Inhaltsverzeichnis

1 Begriffsfestlegungen und Grundlagen

1.1 Koordinatentransformationen

Im allgemeinen sind die Koordinaten eines Vektors x eines Vektorraums V von der gewählten Basis abhängig. Wir werden in diesem Abschnitt kurz die Frage beleuchten, welcher Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Elements im bezug auf verschiedene Basen besteht. Seien also die beiden Basen $b_1, ..., b_n$ und $c_1, ..., c_n$ des Vektorraums V gegeben. Jedes $x \in V$ ist also dann gegeben durch:

$$x = x_1 b_1 + ... + x_n b_n$$

bzw.

$$x = x'_1 c_1 + ... + x'_n c_n$$

Jedes Element der Basis $c_1, ..., c_n$ besitzt aber natürlich ebenfalls eine Darstellung in $\{b_i\}$. Diese schreiben wir folgendermaßen:

$$c_l = \sum_{k=1}^{n} q_{kl} b_k, \forall l \leq n$$

Setzt man diese Beziehung in die Darstellung von v nach der Basis $\{c_i\}$ ein so erhält man:

$$x = x'_1 c_1 + ... + x'_n c_n = \sum_{j=1}^{n} x_j c_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{k=1}^{n} q_{kl} b_k = \sum_{k,j=1}^{n} q_{kj} x'_j b_k$$

Durch Vergleich mit der ersten Darstellung von x erhält man:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} q_{kj} x'_j$$

Diese Beziehung entspricht der Matrizengleichung:

$$Qx' = x$$

mit:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Der Wechsel von einer Basis zu einer anderen lässt sich demnach auch als lineare Abbildung von V nach V betrachten. Die zu dieser Abbildung gehörige Matrix Q heißt Transformationsmatrix. Man beachte, dass in ihren Spalten die Koordinaten der zweiten Basis nach der ersten stehen.
Wenn man nun die Reihenfolge der Basen vertauscht, also einen Basiswechsel von $\{c_i\}$ nach $\{b_i\}$ durchführt, so erhält man natürlich in analoger Weise eine Transformationsmatrix D für die dann gilt $CDx = x, \forall x \in V$. Wenn man für x zum Beispiel $(1, 0, ..., 0)^T$ einsetzt, so erhält man durch ausmultiplizieren:

$$CDx = \begin{pmatrix} c_{11}d_{11} \\ c_{21}d_{21} \\ \vdots \\ c_{n1}d_{n1} \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

und durch weiters Einsetzen von $(0, 1, 0, ...0)^T, ..., (0, 0, ..., 0, 1)^T$ schließlich $CD = I$ und damit $D = C^{-1}$. Die beiden Matrizen C und D sind also zueinander invers.
Weiters interessieren wir uns noch dafür, wie sich die Basen des Dualraums bei einem Basiswechsel verhalten. Wir halten folgenden Satz fest:

SATZ 1.1.1 *Sei V ein Vektoraum mit Dimension n und $\{b_i\}$ und $\{c_i\}$ zwei Basen. Weiters bezeichnen wir mit V^* den Dualraum von V und mit $\{b_i^*\}$ und $\{c_i^*\}$ die zu $\{b_i\}$ und $\{c_i\}$ dualen Basen von V^*. Wird der Basiswechsel von $\{b_i\}$ nach $\{c_i\}$ durch die Transformationsmatrix C beschrieben, so ist jene vom Basiswechsel von $\{b_i^*\}$ nach $\{c_i^*\}$ gleich $(C^{-1})^T$.*

Beweis: Seien C und D wieder die TransformationsMatrizen zum Basiswechsel von $\{b_i\}$ nach $\{c_i\}$ bzw. von $\{c_i\}$ nach $\{b_i\}$ mit den Einträgen c_{ji} bzw. d_{ji}, so gilt:

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} v_j \text{ bzw. } v_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ji} w_j$$

Weiters haben wir laut Voraussetzung

$$b_i^*(b_j) = \delta_j^i \text{ sowie } c_i^*(c_j) = \delta_j^i$$

wobei δ_j^i das Kroneckersymbol bezeichnet, das definiert ist durch

$$\delta_j^i = 1, \text{ falls } i = j$$

$$\delta_j^i = 0, \text{ falls } i \neq j$$

Wir erhalten dann also:

$$c_i^*(b_k) = c_i^*(\sum_{j=1}^{n} d_{jk}c_j) = \sum_{j=1}^{n} d_{jk}c_i^*(c_j) = d_{ik}$$

bzw.

$$b_i^*(c_k) = b_i^*(\sum_{j=1}^{n} d_{jk}b_j) = \sum_{j=1}^{n} d_{jk}b_i^*(b_j) = d_{ik}$$

Wir wissen bereits, dass es eine Transformationsmatrix C' zum Basiswechsel von $\{b_i^*\}$ nach $\{c_i^*\}$ gibt und dass für diese gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^* c'_{ji} = c_i^*$$

Wir berechnen nun:

$$c_i^*(c_k) = c_i^*(\sum_{j=1}^{n} c_{jk}b_j) = \sum_{j=1}^{n} c_{jk}c_i^*(b_j) = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(c_k)d_{ij}$$

c'_{ji} ist nach dieser Rechnung gleich d_{ij} und damit gilt: $C' = D^T = (C^{-1})^T$. $\square$

Weiters definieren wir:

Definition 1.1.2 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Wir definieren einen Vektorraum $\bar{V}$, bestehend aus Kopien der Elemente von V durch die Operationen:*

$$\bar{v_1} + \bar{v_2} = \overline{v_1 + v_2}$$

$$c\bar{v} = \overline{\bar{c}v}$$

und nennen ihn den konjugierten Vektorraum von V. Es gilt also, dass jedes Element aus $\bar{V}$ gleich $\bar{v}$ für genau ein v aus V ist.

Bemerkung:
In der Definition bezeichnet $\bar{c}$ die konjugiert komplexe Zahl zu c. Offensichtlich ist der zweite Punkt äquivalent zu $\bar{c}\bar{v} = \overline{cv}$.
Offensichtlich gilt, dass, wenn $b_1, ..., b_p$ eine Basis von V ist, $\bar{b}_1, ..., \bar{b}_p$ eine Basis von $\bar{V}$ ist und wir nennen diese die konjugierte Basis von $b_1, ..., b_p$.
Sei nun $c_1, ..., c_p$ eine zweite Basis von V und der Basiswechsel wieder durch eine Matrix Q beschrieben, so erhält man aus

$$c_l = \sum_{k=1}^{n} q_{kl} b_k, \forall l \leq n$$

dass

$$\bar{c}_l = \overline{\sum_{k=1}^{n} q_{kl} b_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{q_{kl} b_k} = \sum_{k=1}^{n} \bar{q}_{kl} \bar{b}_k$$

Offensichtlich wird also der Basiswechsel im Raum $\bar{V}$ durch die Matrix $\bar{Q}$ beschrieben, deren Einträge genau die konjugiert komplexen Einträge von Q sind.

1.2 Multilinearformen und innere Produkte

Definition 1.2.1 *Es seien die E_i $(1 = 1, ..., p)$ sowie G Vektorräume. Eine Abbildung $\phi : E_1 \times ... \times E_p \to G$ heißt p-linear oder multilinear falls für jedes $i, 1 \leq i \leq p$ gilt:*

$$\phi(x_1, ..., x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, ..., x_p) = \lambda \phi(x_1, ..., x_i, ..., x_p) + \mu \phi(x_1, ..., y_i, ..., x_p)$$

Im Fall $p = 2$ heißt eine multilineare Funktion auch bilinear.

Im Gegensatz zu linearen Funktionen ist das Bild einer multilinearen Funktion im allgemeinen kein Unterraum von G. Wir bezeichnen daher mit $Im(\phi)$ den von den Elementen $\phi(x_1, ..., x_p)$ mit $x_i \in E_i$ erzeugten Unterraum.

Definition 1.2.2 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine bilineare Abbildung $(.,.) : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt inneres Produkt falls sie*

$$(x, y) = (y, x), \ \forall x, y \in V$$

erfüllt.
Die Abbildung $Q : V \to \mathbb{R}$ die definiert ist durch

$$Q(x) = (x, x), \ \forall x \in V$$

heißt dann die zum inneren Produkt $(.,.)$ gehörige quadratische Form.

Definition 1.2.3 *Sei V ein Vektorraum mit einem inneren Produkt $(.,.)$. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal (i.Z.: $x \perp y$), falls $(x, y) = 0$. Für $M \subseteq V$ ist das orthogonale Komplement $M^\perp$ definiert durch:*

$$M^\perp = \{x \in V : x \perp y,\ \forall y \in M\}$$

Die Menge

$$V^\circ = \{x \in V : x \perp y,\ \forall y \in V\}$$

heißt der isotrope Teil von V. Das innere Produkt heißt nicht-entartet falls $V^\circ = \{0\}$.

In der Folge bezeichne V immer einen Vektorraum mit einem nicht-entarteten inneren Produkt $(.,.)$. Wir bezeichnen eine Basis $\{e_i \ \ i \in I\}$ von V, für die gilt, dass

$$(e_i, e_j) = \pm\delta_j^i,\ \forall i, j \in I$$

als Orthonormalbasis und wir halten fest, dass eine solche Basis immer existiert.
Weiters ist die Anzahl der Basisvektoren, für die gilt, dass $(e_i, e_i) = +1$ (und daher auch analog für -1) für jede beliebige Orthonormalbasis dieselbe. Die folgende Definition ist also unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis: Sei $\{b_i : \ i \in I\}$ eine Orthonormalbasis und bezeichne

$$\kappa_+ = \#\{b_j : (b_j, b_j) = +1\}$$

dann heißt κ_+ der positive Index von $(.,.)$. Analog definieren wir den negativen Index von $(.,.)$ als:

$$\kappa_- = \#\{b_j : (b_j, b_j) = -1\}$$

1.3 Der Minkowskiraum

Dieses Kapitel ist nur zur Einführung der verwendeten Begriffe gedacht und um grundlegendes Wissen über verschiedene, im späteren verwendeten Begriffe abzuklären. Wir werden daher im Allgemeinen keine Beweise führen, versuchen aber die vorkommenden Definitionen und Sätze so präzise wie möglich zu formulieren, dadurch werden vielleicht manche Definitionen etwas ungewohnt wirken, da versucht wird, den für uns bedeutenden Aspekt eines Begriffs bereits in der Definition hervorzuheben.
In der Folge wollen wir uns mit den linearen Abbildungen $V \to V$ eines Vektorraums V mit nicht-entarteten inneren Produkt beschäftgen, insbesondere aber mit den linearen Abbildungen des Minkowskiraums, der folgendermaßen definiert ist:

Definition 1.3.1 *Ein 4-dimensionaler Vektorraum $\mathcal{M}$ über $\mathbb{R}$ auf dem ein nicht-entartetes inneres Produkt $(.,.) : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ mit negativem Index 1 definiert ist, heißt Minkowskiraum.*

Definition 1.3.2 *Sei V ein Vektorraum mit einem inneren Produkt $(.,.)$. Eine Abbildung $L : V \to V$ heißt orthogonal falls $(L(x), L(y)) = (x, y), \forall x, y \in V$.*

Lemma 1.3.3 *Sei $L : V \to V$ eine lineare Abbildung, dann sind die folgenden Punkte äquivalent:*

1. *L ist orthogonal*
2. *Q(L(x))=Q(x)*
3. *Ist $\{e_i\}$ eine beliebige Orthonormalbasis so folgt, dass auch $\{L(e_i)\}$ eine Orthonormalbasis ist.*

Die Menge aller orthogonalen Transformationen bildet eine Gruppe und die Menge aller orthogonalen Transformationen auf $\mathcal{M}$ heißt allgemeine (homogene) Lorentzgruppe (i.Z.: L_{GH}).
Wir bezeichnen einen Vektor $x \in \mathcal{M}$ als zeitartig, wenn $Q(x) < 0$ und für die Menge aller zeitartigen Vektoren schreiben wir τ.
Sei die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert auf τ durch:

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) < 0$$

so zerfällt τ in zwei Äquivalenzklassen, die wir mit τ_+ und τ_- bezeichnen.

