 u_1^{[1]}(\beta) + c_2 u_2^{[1]}(\beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(\beta) & -u_2(\beta) \\ u_1^{[1]}(\beta) & -u_2^{[1]}(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} u_2 g \, d\rho \\ \int_{\alpha}^{\beta} u_1 g \, d\rho \end{pmatrix},$$

wobei  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  die Konstanten aus dem Satz sind. Also erfüllt  $u$  genau dann die Randbedingungen bei  $\beta$ , wenn

$$\begin{pmatrix} F_2(g) \\ F_1(g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} u_2 g \, d\rho \\ \int_{\alpha}^{\beta} u_1 g \, d\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(\beta) & -u_2(\beta) \\ u_1^{[1]}(\beta) & -u_2^{[1]}(\beta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d_3 - c_1 u_1(\beta) - c_2 u_2(\beta) \\ d_4 - c_1 u_1^{[1]}(\beta) - c_2 u_2^{[1]}(\beta) \end{pmatrix},$$

gilt. Da die Funktionale  $F_1$  und  $F_2$  linear unabhängig sind, existiert ein  $g \in L^2((a, b), \rho)$ , sodass die obige Gleichung erfüllt ist.

Wir wählen uns daher  $u \in \mathfrak{D}_T$ , sodass  $u(\alpha) = f_a(\alpha)$ ,  $u^{[1]}(\alpha) = f_a^{[1]}(\alpha)$ ,  $u(\beta) = f_b(\beta)$  und  $u^{[1]}(\beta) = f_b^{[1]}(\beta)$ .

Wenn wir nun  $f$  durch

$$f(x) = \begin{cases} f_a(x), & \text{für } x < \alpha, \\ u(x), & \text{für } \alpha \leq x < \beta, \\ f_b(x), & \text{für } \beta \leq x, \end{cases}$$

definieren, dann ist  $\mathfrak{f} := (f, Tf) \in T_{\max}$ . □

**Satz 3.2.21.** *Die minimale Relation  $T_{\min}$  ist gegeben durch*

$$T_{\min} = \{\mathfrak{f} \in T_{\max} : W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(a) = W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(b) = 0 \quad \forall \mathfrak{g} \in T_{\max}\}.$$

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{f} \in T_{\min} = T_{\max}^* \subseteq T_{\max}$ . Dann gilt

$$0 = \langle Tf, g \rangle_{\rho} - \langle f, Tg \rangle_{\rho} = W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(b) - W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(a) \tag{3.2.4}$$

für alle  $\mathfrak{g} \in T_{\max}$ . Sei nun ein  $\mathfrak{g} \in T_{\max}$  gegeben, dann existiert nach Lemma 3.2.20 ein  $\mathfrak{g}_a \in T_{\max}$ , sodass  $\bar{g}_a = g$  in einer Umgebung von  $a$  und  $\bar{g}_a = 0$  in einer Umgebung von  $b$ . Damit erhalten wir

$$W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(a) = W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}}_a)(a) = W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}}_a)(b) = W(\mathfrak{f}, 0)(b) = 0,$$

wobei die zweite Gleichheit wegen (3.2.4) gilt. Analog folgt auch  $W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(b) = 0$  für alle  $\mathfrak{g} \in T_{\max}$ . Sei nun umgekehrt  $\mathfrak{f} \in T_{\max}$ , sodass  $W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(a) = W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(b) = 0$  für alle  $\mathfrak{g} \in T_{\max}$ . Dann ist

$$\langle Tf, g \rangle_{\rho} - \langle f, Tg \rangle_{\rho} = W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(b) - W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{g}})(a) = 0,$$

also  $\mathfrak{f} \in T_{\max}^* = T_{\min}$ . □

**Lemma 3.2.22.** *Sei  $T$  regulär bei  $a$  und  $f \in T_{\max}$ . Dann gilt*

$$f(a) = f^{[1]}(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{g} \in T_{\max} : W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(a) = 0.$$

*(Ein analoges Resultat gilt auch für  $b$ .)*

Beweis. Wegen der Regularität von  $T$  bei  $a$  gilt  $W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(a) = f(a)g^{[1]}(a) - f^{[1]}(a)g(a)$  für alle  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in T_{\max}$  nach Satz 3.2.15. Somit folgt aus  $f(a) = f^{[1]}(a) = 0$  offensichtlich  $W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(a) = 0$  für alle  $\mathbf{g} \in T_{\max}$ .

Für die umgekehrte Folgerung wählen wir  $\mathbf{g} \in T_{\max}$  nach Lemma 3.2.20, sodass  $g$  in einer Umgebung von  $a$  mit der Lösung von  $Tu = 0$  mit  $u(a) = 1, u^{[1]}(a) = 0$  bzw. mit  $u(a) = 0, u^{[1]}(a) = 1$  übereinstimmt. Dieses  $\mathbf{u} = (u, Tu)$  ist nach Satz 3.3.5 tatsächlich in  $T_{\max}$  nahe bei  $a$ .  $\square$

**Lemma 3.2.23.**

*(i) Sei  $\alpha_\rho > a$  und  $f \in T_{\max}$ . Dann gilt*

$$f(\alpha_\rho-) = f^{[1]}(\alpha_\rho-) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{g} \in T_{\max} : W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(a) = 0.$$

*(ii) Sei  $\beta_\rho < b$  und  $f \in T_{\max}$ . Dann gilt*

$$f(\beta_\rho+) = f^{[1]}(\beta_\rho+) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{g} \in T_{\max} : W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(b) = 0.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage nur für  $\alpha_\rho > a$ . Den Fall  $\beta_\rho < b$  betrachtet man analog. Aus der Lagrange-Identität (3.2.3) erkennen wir, dass  $W(\mathbf{f}, \mathbf{g})$  konstant auf  $(a, \alpha_\rho)$  ist. Also gilt

$$W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(a) = W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(\alpha_\rho-) = f(\alpha_\rho-)g^{[1]}(\alpha_\rho-) - f^{[1]}(\alpha_\rho-)g(\alpha_\rho-)$$

Somit folgt aus  $f(\alpha_\rho-) = f^{[1]}(\alpha_\rho-) = 0$  sofort  $W(\mathbf{f}, \mathbf{g})(a) = 0$  für alle  $\mathbf{g} \in T_{\max}$ .

Für die umgekehrte Folgerung wählen wir  $\mathbf{g} \in T_{\max}$  nach Lemma 3.2.20, sodass  $g$  in einer Umgebung von  $a$  mit der Lösung von  $Tu = 0$  mit  $u(\alpha_\rho-) = 1, u^{[1]}(\alpha_\rho-) = 0$  bzw. mit  $u(\alpha_\rho-) = 0, u^{[1]}(\alpha_\rho-) = 1$  übereinstimmt. Dieses  $\mathbf{u} = (u, Tu)$  ist nach Satz 3.3.5 tatsächlich in  $T_{\max}$  nahe bei  $a$ .  $\square$

**Korollar 3.2.24.**

*(i) Sei  $T$  regulär (bei  $a$  und bei  $b$ ). Dann gilt*

$$T_{\min} = \{\mathbf{f} \in T_{\max} : f(a) = f^{[1]}(a) = f(b) = f^{[1]}(b) = 0\}.$$

*(ii) Sei  $\alpha_\rho > a$  und  $\beta_\rho < b$ . Dann gilt*

$$T_{\min} = \{\mathbf{f} \in T_{\max} : f(\alpha_\rho-) = f^{[1]}(\alpha_\rho-) = f(\beta_\rho+) = f^{[1]}(\beta_\rho+) = 0\}.$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Lemma 3.2.22 und 3.2.23.  $\square$

**Satz 3.2.25.**  $T_{\min}$  ist ein Operator, d.h.  $\text{mul}(T_{\min}) = \{0\}$ .

Beweis. Sei  $f \in T_{\min}$  mit  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$  gegeben. Wir wollen nun zeigen, dass  $Tf = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$  gilt.

Falls  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$  hat, müssen wir nach Lemma 3.2.1 zeigen, dass  $f^{[1]}(\alpha_\rho-) = 0$  ist. Falls  $\rho$  Masse bei  $\beta_\rho$  hat, müssen wir  $f^{[1]}(\beta_\rho+) = 0$  zeigen. Das gilt aber bereits nach Lemma 3.2.23.  $\square$

**Bemerkung 3.2.26.** Im Allgemeinen ist der Operator  $T_{\min}$  wegen

$$\text{dom}(T_{\min})^\perp = \text{mul}(T_{\min}^*) = \text{mul}(T_{\max})$$

nicht dicht definiert. Der Definitionsbereich  $\text{dom}(T_{\max})$  ist hingegen immer dicht in  $L^2((a, b), \rho)$  wegen

$$\text{dom}(T_{\max})^\perp = \text{mul}(T_{\max}^*) = \text{mul}(T_{\min}) = \{0\}.$$

### 3.3 Weyls Alternative

**Definition 3.3.1.**

- (i) Wir sagen,  $T$  ist im **limit circle LC-Fall bei  $\mathbf{b}$**  [bzw. **bei  $\mathbf{a}$** ], wenn für alle  $z \in \mathbb{C}$  alle Lösungen von  $(T - z)u = 0$  in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$  [bzw. bei  $b$ ] liegen.
- (ii) Wir sagen,  $T$  ist im **limit point LP-Fall bei  $\mathbf{b}$**  [bzw. **bei  $\mathbf{a}$** ], wenn für alle  $z \in \mathbb{C}$  eine Lösung von  $(T - z)u = 0$  existiert, die nicht in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$  [bzw. bei  $b$ ] liegt.

**Bemerkung 3.3.2.** Aus der Definition könnte man vorerst denken, dass bei einem Endpunkt  $a$  oder  $b$ , weder der eine noch der andere Fall eintreten muss. Tatsächlich wird sich gleich herausstellen, dass immer einer der beiden Fälle eintreten muss. Diese Tatsache wird auch als **Weylsche Alternative** bezeichnet.

**Lemma 3.3.3.** Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$ , sodass alle Lösungen von  $(T - z_0)u = 0$  in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$  liegen. Dann ist  $T$  im LC-Fall bei  $a$ .

(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Sei  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  und  $u \in \mathfrak{D}_T$  eine Lösung von  $(T - z)u = 0$ . Seien  $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}_T$  ein Fundamentalsystem von  $(T - z_0)u = 0$ . Wegen unserer Annahme liegen  $u_1$  und  $u_2$  in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$ . Daher können wir  $c \in (a, b)$  so nahe bei  $a$  wählen, dass für  $v := |u_1| + |u_2|$  gilt

$$|z - z_0| \int_{(a, c]} v^2 d\rho \leq \frac{1}{2}. \quad (3.3.1)$$

Nun ist  $u$  eine Lösung von  $(T - z_0)u = (z - z_0)u$  und lässt sich wegen Satz 3.1.12 darstellen als

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + (z - z_0) \int_c^x (u_1(x)u_2(t) - u_1(t)u_2(x))u(t) d\rho(t), \quad x \in (a, b),$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Mit  $C = \max\{|c_1|, |c_2|\}$  erhalten wir

$$|u(x)| \leq Cv(x) + |z - z_0|v(x) \int_{[x,c]} v(t)|u(t)| d\rho(t), \quad x \in (a, c)$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für die quadrierte Gleichung folgt

$$|u(x)|^2 \leq 2C^2v(x)^2 + 2|z - z_0|^2v(x)^2 \int_{[x,c]} v^2 d\rho \int_{[x,c]} |u|^2 d\rho, \quad x \in (a, c)$$

Integration dieser Ungleichung nach  $\rho$  über  $[s, c]$  mit  $s \in (a, c)$  liefert

$$\begin{aligned} \int_{[s,c]} |u|^2 d\rho &\leq 2C^2 \int_{(a,c]} v^2 d\rho + 2|z - z_0|^2 \int_{[s,c]} v(x)^2 \int_{[x,c]} v^2 d\rho \int_{[x,c]} |u|^2 d\rho d\rho(x) \\ &\leq 2C^2 \int_{(a,c]} v^2 d\rho + 2|z - z_0|^2 \left( \int_{(a,c]} v^2 d\rho \right)^2 \int_{[s,c]} |u|^2 d\rho \\ &\leq 2C^2 \int_{(a,c]} v^2 d\rho + \frac{1}{2} \int_{[s,c]} |u|^2 d\rho, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung (3.3.1) verwendet wurde. Wegen der Linksstetigkeit von  $u$  ist  $\int_{[s,c]} |u|^2 d\rho$  für alle  $s \in (a, c)$  endlich und wir erhalten durch Umformen

$$\frac{1}{2} \int_{[s,c]} |u|^2 d\rho \leq 2C^2 \int_{(a,c]} v^2 d\rho =: K.$$

Da  $s \in (a, c)$  beliebig war, folgt  $\int_{(a,c]} |u|^2 d\rho \leq 2K$ . Also ist  $u$  in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$ .  $\square$

**Korollar 3.3.4** (Weylsche Alternative).

Für jeden Endpunkt ist  $T$  entweder im LC- oder im LP-Fall.

**Satz 3.3.5.** Ist  $T$  regulär bei  $a$  oder gilt  $\alpha_\rho > a$ , dann ist  $T$  im LC-Fall bei  $a$ .

Insbesondere gilt in beiden Fällen für jede Lösung  $u \in \mathfrak{D}_T$  von  $Tu = 0$ , dass  $\mathbf{u} = (u, Tu)$  in  $T_{\max}$  nahe bei  $a$  liegt.

(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Sei  $z \in \mathbb{C}$  und  $u \in \mathfrak{D}_T$  eine Lösung von  $(T - z)u = 0$ .

Zuerst sei  $T$  regulär bei  $a$ . Wegen Satz 3.1.15 kann  $u$  bei  $a$  stetig fortgesetzt werden. Sei  $c \in (a, b)$ , dann ist  $u$  auf  $(a, c]$  beschränkt und wegen der Regularität von  $T$  ist  $\rho|_{(a,c]}$  ein endliches Maß auf  $(a, c]$ . Daher ist  $\int_{(a,c]} |u|^2 d\rho$  endlich und  $u$  liegt in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$ .

Sei nun  $\alpha_\rho > a$ . Es gilt

$$\int_{(a,c]} |u|^2 d\rho = \begin{cases} \int_{(\alpha_\rho, c]} |u|^2 d\rho, & \text{für } c \in [\alpha_\rho, b) \\ 0, & \text{für } c \in (a, \alpha_\rho) \end{cases}$$

Im ersten Fall ist  $u$  als linksstetige Funktion auf  $[\alpha_\rho, c]$  beschränkt und das Borelmaß  $\rho$  auf  $[\alpha_\rho, c]$  endlich. Also ist  $u \in L^2((a, c], \rho)$  für alle  $c \in (a, b)$ , und daher liegt  $u$  in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$ .  $\square$

**Bemerkung 3.3.6.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten.

Jede Lösung  $u \in \mathfrak{D}_T$  von  $(T - z)u = 0$  für  $z \in \mathbb{C}$  liegt daher in  $L^2((a, b), \rho)$  nahe bei  $a$  und nahe bei  $b$ . Daraus folgt sofort, dass  $u \in L^2((a, b), \rho)$  ist.

Insbesondere gilt für jede Lösung  $u \in \mathfrak{D}_T$  von  $Tu = 0$ , dass  $\mathbf{u} = (u, Tu) \in T_{\max}$  ist.

### 3.4 Selbstadjungierte lineare Relationen

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir in weiterer Folge

$$W_a^b(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) := W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(b) - W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(a).$$

**Satz 3.4.1.** *Sei  $T$  im LC-Fall bei  $a$  und bei  $b$ . Dann sind die Defektindizes der minimalen Relation  $T_{\min}$  beide gleich 2.*

Beweis. Aus (1.3.1) erkennen wir, dass die folgende Beziehung gilt

$$\text{ran}(T_{\min} + i)^\perp = \ker(T_{\min}^* - i) = \ker(T_{\max} - i).$$

Wir zeigen nun  $\ker(T_{\max} - i) = \ker(T - i)$ . Offensichtlich gilt  $\ker(T_{\max} - i) \subseteq \ker(T - i)$ . Für die umgekehrte Inklusion sei  $u \in \ker(T - i)$ . Wegen Bemerkung 3.3.6 liegt jede Lösung  $u$  von  $(T - i)u = 0$  in  $L^2((a, b), \rho)$ . Daher gilt  $(u, Tu) = (u, iu) \in T_{\max}$  bzw.  $(u, 0) = (u, Tu - iu) \in (T_{\max} - i)$ . Somit ist jede Lösung  $u$  von  $(T - i)u = 0$  in  $\ker(T_{\max} - i)$ .

Aus Bemerkung 3.1.11 folgt daher

$$n_-(T_{\min}) = \dim(\text{ran}(T_{\min} - i)^\perp) = \dim(\ker(T - i)) = 2.$$

Analog erhalten wir  $n_+(T_{\min}) = 2$ . □

**Satz 3.4.2.** *Sei  $S$  eine lineare Relation mit  $T_{\min} \subseteq S \subseteq T_{\max}$  und definiere die lineare Relation*

$$S_0 = \{\mathfrak{f} \in T_{\max} : W_a^b(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = 0 \forall \mathfrak{g} \in S\}.$$

*Dann ist  $S$  genau dann selbstadjungiert, wenn  $S = S_0$ .*

Beweis. Wegen  $T_{\min} \subseteq S$  gilt  $S^* \subseteq T_{\min}^* = T_{\max}$  und daher

$$S^* = \{\mathfrak{f} \in T_{\max} : \langle T\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rangle_\rho = \langle \mathfrak{f}, T\mathfrak{g} \rangle_\rho \forall \mathfrak{g} \in S\}.$$

Die Aussage folgt dann sofort aus 3.2.15, da für Elemente  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$  aus  $T_{\max}$  gilt, dass

$$W_a^b(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \langle T\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \rangle_\rho - \langle \mathfrak{f}, T\mathfrak{g} \rangle_\rho.$$

□

**Satz 3.4.3.** *Sei  $T$  im LC-Fall bei  $a$  und bei  $b$ . Dann ist eine lineare Relation  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  genau dann, wenn  $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in T_{\max} \setminus T_{\min}$  existieren, die*

$$W_a^b(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}) = W_a^b(\mathfrak{w}, \bar{\mathfrak{w}}) = W_a^b(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{w}}) = 0 \tag{3.4.1}$$

*erfüllen und linear unabhängig modulo  $T_{\min}$ <sup>13</sup> sind, sodass*

$$S = \{\mathfrak{f} \in T_{\max} : W_a^b(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{v}}) = W_a^b(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{w}}) = 0\}.$$

<sup>13</sup>Wir sagen, dass  $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$  unabhängig modulo  $T_{\min}$  sind, wenn aus  $c_1\mathfrak{v} + c_2\mathfrak{w} \in T_{\min}$  mit Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  folgt, dass  $c_1 = c_2 = 0$ .

Beweis. Da  $n(T_{\min}) = 2$  ist, sind nach Korollar 1.3.2 die selbstadjungierten Erweiterungen von  $T_{\min}$  gerade die 2-dimensionalen, symmetrischen Erweiterungen von  $T_{\min}$ , d.h. es existiert ein 2-dimensionaler symmetrischer Untervektorraum  $M$  von  $L^2((a, b), \rho) \times L^2((a, b), \rho)$  mit  $M \subseteq T_{\min}^* = T_{\max}$ , sodass  $S = T_{\min} + M$  gilt.

Somit ist  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  genau dann, wenn  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\max} \setminus T_{\min}$  existieren, die linear unabhängig modulo  $T_{\min}$  sind und (3.4.1) erfüllen. Dabei stellt (3.4.1) gerade sicher, dass  $M := \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  symmetrisch ist.

Somit müssen wir nur

$$\text{span}\{T_{\min} \cup \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}\} = \{f \in T_{\max} \mid W_a^b(f, \bar{\mathbf{v}}) = W_a^b(f, \bar{\mathbf{w}}) = 0\} =: T$$

zeigen. Wegen (3.4.1) und Satz 3.2.21 gilt sicherlich  $\text{span}\{T_{\min} \cup \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}\} \subseteq T$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\text{span}\{T_{\min} \cup \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}\}$  keine echte Teilmenge von  $T$  sein kann.

Definiere dazu die linearen Funktionale  $L_{\mathbf{v}}, L_{\mathbf{w}}$  auf  $T_{\max}$  durch

$$L_{\mathbf{v}}(f) = W_a^b(f, \bar{\mathbf{v}}) \quad \text{und} \quad L_{\mathbf{w}}(f) = W_a^b(f, \bar{\mathbf{w}}), \quad f \in T_{\max}.$$

Diese sind linear unabhängig. Wenn für  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  nämlich  $\overline{c_1}L_{\mathbf{v}} + \overline{c_2}L_{\mathbf{w}} = 0$  gilt, folgt aus der Linearität und Lemma 3.2.15 (ii), dass

$$0 = \overline{c_1}L_{\mathbf{v}}(f) + \overline{c_2}L_{\mathbf{w}}(f) = W_a^b(f, \overline{c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w}}) = \langle f, T(c_1v + c_2w) \rangle_{\rho} - \langle Tf, c_1v + c_2w \rangle_{\rho}.$$

Daher ist  $c_1\mathbf{v} + c_2\mathbf{w} \in T_{\max}^* = T_{\min}$  und wegen der linearen Unabhängigkeit modulo  $T_{\min}$  gilt  $c_1 = c_2 = 0$ .

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von  $L_{\mathbf{v}}$  und  $L_{\mathbf{w}}$  liefert uns das Lemma 3.2.16

$$\ker L_{\mathbf{v}} \not\subseteq \ker L_{\mathbf{w}} \quad \text{und} \quad \ker L_{\mathbf{w}} \not\subseteq \ker L_{\mathbf{v}}.$$

Somit existieren  $\mathbf{f}_{\mathbf{v}} \in \ker L_{\mathbf{v}} \setminus \ker L_{\mathbf{w}}$  und  $\mathbf{f}_{\mathbf{w}} \in \ker L_{\mathbf{w}} \setminus \ker L_{\mathbf{v}}$ . Damit haben wir  $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \mathbf{f}_{\mathbf{w}} \in T_{\max}$  und es gilt

$$W_a^b(\mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) = W_a^b(\mathbf{f}_{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{w}}) = 0, \quad W_a^b(\mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{w}}) \neq 0 \quad \text{und} \quad W_a^b(\mathbf{f}_{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{v}}) \neq 0.$$

Einerseits sind  $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \mathbf{f}_{\mathbf{w}} \notin T$ , andererseits sind  $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}$  und  $\mathbf{f}_{\mathbf{w}}$  linear unabhängig modulo  $T$ , da aus  $c_1\mathbf{f}_{\mathbf{v}} + c_2\mathbf{f}_{\mathbf{w}} \in T$  durch Linearität

$$0 = W_a^b(c_1\mathbf{f}_{\mathbf{v}} + c_2\mathbf{f}_{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{v}}) = c_1W_a^b(\mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}) + c_2W_a^b(\mathbf{f}_{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{v}}) = c_2W_a^b(\mathbf{f}_{\mathbf{w}}, \bar{\mathbf{v}})$$

und daraus  $c_2 = 0$  folgt, bzw. analog auch  $c_1 = 0$  folgt.

Wegen Satz 3.4.1 und (1.3.5) ist die Kodimension von  $T_{\min}$  in  $T_{\max} = T_{\min}^*$  genau 4. Da  $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}, \mathbf{f}_{\mathbf{w}} \notin T$  und linear unabhängig modulo  $T$ , kann  $T$  nur maximal eine 2-dimensionale Erweiterung von  $T_{\min}$  sein, d.h.  $T = \text{span}\{T_{\min} \cup \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}\}$ .  $\square$

### 3.5 Randbedingungen für selbstadjungierte lineare Relationen

In diesem Kapitel setzen wir durchgehend voraus, dass  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten ist, d.h. alle Lösungen von  $(T - z)u = 0$  sind aus  $L^2((a, b), \rho)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}$ .

Wir wählen uns nun  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$ , sodass

$$W(\mathfrak{w}_1, \overline{\mathfrak{w}_2})(a) = 1 \quad \text{und} \quad W(\mathfrak{w}_1, \overline{\mathfrak{w}_1})(a) = W(\mathfrak{w}_2, \overline{\mathfrak{w}_2})(a) = 0 \quad (3.5.1)$$

$$W(\mathfrak{w}_1, \overline{\mathfrak{w}_2})(b) = 1 \quad \text{und} \quad W(\mathfrak{w}_1, \overline{\mathfrak{w}_1})(b) = W(\mathfrak{w}_2, \overline{\mathfrak{w}_2})(b) = 0 \quad (3.5.2)$$

erfüllt ist.

Diese Wahl von  $\mathfrak{w}_1$  und  $\mathfrak{w}_2$  ist sicherlich möglich, da  $T$  im LC-Fall bei  $a$  und bei  $b$  ist. Man kann beispielsweise einfach  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$  nach Lemma 3.2.20 so wählen, dass  $w_1, w_2$  bei  $a$  und bei  $b$  mit reellen Lösungen von  $Tu = 0$ , die  $W(u_1, u_2) = 1$  erfüllen, übereinstimmen.