Definition 1.3.4

$$C_T(x_0) := \{x \in \mathcal{M} : x - x_0 \in \tau\}$$

$$C_T^+(x_0) := \{x \in C_T(x_0) : x - x_0 \in \tau_+\}$$
$$C_T^-(x_0) := \{x \in C_T(x_0) : x - x_0 \in \tau_-\}$$

Eine orthogonale Transformation bildet τ bijektiv auf τ ab. Weiters wird die Äquivalenzklasse τ_+ bijektiv auf τ_+ oder τ_- abgebildet. Ebenso werden die Mengen $C_T^+(0)$ auf sich selbst oder $C_T^-(0)$ abgebildet. Dasselbe gilt analog für τ_- und $C_T^-(0)$.

Definition 1.3.5 *Eine Orthonormalbasis von $\mathcal{M}$ heißt zulässig, wenn $Q(e_4) = -1$ und $e_4 \in C_T^+(0)$. Eine orthogonale Abbildung L heißt orthochron falls für jede beliebige zulässige Basis $\{e_1, ..., e_4\}$ gilt, dass $\{L(e_1), ..., L(e_4)\}$ wieder eine zulässige Basis ist.*

Die Menge der orthochronen Abbildungen bildet eine Untergruppe der orthogonalen Abbildungen.

Lemma 1.3.6 *Sei L eine orthogonale Transformation, so sind folgende Punkte äquivalent:*

1. *L ist orthochron*
2. *$L(C_T^+(0)) = C_T^+(0)$*
3. *$\exists c \in C_T^+(0) : L(x) \in C_T^+(0)$*

Sei

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für die Matrizen der orthogonalen und orthochronen Abbildungen ergeben sich dann folgende Sachverhalte:
Sei in der Folge $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ immer eine zulässige Basis von $\mathcal{M}$. Weiters sei

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^1 \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 & \Lambda_4^2 \\ \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 & \Lambda_4^3 \\ \Lambda_1^4 & \Lambda_2^4 & \Lambda_3^4 & \Lambda_4^4 \end{pmatrix}$$

immer eine 4×4-Matrix die eine Koordinatentransformation L in $\mathcal{M}$ bezüglich der obigen Basis beschreibt. Dann gilt:
Die Abbildung L ist genau dann eine allgemeine, homogene Lorentztransformation falls für die zugehörige Transformationsmatrix Λ gilt:

$$\Lambda_i^1\Lambda_j^1 + \Lambda_i^2\Lambda_j^2 + \Lambda_i^3\Lambda_j^3 - \Lambda_i^4\Lambda_j^4 = \eta_{ij}$$

was äquivalent ist zu:

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$$

Für eine allgemeine, homogene Lorentztransformation gilt also insbesondere:

$$(\Lambda_4^4)^2 = 1 + (\Lambda_4^1)^2 + (\Lambda_4^2)^2 + (\Lambda_4^3)^2$$

also $(\Lambda^4_4)^2 \geq 1$. Die Menge dieser Transformationen zerfällt also in zwei Klassen, jene mit $\Lambda^4_4 \geq 1$ und jene mit $\Lambda^4_4 \leq 1$. Es stellt sich heraus, dass eine allgemeine, homogene Lorentztransformation genau dann orthochron ist, wenn $\Lambda^4_4 \geq 1$.
Durch Determinantenbildung in obiger Gleichung erhält man weiters:

$$det(\eta) = det(\Lambda^T \eta \Lambda) = det(\Lambda^T) det(\eta) det(\Lambda) = det(\Lambda) det(\eta) det(\Lambda)$$

und daher $det(\Lambda)^2 = 1$ oder anders geschrieben:

$$det(\Lambda) = 1 \text{ oder } det(\Lambda) = -1$$

Eine Transformation für die gilt $det(\Lambda) = 1$ nennen wir eine echte Lorentztransformation.
Auch die Menge der echten, orthochronen Lorentztransformationen bildet eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen und wir bezeichnen sie kurz mit Lorentzgruppe und schreiben L dafür.
In der Folge werden werden wir die Elemente der Lorentzgruppe nur selten als Abbildungen betrachten, sondern, losgelöst vom Minkowskiraum, als Gruppe. Unter der Lorentzgruppe verstehen wir daher immer die Menge der Matrizen aller echten, orthochronen Lorentztransformationen.

2 Tensorprodukt und Tensoren

2.1 Definition und Konstruktion des Tensorprodukts

Definition 2.1.1 *Seien E und F zwei Vektorräume und $\phi : E \times F \to G$ eine bilineare Abbildung von $E \times F$ in einen Vektorraum G. (G, ϕ) heißt Tensorprodukt für E und F falls*

1. $\otimes^1$: $Im(\phi) = G$
2. $\otimes^2$: *Sei $\psi : E \times F \to H$ eine bilinaere Abbildung von $E \times F$ in einen beliebigen Vektorraum H dann gibt es eine lineare Abbildung $f : G \to H$ sodass $\psi = f \circ \phi$.*

Bemerkung:
$Im(\phi)$ bezeichnet hier den von den Elementen $\phi(e, f), e \in E, f \in F$ erzeugten Vektorraum (siehe Definition 1.2.1). Elemente in G heißen Tensoren, jene die von der Form $\phi(e, f)$ sind, heißen zerlegbare Tensoren.

Lemma 2.1.2 *Sei $\phi : E \times F \to G$ eine bilineare Abbildung in einen Vektorraum G. Diese ist genau dann Tensorprodukt für E und F falls:*
$\otimes$: Für jede bilineare Abbildung $\psi : E \times F \to H$ in einen beliebigen Vektorraum H existiert eine eindeutige lineare Abbildung $f : G \to H$, sodass $\psi = f \circ \phi$.

Beweis: 1.) Angenommen ϕ ist Tensorprodukt und für eine beliebige, aber feste bilineare Abbildung $\psi : E \times F \to H$ gibt es zwei lineare Abbildungen $f_1 : G \to H$ und $f_2 : G \to H$, sodass

$$\psi = f_1 \circ \phi \text{ und } \psi = f_2 \circ \phi$$

dann folgt:

$$((f_1 - f_2) \circ \phi)(x) = (f_1 - f_2)(\phi(x)) = 0, \ \forall x \in E \times F$$

und weiter, da laut Voraussetzung auch $Im(\phi) = G$, $(f_1 - f_2)(g) = 0, \ \forall g \in G$ und daher $f_1 = f_2$.
2.) Gelte umgekehrt die Voraussetzung $\otimes$ für (G, ϕ). $\otimes^2$ folgt sofort. Zum Beweis von $\otimes^1$: Sei $\psi : E \times F \to G$ definiert durch $\psi(x, y) = \phi(x, y)$ so ist $(Im\phi, \psi)$ ein Tensorprodukt.
Es existiert dann laut Voraussetzung eine lineare Abbildung $f : G \to Im(\phi)$ sodass $f \circ \phi = \psi$. Sei $j : Im(\phi) \to G$ die Inklusionsabbildung (definiert durch $j(g) = g$) dann gilt:

$$(j \circ f) \circ \phi = j \circ (f \circ \phi) = j \circ \psi = \phi$$

Die Eindeutigkeit in der Voraussetzung angewendet für $H = G$ und $\psi = \phi$ ergibt dann: $j \circ f = i$ wobei i die Identitätsabbildung auf G ist. j ist damit insbesondere surjektiv und daher ist $Im(\phi) = G$. □

Meistens schreiben wir mit der Bezeichnung aus der Definition anstatt G $E \otimes F$ und anstatt $\phi(x, y)$ auch $x \otimes y$ oder $\otimes(x, y)$.
Wir wollen in der Folge einige einfache Eigenschaften des Tensorprodukts zusammenfassen. Seien dazu E und F zwei beliebige Vektorräume über einem Körper K mit $a \in E$ und $b \in F$.

Lemma 2.1.3 *$a \neq 0$ und $b \neq 0 \Leftrightarrow a \otimes b \neq 0$.*

Beweis: Wenn $a, b \neq 0$ so gibt es lineare Funktionen $f : E \to K$ und $g : F \to K$ sodass $f(a) \neq 0$ und $g(b) \neq 0$ und dazu existiert auch die Bilinearform $(.,.) : E \times F \to K$ die definiert ist durch $(x, y) = f(x)g(y)$. Laut

$\otimes^2$ gibt es eine lineare Funktion $h : E \otimes F \to K$ mit $h(x \otimes y) = f(x)g(y)$ Es folgt, dass $h(a \otimes b) = f(a)g(b) \neq 0$ und damit $a \otimes b \neq 0$.
Ist umgekehrt $a = b = 0$ so folgt aus der Bilinearität von $\otimes$ sofort, dass $a \otimes b = 0$. □

Lemma 2.1.4 *Sei $z \in E \otimes F$ ein beliebiger Vektor ungleich Null. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ sowie linear unabhängige $x_i \in E$ und $y_i \in F$ (i=1,...,r) sodass:*

$$z = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$$

Beweis: Da $E \otimes F$ vom Bild der Abbildung $\otimes$ erzeugt wird, gibt es zu jedem $z \in E \otimes F$ Vektoren x'_i und y'_i sowie Konstanten λ_i, sodass $z = \sum_{i=1}^{r'} \lambda \otimes (x'_i, y'_i) = \sum_{i=1}^{r'} \otimes(\lambda x'_i, y'_i)$. Das heißt es gibt auch Vektoren x''_i, y''_i sodass $z = \sum_{i=1}^{r''} \otimes(x''_i, y''_i)$. Wir wählen eine solche Darstellung von z, für die $r = r''$ minimal ist. Falls $r = 1$ ist, so folgt aus dem vorherigen Lemma, dass $x_1 \neq 0$ und $y_1 \neq 0$ und dass daher sowohl x_1 als auch y_1 linear unabhängige Vektoren sind.
Sei also $r \geq 2$: Angenommen die Vektoren x_i wären linear abhängig so ließe sich x_r als Linearkombination der $x_1, ..., x_{r-1}$ darstellen, also:

$$x_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i x_i$$

Daraus folgt:

$$z = \sum_{i=1}^{r-1} \otimes(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{r-1} \otimes(\lambda_i x_i, y_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \otimes(x_i, y_i + \lambda_i y_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \otimes(x_i, y'_i)$$

Das widerspricht der Minimalität von r. Daher sind die Vektoren x_i linear unabhängig. Analog zeigt man die lineare Unabhängigkeit der y_i. □

SATZ 2.1.5 *(Eindeutigkeit des Tensorprodukts) Es seien $(E \otimes_1 F, \otimes_1)$ und $(E \otimes_2 F, \otimes_2)$ Tensorprodukte von E und F. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus*

$$f : E \otimes_1 F \to E \otimes_2 F$$

sodass

$$f(x \otimes_1 y) = x \otimes_2 y$$

Beweis: Da $\otimes_2 : E \times F \to E \otimes_2 F$ bilinear ist und $(E \otimes_1 F, \otimes_1)$ ein Tensorprodukt folgt aus der Bedingung $\otimes^2$ der Definition, dass es eine lineare Abbildung $f : E \otimes_1 F \to E \otimes_2 F$ gibt, sodass

$$x \otimes_2 y = f(x \otimes_1 y)$$

Umgekehrt gibt es natürlich auch ein

$$g : E \otimes_2 F \to E \otimes_1 F$$

sodass

$$x \otimes_1 y = g(x \otimes_2 y)$$

Daraus erhalten wir die Beziehungen:

$$(g \circ f)(x \otimes_1 y) = x \otimes_1 y \text{ und } (f \circ g)(x \otimes_2 y) = x \otimes_2 y$$

Da laut Voraussetzung $\otimes^1$ gilt, dass $Im(\otimes_1) = E \otimes_1 F$ und dass $Im(\otimes_2) = E \otimes_2 F$ folgt:

$$g \circ f = Id \text{ und } f \circ g = Id$$

Anders gesprochen ist f eine invertierbare, lineare Abbildung und damit ein Isomorphismus. $\square$

Für eine Konstruktion des Tensorprodukts (und des damit einhergehenden Beweises der Existenz desselben) brauchen wir noch folgende Definition:

Definition 2.1.6 *Sei V ein Vektorraum über K. Dann definieren wir eine Menge $C(V)$ durch $C(V) := \{f : V \to K : f(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele $x\}$. Diese Menge ist, wie man leicht nachrechnen kann mit den Operationen $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ein Vektorraum und heißt freier Vektorraum über V.*

Sei nun $x \in V$ so bezeichnen wir mit $f_x \in C(V)$ jene Funktion die folgendes erfüllt (und damit trivialerweise in $C(V)$ liegt):

$$f_x(y) = 1, \text{ falls } x = y$$

$$f_x(y) = 0, \text{ falls } x \neq y$$

Die Menge $\{f_x : x \in V\}$ bildet dann eine Basis von $C(V)$.