Haben wir  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$  mit den gewünschten Eigenschaften (3.5.1) und (3.5.2) gegeben, dann definieren wir uns damit die folgenden linearen Funktionale auf  $T_{\max}$ , die wir für die Randbedingungen verwenden werden,

$$R_1^a(\mathfrak{f}) := W(\mathfrak{f}, \overline{\mathfrak{w}_2})(a) \quad \text{und} \quad R_2^a(\mathfrak{f}) := W(\overline{\mathfrak{w}_1}, \mathfrak{f})(a), \quad \mathfrak{f} \in T_{\max} \quad (3.5.3)$$

$$R_1^b(\mathfrak{f}) := W(\mathfrak{f}, \overline{\mathfrak{w}_2})(b) \quad \text{und} \quad R_2^b(\mathfrak{f}) := W(\overline{\mathfrak{w}_1}, \mathfrak{f})(b), \quad \mathfrak{f} \in T_{\max} \quad (3.5.4)$$

**Bemerkung 3.5.1.** Für  $a$  sind die Funktionale  $R_1^a$  und  $R_2^a$  wegen (3.5.1) linear unabhängig. Denn mit  $\mathfrak{f} = \mathfrak{w}_1$  erhalten wir

$$R_1^a(\mathfrak{w}_1) = W(\mathfrak{w}_1, \overline{\mathfrak{w}_2})(a) = 1 \quad \text{und} \quad R_2^a(\mathfrak{w}_1) = W(\overline{\mathfrak{w}_1}, \mathfrak{w}_1)(a) = 0.$$

Mit  $\mathfrak{f} = \mathfrak{w}_2$  gilt hingegen

$$R_1^a(\mathfrak{w}_2) = W(\mathfrak{w}_2, \overline{\mathfrak{w}_2})(a) = 0 \quad \text{und} \quad R_2^a(\mathfrak{w}_2) = W(\overline{\mathfrak{w}_1}, \mathfrak{w}_2)(a) = 1.$$

(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

**Satz 3.5.2.** Sei  $T$  regulär bei  $a$ . Dann existieren  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$ , die (3.5.1) erfüllen, sodass sich die linearen Funktionale  $R_1^a$  und  $R_2^a$  darstellen lassen als

$$R_1^a(\mathfrak{f}) = f(a) \quad \text{und} \quad R_2^a(\mathfrak{f}) = f^{[1]}(a). \quad (3.5.5)$$

(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Da  $T$  regulär bei  $a$  ist, lässt sich nach Satz 3.2.15 die Wronski-Determinante bei  $R_1^a$  und  $R_2^a$  schreiben als

$$\begin{aligned} R_1^a(\mathfrak{f}) &= W(\mathfrak{f}, \overline{\mathfrak{w}_2})(a) = f(a)\overline{w_2}^{[1]}(a) - \overline{w_2}(a)f^{[1]}(a) \\ R_2^a(\mathfrak{f}) &= W(\overline{\mathfrak{w}_1}, \mathfrak{f})(a) = \overline{w_1}(a)f^{[1]}(a) - f(a)\overline{w_1}^{[1]}(a) \end{aligned}$$

Wenn wir  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$  so wählen, dass  $w_1, w_2$  in einer Umgebung von  $a$  mit den reellen Lösung  $u_1, u_2$  von  $Tu = 0$  mit den Anfangsbedingungen

$$u_1(a) = u_2^{[1]}(a) = 1 \quad \text{und} \quad u_1^{[1]}(a) = u_2(a) = 0$$

übereinstimmen, dann ist (3.5.1) und (3.5.5) erfüllt.  $\square$



**Satz 3.5.3.**

(i) Sei  $\alpha_\rho > a$ . Dann existieren  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$ , die (3.5.1) erfüllen, sodass sich die linearen Funktionale  $R_1^a$  und  $R_2^a$  darstellen lassen als

$$R_1^a(\mathfrak{f}) = f(\alpha_\rho-) \quad \text{und} \quad R_2^a(\mathfrak{f}) = f^{[1]}(\alpha_\rho-). \quad (3.5.6)$$

(ii) Sei  $\beta_\rho < b$ . Dann existieren  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$ , die (3.5.2) erfüllen, sodass sich die linearen Funktionale  $R_1^b$  und  $R_2^b$  darstellen lassen als

$$R_1^b(\mathfrak{f}) = f(\beta_\rho+) \quad \text{und} \quad R_2^b(\mathfrak{f}) = f^{[1]}(\beta_\rho+). \quad (3.5.7)$$

Beweis. Wir zeigen nur (i), denn (ii) folgt mit analogen Beweisschritten.

Da die Wronski-Determinante auf  $(a, \alpha_\rho)$  wegen der Lagrange-Identität konstant ist, gilt für  $R_1^a$  und  $R_2^a$

$$\begin{aligned} R_1^a(\mathfrak{f}) &= W(\mathfrak{f}, \overline{\mathfrak{w}_2})(\alpha_\rho-) = f(\alpha_\rho-)\overline{w_2}^{[1]}(\alpha_\rho-) - \overline{w_2}(\alpha_\rho-)f^{[1]}(\alpha_\rho-) \\ R_2^a(\mathfrak{f}) &= W(\overline{\mathfrak{w}_1}, \mathfrak{f})(\alpha_\rho-) = \overline{w_1}(\alpha_\rho-)f^{[1]}(\alpha_\rho-) - f(\alpha_\rho-)\overline{w_1}^{[1]}(\alpha_\rho-) \end{aligned}$$

Wenn wir  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$  so wählen, dass  $w_1, w_2$  in einer Umgebung von  $a$  mit den reellen Lösung  $u_1, u_2$  von  $Tu = 0$  mit den Anfangsbedingungen

$$u_1(\alpha_\rho-) = u_2^{[1]}(\alpha_\rho-) = 1 \quad \text{und} \quad u_1^{[1]}(\alpha_\rho-) = u_2(\alpha_\rho-) = 0$$

übereinstimmen, dann ist (3.5.1) und (3.5.6) erfüllt.  $\square$

**Bemerkung 3.5.4.** Die Plücker-Identität 3.1.13 mit den Elementen  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \overline{\mathfrak{w}_1}$  und  $\overline{\mathfrak{w}_2}$  liefert uns

$$W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(a) = R_1^a(\mathfrak{f})R_2^a(\mathfrak{g}) - R_2^a(\mathfrak{f})R_1^a(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in T_{\max}. \quad (3.5.8)$$

Ein analoges Resultat gilt auch für  $b$ .

Mit Hilfe von (3.5.8) können wir die minimale Relation  $T_{\min}$  auch durch die linearen Funktionale  $R_1^a, R_2^a, R_1^b$  und  $R_2^b$  darstellen.

**Satz 3.5.5.** Sei  $T$  im LC-Fall bei  $a$ . Dann gilt

$$R_1^a(\mathfrak{f}) = R_2^a(\mathfrak{f}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})(a) = 0 \quad \forall \mathfrak{g} \in T_{\max}.$$

(Ein analoges Resultat gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Wegen (3.5.8) folgt aus  $R_1^a(\mathfrak{f}) = R_2^a(\mathfrak{f}) = 0$  sofort  $W(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = 0$  für alle  $\mathfrak{g} \in T_{\max}$ .

Für die umgekehrte Folgerung wählen wir speziell  $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{w}_2}$  bzw.  $\mathfrak{g} = -\overline{\mathfrak{w}_1}$ , um  $R_1^a(\mathfrak{f}) = 0$  bzw.  $R_2^a(\mathfrak{f}) = 0$  zu erhalten.  $\square$

**Korollar 3.5.6.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten. Dann gilt

$$T_{\min} = \{\mathfrak{f} \in T_{\max} : R_1^a(\mathfrak{f}) = R_2^a(\mathfrak{f}) = R_1^b(\mathfrak{f}) = R_2^b(\mathfrak{f}) = 0\}$$

**Bemerkung 3.5.7.** Korollar 3.2.24 ist ein Spezialfall von Korollar 3.5.6, falls wir  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$ , mit denen die Randbedingungsfunktionale definiert sind, wie in Satz 3.5.2 bzw. Satz 3.5.3 wählen.

**Definition 3.5.8.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten. Dann teilen wir die selbstadjungierten Erweiterungen von  $T_{\min}$  in zwei Klassen ein.

(i) Selbstadjungierte lineare Relationen mit getrennten Randbedingungen:

Wir sagen, dass eine lineare Relation  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  **mit getrennten Randbedingungen** ist, wenn sie sich darstellen lässt als

$$S = \{f \in T_{\max} : W(f, \bar{\mathfrak{v}})(a) = W(f, \bar{\mathfrak{w}})(b) = 0\} \quad (3.5.9)$$

für  $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in T_{\max} \setminus T_{\min}$  mit  $W(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = W(\mathfrak{w}, \bar{\mathfrak{w}})(b) = 0$  und

$$(R_1^a(\mathfrak{v}), R_2^a(\mathfrak{v})) \neq (0, 0) \quad \text{und} \quad (R_1^b(\mathfrak{w}), R_2^b(\mathfrak{w})) \neq (0, 0). \quad (3.5.10)$$

(ii) Selbstadjungierte lineare Relationen mit gekoppelten Randbedingungen:

Alle restlichen selbstadjungierten Erweiterungen von  $T_{\min}$  bezeichnet man als selbstadjungierte Erweiterungen von  $T_{\min}$  **mit gekoppelten Randbedingungen**.

**Bemerkung 3.5.9.** Um zu sehen, dass eine lineare Relation  $S$ , die durch (3.5.9) definiert ist, tatsächlich selbstadjungiert ist, erinnern wir uns an Satz 3.4.3 und suchen  $\tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{w}} \in T_{\max}$ , die die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen.

Mit Lemma 3.2.20 wählen wir  $\tilde{\mathfrak{v}} \in T_{\max}$ , sodass  $\tilde{v} = v$  in einer Umgebung von  $a$  und  $\tilde{v} = 0$  in einer Umgebung von  $b$ , und  $\tilde{\mathfrak{w}} \in T_{\max}$ , sodass  $\tilde{w} = 0$  in einer Umgebung von  $a$  und  $\tilde{w} = w$  in einer Umgebung von  $b$ .

Mit dieser Wahl ist dann (3.4.1) sicherlich erfüllt und wegen (3.5.9) sind  $\tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{w}}$  nach Korollar 3.5.6 keine Elemente von  $T_{\min}$  und linear unabhängig modulo  $T_{\min}$ .

Damit erfüllen  $\tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{w}} \in T_{\max}$  alle gewünschten Voraussetzungen. Die lineare Relation  $S$  lässt sich nun darstellen als

$$S = \{f \in T_{\max} : W_a^b(f, \tilde{\mathfrak{v}}) = W_a^b(f, \tilde{\mathfrak{w}}) = 0\}$$

und ist nach Satz 3.4.3 selbstadjungiert.

**Lemma 3.5.10.** Sei  $\mathfrak{v} \in T_{\max}$ , sodass  $W(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0$ , und es existiere ein  $\mathfrak{h} \in T_{\max}$  mit  $W(\mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{v}})(a) \neq 0$ . Dann gilt für  $\mathfrak{f} \in T_{\max}$

$$W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(\bar{\mathfrak{f}}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0.$$

(Eine analoge Aussage gilt auch für  $b$ .)

Beweis. Zuerst wählen wir  $\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}, \mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{h}}$  in der Plücker-Identität (3.1.13) und erhalten durch Umformen  $|W(\mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{v}})(a)|^2 = |W(\mathfrak{h}, \mathfrak{v})(a)|^2$ . Damit ist auch  $W(\mathfrak{h}, \mathfrak{v})(a) \neq 0$ .

Mit  $\mathfrak{f}, \mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}}, \mathfrak{h}$  in der Plücker-Identität folgt

$$W(\mathfrak{f}, \mathfrak{v})(a)W(\mathfrak{h}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{v}})(a)W(\mathfrak{h}, \mathfrak{v})(a),$$

und damit sofort die Behauptung. □

**Bemerkung 3.5.11.** Aus dem vorigen Lemma erkennen wir sofort, dass eine selbstadjungierte Erweiterung  $S$  von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen im Sinne von Bemerkung 3.1.19 (i) immer reell ist, d.h. mit  $\mathfrak{f} \in S$  gilt immer auch  $\bar{\mathfrak{f}} \in S$ .

**Lemma 3.5.12.**

(i) Für jedes  $\mathfrak{v} \in T_{\max} \setminus T_{\min}$  mit  $W(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0$  und  $(R_1^a(\mathfrak{v}), R_2^a(\mathfrak{v})) \neq (0, 0)$  existiert ein  $\varphi_a \in [0, \pi)$ , sodass für alle  $\mathfrak{f} \in T_{\max}$

$$W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_1^a(\mathfrak{f}) \cos \varphi_a - R_2^a(\mathfrak{f}) \sin \varphi_a = 0$$

gilt.

(ii) Für jedes  $\varphi_a \in [0, \pi)$  existiert ein  $\mathfrak{v} \in T_{\max} \setminus T_{\min}$  mit  $W(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0$  und  $(R_1^a(\mathfrak{v}), R_2^a(\mathfrak{v})) \neq (0, 0)$ , sodass für alle  $\mathfrak{f} \in T_{\max}$

$$W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_1^a(\mathfrak{f}) \cos \varphi_a - R_2^a(\mathfrak{f}) \sin \varphi_a = 0$$

gilt.

Beweis. Nach (3.5.8) ist  $W(\mathfrak{f}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = R_1^a(\mathfrak{f})R_2^a(\bar{\mathfrak{v}}) - R_2^a(\mathfrak{f})R_1^a(\bar{\mathfrak{v}})$  für  $\mathfrak{f}, \mathfrak{v} \in T_{\max}$ .

(i) Dividieren wir nun  $R_1^a(\mathfrak{f})R_2^a(\bar{\mathfrak{v}}) - R_2^a(\mathfrak{f})R_1^a(\bar{\mathfrak{v}}) = 0$  durch  $r := \sqrt{|R_1^a(\mathfrak{v})|^2 + |R_2^a(\mathfrak{v})|^2} > 0$ , dann erhalten wir

$$R_1^a(\mathfrak{f}) \cdot c - R_2^a(\mathfrak{f}) \cdot s = 0, \tag{3.5.11}$$

wobei  $c := R_1^a(\mathfrak{v})/r$  und  $s := R_2^a(\mathfrak{v})/r$ .

Wegen  $(c, s) \in S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$  existiert ein  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , sodass  $c = \cos \varphi$  und  $s = \sin \varphi$ . Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^2$ .

Für  $\varphi \in [0, \pi)$  wählen wir  $\varphi_a := \varphi$  und sind fertig. Falls  $\varphi \in [\pi, 2\pi)$  nehmen wir stattdessen  $\varphi_a := \varphi - \pi$ , denn dann ist nämlich  $c = -\cos \varphi_a$  und  $s = -\sin \varphi_a$ . Auch in diesem Fall ist die Gleichung (3.5.11) erfüllt.

(ii) Aus Bemerkung 3.5.1 erkennen wir, dass  $R_1^a$  und  $R_2^a$  linear unabhängig sind. Insbesondere können wir  $\mathfrak{v}$  mit den gewünschten Eigenschaften sogar explizit angeben, als

$$\mathfrak{v} := \cos \varphi_a \cdot \mathfrak{w}_1 + \sin \varphi_a \cdot \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}.$$

Nun gilt  $R_1^a(\mathfrak{v}) = \cos \varphi_a$  und  $R_2^a(\mathfrak{v}) = \sin \varphi_a$ , daher ist  $(R_1^a(\mathfrak{v}), R_2^a(\mathfrak{v})) \neq (0, 0)$  und  $\mathfrak{v} \notin T_{\min}$ . Schließlich erhalten wir mit (3.5.1) auch  $W(\mathfrak{v}, \bar{\mathfrak{v}})(a) = 0$ .

□

**Satz 3.5.13.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten. Dann ist eine lineare Relation  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen genau dann, wenn  $\varphi_a, \varphi_b \in [0, \pi)$  existieren, sodass

$$S = \left\{ \mathfrak{f} \in T_{\max} : \begin{array}{l} R_1^a(\mathfrak{f}) \cos \varphi_a - R_2^a(\mathfrak{f}) \sin \varphi_a = 0 \\ R_1^b(\mathfrak{f}) \cos \varphi_b - R_2^b(\mathfrak{f}) \sin \varphi_b = 0 \end{array} \right\}$$

Beweis. Folgt sofort aus dem vorigen Lemma.

□

**Korollar 3.5.14.**

- (i) Sei  $T$  regulär (bei  $a$  und bei  $b$ ) und seien  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$  wie in Satz 3.5.2 gewählt. Dann ist eine lineare Relation  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen genau dann, wenn  $\varphi_a, \varphi_b \in [0, \pi)$  existieren, sodass

$$S = \left\{ \mathfrak{f} \in T_{\max} : \begin{array}{l} f(a) \cos \varphi_a - f^{[1]}(a) \sin \varphi_a = 0 \\ f(b) \cos \varphi_b - f^{[1]}(b) \sin \varphi_b = 0 \end{array} \right\} \quad (3.5.12)$$

- (ii) Sei  $\alpha_\rho > a$  und  $\beta_\rho < b$  und seien  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$  wie in Satz 3.5.3 gewählt. Dann ist eine lineare Relation  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen genau dann, wenn  $\varphi_a, \varphi_b \in [0, \pi)$  existieren, sodass

$$S = \left\{ \mathfrak{f} \in T_{\max} : \begin{array}{l} f(\alpha_\rho-) \cos \varphi_a - f^{[1]}(\alpha_\rho-) \sin \varphi_a = 0 \\ f(\beta_\rho+) \cos \varphi_b - f^{[1]}(\beta_\rho+) \sin \varphi_b = 0 \end{array} \right\} \quad (3.5.13)$$

**Bemerkung 3.5.15.** Jede selbstadjungierte Erweiterung  $S$  von  $T_{\min}$  erfüllt  $T_{\min} \subseteq S \subseteq T_{\max}$ . Dabei ist  $T_{\min}$  ein Operator, d.h.  $\text{mul}(T_{\min}) = \{0\}$ . Falls aber  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$  oder bei  $\beta_\rho$  besitzt, dann ist  $T_{\max}$  hingegen kein Operator mehr.

Es stellt sich nun die Frage, welche selbstadjungierten Erweiterungen  $S$  von  $T_{\min}$  tatsächlich Operatoren sind, d.h.  $\text{mul}(S) = \{0\}$ .

**Satz 3.5.16.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten.

- (i) Habe  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$ , aber nicht bei  $\beta_\rho$ . Dann ist eine selbstadjungierte Erweiterung  $S$  von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen, dargestellt wie in Satz 3.5.13, genau dann ein Operator, wenn

$$\cos \varphi_a w_2(\alpha_\rho-) + \sin \varphi_a w_1(\alpha_\rho-) \neq 0 \quad (3.5.14)$$

gilt.

- (ii) Habe  $\rho$  Masse bei  $\beta_\rho$ , aber nicht bei  $\alpha_\rho$ . Dann ist eine selbstadjungierte Erweiterung  $S$  von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen, dargestellt wie in Satz 3.5.13, genau dann ein Operator, wenn

$$\cos \varphi_b w_2(\beta_\rho+) + \sin \varphi_b w_1(\beta_\rho+) \neq 0 \quad (3.5.15)$$

gilt.

- (iii) Habe  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$  und bei  $\beta_\rho$ . Dann ist eine selbstadjungierte Erweiterung  $S$  von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen, dargestellt wie in Satz 3.5.13, genau dann ein Operator, wenn

$$\begin{array}{l} \cos \varphi_a w_2(\alpha_\rho-) + \sin \varphi_a w_1(\alpha_\rho-) \neq 0 \\ \cos \varphi_b w_2(\beta_\rho+) + \sin \varphi_b w_1(\beta_\rho+) \neq 0 \end{array}$$

gilt.

Beweis. Wir werden nur (i) zeigen, denn (ii) und (iii) folgen mit analogen Beweisschritten. Gelte zuerst (3.5.14) und sei  $\mathfrak{f} \in S$  gegeben, sodass  $f = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$ . Laut Lemma 3.2.1

müssen wir nur  $f^{[1]}(\alpha_\rho-) = 0$  zeigen. Wegen der Randbedingung bei  $a$  und der Konstanz der Wronski-Determinante auf  $(a, \alpha_\rho)$  erfüllt  $f$  die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \cos \varphi_a [f(\alpha_\rho-) \overline{w_2}^{[1]}(\alpha_\rho-) - f^{[1]}(\alpha_\rho-) \overline{w_2}(\alpha_\rho-)] \\ = \sin \varphi_a [f^{[1]}(\alpha_\rho-) \overline{w_1}(\alpha_\rho-) - f(\alpha_\rho-) \overline{w_1}^{[1]}(\alpha_\rho-)]. \end{aligned}$$

Mit der Bedingung (3.5.14) und  $f(\alpha_\rho-) = 0$  erhalten wir

$$f^{[1]}(\alpha_\rho-) = f(\alpha_\rho-) \frac{\cos \varphi_a \overline{w_2}^{[1]}(\alpha_\rho-) + \sin \varphi_a \overline{w_1}^{[1]}(\alpha_\rho-)}{\cos \varphi_a \overline{w_2}(\alpha_\rho-) + \sin \varphi_a \overline{w_1}(\alpha_\rho-)} = 0,$$

Nach Lemma 3.2.1 ist also  $Tf = 0$  und daher  $\text{mul}(S) = \{0\}$ .

Angenommen (3.5.14) gelte nicht. Dann betrachten wir die Funktion

$$f_c(x) = \begin{cases} cu_a, & \text{für } a < x \leq \alpha_\rho \\ 0, & \text{für } \alpha_\rho < x < b \end{cases}$$

wobei  $c \in \mathbb{C}$  ist und  $u_a \in \mathfrak{D}_T$  die Lösung von  $Tu = 0$  mit  $u_a(\alpha_\rho-) = 0$  und  $u_a^{[1]}(\alpha_\rho-) = 1$  ist. Nun ist  $f_c \in \mathfrak{D}_T$  und  $f_c = 0$  fast überall bzgl.  $\rho$ . Offensichtlich erfüllt  $\mathfrak{f}_c = (f_c, Tf_c)$  die Randbedingung bei  $b$ . Für die Randbedingung bei  $a$  gilt

$$R_1^a(\mathfrak{f}_c) \cos \varphi_a - R_2^a(\mathfrak{f}_c) \sin \varphi_a = -f_c^{[1]}(\alpha_\rho-) [\cos \varphi_a \overline{w_2}(\alpha_\rho-) + \sin \varphi_a \overline{w_1}(\alpha_\rho-)] = 0,$$

da die Wronski-Determinante auf  $(a, \alpha_\rho)$  konstant und  $f_c(\alpha_\rho-) = 0$  ist.

Außerdem gilt mit Lemma 3.2.1, dass  $Tf_c = \frac{c}{\rho(\{\alpha_\rho\})} \mathbf{1}_{\{\alpha_\rho\}}$ . Somit ist  $\mathfrak{f}_c \in S$  und daher  $\text{mul}(S) = \text{span}\{\mathbf{1}_{\{\alpha_\rho\}}\}$ .  $\square$

**Korollar 3.5.17.** *Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten.*

(i) *Habe  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$ , aber nicht bei  $\beta_\rho$ . Ist  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen, dargestellt wie in Satz 3.5.13, dann gilt*

$$\text{mul}(S) = \begin{cases} \{0\}, & \text{wenn (3.5.15) erfüllt ist,} \\ \text{span}\{\mathbf{1}_{\{\alpha_\rho\}}\}, & \text{wenn (3.5.15) nicht erfüllt ist.} \end{cases}$$

(ii) *Habe  $\rho$  Masse bei  $\beta_\rho$ , aber nicht bei  $\alpha_\rho$ . Ist  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen, dargestellt wie in Satz 3.5.13, dann gilt*

$$\text{mul}(S) = \begin{cases} \{0\}, & \text{wenn (3.5.14) erfüllt ist,} \\ \text{span}\{\mathbf{1}_{\{\beta_\rho\}}\}, & \text{wenn (3.5.14) nicht erfüllt ist.} \end{cases}$$

(iii) *Habe  $\rho$  Masse bei  $\alpha_\rho$  und bei  $\beta_\rho$ . Ist  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen, dargestellt wie in Satz 3.5.13, dann gilt*

$$\text{mul}(S) = \begin{cases} \{0\}, & \text{wenn (3.5.14) und (3.5.15) erfüllt sind,} \\ \text{span}\{\mathbf{1}_{\{\alpha_\rho\}}\}, & \text{wenn (3.5.15) erfüllt ist, jedoch (3.5.14) nicht,} \\ \text{span}\{\mathbf{1}_{\{\beta_\rho\}}\}, & \text{wenn (3.5.14) erfüllt ist, jedoch (3.5.15) nicht,} \\ \text{span}\{\mathbf{1}_{\{\alpha_\rho\}}, \mathbf{1}_{\{\beta_\rho\}}\}, & \text{wenn weder (3.5.14) noch (3.5.15) erfüllt sind.} \end{cases}$$

Beweis. Die Aussagen folgen ganz leicht aus dem Beweis von Satz 3.5.16.  $\square$

**Bemerkung 3.5.18.** Sind  $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in T_{\max}$  wie in Satz 3.5.3 gewählt, dann vereinfachen sich die Bedingungen (3.5.14) und (3.5.15) zu  $\varphi_a \neq 0$  bzw. zu  $\varphi_b \neq 0$ .

### 3.6 Eigenschaften selbstadjungierter Sturm-Liouville-Relationen

**Satz 3.6.1.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten,  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen und  $z \in \rho(S)$ .

Außerdem seien  $u_a, u_b \in \mathfrak{D}_T \setminus \{0\}$  zwei Lösungen von  $(T - z)u = 0$ , sodass  $u_a$  die Randbedingung bei  $a$  und  $u_b$  die Randbedingung bei  $b$  erfüllt.

Dann ist die Resolvente  $R_z$  ein Integraloperator

$$R_z f(x) = \int_a^b G_z(x, y) g(y) d\rho(y), \quad x \in (a, b), g \in L^2((a, b), \rho),$$

mit der Kernfunktion  $G_z \in L^2((a, b)^2, \rho \otimes \rho)$ , die gegeben ist durch

$$G_z(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{W(u_b, u_a)} u_a(y) u_b(x), & \text{für } y < x, \\ \frac{1}{W(u_b, u_a)} u_a(x) u_b(y), & \text{für } y \geq x. \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Beweis. Die Elemente  $u_a, u_b \in T_{\max}$  sind linear unabhängig, denn ansonsten wäre  $u_a = \lambda u_b$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und würde sowohl die Randbedingung bei  $a$  als auch bei  $b$  erfüllen. Wegen  $(T - z)u_a = 0$  wäre  $u_a \in \ker(S - z)$  und damit ein Eigenvektor von  $S$  mit Eigenwert  $z$ . Somit bilden  $u_a, u_b$  ein Fundamentalsystem von  $(T - z)u = 0$ .

Nun definieren wir den Operator  $\Phi: L^2((a, b), \rho) \rightarrow L^2((a, b), \rho)$  durch

$$\Phi(g) := \frac{1}{W(u_b, u_a)} \left( u_b(x) \int_a^x u_a g d\rho + u_a(x) \int_x^b u_b g d\rho \right) = \int_a^b G_z(x, y) f(y) d\rho(y)$$

für alle  $g \in L^2((a, b), \rho)$ .

Da die Kernfunktion  $G_z$  die Abschätzung  $\|G_z\|_{\rho \otimes \rho} \leq K \|u_a\|_{\rho} \|u_b\|_{\rho}$  für ein  $K > 0$  erfüllt, ist der Integraloperator  $\Phi$  ein beschränkter linearer Operator auf  $L^2((a, b), \rho)$  mit Operatornorm  $\|\Phi\| \leq \|G_z\|_{\rho \otimes \rho}$ . Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_{\rho \otimes \rho}$  und  $\|\cdot\|_{\rho}$  die Normen auf  $L^2((a, b)^2, \rho \otimes \rho)$  bzw.  $L^2((a, b), \rho)$ .

Für  $g \in L^2_c((a, b), \rho)$  ist  $f_g := \Phi(g)$  eine Lösung von  $(T - z)f = g$ , wenn wir in Satz 3.1.12 die Konstanten  $c_1 = (\int_c^b u_b g d\rho)/W(u_b, u_a)$  und  $c_2 = (\int_a^c u_a g d\rho)/W(u_b, u_a)$  wählen.

Da  $g$  einen kompakten Träger hat, ist  $f_g$  ein skalares Vielfaches von  $u_a$  in einer Umgebung von  $a$  und ein skalares Vielfaches von  $u_b$  in einer Umgebung von  $b$ . Somit erfüllt  $f_g = (f_g, T f_g)$  die Randbedingungen von  $S$ , also  $f_g \in S$ .