In der Folge werden wir häufig $f_{(x,y)}$ mit (x, y) identifizieren, d.h. mit den Paaren (x, y) bereits rechnen, als wären wir im Raum $C(E \times F)$.
Sei nun $C(E \times F)$ der freie Vektorraum über $E \times F$. Dann bezeichnen wir mit $N(E, F)$ den Unterraum von $C(E \times F)$ der von den Elementen

$$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y)$$

und

$$(x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2)$$

mit $x, x_1, x_2 \in E, y, y_1, y_2 \in F, \lambda, \mu \in K$ erzeugt wird.
Mit $\pi : C(E \times F) \to C(E \times F)/N(E, F)$ bezeichnen wir die kanonische Projektion von $C(E \times F)$ in den Faktorraum $C(E \times F)/N(E, F)$, also jene Abbildung für die gilt: $\pi(x) = [x]$. Diese ist laut der Definition des Faktorraums linear.
Es gilt nun folgender Satz:

SATZ 2.1.7 *(Konstruktion des Tensorprodukts) Sei $G := C(E \times F)/N(E, F)$ und $\phi : E \times F \to G$ definiert durch: $\phi(x, y) = \pi(f_x, f_y)$, so ist das Paar (G, ϕ) ein Tensorprodukt von E und F.*

Beweis:

1. ϕ ist bilinear:

   Da
   $$(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y) \in N(E, F)$$
   gilt:
   $$\pi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\pi(x_1, y) + \mu\pi(x_2, y)$$
   und daher laut unserer Definition von ϕ:
   $$\phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\phi(x_1, y) + \mu\phi(x_2, y)$$
   Analog folgert man, dass
   $$\phi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\phi(x, y_1) + \mu\phi(x, y_2)$$

2. Die Eigenschaft $\otimes^1$:

   Angenommen $z \in G$, dann ist z darstellbar als

   $$z = \pi(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(x_i, y_j)) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\pi(x_i, y_j) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\phi(x_i, y_j)$$

   und es gilt daher $z \in Im(\phi)$. Da z beliebig aus G war gilt: $G \subseteq Im\phi$. Da aber trivialerweise auch $Im\phi \subseteq G$ gilt folgt $Im\phi = G$.

3. Die Eigenschaft $\otimes^2$:

   Angenommen es sei eine beliebige bilineare Abbildung $\psi : E \times F \to H$ gegeben. Da die Menge $\{(x, y) : x \in E, y \in F\}$ eine Basis von $C(E \times F)$ bildet, existiert eine lineare Abbildung $g : C(E \times F) \to H$ mit der Eigenschaft

   $$g(x, y) = \psi(x, y),\ \forall x \in E,\ y \in F$$

   Sei nun $z = (\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y)$ so gilt wegen der Bilinearität von ψ:

   $$\begin{aligned} g(z) &= g(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda g(x_1, y) - \mu g(x_2, y) = \\ &= \psi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda\psi(x_1, y) - \mu\psi(x_2, y) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Analog zeigt man, dass:

   $$g((x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2)) = 0$$

   Daraus folgt insbesondere, dass $N(E, F) \subseteq kern(g)$ und weiters gilt folgende Kette von Schlussfolgerungen:

   $$[x] = [y] \Rightarrow x - y \in N(E, F) \Rightarrow g(x - y) = 0 \Rightarrow g(x) = g(y)$$

   Daher ist die Funktion $f : C(E \times F)/N(E, F) \to H$, welche definiert ist durch $f([x]) = g(x)$, wohldefiniert und linear und erfüllt $f \circ \phi = \psi$.

$\square$

Lemma 2.1.8 *Seien E, F zwei Vektorräume und seien $a_1, ..., a_r \in E$. Weiters seien $b_1, ..., b_r \in F$ linear unabhängig. Dann folgt aus*

$$\sum_{j=1}^{r} \otimes(a_j, b_j) = 0$$

dass $a_1 = ... = a_r = 0$

Beweis: Da die b_j linear unabhängig sind, gibt es lineare Abbildungen $g_i : F \to K$, sodass

$$g_i(b_j) = \delta^i_j$$

Sei $f_i : E \to K$ eine beliebige lineare Funktion. Dann definieren wir eine bilineare Funktion $F : E \times F \to K$ durch:

$$F(x, y) = \sum_i f_i(x) g_i(y)$$

Wenn man K selbst als eindimensionalen Vektorraum auffasst, so existiert wegen $\otimes^2$ eine lineare Funktion $h : E \otimes F \to K$, sodass:

$$h(\otimes(x, y)) = F(x, y) = \sum_i f_i(x) g_i(y)$$

und daher:

$$h(\sum_{j=1}^{r} \otimes(a_j, b_j)) = \sum_{i,j} f_i(a_j) g_i(b_j) = \sum_i f_i(a_i)$$

Wegen der Voraussetzung und da h linear ist folgt weiter:

$$\sum_i f_i(a_i) = 0$$

Angenommen es gäbe nun ein k, sodass $a_k \neq 0$, dann könnten wir f_i so wählen, dass $f_i(a_i) = \delta^k_i$, was im Widerspruch zu dieser Formel steht. $\square$

SATZ 2.1.9 *Es seien E und F zwei endlichdimensionale Vektorräume, $dim(E) = n$ und $dim(F) = m$ und $\otimes$ das Tensorprodukt von E und F. Sei weiters $\{e_i : 1 = 1, ..., n\}$ eine Basis von E und $\{f_j : j = 1, ..., m\}$ eine Basis von F, so bildet die Menge $\{\otimes(e_i, f_j) : i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m\}$ eine Basis von $E \otimes F$. Insbesondere gilt also $dim(E \otimes F) = dim(E) \cdot dim(F)$.*

Beweis:

1. Erzeugendensystem:

   Sei $z \in E \otimes F$ von der Gestalt $z = \otimes(u, v)$ mit $u \in E$ und $v \in F$ so sind laut Voraussetzung u und v in der Form

   $$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i \text{ und } v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j$$

   darstellbar. Es gilt also:

   $$z = \otimes(u, v) = \otimes(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j) = \sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_i \mu_j \otimes (e_i, f_j)$$

   Andererseits ist jedes $x \in E \otimes F$ darstellbar als Summe

   $$x = \sum_{k=1}^{r} \otimes(u_k, v_k)$$

   d.h. jedes beliebige x läßt sich darstellen als:

   $$x = \sum_{k,i,j=1}^{r,m,n} \lambda_{kij} \mu_{kij} \otimes (e_i, f_j)$$

   woraus folgt, dass die Menge $\{\otimes(e_i, f_j) : i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m\}$ ein Erzeugendensystem bildet.

2. Lineare Unabhängigkeit:

   Angenommen es gilt:

   $$\sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij} \otimes (e_i, f_j) = 0$$

   Aufgrund der Bilinearität von $\otimes$ erhält man:

   $$\sum_{i,j=1}^{m,n} \lambda_{ij} \otimes (e_i, f_j) = \sum_{i=1}^{m} \otimes(e_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} f_j) = 0$$

und da die $\{e_i : i = 1, ..., n\}$ eine Basis von E bilden und daher linear unabhängig sind folgt laut 2.1.8 daraus:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} f_j = 0, \forall i$$

und da f_j eine Basis von V bildet gilt weiters:

$$\lambda_{ij} = 0, \forall i, j$$

□

Seien E, F, G Vektorräume. Wir bezeichnen mit $L(E; G)$ den Raum der linearen Abbildungen von E nach G und mit $B(E, F; G)$ den Raum der bilinearen Abbildungen von $E \times F$ nach G, wobei die Vektorraumoperationen folgendermaßen definiert sind:

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z),\ (\lambda f)(z) = \lambda f(z),\ \forall f, g \in L(E; G),\ z \in E$$

bzw.:

$$(f+g)(x, y) = f(x, y)+g(x, y),\ (\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y),\ \forall f, g \in L(E; G),\ x, y \in E$$

Es gilt dann:

Lemma 2.1.10 *Seien E und F Vekotrräume, $E \otimes F$ deren Tensorprodukt und G ein beliebiger Vektorraum. Die Abbildung $\Phi : L(E\otimes F; G) \to B(E, F; G)$ definiert durch $\phi(f) = f \circ \otimes$ ist ein Vektorraumisomorphismus.*

Beweis:

1. Die Linearität von ϕ folgt unmittelbar aus der Definition der Vektorraumoperationen in $L(E \otimes F; G)$ und $B(E, F); G)$.

2. Φ ist surjektiv:

   Sei $\phi \in B(E, F; G)$ beliebig. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f' : E \otimes F \to G$ (was heißt, dass $f' \in L(E \otimes F; G)$) mit $\phi = f' \circ \otimes$. D.h., dass $\Phi(f') = f' \circ \otimes = \phi$.

3. Φ ist injektiv:

   Angenommen es gäbe ein $f \in Kern(\Phi)$ mit $f \neq 0$, also eine lineare Abbildung $f : E \otimes F \to G$ mit $f \circ \otimes = 0$. Es würde also gelten:

$$f(\otimes(e, f)) = 0, \ \forall e \in E, f \in F$$

   Es läßt sich ein beliebiges $z \in E \otimes F$ darstellen als $z = \sum_{i=1}^{r} \otimes(e_i, f_i)$ und da f linear ist folgt:

$$f(z) = f(\sum_{i=1}^{r} \otimes(e_i, f_i)) = \sum_{i=1}^{r} f(\otimes(e_i, f_i)) = 0$$

   laut der oberen Gleichung. Da z beliebig war, wäre $f(z) = 0, \ \forall z \in E \otimes F$, also $f = 0$. Widerspruch.