Daher ist  $(f_g, g) = (f_g, T f_g - z f_g) \in S - z$ . Mit der Definition der Inversen für lineare Relationen folgt  $(g, f_g) \in (S - z)^{-1} = R_z$ , oder anders ausgedrückt  $R_z g = f_g = \Phi(g)$ .

Da der beschränkte Operator  $R_z$  mit  $\Phi$  auf der dichten Teilmenge  $L^2_c((a, b), \rho)$  von  $L^2((a, b), \rho)$  übereinstimmt, muss schon  $R_z = \Phi$  auf ganz  $L^2((a, b), \rho)$  gelten.  $\square$

**Bemerkung 3.6.2.** Im vorigen Satz wurde von der Existenz von  $u_a, u_b \in \mathfrak{D}_T \setminus \{0\}$  ausgegangen, sodass  $u_a$  die Randbedingung bei  $a$  und  $u_b$  die Randbedingung bei  $b$  erfüllt.

Solche Funktionen existieren immer. Zuerst wählen wir ein beliebiges Fundamentalsystem  $u_1, u_2$  von  $(T - z)u = 0$ . Nun erfüllt  $u_a := c_1^a u_1 + c_2^a u_2$  mit den Konstanten  $c_1^a = R_1^a(u_2) \cos \varphi_a - R_2^a(u_2) \sin \varphi_a$  und  $c_2^a = -R_1^a(u_1) \cos \varphi_a + R_2^a(u_1) \sin \varphi_a$  die Randbedingung bei  $a$ .

Analog wird  $u_b := c_1^b u_1 + c_2^b u_2$  mit geeigneten Konstanten  $c_1^b, c_2^b$  gewählt.

**Satz 3.6.3.** Seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $K: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine messbare Funktion und  $\mathcal{K}: L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  der durch den Kern  $K$  definierte Integraloperator mit

$$(\mathcal{K}f)(x) := \int_{\Omega} K(x, y) f(y) d\mu(y), \quad f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad x \in \Omega,$$

Dann ist  $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$  genau dann, wenn  $\mathcal{K}$  ein Hilbert-Schmidt-Operator auf  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ist.

Insbesondere ist in diesem Fall  $\mathcal{K}$  ein kompakter linearer Operator.

Beweis. Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Dann ist auch  $(\overline{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}\|_{\mu \otimes \mu} &= \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 d\mu(t) d\mu(s) = \int_a^b \langle K(s, \cdot), K(s, \cdot) \rangle_{\mu} d\mu(s) \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \langle K(s, \cdot), \overline{u_n} \rangle_{\mu} \langle \overline{u_n}, K(s, \cdot) \rangle_{\mu} d\mu(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \langle K(s, \cdot), \overline{u_n} \rangle_{\mu} \overline{\langle K(s, \cdot), \overline{u_n} \rangle_{\mu}} d\mu(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\langle K(s, \cdot), \overline{u_n} \rangle_{\mu}|^2 d\mu(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |(\mathcal{K}u_n)(s)| d\mu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{K}u_n\|_{\mu} = \|\mathcal{K}\|_{HS}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet  $\|\cdot\|_{HS}$  die Hilbert-Schmidt-Norm für Operatoren auf  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Insbesondere sind Hilbert-Schmidt-Operatoren kompakte lineare Operatoren.  $\square$

**Korollar 3.6.4.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten,  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen und  $z \in \rho(S)$ .

Dann ist die Resolvente  $R_z$  ein kompakter, normaler Operator auf  $L^2((a, b), \rho)$ . Für  $z \in \mathbb{R}$  ist die Resolvente  $R_z$  sogar selbstadjungiert.

Beweis. Die Kompaktheit von  $R_z$  folgt aus den Sätzen 3.6.1 und 3.6.3.

Mit den Beziehungen (1.3.2) gilt

$$(R_z)^* = ((S - z)^{-1})^* = ((S - z)^*)^{-1} = (S - \overline{z})^{-1} = R_{\overline{z}}.$$

Für  $z \in \mathbb{R}$  ist  $R_z$  selbstadjungiert. Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  folgt mit der Resolventengleichung (1.3.3)

$$R_z R_{\overline{z}} = \frac{1}{z - \overline{z}} (R_z - R_{\overline{z}}) = \frac{1}{\overline{z} - z} (R_{\overline{z}} - R_z) = R_{\overline{z}} R_z$$

die Normalität von  $R_z$ .  $\square$

**Satz 3.6.5.** Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten,  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen und  $z \in \rho(S)$ .

Dann existiert eine abzählbare Orthonormalbasis aus Eigenvektoren  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $R_z$  in  $L^2((a, b), \rho)$ , sowie eine Nullfolge der dazugehörigen Eigenwerte  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , sodass

$$L^2((a, b), \rho) = \ker(R_z) \oplus \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$$

und

$$R_z f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle_{\rho} e_n, \quad f \in L^2((a, b), \rho)$$

gilt.

Beweis. Die Resolvente  $R_z$  ist ein kompakter, normaler Operator auf dem Hilbertraum  $L^2((a, b), \rho)$  nach Korollar 3.6.4. Die Aussage folgt dann mit dem Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren 1.4.3.  $\square$

**Lemma 3.6.6.** *Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten,  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen und  $z \in \rho(S)$ .*

*Eine Funktion  $f \in L^2((a, b), \rho)$  ist genau dann eine Eigenfunktion von  $S$  zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn  $f$  eine Eigenfunktion von  $R_z$  zum Eigenwert  $\frac{1}{\lambda - z}$  ist. Insbesondere gilt*

$$\sigma(R_z) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\lambda - z} \mid \lambda \in \sigma(S) \right\}.$$

Beweis. Sei  $f \in L^2((a, b), \rho)$  eine Eigenfunktion von  $R_z$  zum Eigenwert  $\frac{1}{\lambda - z}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \left( f, \frac{1}{\lambda - z} f \right) \in R_z &\Leftrightarrow ((\lambda - z)f, f) \in R_z \\ &\Leftrightarrow (f, (\lambda - z)f) \in S - z \Leftrightarrow (f, \lambda f) \in S. \end{aligned}$$

Da wir aus dem vorigen Satz 3.6.5 bereits wissen, dass das Spektrum  $\sigma(R_z)$  nur aus Eigenwerten von  $R_z$  besteht, gilt auch die zusätzliche Aussage über die Spektren.  $\square$

**Satz 3.6.7.** *Sei  $T$  im LC-Fall bei beiden Endpunkten und  $S$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T_{\min}$  mit getrennten Randbedingungen.*

*Dann hat  $S$  ein rein diskretes Spektrum, d.h.  $\sigma(S) = \sigma_p(S)$ , und alle Eigenwerte von  $S$  sind einfach, d.h.  $\dim \ker(S - z) = 1$  für alle  $z \in \sigma(S)$ .*

Beweis. Die Tatsache, dass das Spektrum  $\sigma(S)$  von  $S$  nur aus dem Punktspektrum  $\sigma_p(S)$  besteht, folgt sofort aus Lemma 3.6.6.

Sei  $z \in \sigma(S) = \sigma_p(S)$  ein Eigenwert und  $u_1, u_2 \in \ker(S - z)$  zwei Eigenvektoren zum Eigenwert  $z$ , die also  $Tu_i = zu_i$  für  $i = 1, 2$  erfüllen. Die Funktionen  $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}_T$  sind daher Lösungen von  $(T - z)u = 0$ .

Mit (3.5.8) erhalten wir für  $u_1 := (u_1, zu_1)$  und  $u_2 := (u_2, zu_2)$

$$W(u_1, u_2)(a) = R_1^a(u_1)R_2^a(u_2) - R_2^a(u_1)R_1^a(u_2) = \det \begin{pmatrix} R_1^a(u_1) & R_2^a(u_1) \\ R_1^a(u_2) & R_2^a(u_2) \end{pmatrix}.$$



Da  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$  beide die Randbedingungen von  $S$  erfüllen, hat die Matrix  $R := \begin{pmatrix} R_1^a(\mathbf{u}_1) & R_2^a(\mathbf{u}_1) \\ R_1^a(\mathbf{u}_2) & R_2^a(\mathbf{u}_2) \end{pmatrix}$  wegen  $R \begin{pmatrix} \cos \varphi_a \\ \sin \varphi_a \end{pmatrix} = 0$  nur den Rang  $\text{rg } R = 1$ . Daher ist  $W(u_1, u_2)(a) = W(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)(a) = 0$  und mit Korollar 3.1.9 (ii) folgt  $W(u_1, u_2) = 0$ . Daher sind  $u_1$  und  $u_2$  linear abhängig.  $\square$

## 4 Die Spektralasymptotik des $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operators

### 4.1 Der $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operators

In diesem abschließenden Kapitel beschäftigen wir uns mit einem ganz besonderen Sturm-Liouville-Problem.

Sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes reelles Intervall mit  $-\infty < a < b < \infty$  und seien  $\mu, \nu$  zwei atomlose, endliche positive Borelmaße auf  $[a, b]$  mit kompakten Trägern. Zusätzlich gelte  $a, b \in \text{supp}(\nu)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit fordern wir wegen der Endlichkeit der Maße sogar  $\mu([a, b]) = \nu([a, b]) = 1$ .

Ab sofort bezeichnen wir mit  $L := \text{supp}(\mu)$  und  $K := \text{supp}(\nu)$  die Träger von  $\mu$  und  $\nu$ .

Außerdem treffen wir noch die Annahme (vgl. Annahme (A.1.b) in der Einleitung von Kapitel 3.1)

$$L \subseteq K, \tag{A.1}$$

damit die nachfolgende Definition sinnvoll ist.

**Definition 4.1.1.** Den Differentialausdruck  $\Delta_{\mu, \nu}$  definieren wir als

$$\Delta_{\mu, \nu} f := \frac{d}{d\mu} \left( \frac{df}{d\nu} \right), \quad f \in \mathfrak{D}_\Delta,$$

wobei  $\mathfrak{D}_\Delta$  die Menge

$$\mathfrak{D}_\Delta := \{f \in AC([a, b], \nu) : f^{[1]} \in AC([a, b], \mu)\}$$

bezeichnet und  $f^{[1]} := \frac{df}{d\nu}$  wieder für die erste Quasiableitung einer Funktion  $f \in \mathfrak{D}_\Delta$  steht.

Wir bezeichnen  $\Delta_{\mu, \nu}$  als den Laplace-Operator bzgl. den Maßen  $\mu$  und  $\nu$ , oder kurz  **$\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operator**.

**Bemerkung 4.1.2.**

- (i) Falls wir für  $\mu$  und  $\nu$  das Lebesgue-Maß auf  $[a, b]$  wählen, erhalten wir den gewöhnlichen Laplace-Operator  $\Delta$ .
- (ii) Der  $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operator ist gerade ein Spezialfall unseres bisher behandelten Sturm-Liouville-Differentialausdrucks (3.1.1) mit den Maßen  $\rho = \mu$ ,  $\varsigma = -\nu$  und  $\chi \equiv 0$ .
- (iii) Die Atomlosigkeit von  $\mu$  und  $\nu$  zieht einige positive Konsequenzen mit sich. Alle absolutstetigen Funktionen bzgl.  $\mu$  und  $\nu$  sind nach Bemerkung 3.1.3 (v) sogar stetig. Außerdem, da die Maße auf der kompakten Menge  $K$  definiert sind, entstehen auch keine Schwierigkeiten bei der Einbettung von  $\mathfrak{D}_\Delta$  in  $L^2([a, b], \mu)$ , denn es gilt  $\mathfrak{D}_\Delta \subseteq C([a, b]) \subseteq L^2([a, b], \mu)$ <sup>14</sup>. Somit sind alle auftretenden linearen Relationen, die sich aus dem Differentialausdruck  $\Delta_{\mu, \nu}$  ergeben, sogar Operatoren.

Wir betrachten nun den  $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operator mit zusätzlichen Randbedingungen. Dabei beschränken wir uns nur auf Dirichlet- und Neumannrandbedingungen.

---

<sup>14</sup> $C([a, b])$  bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$ .

**Definition 4.1.3.**

- (i)  $\Delta_{\mu,\nu}^D$  nennen wir den  $\mu$ - $\nu$ -**Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen** und bezeichnen damit die lineare Relation

$$\Delta_{\mu,\nu}^D = \{(f, \Delta_{\mu,\nu} f) \in L^2([a, b], \mu) \times L^2([a, b], \mu) : f \in \mathfrak{D}_\Delta, f(a) = f(b) = 0\}$$

bzw. falls wir  $\Delta_{\mu,\nu}^D$  als Operator auffassen, schreiben wir

$$\Delta_{\mu,\nu}^D f := \Delta_{\mu,\nu} f, \quad f \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^D)$$

mit dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned} \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^D) := \{f \in L^2([a, b], \mu) : f \in AC([a, b], \nu), f^{[1]} \in AC([a, b], \mu), \\ \Delta_{\mu,\nu} f \in L^2([a, b], \mu), f(a) = f(b) = 0\}. \end{aligned}$$

- (ii)  $\Delta_{\mu,\nu}^N$  nennen wir den  $\mu$ - $\nu$ -**Laplace-Operator mit Neumann-Randbedingungen** und bezeichnen damit die lineare Relation

$$\Delta_{\mu,\nu}^N = \{(f, \Delta_{\mu,\nu} f) \in L^2([a, b], \mu) \times L^2([a, b], \mu) : f \in \mathfrak{D}_\Delta, f^{[1]}(a) = f^{[1]}(b) = 0\}$$

bzw. falls wir  $\Delta_{\mu,\nu}^N$  als Operator auffassen, schreiben wir

$$\Delta_{\mu,\nu}^N f := \Delta_{\mu,\nu} f, \quad f \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^N)$$

mit dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned} \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^N) := \{f \in L^2([a, b], \mu) : f \in AC([a, b], \nu), f^{[1]} \in AC([a, b], \mu), \\ \Delta_{\mu,\nu} f \in L^2([a, b], \mu), f^{[1]}(a) = f^{[1]}(b) = 0\}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.1.4.** Mit der Notation  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  wollen wir von nun an andeuten, dass eine Aussage sowohl für  $\Delta_{\mu,\nu}^D$  als auch für  $\Delta_{\mu,\nu}^N$  gilt.