$\square$

Korollar 2.1.11 *Sei $\phi : E \times F \to G$ eine beliebige bilineare Abbildung und $f : E \otimes F \to G$ die durch die Eigenschaft $\otimes$ induzierte lineare Abbildung. Es gilt dann:*

1. *f ist genau dann surjektiv, wenn (G, ϕ) die Eigenschaft $\otimes^1$ erfüllt.*
2. *f ist genau dann injektiv, wenn (G, ϕ) die Eigenschaft $\otimes^2$ erfüllt.*

Beweis:

1. Da die Menge $\{e_i \otimes f_i : \ e_i \in E, \ f_i \in F\}$ den Raum $E \otimes F$ erzeugt, gilt:

$$Im(\phi) = Im(f \circ \otimes) = Im(f)$$

   Daraus folgt trivialerweise:

$$Im(f) = G \Leftrightarrow Im(\phi) = G$$

   womit der erste Teil bewiesen ist.

2. Angenommen f ist injektiv. Da f linear ist, ist dann die Abbildung $f' : E \otimes F \to Im(f)$ definiert durch $f'(z) = f(z)$ bijektiv und besitzt daher eine Umkehrabbildung. Jede Bilinearform $\psi : E \times F \to H$ induziert eine lineare Abbildung $g : E \otimes F \to H$ mit $\psi = g \circ \otimes$. Wir können daher eine lineare Abbildung $h : Im(f) \to H$ festlegen durch $h = g \circ f'^{-1}$. Sei $f : G \to H$ nun eine Fortsetzung von h zu einer linearen Abbildung

so folgt $\psi(x, y) = f(\phi(x, y))$ und da ψ beliebig war folgt auch die Eigenschaft $\otimes^2$.

Erfüllt ϕ umgekehrt die Eigenschaft $\otimes^2$. Die bilineare Abbildung $\otimes$ induziert dann eine lineare Abbildung $h : G \to E \otimes F$ mit

$$\otimes(x, y) = h(\phi(x, y))$$

Außerdem gilt ja: $\phi(x, y) = f(\otimes(x, y))$ und aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\otimes(x, y) = hf(\otimes(x, y))$$

Also folgt mit $\otimes^1$, dass $h \circ f = id$ und f ist somit injektiv.

$\square$

Lemma 2.1.12 *Es seien E, F, E', F' Vektorräume über K und $\otimes_1$ und $\otimes_2$ seien Tensorprodukte von E und F bzw. E' und F'. Sei die Abbildung $\otimes$ gegeben durch:*

$$\otimes : L(E; E') \times L(F; F') \to L(E \otimes_1 F; E' \otimes_2 F')$$

$$(\phi \otimes \psi)(x \otimes_1 y) = \phi(x) \otimes_2 \psi(y), \ \forall x \in E, y \in F$$

dann ist $\otimes$ wohldefiniert und $(Im(\otimes), \otimes)$ ist ein Tensorprodukt von $L(E; E')$ und $L(F; F')$.

Beweis:

1. Wohldefiniertheit: Ergibt sich durch die Linearität der Funktionen $\phi \otimes \psi$ auf $E \otimes_1 F$.

2. Bilinearität: Es gilt

$$\begin{aligned} ((\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) \otimes \psi)(x \otimes_1 y) &= (\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2)(x) \otimes_2 \psi(y) = \\ &= \alpha_1(\phi_1(x) \otimes_2 \psi(y)) + \alpha_2(\phi_2(x) \otimes_2 \psi(y)) = \\ &= \alpha_1(\phi_1 \otimes \psi)(x \otimes_1 y) + \alpha_2(\phi_2 \otimes \psi)(x \otimes_1 y) \end{aligned}$$

   und analog für $(\phi \otimes \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2)(x \otimes_1 y)$.

3. $\otimes^1$: Trivial, da bereits laut Voraussetzung erfüllt.

4. $\otimes^2$: Sei $(L(E;E')\hat{\otimes}L(F;F'),\hat{\otimes}$ ein Tensorprodukt. Es gibt dann, da $\otimes$ bilinear ist, eine lineare Abbildung

$$f : L(E;E')\hat{\otimes}L(F;F') \to L(E \otimes_1 F; E' \otimes_2 F')$$

Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung injektiv ist, und damit $\otimes$ die Bedingung $\otimes^2$ laut 2.1.11 erfüllt.

Sei dazu $w \in L(E;E')\hat{\otimes}L(F;F')$ sodass $f(w) = 0$. Wenn $w \neq 0$ ist, so lässt es sich schreiben als:

$$w = \sum_{i=1}^{r} \phi_i \hat{\otimes} \psi_i \text{ mit } \phi_i \in L(E,E'), \psi_i \in L(F,F')$$

wobei die ϕ_i und die ψ_i linear unabhängig sind. Es gilt dann:

$$f(w) = f(\sum_i \hat{\otimes}(\phi_i,\psi_i)) = \sum_i (f \circ \hat{\otimes})(\phi_i,\psi_i) = \sum_i \otimes(\phi_i,\psi_i) = 0$$

und daher laut Definition von $\otimes$:

$$\sum_{i=1}^{r} \phi_i(x) \otimes_2 \psi_i(y) = 0, \forall (x,y) \in E \times F$$

Man wähle nun einen Vektor $a \in E$ sodass $\phi_1(a) \neq 0$. Sei $p \geq 1$ die maximale Anzahl an linear unabhängigen Vektoren in der Menge $\phi_1(a), ..., \phi_r(a)$. Durch Umordnen erhält man, dass die Menge $\phi_1(a), ..., \phi_p(a)$ linear unabhängig ist. Laut dieser Voraussetzung erhält man dann:

$$\phi_j(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji}\phi_i(a) \text{ für } j = p+1, ..., r$$

und weiter durch Einsetzen in die vorherige Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{p} \phi_i(a) \otimes_2 \psi_i(y) + \sum_{j=p+1}^{r} (\sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji}\phi_i(a)) \otimes_2 \psi_j(y) = 0,\ y \in F$$

bzw. wegen der Bilinearität der verwendeten Funktionen:

$$\sum_{i=1}^{p} \phi_i(a) \otimes_2 (\sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j(y) + \psi_i(y)) = 0\ y \in F$$

Da die Vektoren $\phi_i(a),\ i = 1...p$ linear unabhängig sind folgt:

$$\psi_i(y) + \sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j(y) = 0,\ \forall y \in F,\ i = 1, ..., p, \text{ also: } \psi_i + \sum_{j=p+1}^{r} \lambda_{ji}\psi_j = 0$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Abbildungen ψ_j linear unabhängig sind.

□

Für den Spezialfall von endlich-dimensionalen Vektorräumen ergibt sich folgendes Korollar:

Korollar 2.1.13 *Seien E, F, E', F' endlich-dimensionale Vektorräume über K, so ist das Paar $(L(E \otimes F; E' \otimes F'), \otimes)$ mit*

$$\otimes : L(E; E') \times L(F; F') \to L(E \otimes F; E' \otimes F')$$

$$(\phi \otimes \psi)(x \otimes y) = \phi(x) \otimes \psi(y)$$

ein Tensorprodukt für $L(E; E')$ und $L(F; F')$.

Beweis: Zu zeigen bleibt, dass $\otimes^1$ erfüllt ist.Dazu beweisen wir, dass f aus dem vorherigen Beweis auch surjektiv ist. Wenn $dim(V) = dim(W) < \infty$ so für lineare Abbildungen zwischen V und W die Eigenschaften injektiv und surjektiv bekanntlich äquivalent. Nun gilt:

$$\begin{aligned} dimL(E \otimes F; E' \otimes F') &= dim(E \otimes F)dim(E' \otimes F') = \\ &= dim(E)dim(E')dim(F)dim(F') = \\ &= dimL(E; E')dimL(F; F') = \\ &= dim(L(E; E') \otimes L(F; F')) \end{aligned}$$

□

Setzt man nun $E' = F' = K$ und damit auch $E' \otimes F' = K$ so erhält man:

Korollar 2.1.14 *Sei $\otimes : E^* \times F^* \to (E \otimes F)^*$ die Abbildung definiert durch:*

$$\otimes(f, g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$$

so ist das Paar $(L(E \otimes F), \otimes)$ ein Tensorprodukt von E^* und F^*.

2.2 Das Tensorprodukt mehrerer Vektorräume

Definition 2.2.1 *Seien E_i, $i = 1, ..., p$ beliebige Vektorräume und sei $\phi : E_1 \times ... \times E_p \to G$ eine multilineare Abbildung in einen Vekotrraum G. Das Paar (G, ϕ) heißt Tensorprodukt falls es die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. $\otimes^1$: *$Im\phi = G$*

2. $\otimes^2$: *Zu jeder multilinearen Abbildung $\psi : E_1 \times ... \times E_p \to H$ in einen beliebigen Vektorraum H gibt es eine lineare Abbildung $f : G \to H$, sodass*

$$\psi = f \circ \phi$$

Für G schreiben wir in gewohnter Weise $E_1 \otimes ... \otimes E_p$ und für $\phi(x_1, ..., x_p)$ entweder $x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_p$ oder $\otimes(x_1, ..., x_p)$.

Bemerkung:
Offensichtlich fällt die Definition für den Fall $p = 2$ mit der Definition aus dem vorherigen Abschnitt zusammen.

Lemma 2.2.2 *Seien $E_1, ..., E_p$ beliebige Vektorräume. Dann existiert das Tensorprodukt $(E_1 \otimes ... \otimes E_p, \otimes)$ und ist bist auf Isomorphie eindeutig.*

Beweis: Der Beweis der Eindeutigkeit funktioniert genauso wie der von Satz 2.1.5. Für den Beweis der Existenz muss man wieder $C(E_1 \times ... \times E_p)$ nach $N(E_1, ..., E_p)$ faktorisieren, wobei $N(E_1, ..., E_p)$ durch die Elemente

$$(\lambda x_{11} + \mu x_{12}, ...) - \lambda(x_{11}, ...) - \mu(x_{12}, ...)$$

$$(y, \lambda x_{21} + \mu x_{22}, ...) - \lambda(y, x_{21}, ...) - \mu(y, x_{22}, ...)$$

$$\vdots$$

$$(..., \lambda x_{p1} + \mu x_{p2}) - \lambda(..., x_{p1}) - \mu(..., x_{p2})$$

erzeugt wird. Der Rest des Beweises verläuft analog wie im Beweis von Satz 2.1.7. □

Lemma 2.2.3 *E_1, E_2, E_3 seine drei beliebige Vektorräume. Es existiert dann ein Isomorphismus*

$$f : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$$

sodass

$$f(\otimes(x, y, z)) = \otimes(\otimes(x, y), z)$$

Beweis: Wir definieren die 3-lineare Abbildung $g : E_1 \times E_2 \times E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ durch

$$g(x, y, z) = \otimes(\otimes(x, y), z)$$

Laut $\otimes^2$ existiert dann eine lineare Abbildung

$$f : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$$

sodass

$$f(\otimes(x, y, z)) = \otimes(\otimes(x, y), z) \tag{1}$$

Hält man ein $z \in E_3$ fest so kann man eine bilineare Abbildung $\beta_z : E_1 \times E_2 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ definieren durch: $\beta_z(x, y) = x \otimes y \otimes z$.
Genau wie vorher wird durch $\otimes^2$ eine lineare Abbildung induziert:

$$g_z : E_1 \otimes E_2 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

Für diese muss gelten:

$$g_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z \tag{2}$$

Definiert man schlussendlich noch die bilineare Abbildung

$$\psi : (E_1 \otimes E_s) \times E_3 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

durch

$$\psi(u, z) = g_z(u) \text{ für } u \in E_1 \otimes E_2, z \in E_3 \tag{3}$$

dann wird genau wie vorher eine lineare Abbildung

$$g : (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$$

induziert, für die gilt:

$$\psi(u, z) = g(u \otimes z) \text{ für } u \in E_1 \otimes E_2, z \in E_3 \tag{4}$$

Aus den Gleichungen 4, 3 und 2 erhält man:

$$g((x \otimes y) \otimes z) = \psi(x \otimes y, z) = g_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z \tag{5}$$

Aus 1 und 5 sieht man, dass $g \circ f(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z$ und dass $f \circ g((x \otimes y) \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$. Daher ist f ein Isomorphismus von $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$ auf $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ und g ist der dazugehörige inverse Isomorphismus. $\square$

Analog konstruiert man einen Isomorphismus $h : E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$, sodass

$$h(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$$

Aus diesen beiden Sachverhalten läßt sich induktiv folgender Sachverhalt herleiten:

Korollar 2.2.4 *Es seien $E_i,\ i = 1, ..., p+q$ Vektorräume. Dann existiert ein Isomorphismus*

$$f : (E_1 \otimes ... \otimes E_p) \otimes (E_{p+1} \otimes ... \otimes E_{p+q}) \to E_1 \otimes ... \otimes E_{p+q}$$

sodass:

$$f((x_1 \otimes ... \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes ... \otimes x_{p+q})) = x_1 \otimes ... \otimes x_{p+q}$$

SATZ 2.2.5 *Seien $E_1, ..., E_p$ Vektorräume mit $dim(E_j) = n_j, n_j \in \mathbb{N}$. Seien $\{a^j_{v_j} :\ v_j = 1, ..., n_j\}$ jeweils Basis von E_j, dann ist die Menge der Produkte*

$$\{a^1_{v_1} \otimes ... \otimes a^p_{v_p} :\ v_j = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., p\}$$

eine Basis von $E_1 \otimes ... \otimes E_p$.

Beweis: Induktion nach p:

1. Induktionsanfang: $p = 2$. Bereits im Satz 2.1.9 bewiesen.

2. Induktionsschritt: Der Satz gelte für alle $k \leq p$, p fest.

   Laut Induktionsvoraussetzung gilt dann: $(a^1_{v_1} \otimes ... \otimes a^p_{v_p}) \otimes a^{p+1}_{v_{p+1}}$ ist Basis von $(E_1 \otimes ... \otimes E_p) \otimes E_{p+1}$, die Vektoren sind also linear unabhängig und ein Erzeugendensystem. Sei f der Isomorphismus aus Korollar 2.2.4. Dann gilt:

   (a) Die Vektoren $f((a^1_{v_1} \otimes ... \otimes a^p_{v_p}) \otimes a^{p+1}_{v_{p+1}}) = a^1_{v_1} \otimes ... \otimes a^{p+1}_{v_{p+1}}$ sind linear unabhängig, da lineare Unabhängigkeit durch injektive Abbildungen, und damit Isomorphismen übertragen wird.

   (b) Sei $v \in (E_1 \otimes ... \otimes E_p) \otimes E_{p+1}$ so ist v in der Form

   $$v = \sum \lambda_j((a^1_{v_1} \otimes ... \otimes a^p_{v_p}) \otimes a^{p+1}_{v_{p+1}})$$

   darstellbar. Wenn man auf beiden Seiten f anwendet erhält man, dass $a^1_{v_1} \otimes ... \otimes a^{p+1}_{v_{p+1}}$ ein Erzeugendensystem von $E_1 \otimes ... \otimes E_{p+1}$ ist, da f surjektiv ist.

□

SATZ 2.2.6 *Seien die E_i Vektorräume und $E = E_1 \otimes ... \otimes E_p$ deren Tensorprodukt sowie G ein weiterer Vektorraum. Die Abbildung $\Psi : L(E_1 \otimes ... \otimes E_p; G) \rightarrow M(E_1, ..., E_p; G)$ in den Raum der multilinearen Funktionen auf $E_1 \times ... \times E_p$ definiert durch $\Psi(f) = f \circ \otimes$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Läßt sich in analoger Weise zum vorherigen Satz aus dem Fall $p = 2$ verallgemeinern. □

2.3 Tensoralgebra

Definition 2.3.1 *Sei E ein Vektorraum über K und für $p \geq 2$ sei $(\otimes^p E, \otimes^p)$ ein Tensorprodukt von p Kopien von E. Weiters setzen wir $\otimes^1 E = E$ und $\otimes^0 E = K$. Das Paar $(\otimes^p E, \otimes^p)$ nennt man dann p-tes Tensorprodukt von E und die Elemente von $\otimes^p E$ heißen Tensoren vom Grad p über E.*

Seien nun p, q fest, so gibt es eine wohldefinierte und eindeutige bilineare Abbildung

$$\beta : \otimes^p E \times \otimes^q E \rightarrow \otimes^{p+q} E$$

die

$$\beta(x_1 \otimes ... \otimes x_p, x_{p+1} \otimes ... \otimes x_{p+q}) = x_1 \otimes ... \otimes x_{p+q}$$

erfüllt. Das Paar $(\otimes^{p+q} E, \beta)$ ist außerdem ein Tensorprodukt von $\otimes^p E$ und $\otimes^q E$ (siehe 2.2.4). Wir schreiben daher $\otimes$ anstelle von β und nennen den Tensor $u \otimes v$ das äußere Produkt der Tensoren u und v.

Definition 2.3.2 *Seien $(\otimes^p E, \otimes^p)$ die p-ten Tensorprodukte des Vektorraums E. Wir schreiben:*

$$\otimes E = \oplus_{p=0}^{\infty} \otimes^p E$$

wobei $\oplus$ die direkte Summe bezeichnet, d.h in diesem Fall die Menge aller Folgen

$$(z_0, z_1, ...) \text{ mit } z_p \in \otimes^p E$$

für die gilt, dass höchstens endlich viele z_p ungleich Null sind.

Weiters legen wir fest:

Definition 2.3.3 *Sei $u, v \in \otimes E$ mit $u = \sum_p u_p$, $v = \sum_q v_q$ so definieren wir ein - offensichtlich bilineares - Produkt $(.,.) : \otimes E \times \otimes E \to \otimes E$ durch:*

$$(u, v) = \sum_{p,q} u_p \otimes v_q$$

Bemerkung:
Dieses Produkt macht $\otimes E$ zu einer assoziativen, nicht-kommutativen Algebra. Wir nennen diese in der Folge Tensoralgebra über dem Vektorraum E. Sicherheitshalber halten wir fest, dass die oben definierte Bilinearform $(.,.)$ im Fall $E \neq 0$ kein Tensorprodukt von $\otimes^p E$ und $\otimes^q E$ ist.

Definition 2.3.4 *Sei $p \geq 1$ fest und E ein beliebiger Vektorraum über einem Körper K. Dann bezeichnen wir mit $T_p(E)$ die Menge aller p-linearen Funktionen*

$$\phi : \underbrace{E \times ... \times E}_{p} \to K$$

Zusätzlich legen wir fest: $T_0(E) = K$.

In der Folge seien E ein endlich-dimensionaler Vektorraum und E^* der dazu duale Raum.
Weiters bezeichne $\phi : E^* \times ... \times E^* \to T_p(E)$ in der Folge die Abbildung, die definiert ist durch:

$$\phi(x_1^*, ..., x_p^*)(a_1, ..., a_p) = x_1^*(a_1) \cdot ... \cdot x_p^*(a_p)$$

Es gilt dann:

Lemma 2.3.5 *Das Paar $(T_p(E), \phi)$ bildet ein p-tes Tensorprodukt von E^*.*

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Satz 2.1.14 $\square$

Sei weiters $\beta : T_p(E) \times T_q(E) \to T_{p+q}(E)$ die bilineare Funktion, die definiert ist durch:

$$\beta(\phi, \psi)(x_1, ..., x_{p+q}) = \phi(x_1, ..., x_p)\psi(x_{p+1}, ..., x_{p+q})$$

so ist das Paar $(T_{p+q}(E), \beta)$ wegen 2.2.4 ein Tensorprodukt von $T_p(E)$ und $T_q(E)$.

2.4 Symmetrische Tensoren und symmetrische Tensoralgebra

Definition 2.4.1 *Sei E ein Vektorraum und $\otimes^p E$ sein p-tes Tensorprodukt. Sei weiters $\sigma \in S_p$* [1] *dann induziert σ einen linearen Automorphismus $\tilde{\sigma}$ auf $\otimes^p E$ der gegeben ist durch:*

$$\tilde{\sigma}(x_1 \otimes ... \otimes x_p) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes x_{\sigma^{-1}(p)}$$

In der Folge werden wir statt $\tilde{\sigma}$ der Einfachheit halber und weil es so üblich ist ebenfalls σ schreiben.

Offensichtlich gilt:

$$(\tau\sigma)u = \tau(\sigma u) \text{ wobei } \sigma, \tau \in S_p, u \in \otimes^p E$$

und

$$\iota u = u \text{ wobei } \iota \text{ die identische Permutation ist.}$$

Sei nun $M^p(E)$ der von den Tensoren $u - \tau u$ erzeugte Unterraum von $\otimes^p E$, wobei $u \in \otimes^p E$ und τ eine Transposition [2] ist.
Es gilt:

Lemma 2.4.2 *$M^p(E)$ ist invariant unter S_p.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $M^p(E)$ invariant unter jeder Transposition ist, da jedes $\sigma \in S_p$ als endliches Produkt von Transpositionen dargestellt werden kann. Sei zunächst $v = u - \tau u \in M^p(E)$ dann gilt für eine beliebige Transposition τ':

$$\tau'(v) = \tau'(u) - \tau'\tau(u) = (\tau' u - u) + (u - \tau u) + (\tau u - \tau'\tau u) \in M^p(E)$$

da alle drei Summanden in $M^p(E)$ liegen und damit auch deren Summe. Für beliebiges $v' = \sum_i \lambda_i v_i \in M^p(E)$ gilt dann:

$$\tau'(v') = \tau'(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i \tau'(v_i) \in M^p(E)$$

□

[1] S_p bezeichnet die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, ..., p\}$

[2] τ ist eine Transposition, das heißt eine Permutation, bei der nur zwei Elemente vertauscht werden. Gleichzeitig ist es nach der obigen Übereinkunft aber auch ein linearer Automorphismus auf $\otimes^p E$.

Korollar 2.4.3 *Sei $u \in M^p(E)$. Dann folgt, dass $u - \sigma(u) \in M^p(E)$.*

Beweis: Wenn $u \in M^p(E)$ so ist laut dem vorhergehenden Lemma auch $\sigma(u) \in M^p(E)$ und da $M^p(E)$ ein Vektorraum ist, folgt, dass $u - \sigma(u) \in M^p(E)$. $\square$

Definition 2.4.4 *Ein Tensor $u \in E$ heißt symmetrisch falls*

$$u = \sigma u \text{ für alle } \sigma \in S_p$$

Der Unterraum

$$sym^p = \{u \in \otimes^p(E) : \ u \text{ ist symmetrisch}\}$$

von $\otimes^p(E)$ heißt der Unterraum der symmetrischen Tensoren von $\otimes^p(E)$.

Definition 2.4.5 *Die lineare Abbildung $\pi_s : \otimes^p(E) \to \otimes^p(E)$ die definiert ist durch:*

$$\pi_s(v) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(v)$$

heißt der symmetrische Operator von $\otimes^p(E)$. Für ein beliebiges u heißt $\pi_s(u)$ der symmetrische Teil von u. Dabei ist die Summe über alle möglichen Permutationen $\in S_p$ zu verstehen (das sind $p!$ viele) und $p!$ bezeichnet ganz normal p faktorielle.