Wenn wir die Randbedingungsfunktionale wie in Satz 3.5.2 wählen, dann erhalten wir aus Korollar 3.5.14 mit  $\varphi_a = \varphi_b = 0$  bzw. mit  $\varphi_a = \varphi_b = \frac{\pi}{2}$ , dass  $\Delta_{\mu,\nu}^D$  und  $\Delta_{\mu,\nu}^N$  selbstadjungierte lineare Relationen sind. Da  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  ein Operator ist, gilt daher die folgende Beziehung

$$\langle \Delta_{\mu,\nu}^{D/N} f, g \rangle_\mu = \langle f, \Delta_{\mu,\nu}^{D/N} g \rangle_\mu, \quad f, g \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}).$$

Diese Eigenschaft von  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  hätten wir aber genauso durch zweimalige partielle Integration erhalten können.

Außerdem ist wegen  $\text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})^\perp = \text{mul}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}) = \{0\}$  die lineare Relation  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  sogar dicht definiert. Deswegen werden wir ab sofort  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  nicht mehr als lineare Relation, sondern als dicht definierten Operator auffassen.

**Satz 4.1.5.** *Der selbstadjungierte Operator  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  ist negativ, d.h.  $\langle \Delta_{\mu,\nu} f, f \rangle_\mu \leq 0$  für alle  $f \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$ .*

Beweis. Sei  $f \in \mathfrak{D}_\Delta$ . Dann ist  $\bar{f}$  eine Verteilungsfunktion des Maßes  $\int \bar{f}^{[1]} d\nu$  und  $f^{[1]}$  ist eine Verteilungsfunktion des Maßes  $\int \Delta_{\mu,\nu} f d\mu$ . Mit dem Satz über die partielle Integration für Verteilungsfunktionen folgt

$$\langle \Delta_{\mu,\nu} f, f \rangle_\mu = \int_a^b (\Delta_{\mu,\nu} f) \cdot \bar{f} d\mu = [f^{[1]} \bar{f}]_a^b - \int_a^b f^{[1]} \bar{f}^{[1]} d\nu.$$

Für  $f \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$  erhalten wir

$$\langle \Delta_{\mu,\nu}^{D/N} f, f \rangle_\mu = -\|f^{[1]}\|_\nu \leq 0.$$

□

**Bemerkung 4.1.6.** Wenn wir von  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  zum Operator  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  übergehen, dann ist dieser ein positiver Operator. Aus Satz 3.6.7 wissen wir, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Sturm-Liouville-Operators nur aus Eigenwerten besteht. Wegen der Positivität von  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  sind alle Eigenwerte nichtnegativ, denn für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  und einer zu  $\lambda$  gehörenden Eigenfunktion  $f \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$  gilt

$$\lambda = \frac{\langle -\Delta_{\mu,\nu}^{D/N} f, f \rangle_\mu}{\langle f, f \rangle_\mu} \geq 0.$$

Also ist  $(-\infty, 0)$  in der Resolventenmenge  $\rho(-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$  enthalten.

Die Resolvente von  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  bei  $z \in (-\infty, 0)$  werden wir ab sofort mit

$$R_{\mu,\nu}^{D/N}(z) = (-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N} - z)^{-1}$$

bezeichnen. Da  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  ein Operator ist und  $z \in \rho(-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$  ist, ist die Resolvente  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  ein bijektiver Operator von  $L^2([a, b], \mu)$  nach  $\text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$ .

**Satz 4.1.7.** Sei  $z \in (-\infty, 0)$ . Dann ist die Resolvente  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  ein kompakter, positiver Operator auf  $L^2([a, b], \mu)$ .

Beweis. Dass die Resolvente ein kompakter, selbstadjungierter Operator für  $z \in \mathbb{R}$  ist, haben wir schon in Korollar 3.6.4 festgestellt.

Sei  $f \in L^2[a, b], \mu$  und definiere  $g := R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)f \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$ , dann folgt durch

$$\langle R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)f, f \rangle_\mu = \langle g, (-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N} - z)g \rangle_\mu = -\langle \Delta_{\mu,\nu}^{D/N} g, g \rangle_\mu - z\langle g, g \rangle_\mu \geq 0$$

die Positivität der Resolvente. □

**Lemma 4.1.8.** Die Eigenwerte von  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  sind alle nichtnegativ und bilden eine Folge, die gegen unendlich strebt.

Beweis. Bezeichne mit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Eigenwertfolge von  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  und mit  $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der von 0 verschiedenen Eigenwerte von  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  für ein  $z \in (-\infty, 0)$ .

Die Nichtnegativität von  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , haben wir in Bemerkung 4.1.6 schon erkannt, analog erhalten wir auch  $\kappa_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Das Lemma 3.6.6 liefert den Zusammenhang  $\kappa_n = \frac{1}{\lambda_n - z}$  bzw.

$$\lambda_n = \frac{1}{\kappa_n} + z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da  $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine nichtnegative Nullfolge ist, muss  $\lambda_n$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen unendlich streben.  $\square$

Durch das vorige Lemma macht es Sinn, die Eigenwertzählfunktion von  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  zu betrachten und genauer zu untersuchen. Unser Ziel dieses Kapitels wird es sein, eine asymptotische Aussage über die Eigenwertzählfunktion zu finden, wenn die Maße  $\mu$  und  $\nu$  auf selbstähnlichen Mengen von  $[a, b]$  leben.

**Definition 4.1.9.** Wir definieren

$$N_{\mu,\nu}^{D/N}(x) := \#\{\lambda \leq x : \lambda \text{ ist Eigenwert von } -\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}\}, \quad x \in (0, \infty)$$

als die **Eigenwertzählfunktion** des Operators  $-\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$ .

Dabei bezeichnet  $\#A$  die Mächtigkeit, in unserem Fall die Anzahl der Elemente, der Menge  $A$ .

**Bemerkung 4.1.10.** In Korollar 3.6.4 haben wir gesehen, dass die Resolvente eines Sturm-Liouville-Operators ein kompakter Operator ist, sogar ein Hilbert-Schmidt-Operator.

Indem wir noch die Positivität von  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  für  $z \in (-\infty, 0)$  ausnützen, können wir mit Hilfe des Satzes von Mercer 1.4.4 sogar noch mehr über die Resolvente aussagen.

**Satz 4.1.11.** Sei  $z \in (-\infty, 0)$ . Dann ist die Resolvente  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  ein nuklearer Operator auf  $L^2([a, b], \mu)$  mit der Spur

$$\text{tr } R_{\mu,\nu}^{D/N}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n, \quad (4.1.1)$$

wobei  $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der von 0 verschiedenen Eigenwerte von  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  ist.

Beweis. Der Satz von Mercer 1.4.4 ist in diesem Fall anwendbar mit der kompakten Menge  $[a, b]$ , dem Maß  $\mu$  und dem Integraloperator  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  mit Kern  $G_z$ , der wie in (3.6.1) mit entsprechenden Funktionen  $u_a, u_b \in \text{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$  dargestellt werden kann.

Wegen der Atomlosigkeit von  $\mu$  und  $\nu$  sind  $u_a$  und  $u_b$  stetig, daher auch  $G_z$ . Außerdem ist die Resolvente selbstadjungiert und sogar positiv.

Somit erhalten wir für  $(\mu \otimes \mu)$ -fast alle  $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$

$$G_z(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n e_n(x) \overline{e_n(y)}, \quad (4.1.2)$$

wobei die Konvergenz  $(\mu \otimes \mu)$ -fast überall absolut und gleichmäßig ist. Dabei ist  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  das Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(z)$  aus Satz 3.6.5 und  $e_n$  der Eigenvektor zum

Eigenwert  $\kappa_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ist.

Nun gilt mit  $G_z(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n |e_n(x)|^2$  und der gleichmäßigen Konvergenz von (4.1.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \int_a^b |e_n(x)|^2 d\mu(x) = \int_a^b G_z(x, x) d\mu(x) \leq \|G_z\|_{\infty} \mu([a, b]) < \infty, \quad (4.1.3)$$

wobei  $\|\cdot\|_{\infty}$  hier die Supremumsnorm auf der Menge  $[a, b] \times [a, b]$  bezeichnet.

Da die Resolvente ein selbstadjungierter, kompakter Operator auf  $L^2([a, b], \mu)$  ist und die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n < \infty$  konvergiert, ist  $R_{\mu, \nu}^{D/N}(z)$  ein nuklearer Operator und es gilt (4.1.1), vgl. Abschnitt 1.2.3.  $\square$

**Korollar 4.1.12.** *Sei  $z \in (-\infty, 0)$ . Dann besitzt die Spur der Resolvente  $\text{tr } R_{\mu, \nu}^{D/N}(z)$  folgende Darstellungen*

(i)

$$\text{tr } R_{\mu, \nu}^{D/N}(z) = \int_a^b G_z^{D/N}(x, x) d\mu(x), \quad (4.1.4)$$

wobei  $G_z^{D/N}$  die in (3.6.1) definierte Funktion mit entsprechenden  $u_a, u_b \in \text{dom}(\Delta_{\mu, \nu}^{D/N})$  ist.

(ii)

$$\text{tr } R_{\mu, \nu}^{D/N}(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t - z} dN_{\mu, \nu}^{D/N}(t), \quad (4.1.5)$$

d.h. die Spur der Resolvente ist die Stieltjes-Transformierte der Eigenwertzählfunktion von  $-\Delta_{\mu, \nu}^{D/N}$ .

Beweis. Die erste Darstellung (4.1.4) haben wir bereits in (4.1.3) gezeigt. Die zweite folgt ganz leicht mit dem Lemma 3.6.6, wenn wir mit  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die Eigenwerte von  $-\Delta_{\mu, \nu}^{D/N}$  und mit  $\kappa_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die von 0 verschiedenen Eigenwerte von  $R_{\mu, \nu}^{D/N}(z)$  bezeichnen. Dann gilt

$$\text{tr } R_{\mu, \nu}^{D/N}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - z} = \int_0^{\infty} \frac{1}{t - z} dN_{\mu, \nu}^{D/N}(t).$$

$\square$

## 4.2 Vorbemerkungen zu selbstähnlichen Mengen und Maßen

Sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes reelles Intervall mit  $-\infty < a < b < \infty$ ,  $M \geq 2$  eine natürliche Zahl und  $S := \{S_1, \dots, S_M\}$  eine Familie von affinen Kontraktionen, d.h. für  $i = 1, \dots, M$  ist

$$S_i(x) = a_i x + b_i, \quad x \in [a, b], \quad (4.2.1)$$

mit  $0 < a_i < 1$  und  $b_i \in \mathbb{R}$ , sodass die Funktion  $S_i$  das Intervall  $[a, b]$  wieder nach  $[a, b]$  abbildet. Außerdem sei  $\rho := (\rho_1, \dots, \rho_M)$  ein  $M$ -dimensionaler Gewichtungsvektor, d.h.  $\rho_1, \dots, \rho_M$  sind reelle Zahlen aus  $(0, 1)$  mit  $\sum_{i=1}^M \rho_i = 1$ .

**Definition 4.2.1.**

(i) Eine Teilmenge  $L$  von  $[a, b]$  heißt **selbstähnlich bzgl.  $S$** , falls

$$L = \bigcup_{i=1}^M S_i(L).$$

(ii) Ein positives Borelmaß  $\mu$  auf  $[a, b]$  heißt **selbstähnlich bzgl.  $S$  und  $\rho$** , falls

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^M \rho_i \mu(S_i^{-1}(A))$$

für jede Borelmenge  $A \in \mathfrak{B}([a, b])$  gilt.

**Satz 4.2.2.**

- (i) Für jede Familie  $S$  von affinen Kontraktionen existiert eine eindeutige bzgl.  $S$  selbstähnliche Teilmenge  $L(S)$  von  $[a, b]$  und  $L(S)$  kompakt.
- (ii) Für jede Familie  $S$  von affinen Kontraktionen und jeden Gewichtsvektor  $\rho$  existiert ein eindeutiges bzgl.  $S$  und  $\rho$  selbstähnliches Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu(S, \rho)$  und es gilt  $\text{supp } \mu(S, \rho) = L(S)$ .

Beweis. Die entsprechenden Resultate über die Existenz und Eindeutigkeit von selbstähnlichen Mengen und Maßen findet man in Hutchinson [6, Theorem 3.1.(3), Theorem 4.4.(1) und Theorem 4.4.(4)].  $\square$

**Bemerkung 4.2.3.** Wenn eine Familie  $S = (S_1, \dots, S_M)$ ,  $M \geq 2$ , von affinen Kontraktionen wie in (4.2.1) gegeben ist, dann bezeichnet man die eindeutige Lösung  $D$  von  $\sum_{i=1}^M a_i^D = 1$  als die Ähnlichkeitsdimension von  $S$ .

Falls die zusätzliche Annahme  $\#(S_i([a, b]) \cap S_j([a, b])) \leq 1$  für  $i, j = 1, \dots, M$ ,  $i \neq j$ , erfüllt ist, dann stimmt die Ähnlichkeitsdimension von  $S$  mit der Hausdorff-Dimension<sup>15</sup> von  $L(S)$  überein.