Lemma 2.4.6 *Sei $\varrho \in S_p$ so folgt: $\pi_s \varrho = \varrho \pi_s = \pi_s$.*

Beweis: Es gilt: $\pi_s \varrho = \frac{1}{p!}(\sum_\sigma \sigma)\varrho = \frac{1}{p!} \sum_\sigma (\sigma \varrho) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma'} (\sigma') = \pi_s$ und analog für $\varrho \pi_s = \pi_s$. $\square$

Korollar 2.4.7 *Die Abbildung π_s erfüllt $\pi_s^2 = \pi_s$. (Eine solche Abbildung heißt Projektion.)*

Beweis:

$$\pi_s^2 = \pi_s(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \underbrace{\pi_s \sigma}_{=\pi_s} = \frac{1}{p!} \underbrace{\sum_{\sigma \in S_p}}_{p! - viele} \pi_s = \pi_s$$

$\square$

Lemma 2.4.8 *Es gilt:*

1. $Kern(\pi_s) = M^p(E)$
2. $Im(\pi_s) = sym^p(E)$

Beweis:

1. $M^p(E) \subseteq kern(\pi_s)$: Sei $v \in M^p(E)$, v also darstellbar als: $v = \sum_i \lambda_i(u_i - \tau u_i)$ so gilt:

$$\pi_s(v) = \pi_s(\sum_i \lambda_i(u_i - \tau u_i)) = \sum_i \lambda_i \pi_s(u_i - \tau u_i) = \sum_i \lambda_i(\pi_s(u_i) - \underbrace{(\pi_s \circ \tau)(u_i))}_{=\pi_s(u_i)} = 0$$

und v liegt damit auch in $Kern(\pi_s)$.

$kern(\pi_s) \subseteq M^p(E)$: Für beliebiges $u \in \otimes^p(E)$ gilt: $u - \sigma u \in M^p(E)$. Daraus folgt:

$$u - \pi_s(u) = u - \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(u) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (u - \sigma(u)) \in M^p(E)$$

und wenn $u \in Kern(\pi_s)$ also $\pi_s(u) = 0$ gilt dann weiter: $u - \pi_s(u) = u \in M^p(E)$.

2. $Im\pi_s \subseteq sym^p(E)$: Ist $v \in Im(\pi_s)$, v also schreibbar als: $v = \pi_s(u)$ so gilt:

$$\sigma v = \sigma \pi_s(u) = \pi_s(u) = v \text{ für alle } \sigma \in S_p$$

Also liegt v in $sym^p(E)$.

$sym^p(E) \subseteq Im(\pi_s)$: Sei $u \in sym^p(E)$, also $\sigma u = u$ so gilt:

$$\pi_s(u) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(u) = \frac{1}{p!} \underbrace{\sum_{\sigma \in S_p}}_{p!-viele} u = u$$

Also liegt u in $Im(\pi_s)$.

$\square$

Aus dem letzten Teil des Beweises folgt insbesondere:

Korollar 2.4.9 *Die Einschränkung von π_s auf $sym^p(E)$ ist die Identitätsabbildung.*

Weiters erhalten wir:

Korollar 2.4.10 *$sym^p(E)$ wird von den Elementen der Form $\pi_s(v_1 \otimes ... \otimes v_p)$ erzeugt.*

Beweis: Die Menge $\{v_1 \otimes ... \otimes v_p : v_i \in E\}$ ist ein Erzeugendensystem von $\otimes^p(E)$. Da π_s linear ist und $Im(\pi_s) = sym^p(E)$ folgt, dass die Menge $\{\pi_s(v_1 \otimes ... \otimes v_p) : v_i \in E\}$ ein Erzeugendensystem von $sym^p(E)$ ist. $\square$

Nun wollen wir noch für $dim(E) = n < \infty$ eine Basis für $sym^p(E)$ konstruieren: Sei dazu $e_1, ..., e_n$ eine Basis von E. Wir definieren dann eine Äquivalenzrelation auf der dadurch induzierten Basis von $\otimes^p(E)$, also auf der Menge

$$M = \{e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p} : 1 \leq \alpha_i \leq n\}$$

Diese Äquivalenzrelation $\sim$ sei gegeben durch:

$$e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p} \sim e_{\alpha'_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha'_p} \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_p : e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p} = \sigma(e_{\alpha'_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha'_p})$$

Dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt wird offensichtlich durch die Tatsache bewiesen, dass S_p eine Gruppe ist.
Wenn wir nun die Summe aller Elemente in einer Äquivalenzklasse bilden so ist diese gegeben durch:

$$\sum_{\sigma \in S_p} \sigma(e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p})$$

wobei $e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p}$ ein beliebig gewählter, aber festgehaltener, Vertreter der Äquivalenzklasse ist. Laut Lemma 2.4.8 liegen alle diese Summen in $sym^p(E)$. Weiters sind sie linear unabhängig, da ja die Elemente $e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p}$, $\alpha_i = 1, ..., n$ sämtliche linear unabhängig sind. Außerdem wird der Raum $sym^p(E)$ von diesen Elementen erzeugt, denn sei $u \in sym^p(E) = Im(\pi_s)$ beliebig so folgt:

$$\begin{aligned} u &= \pi_s(v) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma\Big(\sum_{\alpha_1 ... \alpha_p} \lambda'_{\alpha_1 ... \alpha_p}(e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p})\Big) = \\ &= \sum_{\alpha_1 ... \alpha_p} \frac{1}{p!} \lambda'_{\alpha_1 ... \alpha_p} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p}) \end{aligned}$$

Wir haben also eine mögliche Basis für $sym^p(E)$ gefunden. Die Wahl eines Vertreters aus jeder Äquivalenzklasse ist natürlich beliebig, offensichtlich gibt es aber in jeder Klasse einen eindeutigen Vertreter:

$$e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p} \text{ mit } 1 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_p$$

und wir erhalten

Korollar 2.4.11 *Sei E ein Vektorraum mit $dim(E) = n < \infty$ und $e_1, ..., e_n$ eine Basis von E. Dann bildet die Menge*

$$\{\pi_s(e_{\alpha_1} \otimes ... \otimes e_{\alpha_p}) : 1 \leq \alpha_1 \leq ... \leq \alpha_p\}$$

eine Basis von $sym^p(E)$. Insbesondere gilt also:

$$dim(sym^p(E)) = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$$

Vollkommen analog zum Tensorprodukt werden wir in der Folge das symmetrische Tensorprodukt definieren, wobei sich der Zusammenhang zu dem bisher gesagten dadurch ergibt, dass sich zeigen wird, dass $(sym^p(E), \pi_s \circ \otimes^p)$ ein solches symmetrisches Tensorprodukt ist.

Definition 2.4.12 *Sei $\phi : E \times ... \times E \to F$ eine p-lineare Abbildung und σ eine Permutation. Wir schreiben:*

$$(\sigma\phi)(x_1, ..., x_p) = \phi(x_{\sigma^{-1}(1)}, ..., x_{\sigma^{-1}(p)})$$

Weiters heißt eine solche Abbildung symmetrisch falls

$$\phi(x_1, ..., x_p) = (\sigma\phi)(x_1, ..., x_p)$$

für jede beliebige Permtutation $\sigma \in S_p$.

Definition 2.4.13 *Sei E ein Vektorraum und $p \geq 2$ eine natürliche Zahl. Sei weiters $\vee^p E$ ein Vektorraum und $\vee^p : \underbrace{E \times ... \times E}_{p-mal} \to \vee^p E$ eine symmetrische p-lineare Abbildung. Das Paar $(\vee^p E, \vee^p)$ heißt p-tes symmetrisches Tensorprodukt von E falls gilt:*

1. *$\vee^1$: Die Vektoren der Form $\vee^p(x_1, ..., x_p)$ erzeugen $\vee^p E$.*

2. *$\vee^2$: Für jede beliebige symmetrische p-lineare Abbildung $\phi : E \times ... \times E \to F$ gibt es eine lineare Abbildung $f : \vee^p E \to F$, die $\phi = f \circ \vee^p$ erfüllt.*

Ein Element v von $\vee^p E$ heißt zerlegbar, wenn es von der Form $\vee^p(x_1, ..., x_p)$ ist.

Anstatt $\vee^p(x_1, ..., x_p)$ schreiben wir auch $x_1 \vee ... \vee x_p$.

Lemma 2.4.14 *Sei $\otimes^p$ ein p-tes Tensorprodukt. Dann ist $(sym^p(E), \pi_s \circ \otimes^p)$ ein symmetrisches Tensorprodukt.*

Beweis:

1. $\vee^1$: Sei $u \in sym^p(E)$ beliebig, dann kann u dargestellt werden als $u = \sum_i \lambda_i \pi_s(v_i)$ mit gewissen $v_i = v_i^1 \otimes ... \otimes v_i^p$. Weiters gilt:

$$(\pi_s \circ \otimes^p)(v_i^1, ..., v_i^p) = \pi_s(v_i^1 \otimes ... \otimes v_i^p)$$

   Wir haben also eine Darstellung für ein beliebiges u in der Form $u = \sum_i \lambda_i (\pi_s \circ \otimes^p)(v_i^1, ..., v_i^p)$ gefunden.

2. $\vee^2$: Wir halten zunächst fest, dass, wenn ϕ eine symmetrische multilineare Funktion ist, es laut der Definition eines Tensorprodukts eine lineare Abbildung $f' : \otimes^p(E) \to F$ gibt mit: $f'(v_1 \otimes ... \otimes v_p) = \phi(v_1, ..., v_p)$. Daraus folgt:

$$(f' \circ (\pi_s \circ \otimes^p))(v_1, ..., v_p) = f'(\pi_s(v_1 \otimes ... \otimes v_p)) =$$
$$f'(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \sigma(v_1 \otimes ... \otimes v_p)) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f'(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(p)}) =$$
$$\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \phi(v_{\sigma^{-1}(1)}, ..., v_{\sigma^{-1}(p)}) = \phi(v_1, ..., v_p)$$

   wobei der letzte Schritt aus der Definition einer symmetrischen Funktion, sowie der Tatsache, dass S_p genau $p!$-viele Elemente besitzt folgt. Es gilt also, dass f' linear ist und dass:

$$f' \circ (\pi_s \circ \otimes^p) = \phi$$

   Die Einschränkung von f' auf den Unterraum $sym^p(E)$ erfüllt also die gewünschten Eigenschaften.

□

Dieses Lemma kommt bereits einem Existenzbeweis des symmetrischen Tensorprodukts gleich. Die Eindeutigkeit ergibt sich wie folgt:

Lemma 2.4.15 *Seien* $(\vee^p E, \vee^p)$ *und* $(\tilde{\vee}^p E, \tilde{\vee}^p)$ *zwei* p*-te symmetrische Tensorprodukte von* E*, so gibt es einen Isomorphismus* $f : \vee^p E \to \tilde{\vee}^p E$ *sodass*

$$\tilde{\vee}^p = f \circ \vee^p$$

Beweis: Aus der Bedingung $\vee^2$ folgt, dass es lineare Abbildungen

$$f : \vee^p E \to \tilde{\vee}^p E \text{ und } g : \tilde{\vee}^p E \to \vee^p E$$

gibt, sodass gilt:

$$f \circ \vee^p = \tilde{\vee}^p \text{ und } g \circ \tilde{\vee}^p = \vee^p$$

Daraus folgt:

$$(f \circ g) \circ \tilde{\vee}^p = \tilde{\vee}^p \text{ und } (g \circ f) \circ \vee^p = \vee^p$$

und die Bedingung $\vee^1$ impliziert damit, dass $g \circ f = f \circ g = \iota$. Dann sind f und g zueinander inverse Isomorphismen und f erfüllt $f \circ \vee^p = \tilde{\vee}^p$. $\square$

Aufgrund der Isomorphie von $\vee^p E$ und $sym^p(E)$ folgt wegen Korollar 2.4.11:

Korollar 2.4.16 *Sei* E *ein endlich-dimensionaler Vektorraum,* $dim(E) = n < \infty$ *und* e_α*,* $\alpha = 1, ..., n$ *eine Basis von* E *so bildet die Menge der Vektoren der Form*

$$e_{\alpha_1} \vee e_{\alpha_2} \vee ... \vee e_{\alpha_p} \textit{ mit } 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_p \leq n$$

eine Basis von $\vee^p$*. Insbesondere gilt also:*

$$dim(\vee^p E) = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$$

3 Die Darstellungstheorie

3.1 Grundlagen der Darstellungstheorie

Definition 3.1.1 *Sei* G *eine Gruppe,* V *ein Vektorraum und* G_V *die Menge aller linearen Abbildungen von* V *nach* V*. Eine Abbildung* $T : G \to G_V$ *heißt Darstellung von* G *nach* V *wenn gilt:*

1. $T(e) = 1$*, wobei* 1 *die identische Abbildung ist.*

2. $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2), \ \forall g_1, g_2 \in G$

Eine Darstellung T heißt endlich dimensional oder kurz endlich wenn V endlich dimensional ist, sonst unendlich dimensional. Die $T(g)$ heißen Darstellungsoperatoren und V der Darstellungsraum der Darstellung T.

Die Menge aller $T(g)$ bildet trivialerweise eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderführung von Abbildungen.
Sei T eine Darstellung in einen endlich dimensionalen Raum X. Dessen Dimension $dim(X)$ wird dann auch oft Dimension oder Grad von T genannt.
Sei T also eine endliche Darstellung mit Dimension n. Durch Auswahl einer festen Basis $\{e_i : \ i = 1, ..., n\}$ in X können die Operatoren $T(g)$ durch Matrizen der Ordnung n beschrieben werden:

$$t(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & ... & t_{1n}(g) \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1}(g) & ... & t_{nn}(g) \end{pmatrix}$$

Dabei heißt $t(g)$ die Matrix der Darstellung T und die Funktionen $t_{jk}(g)$ heißen Matrixelemente von T in der Basis $\{e_i\}$.

Definition 3.1.2 *Ein Teilraum M von V heißt invariant unter der Darstellung T, falls er invariant unter allen $T(g)$ ist, d.h falls gilt: $T(g)(M) \subseteq M, \ \forall g \in G$.*

Sei $M \subseteq V$ invariant unter einer Darstellung T von G nach V. Dann erhalten wir leicht eine Darstellung $T|_M$ von G nach M die definiert ist durch:

$$T|_M(g)(x) = T(g)(x), \ \forall x \in M$$

Diese Darstellung heißt die Einschränkung von T auf M.
Offensichtlich ist der Raum V selbst invariant unter jeder Darstellung T. Außerdem folgt aus der Linearität der Abbildungen $T(g)$, dass auch die Menge $\{0\}$ invariant unter jeder Darstellung ist.

Definition 3.1.3 *Eine Darstellung T von G nach V, $V \neq \{0\}$, heißt irreduzibel falls $\{0\}$ und V die einzigen unter T invarianten Teilräume sind. Andernfalls heißt T reduzibel.*

Lemma 3.1.4 *Sei T eine endliche Darstellung in einen Raum X so gibt es einen Unterraum $M \neq \{0\}$ von X auf den die Einschränkung von T irreduzibel ist.*

Beweis: Falls T irreduzibel ist, wähle $M = V$. Sei T also reduzibel. Daraus folgt, dass es einen echten Unterraum $M \neq \{0\}$ von X gibt, der invariant unter T ist. Wenn die Einschränkung von T auf M irreduzibel ist, haben wir den gesuchten Unterraum gefunden. Sonst gibt es wieder einen echten Unterraum $M_1 \neq \{0\}$ von M , der invariant ist unter T. Wenn man diesen Prozess fortsetzt erhält man:

$$M \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq ... \supsetneq M_i \supsetneq \{0\}$$

Da $dim(X) > dim(M) > dim(M_1) > ... > dim(M_i) > 0$ muss dieses Verfahren abbrechen und wir haben einen Unterraum mit der gewünschten Eigenschaft gefunden. $\square$

Definition 3.1.5 *Seien T und S zwei Darstellungen der Gruppe G nach X bzw. Y. Dann heißen T und S äquivalent (i.Z.: $T \sim S$) falls es eine lineare bijektive Abbildung $A : X \to Y$ gibt, für die gilt: $A \circ T(g) = S(g) \circ A$, $\forall g \in G$.*

Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation da:

1. Sei $A = I$ die identische Abbildung so ist A bijektiv und linear und $AT(g) = T(g)A = T(g)$, $\forall g \in G$.

2. Sei $T \sim S$ und A eine bijektive, lineare Abbildung sodass AT(g)=S(g)A, so existiert die Umkehrabbildung A^{-1} von A und ist linear. Es gilt dann: $A^{-1}S(g) = T(g)A^{-1}$ und daher $S \sim T$.

3. Sei $T \sim S$ und $S \sim U$ und daher $AT(g) = S(g)A$ und $BS(g) = U(g)B$ so gilt $AT(g) = B^{-1}U(g)BA$ und weiter $BAT(g) = U(g)BA$. Da A und B linear und bijektiv sind, ist es auch die Hintereinanderführung BA und daher folgt $T \sim U$.

Weiters gilt:

Lemma 3.1.6 *Seien X und Y endlich-dimensional. Zwei Darstellungen S und T einer Gruppe G sind genau dann äquivalent, falls $dim(X) = dim(Y)$ ist, und es Basen in X und Y gibt, sodass die entsprechenden Matrizen der Darstellungen gleich sind.*

Beweis: Es seien die beiden Darstellungen äquivalent, d.h. es gilt $A \circ T(g) = S(g) \circ A$ für ein bijektives A. Sei $dim(X) = n$ und $\{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von X, dann schreiben wir $f_j = A(e_j)$ und stellen fest:

1. Da A ein Isomorphismus ist gilt $dim(X) = dim(Y) = n$

2. Da A injektiv ist und die e_i linear unabhängig sind auch die $f_i = A(e_i)$ linear unabhängig und bilden daher wegen dem ersten Punkt eine Basis von F.

Seien weiters die Matrixelemente von $T(g)$ gegeben durch die Funktionen $t_{jk}(g)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
S(g)(f_k) &= S(g)(A(e_k)) = A(T(g)(e_k)) = A(\sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)e_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)A(e_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} t_{jk}(g)f_j
\end{aligned}$$

was bedeutet, dass auch die Matrixelemente von S durch $t_{jk}(g)$ gegeben sind. Sei umgekehrt $dim(X) = dim(Y) = n$ sowie $e_1, ..., e_n$ und $f_1, ..., f_n$ Basen von X und Y, mit der Eigenschaft, dass die entsprechenden Matrixelemente von S und T gleich sind. Wir definieren die Abbildung $A : X \to Y$ durch $A(c_1e_1 + ... + c_ne_n) = c_1f_1 + ... + c_nf_n$. Offensichtlich ist diese Abbildung linear und bijektiv und daher gilt weiters, wenn man die Bedingungen

$$T(g)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}(g)e_i \text{ sowie } S(g)(f_k) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}(g)f_i$$

verwendet:

$$\begin{aligned}
A(T(g)(\sum_{j=1}^{n} c_je_j)) &= A(\sum_{j=1}^{n} c_jT(g)(e_j)) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} t_{jk}(g)A(e_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{n} t_{jk}(g)f_j = \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_jS(g)(f_j) = S(g)(\sum_{j=1}^{n} c_jf_j) = \\
&= S(g)(A(\sum_{j=1}^{n} c_je_j))
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen da die Abbildung A bereits alle nötigen Bedingungen erfüllt. □

Lemma 3.1.7 *Sei $S \sim T$. Dann ist T genau dann irreduzibel, wenn S irreduzibel ist.*

Beweis: Sei $A \circ T(g) = S(g) \circ A$ mit $A : X \to Y$ bijektiv und sei T reduzibel. Es gibt also einen Unterraum $M \subsetneq X$ der $T(g)(m) \in M,\ \forall g \in G, m \in M$ erfüllt. Es gilt dann:

$$S(g)(A(M)) = A(T(g)(M)) = A(M)$$

$A(M)$ ist unter der bijektiven Abbildung A sicher wieder ein Unterraum. Aus der Bijektivität von A ergibt sich sofort $\{0\} \subsetneq A(M) \subsetneq Y$. Da $\sim$ symmetrisch ist gilt also:

$$T \text{ reduzibel } \Leftrightarrow S \text{ reduzibel}$$

und damit folgt mittels indirekter Annahme auch das Lemma. □

Lemma 3.1.8 *(Lemma von Schur) Seien T und S zwei irreduzible Darstellungen von G nach X bzw. Y und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung, sodass gilt: $AT(g) = S(g)A,\ \forall g \in G$ so folgt: Entweder ist A ein linearer Isomorphismus und daher $T \sim S$, oder es ist $A = 0$.*

Beweis: Sei $L = A(X)$. Dann ist L ein Unterraum von Y der unter allen $S(g)$ invariant ist, da

$$S(g)Ax = AT(g)x \in AX = L,\ \forall g \in G, x \in X$$

Da S laut Voraussetzung irreduzibel ist gilt $L = \{0\}$ oder $L = Y$. Im ersten Fall folgt $A = 0$. Sei also $AX = Y$ so reicht es zu zeigen, dass $Ker(A) = \{x : Ax = 0\} = \{0\}$. Nun gilt aber: Sei $x \in Ker(A) \Rightarrow A(x) = 0 \Rightarrow AT(g)x = S(g)Ax = S(g)0 = 0 \Rightarrow T(g)x \in Ker(A)$. D.h. $Ker(A)$ ist invariant unter T. Da aber T irreduzibel ist folgt $Ker(A) = \{0\}$ oder $Ker(A) = X$, wobei zweiteres auf einen Widerspruch führt, da daraus folgt, dass $Y = AX = \{0\}$. □

Lemma 3.1.9 *Sei T eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung von G nach X und B eine lineare Abbildung auf X mit $BT(g) = T(g)B,\ \forall g \in G$. Dann folgt dass $B = \lambda 1$ für ein gewisses $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Es gilt laut Annahme $BT(g) = T(g)B,\ \forall g \in G$
Da B eine lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen Raum ist, hat sie zumindest einen Eigenwert λ. Sei $A := B - \lambda 1$ dann ist A nicht bijektiv. Es gilt $AT(g) = T(g)A$. Nach dem Lemma von Schur ist $A = 0$, d.h. es gilt $B - \lambda 1 = 0$ also $B = \lambda 1$. □

Definition 3.1.10 *Sei G eine Gruppe und X ein Vektorraum. Eine Darstellung T von G nach X heißt vollständig zerlegbar, falls X die direkte Summe von Unterräumen $X_1, ..., X_m$ ist, auf die die Einschränkung von T irreduzibel ist.*

Anders formuliert heißt eine Darstellung also vollständig zerlegbar, wenn es Unterräume X_i von X gibt, die folgendes erfüllen:

1. Für jedes $x \in X$ gibt es eindeutige $x_i \in X_i,\ i = 1, ..., m$ sodass $x = x_1 + ... + x_m$

2. $T|_{X_i}$ ist irreduzibel.

Bezeichnen wir $T_i(g) = T|_{X_i}$, so läßt sich $T(g)$ berechnen durch:

$$\begin{aligned} T(g)(x) &= T(g)(x_1 + ... + x_m) = T(g)(x_1) + ... + T(g)(x_m) \\ &= T_1(x_1) + ... + T_m(x_m) \end{aligned}$$

Wir schreiben oft kürzer:

$$T = T_1 + ... + T_m$$

Bemerkung:
Jede irreduzible Darstellung ist laut Definition vollständig zerlegbar.