**Beispiel 4.2.4.** Die bekannte Cantormenge  $C \subseteq [0, 1]$  ist die eindeutige selbstähnliche Menge bzgl. der affinen Kontraktionen  $S_1(x) = \frac{x}{3}$  und  $S_2(x) = \frac{x+2}{3}$  von  $[0, 1]$  nach  $[0, 1]$ . Die Ähnlichkeitsdimension  $D = \frac{\ln 2}{\ln 3}$  von  $S = (S_1, S_2)$  ergibt sich aus der Gleichung  $(\frac{1}{3})^D + (\frac{1}{3})^D = 1$  und ist gleich der Hausdorff-Dimension der Cantormenge  $C$ .

---

<sup>15</sup>Hausdorff-Dimension: siehe [6].

### 4.3 Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte des $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operators

Seien wie zu Anfang des Kapitels  $\mu, \nu$  zwei atomlose Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompakten Trägern  $L = \text{supp}(\mu)$  und  $K = \text{supp}(\nu)$ . Ferner seien  $S = (S_1, \dots, S_M)$ ,  $M \geq 2$ , eine Familie von affinen Kontraktionen und  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_M)$  ein Gewichtungsvektor.

Zusätzlich sollen noch die folgenden Annahmen gelten:

(A.1) Der Träger von  $\mu$  ist im Träger von  $\nu$  enthalten, d.h.  $L \subseteq K$ .

(A.2) Die Bilder der Abbildungen von  $S$  berühren sich maximal in einem Punkt, d.h.

$$\#(S_i([a, b]) \cap S_j([a, b])) \leq 1 \quad \text{für } i, j = 1, \dots, M, i \neq j$$

(A.3)  $\mu$  ist das eindeutige selbstähnliche Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß bzgl.  $S$  und  $\rho$ , d.h.  $\mu = \mu(S, \rho)$ .

(A.4) Es existieren reelle Zahlen  $\sigma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ , sodass

$$\nu \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^M S_i([a, b]) \right) \right) = \sum_{i=1}^M \sigma_i \nu(S_i^{-1}(A))$$

für alle Borelmengen  $A \in \mathfrak{B}([a, b])$  gilt.

**Beispiel 4.3.1.** Sei  $\nu$  das Lebesgue-Maß auf  $[0, 1]$  ist und  $\mu$  ein beliebiges selbstähnliches Maß bzgl. einer Familie  $S$  von affinen Kontraktionen und einem Gewichtungsvektor  $\rho$ . Wenn  $S$  wie in (4.2.1) gegeben ist, dann wird die Annahme (A.4) gerade von den Gewichten  $\sigma_i := a_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , erfüllt.

**Lemma 4.3.2.** Seien  $\mu, \nu$  zwei atomlose Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompakten Trägern und seien die Annahmen (A.1)-(A.4) mit einer Familie  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$  von affinen Kontraktionen, einem Gewichtungsvektor  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_M)$  und positiven Zahlen  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  erfüllt, wobei  $M \geq 2$  eine natürliche Zahl ist.

Dann gilt

$$(i) \quad \mu|_{\mathfrak{B}(S_i([a, b]))} = \rho_i S_i \mu, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$(ii) \quad \nu|_{\mathfrak{B}(S_i([a, b]))} = \sigma_i S_i \nu, \quad i = 1, \dots, M,$$

$$(iii) \quad \bigcup_{i=1}^M S_i(K) \subseteq K,$$

$$(iv) \quad \sum_{i=1}^M \sigma_i \leq 1.$$

**Beweis.** Die Aussagen (i) und (ii) folgen sofort aus der Selbstähnlichkeit des Maßes  $\mu$  und aus (A.4), wenn wir (A.2) und die Atomlosigkeit der Maße berücksichtigen.

Für (iii) definieren wir zuerst das Maß  $\nu' := \nu(\cdot \cap \bigcup_{i=1}^M S_i([a, b]))$  auf  $\mathfrak{B}([a, b])$  und stellen fest, dass  $\text{supp}(\nu') \subseteq \text{supp}(\nu) = K$ . Wegen (A.4) gilt aber  $\nu' = \sum_{i=1}^M \sigma_i S_i \nu$ . Der Träger von  $\sigma_i S_i \nu$ ,  $i = 1, \dots, M$ , ist aber gerade  $\text{supp}(\sigma_i S_i \nu) = S_i K$ . Daher folgt  $\text{supp}(\nu') = \bigcup_{i=1}^M S_i(K)$ .

Um (iv) zu beweisen, wählen wir  $A = \bigcup_{i=1}^M S_i(K)$  in (A.4) und erhalten damit, da  $\nu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit  $\nu(K) = 1$  ist,

$$\sum_{i=1}^M \sigma_i = \sum_{i=1}^M \sigma_i \nu(K) = \nu \left( \bigcup_{i=1}^M S_i(K) \right) \leq 1,$$



wobei wir die Beziehung  $S_i^{-1} \left( \bigcup_{i=1}^M S_i(K) \right) = S_i^{-1}(S_i(K)) = K$ ,  $i = 1, \dots, M$ , ausgenützt haben, die wegen (A.2) gilt.  $\square$

**Satz 4.3.3.** *Seien  $\mu, \nu$  zwei atomlose Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompakten Trägern und seien die Annahmen (A.1)-(A.4) mit einer Familie  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$  von affinen Kontraktionen, einem Gewichtungsvektor  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_M)$  und positiven Zahlen  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  erfüllt, wobei  $M \geq 2$  eine natürliche Zahl ist.*

*Dann gilt die Ungleichungskette*

$$\sum_{i=1}^M N_{(\rho_i S_i \mu), (\sigma_i S_i \nu)}^D(x) \leq N_{\mu, \nu}^D(x) \leq N_{\mu, \nu}^N(x) \leq \sum_{i=1}^M N_{(\rho_i S_i \mu), (\sigma_i S_i \nu)}^N(x), \quad x \geq 0, \quad (4.3.1)$$

wobei  $N_{\mu, \nu}^{D/N}$  die Eigenwertzählfunktionen des Operators  $-\Delta_{\mu, \nu}^{D/N}$  auf  $[a, b]$  und  $N_{(\rho_i S_i \mu), (\sigma_i S_i \nu)}^{D/N}$  jene des Operators  $-\Delta_{(\rho_i S_i \mu), (\sigma_i S_i \nu)}^{D/N}$  auf  $S_i([a, b]) = [S_i a, S_i b]$  bezeichnet.

Beweis. Da die Eigenwerte von  $-\Delta_{\mu, \nu}^{D/N}$  durch ein Maximum-Minimum-Prinzip charakterisiert sind (siehe [2, Folgerung 3.3.4]), können wir die klassischen Resultate über elliptische Eigenwertprobleme auf Gebieten, die aus endlich vielen nicht-überlappenden Teilgebieten bestehen, anwenden (siehe Courant und Hilbert [3]). Mit Hilfe von Proposition VI.2.2 und VI.2.4 in [3] erhalten wir folgende Aussagen über die Eigenwertzählfunktionen

$$N_{\mu, \nu}^D(x, [a, b]) \geq \sum_{i=1}^M N_{\mu_i, \nu_i}^D(x, [S_i a, S_i b]), \quad x \geq 0, \quad (4.3.2)$$

$$N_{\mu, \nu}^N(x, [a, b]) \leq \sum_{i=1}^M N_{\mu_i, \nu_i}^N(x, [S_i a, S_i b]), \quad x \geq 0, \quad (4.3.3)$$

wobei  $\mu_i := \mu|_{\mathfrak{B}(S_i([a, b]))}$  und  $\nu_i := \nu|_{\mathfrak{B}(S_i([a, b]))}$  die auf  $[S_i a, S_i b]$  eingeschränkten Maße für  $i = 1, \dots, M$ , sind. Das Intervall beim Argument der Eigenwertzählfunktionen soll dabei veranschaulichen, auf welchem Intervall die entsprechende Eigenwertzählfunktion definiert ist.

Mit Lemma 4.3.2 (i) und (ii) erhalten wir dann für  $i = 1, \dots, M$

$$N_{\mu_i, \nu_i}^{D/N}(x, [S_i a, S_i b]) = N_{(\rho_i S_i \mu), (\sigma_i S_i \nu)}^{D/N}(x, [S_i a, S_i b]), \quad x \geq 0. \quad (4.3.4)$$

Außerdem kann die Technik des Dirichlet-Neumann-Bracketings (siehe Abschnitt 3.3 in [2]) angewandt werden, die uns

$$N_{\mu, \nu}^D(x, [a, b]) \leq N_{\mu, \nu}^N(x, [a, b]) \leq N_{\mu, \nu}^D(x, [a, b]) + 2, \quad x \geq 0, \quad (4.3.5)$$

liefert, vgl. Satz 3.3.5 in [2].

Wenn wir die Ungleichungen und Gleichungen (4.3.2) - (4.3.5) zusammenfassen erhalten wir die gewünschte Aussage.  $\square$

**Satz 4.3.4.** *Seien  $\mu, \nu$  zwei atomlose Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompakten Trägern, sodass (A.1) erfüllt ist.*

*Außerdem sei  $S$  eine affine Kontraktion auf  $[a, b]$  und  $\rho, \sigma \in (0, 1)$  zwei reelle Zahlen, sodass*

$$\mu(S(A)) = \rho \cdot \mu(A) \quad \text{und} \quad \nu(S(A)) = \sigma \cdot \nu(A)$$

für alle Borelmengen  $A \in \mathfrak{B}([a, b])$  gilt, bzw. anders ausgedrückt, es gelte  $\mu = \rho S\mu$  und  $\nu = \sigma S\nu$  auf den Borelmengen  $\mathfrak{B}(S([a, b]))$ .

Dann gilt

(i) die folgende Skalierungseigenschaft der Eigenwertzählfunktion

$$N_{(\rho S\mu), (\sigma S\nu)}^{D/N}(x) = N_{\mu, \nu}^{D/N}(\rho\sigma x), \quad x \geq 0, \quad (4.3.6)$$

und

(ii) die folgende Skalierungseigenschaft der Spur der Resolvente

$$\operatorname{tr} R_{(\rho S\mu), (\sigma S\nu)}^{D/N}(z) = \rho\sigma \operatorname{tr} R_{\mu, \nu}^{D/N}(\rho\sigma z), \quad z \in (-\infty, 0). \quad (4.3.7)$$

Beweis.

(i) Wir zeigen, dass  $f$  genau dann eine Eigenfunktion von  $\Delta_{(\rho S\mu), (\sigma S\nu)}^{D/N}$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist,

wenn  $g := f \circ S$  eine Eigenfunktion von  $\Delta_{\mu, \nu}^{D/N}$  zum Eigenwert  $\rho\sigma\lambda$  ist.

Wir nehmen nun an, dass  $\Delta_{(\rho S\mu), (\sigma S\nu)} f = \lambda f$  auf  $[Sa, Sb]$  für eine Funktion  $f \in \operatorname{dom}(\Delta_{(\rho S\mu), (\sigma S\nu)})$  gilt, d.h.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(Sa) + \int_{Sa}^x f^{[1]}(t) d(\sigma S\nu)(t), \quad t \in [Sa, Sb], \\ f^{[1]}(x) &= f^{[1]}(Sa) + \lambda \int_{Sa}^x f(t) d(\rho S\mu)(t), \quad t \in [Sa, Sb]. \end{aligned}$$

Da die Abbildung  $S: [a, b] \rightarrow [Sa, Sb]$  bijektiv ist, erhalten wir mit der Substitution  $x = Sz$ ,  $z \in [a, b]$ , für  $f$

$$\begin{aligned} g(z) &= f(Sz) = f(Sa) + \int_{Sa}^{Sz} f^{[1]}(t) d(\sigma S\nu)(t) \\ &= f(Sa) + \sigma \int_{Sa}^{Sz} f^{[1]}(t) d(S\nu)(t) \\ &= g(a) + \sigma \int_a^z f^{[1]}(St) d\nu(t), \quad z \in [a, b]. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $g^{[1]}(z) = \sigma(f^{[1]} \circ S)(z)$ ,  $z \in [a, b]$ . Mit der gleichen Substitution erhalten wir für  $f^{[1]}$

$$\begin{aligned} g^{[1]}(z) &= \sigma f^{[1]}(Sz) = \sigma f^{[1]}(Sa) + \sigma\lambda \int_{Sa}^{Sz} f(t) d(\rho S\mu)(t) \\ &= \sigma f^{[1]}(Sa) + \rho\sigma\lambda \int_{Sa}^{Sz} f(t) d(S\mu)(t) \\ &= g^{[1]}(a) + \rho\sigma\lambda \int_a^z f(St) d\mu(t) \\ &= g^{[1]}(a) + \rho\sigma\lambda \int_a^z g(t) d\mu(t), \quad z \in [a, b] \end{aligned}$$

Wegen  $g = f \circ S$  und  $g^{[1]} = \sigma f^{[1]} \circ S$  erfüllt  $g$  offensichtlich die Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen  $g(a) = g(b) = 0$  bzw.  $g^{[1]}(a) = g^{[1]}(b) = 0$ , da  $f$  sie bereits bei  $Sa$  und bei  $Sb$  erfüllt. Daher ist  $g \in \operatorname{dom}(\Delta_{\mu, \nu}^{D/N})$  und  $g$  ist eine Lösung von  $\Delta_{\mu, \nu}^{D/N} g = \rho\sigma\lambda g$ , d.h.  $g$  ist eine Eigenfunktion von  $\Delta_{\mu, \nu}^{D/N}$  zum Eigenwert  $\rho\sigma\lambda$ .

Die Umkehrung zeigt man analog.

(ii) Mit der Beziehung (4.1.5) und der Gleichung (4.3.6) erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} R_{(\rho S\mu),(\sigma S\nu)}^{D/N}(z) &= \int_0^\infty \frac{1}{t-z} dN_{(\rho S\mu),(\sigma S\nu)}^{D/N}(t) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t-z} dN_{\mu,\nu}^{D/N}(\rho\sigma t), \quad z \in (-\infty, 0).\end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Lebesgue-Stieltjes-Transformation, siehe [9, Chapter 0. §4, Proposition (4.10)], mit der stetigen, monotonen Transformationsabbildung  $M(t) = \rho\sigma t$ ,  $t \in (0, \infty)$ , erhalten wir weiter, für  $z \in (-\infty, 0)$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{t-z} dN_{\mu,\nu}^{D/N}(\rho\sigma t) &= \rho\sigma \int_0^\infty \frac{1}{M(t) - \rho\sigma z} dN_{\mu,\nu}^{D/N}(M(t)) \\ &= \rho\sigma \int_0^\infty \frac{1}{t - \rho\sigma z} dN_{\mu,\nu}^{D/N}(t) = \rho\sigma \operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^{D/N}(\rho\sigma z).\end{aligned}$$

□

**Korollar 4.3.5.** *Seien  $\mu, \nu$  zwei atomlose Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompakten Trägern und seien die Annahmen (A.1)-(A.4) mit einer Familie  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$  von affinen Kontraktionen, einem Gewichtungsvektor  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_M)$  und positiven Zahlen  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  erfüllt, wobei  $M \geq 2$  eine natürliche Zahl ist.*

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^M \rho_i \sigma_i \operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^D(\rho_i \sigma_i z) \leq \operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^D(z) \leq \operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^N(z) \leq \sum_{i=1}^M \rho_i \sigma_i \operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^N(\rho_i \sigma_i z), \quad z \in (-\infty, 0).$$

Beweis. Die Aussage folgt, wenn wir die Ungleichungskette (4.3.1) mit (4.1.5) kombinieren und dann die Spur der Resolvente gemäß (4.3.7) skalieren. □

**Lemma 4.3.6.** *Seien  $M \geq 2$  eine natürliche Zahl,  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, M$ , reelle Zahlen mit  $\sum_{i=1}^M \alpha_i < 1$  und  $\beta \in (-1, 0)$  die eindeutig bestimmte Lösung von  $\sum_{i=1}^M \alpha_i^{1+\beta} = 1$ .*

Ferner sei  $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  eine stetige Funktion.

(i) Falls  $f(x) \leq \sum_{i=1}^M \alpha_i f(\alpha_i x)$  für alle  $x \in (0, \infty)$  gilt, dann existiert ein  $C_1 > 0$ , sodass

$$f(x) \leq C_1 x^\beta, \quad x \geq \min_{i=1, \dots, M} \alpha_i.$$

(ii) Falls  $f(x) \geq \sum_{i=1}^M \alpha_i f(\alpha_i x)$  für alle  $x \in (0, \infty)$  gilt, dann existiert ein  $C_2 > 0$ , sodass

$$f(x) \geq C_2 x^\beta, \quad x \geq \min_{i=1, \dots, M} \alpha_i.$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass die durch

$$g(\beta) := \sum_{i=1}^M \alpha_i^{1+\beta}$$

definierte Funktion  $g$  auf  $[-1, 0]$  stetig und streng monoton fallend, also bijektiv ist. Nun gilt  $g(-1) = M \geq 2$  und  $g(0) = \sum_{i=1}^M \alpha_i < 1$ . Nach dem Zwischenwertsatz muss daher eine eindeutige Lösung  $\beta \in (-1, 0)$  mit  $g(\beta) = 1$  existieren.

Nun beweisen wir (i), die Aussage (ii) erhält man analog. Dazu definieren wir uns die Funktion

$$V(z) := \frac{f(z)}{z^\beta}, \quad z \in (0, \infty).$$

Unter Verwendung der Gleichheit  $z^\beta = \sum_{i=1}^M \alpha_i (\alpha_i z)^\beta$  und der Eigenschaft von  $f$  ergibt sich

$$V(z) \leq \frac{\sum_{i=1}^M \alpha_i f(\alpha_i z)}{\sum_{i=1}^M \alpha_i (\alpha_i z)^\beta} \leq \max_{i=1, \dots, M} V(\alpha_i z), \quad z \in (0, \infty). \quad (4.3.8)$$

Wegen der Stetigkeit von  $f$  können wir die Konstante

$$C_1 := \max \left\{ V(z) : z \in [\min_i \alpha_i, 1] \right\}$$

definieren, die wegen  $V(z) > 0$ ,  $z \in (0, \infty)$ , positiv ist.

Für  $z \in [\min_i \alpha_i, 1]$  gilt definitionsgemäß  $V(z) \leq C_1$ . Für  $z > 1$  erhalten wir durch wiederholtes Anwenden von (4.3.8)

$$V(z) \leq V(\alpha_{i_1} z) \leq V(\alpha_{i_2} \alpha_{i_1} z) \leq \dots \leq V(\alpha_{i_m} \alpha_{i_{m-1}} \dots \alpha_{i_1} z)$$

für eine gewisse Folge  $i_1, i_2, \dots, i_m$  von Indizes aus  $\{1, \dots, M\}$ , wobei wir  $m \in \mathbb{N}$  als die größte natürliche Zahl definieren, für die

$$\alpha_{i_{m-1}} \dots \alpha_{i_1} z > 1 \quad (4.3.9)$$

gilt. Dann ist

$$\min_i \alpha_i \leq \alpha_{i_m} \alpha_{i_{m-1}} \dots \alpha_{i_1} z \leq 1,$$

wobei die erste Ungleichung aus (4.3.9) folgt. Somit gilt auch in diesem Falle  $V(z) \leq C_1$ .  $\square$

**Korollar 4.3.7.** *Seien  $\mu, \nu$  zwei atomlose Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompakten Trägern und seien die Annahmen (A.1)-(A.4) mit einer Familie  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$  von affinen Kontraktionen, einem Gewichtsvektor  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_M)$  und positiven Zahlen  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  erfüllt, wobei  $M \geq 2$  eine natürliche Zahl ist.*

*Dann existieren  $C_1, C_2 > 0$ , sodass die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} R_{\mu, \nu}^D(-z) &\geq C_1 z^\beta, & z > \min_{i=1, \dots, M} \rho_i \sigma_i, \\ \operatorname{tr} R_{\mu, \nu}^N(-z) &\leq C_2 z^\beta, & z > \min_{i=1, \dots, M} \rho_i \sigma_i, \end{aligned}$$

*gelten, wobei  $\beta \in (-1, 0)$  die eindeutige Lösung von  $\sum_{i=1}^M (\sigma_i \rho_i)^{1+\beta} = 1$  ist. Insgesamt gilt daher mit der Notation wie in Bemerkung 1.4.6*

$$\operatorname{tr} R_{\mu, \nu}^{D/N}(-z) \asymp z^\beta \quad \text{für } z \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir definieren die Funktion  $f(z) := \operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^{D/N}(-z)$  für  $z \in (0, \infty)$ . Da die Resolvente  $R_{\mu,\nu}^{D/N}(-z)$  ein positiver, nuklearer Operator ist, sind deren Eigenwerte nichtnegativ und mit der Darstellung (4.1.1) ist ihre Spur positiv, da mindestens ein positiver Eigenwert existieren muss. Daher ist  $f \geq 0$  und  $f$  bildet  $(0, \infty)$  nach  $(0, \infty)$  ab.

Die Spur ist ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum der nuklearen Operatoren  $\mathcal{N}(L^2((a, b), \mu))$ , vgl. [10, Satz. VI.5.8.(a)].

Um die Stetigkeit der Resolvente  $R_{\mu,\nu}^{D/N}$  als Abbildung von  $(-\infty, 0)$  in die Menge der nuklearen Operatoren  $\mathcal{N}(L^2([a, b], \mu))$  zu zeigen, verwenden wir die Resolventengleichung 1.3.3. Für die Resolvente bei  $z$  schreiben wir abkürzend  $R(z)$ . Sei  $z \in (-\infty, 0)$  fest und  $y \in (-\infty, 0)$ , sodass  $|z - y| \|R(z)\| < 1$  ist. Dann erhalten wir mit (1.2.1) und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|R(z) - R(y)\|_{\text{nuk}} &\leq |z - y| \|R(z)\| \|R(y)\|_{\text{nuk}} \\ &\leq |z - y| \|R(z)\| (\|R(z)\|_{\text{nuk}} + \|R(z) - R(y)\|_{\text{nuk}}), \end{aligned}$$

wobei  $\|\cdot\|_{\text{nuk}}$  die nukleare Norm auf  $\mathcal{N}(L^2((a, b), \mu))$  bezeichnet. Durch Umformen ergibt sich dann

$$\|R(z) - R(y)\|_{\text{nuk}} \leq \frac{|z - y| \|R(z)\| \|R(z)\|_{\text{nuk}}}{1 - |z - y| \|R(z)\|}.$$

Also konvergiert  $\|R(z) - R(y)\|_{\text{nuk}} \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow z$ , d.h.  $R$  ist stetig bei  $z$ .

Die Abbildung  $h(z) := -z$ ,  $z \in (0, \infty)$ , ist klarerweise auch stetig. Somit ist  $f$  als Zusammensetzung stetiger Abbildungen stetig.

Weiters gilt

$$\sum_{i=1}^M (\rho_i \sigma_i) < \sum_{i=1}^M \sigma_i \leq 1,$$

und daraus erhalten wir auch  $0 < \rho_i \sigma_i < 1$  für  $i = 1, \dots, M$ .

Es sind alle Voraussetzungen von Lemma 4.3.6 erfüllt. Damit folgt die asymptotische Aussage über die Resolvente.  $\square$

**Satz 4.3.8.** *Seien  $\mu, \nu$  zwei atomlose Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit kompakten Trägern und seien die Annahmen (A.1)-(A.4) mit einer Familie  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$  von affinen Kontraktionen, einem Gewichtsvektor  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_M)$  und positiven Zahlen  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  erfüllt, wobei  $M \geq 2$  eine natürliche Zahl ist.*

*Wir betrachten das Eigenwertproblem*

$$-\Delta_{\mu,\nu} f = \lambda f, \quad f \in \operatorname{dom}(\Delta_{\mu,\nu}^{D/N})$$

*für den  $\mu$ - $\nu$ -Laplace-Operator  $\Delta_{\mu,\nu}^{D/N}$  mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen, und seien  $N_{\mu,\nu}^D$  und  $N_{\mu,\nu}^N$  die entsprechenden Eigenwertzählfunktionen.*

*Dann gilt*

$$N_{\mu,\nu}^{D/N}(x) \asymp x^\gamma, \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

*d.h. es existieren Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  und eine Zahl  $x_0 \in (0, \infty)$ , sodass*

$$C_1 x^\gamma \leq N_{\mu,\nu}^{D/N}(x) \leq C_2 x^\gamma, \quad \text{für alle } x \geq x_0,$$

*wobei die Konvergenzrate  $\gamma \in (0, 1)$  die eindeutig bestimmte Lösung von  $\sum_{i=1}^M (\rho_i \sigma_i)^\gamma = 1$  ist.*

Beweis. Aus Korollar 4.3.7 wissen wir bereits

$$\operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^{D/N}(-z) \asymp z^\beta \quad \text{für } z \rightarrow \infty,$$

wobei  $\beta \in (-1, 0)$  die eindeutig bestimmte Lösung von  $\sum_{i=1}^M (\rho_i \sigma_i)^{1+\beta} = 1$  ist. Außerdem stehen  $\operatorname{tr} R_{\mu,\nu}^{D/N}$  und  $N_{\mu,\nu}^{D/N}$  in Beziehung (4.1.5). Also haben wir

$$\int_0^\infty \frac{1}{t+z} dN_{\mu,\nu}^{D/N}(t) \asymp z^\beta \quad \text{für } z \rightarrow \infty.$$

Wenn wir darauf den Spezialfall des Taubertheorems für Stieltjestransformationen, Satz 1.4.5, mit  $\alpha = 1$  anwenden, folgt sofort die Behauptung.  $\square$

## Hauptliteratur

- [1] J. ECKHARDT, G. TESCHL. *Sturm-Liouville operators with measure-valued coefficients*. J. Anal. Math. **20**, 151-224, 2013.
- [2] U. FREIBERG. *Maßgeometrische Laplaceoperatoren für fraktale Teilmengen der reellen Achse*. Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2000.

## Weitere Literatur

- [3] R. COURANT, D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics. Vol. I*. Springer-Verlag, Berlin, 1931.
- [4] A. DIJKSMA, H. S. V. DE SNOO. *Self-adjoint extensions of symmetric subspaces*. Pacific J. Math. **54**, 1974.
- [5] E. HEWITT, K. STROMBERG. *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag, New York, 1969.
- [6] J. E. HUTCHINSON. *Fractals and self-similarity*. Indiana Univ. Math. J. **30**, 713-747, 1981.
- [7] M. KALTENBÄCK. *Funktionalanalysis 2*. Skriptum, Technische Universität Wien, 2012.  
<http://asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/main.pdf>
- [8] J. KARAMATA. *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transformation betreffen*. J. Reine Angew. Math. **164**, 27-39, 1931.
- [9] D. REVUZ, M. YOR. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Third Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [10] D. WERNER. *Funktionalanalysis*. 5., erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2005.