Definition 3.1.11 *Sei G eine Gruppe. Eine Funktion $t : G \to (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ heißt Charakter von G falls gilt*

$$t(e) = 1,\ t(g_1 g_2) = t(g_1)t(g_2),\ \forall g_1, g_2 \in G$$

Die eindimensionale Darstellung einer Gruppe sind also laut Definition genau die Charaktere dieser Gruppe.

Lemma 3.1.12 *Jede irreduzible endliche Darstellung einer kommutativen Gruppe hat Dimension gleich eins, ist also ein Charakter dieser Gruppe.*

Beweis: Sei T eine irreduzible Darstellung der kommutativen Gruppe G in einen endlich-dimensionalen Raum X. Für beliebige $g_0, g \in G$ gilt

$$T(g_0)T(g) = T(g_0 g) = T(g g_0) = T(g)T(g_0)$$

Also gilt laut 3.1.9, dass $T(g_0) = \lambda(g_0)1$. Offensichtlich ist jeder Unterraum von X invariant unter allen $T(g) = \lambda(g)1$. Im Fall $dim(X) > 1$ gibt es einen Unterraum M von X mit $\{0\} \subsetneq M \subsetneq X$, was ein Widerspruch zur Irreduzibilität von X ist. $\square$

3.2 Das Tensorprodukt endlicher Darstellungen

Definition 3.2.1 *Es seien $T_1, ..., T_m$ Darstellungen einer Gruppe G in die endlich-dimensionalen Räume $X_1, ..., X_m$. Die lineare Abbildung T von G nach $X = X_1 \otimes ... \otimes X_m$ die festgelegt ist durch*

$$T(g)(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = T_1(g)(x_1) \otimes ... \otimes T_m(g)x_m$$

heißt das Tensorprodukt von $T_1, ..., T_m$.

Lemma 3.2.2 *Ein Tensorprodukt T zweier Darstellungen T_1, T_2 einer Gruppe G erfüllt die Bedingungen*

1. *$T(e) = 1$*
2. *$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$*

ist also selbst wieder eine Darstellung von G.

Beweis:

1. $T(e)(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = T_1(e)x_1 \otimes ... \otimes T_m(e)x_m = x_1 \otimes ... \otimes x_m$
2. $T(g_1g_2)(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = T_1(g_1g_2)x_1 \otimes ... \otimes T_m(g_1g_2)x_m =$
   $T_1(g_1)T_1(g_2)x_1 \otimes ... \otimes T_m(g_1)T_m(g_2)x_m =$
   $T(g_1)(T_1(g_2)x_1 \otimes ... \otimes T_m(g_2)x_m) =$
   $T(g_1)T(g_2)(x_1 \otimes ... \otimes x_m)$

□

Lemma 3.2.3 *Seien X_1 und X_2 endlich-dimensionale Vektorräume mit $dim(X_i) = n_i$ und $\{e_1^i, ..., e_{n_i}^i\}$ eine Basis von X_i. Weiters seien T_1 und T_2 Darstellungen nach X_1 bzw. X_2 mit den Matrixelementen $t_{uj}^1(g)$ bzw. $t_{vk}^2(g)$. Die Matrixelemente der Darstellung $T = T_1 \otimes T_2$ in der Basis $e_{jk} = e_j^1 \otimes e_k^2$ sind gegeben durch:*

$$t_{uv\,jk}(g) = t_{uj}^1(g)t_{vk}^2(g)$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
T(g)(e_{jk}) &= T_1(g)e_j^1 \otimes T_2(g)e_k^2 = (\sum_{u=1}^{n_1} t_{uj}^1(g)e_u^1) \otimes (\sum_{v=1}^{n_2} t_{vk}^2(g)e_v^2) = \\
&= \sum_{u=1}^{n_1}\sum_{v=1}^{n_2} t_{uj}^1(g)t_{vk}^2(g)(e_u^1 \otimes e_v^2) = \\
&= \sum_{u=1}^{n_1}\sum_{v=1}^{n_2} t_{uj}^1(g)t_{vk}^2(g)e_{uv}
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Im allgemeinen Fall gilt, aufgrund einer analogen Berechnung:

Lemma 3.2.4 *Seien $T_1, ..., T_m$ Darstellungen in die Räume $X_1, ..., X_m$ mit Dimension $n_1, ..., n_m$ und sei $\{f_1^k, ..., f_{n_k}^k\}$ jeweils eine Basis von X_k. Weiters seien die $t_{vj}^k(g)$ die Matrixelemente von $T_k(g)$ in dieser Basis. Die Matrixelemente $t_{v_1...v_m\, j_1...j_m}(g)$ sind dann gegeben durch:*

$$t_{v_1...v_m\, j_1...j_m}(g) = t_{v_1 j_1}^1(g)...t_{v_m j_m}^m(g)$$

Bemerkung:
Bei dieser Schreibweise handelt es sich natürlich um 2×2 Matrizen. Die etwas kompliziert erscheinenden Indizes in den beiden Lemmas entstehen nur dadurch, dass die Basisvektoren nicht geordnet sind.

3.3 Adjungierte Darstellungen

Definition 3.3.1 *Seien X und Y komplexe Vektorräume. Eine Abbildung $(.,.) : X \times Y \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform* [3] *falls gilt:*

1. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
2. $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$

$\forall x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y, \alpha \in \mathbb{C}.$

Definition 3.3.2 *Das Paar (X, Y) nennt man dual zueinander bezüglich der Sesquilinearform $(.,.)$ falls gilt:*

1. $(x_0, y) = 0,\ \forall y \in Y \Rightarrow x_0 = 0$
2. $(x, y_0) = 0,\ \forall x \in X \Rightarrow y_0 = 0$

Lemma 3.3.3 *Wenn das Paar (X, Y) dual zueinander ist bezüglich der Form (x, y), so ist das Paar (Y, X) dual zueinander bezüglich der Form $(y, x)_1 = \overline{(x, y)}$.*

[3] manchmal wird eine solche Form auch Bilinearform genannt, was in unserem Fall aber zu einem Konflikt mit der Notation des zweiten Kapitel führen würde

Beweis: Der Beweis ist trivial und erfolgt durch Nachrechnen der sechs Eigenschaften. Zum Beispiel:

$$(\alpha y, x)_1 = \overline{(x, \alpha y)} = \overline{\bar{\alpha}(x, y)} = \alpha\overline{(x, y)} = \alpha(y, x)_1$$

□

Definition 3.3.4 *Seien X und Y zueinander duale Räume bezüglich der Sesquilinearform $(.,.)$. Seien weiters T und S Darstellungen einer Gruppe G nach X bzw. Y. Dann heißt S adjungiert zu T bezüglich $(.,.)$ falls:*

$$(T(g)x, S(g)y) = (x, y), \forall g \in G, x \in X, y \in Y$$

Lemma 3.3.5 *S ist genau dann adjungiert zu T falls*

$$(T(g^{-1})x, y) = (x, S(g)y),\ \forall g \in G, x \in X, y \in Y$$

Beweis: Man ersetze x in der Definition durch $T(g^{-1})x$ und verwende, dass $T(g)$ injektiv ist. □

Lemma 3.3.6 *Es seien X und Y dual zueinander bezüglich der Form $(.,.)$. Weiters sei T eine Darstellung einer Gruppe G nach X. Sei S dann eine Darstellung von G nach Y, die adjungiert ist zu T bezüglich $(.,.)$, dann ist S eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es seien S und S' Darstellungen nach Y und beide adjungiert zu T bezüglich $(.,.)$. Es gilt dann:

$$(T(g^{-1})x, y) = (x, S(g)y) \text{ und } (T(g^{-1})x, y) = (x, S'(g)y)$$

woraus folgt, dass $0 = (x, (S(g) - S'(g))y)$ für alle $g \in G, x \in X, y \in Y$. Aus Definition 3.3.2 schliessen wir, dass $(S(g) - S'(g))y = 0$ für alle $y \in Y, g \in G$ und daher:

$$S(g) = S'(g) \text{ für alle } g \in G$$

oder $S = S'$. □

Lemma 3.3.7 *Zwei endliche Darstellungen T und S in die Räume X bzw. Y sind genau dann adjungiert zueinander bezüdlich einer Sesqulinearform $(.,.)$ wenn sie gleiche Dimension haben und es Basen in X und Y gibt, sodass für die Matrixelemente der Darstellungen gilt:*

$$t_{kj}(g^{-1}) = \overline{s_{jk}(g)}$$

Beweis: Wir wählen Basen $e_1, ..., e_n$ und $f_1, ..., f_n$ in X und Y, sodass $(e_j, f_k) = \delta^j_k$. Seien dann $t_{jk}(g)$ und $s_{jk}(g)$ die Matrixelemente von T bzw. S in diesen Basen. Es gilt also:

$$T(g)e_j = \sum_{v=1}^{n} t_{vj}(g)e_v \text{ und } S(g)f_k = \sum_{u=1}^{n} s_{uk}(g)f_u$$

Die Bedingung in Lemma 3.3.5 ist äquivalent zu dem Gleichungssystem:

$$(T(g^{-1})e_j, f_k) = (e_j, S(g)f_k)$$

was laut der oberen Gleichung gleichbedeutend ist mit:

$$t_{kj}(g^{-1}) = \overline{s_{jk}(g)}$$

□

Korollar 3.3.8 *Seien X und Y endlich-dimensionale Räume und dual zueinander bezüglich der Form $(.,.)$ und sei weiters T eine Darstellung von G nach X. Dann gibt es genau eine Darstellung S von G nach Y die adjungiert zu T ist.*

Beweis: Die Eindeutigkeit gilt laut Lemma 3.3.6. Zu beweisen bleibt also die Existenz: Wir schreiben $n = dim(X) = dim(Y)$ und wählen Basen $e_1, ..., e_n$ und $f_1, ..., f_n$ in X und Y, sodass wieder $(e_j, f_k) = \delta^j_k$. Es seien weiters $t_{jk}(g)$ die Matrixelemente und $t(g)$ die Matrix von $T(g)$. Wir definieren $S(g)$ durch die Matritxelemente in der Basis $f_1, ..., f_n$:

$$s_{jk}(g) = \overline{t_{kj}(g^{-1})}$$

Sei $s(g)$ die Matrix von $S(g)$, so gilt also: $s(g) = t(g^{-1})^*$, wobei * die adjungierte Matrix bezeichnet. Zu beweisen bleibt, dass S eine Darstellung von G ist:

1. $s(e) = t(e)^* = 1^* = 1$
2. $s(g_1g_2) = t((g_1g_2)^{-1})^* = t(g_2^{-1}g_1^{-1})^* = (t(g_2^{-1}t(g_1^{-1}))^* = s(g_1)s(g_2)$

□

SATZ 3.3.9 *Die Darstellungen T und S seien adjungiert. Dann ist T genau dann irreduzibel, wenn S irreduzibel ist.*

Beweis: Seien X und Y die Vektorräume von T und S, und X und Y daher dual zueinander bezüglich der Form $(.,.)$. Weiters gilt, dass $dim(X) = dim(Y)$. Sei nun M ein invarianter Unterraum von Y unter S und $L = M^{\perp} = \{x \in X : (x,y) = 0 \text{ für alle } y \in M\}$. Da M laut Voraussetzung invariant unter S ist gilt

$$(T(g)x, y) = (x, S(g^{-1})y) = 0 \text{ für alle } y \in M$$

also ist $T(g)x \in L$.
Da T irreduzibel ist gilt dann entweder $L = \{0\}$ oder $L = X$. Im ersten Fall sind offensichtlich die Bedingungen aus Definition 3.3.2 für X und M erfüllt und X und M sind daher dual zueinander, woraus folgt, dass $M = X$, da sonst gelten würde $dim(M) < dim(Y) = dim(X)$ was laut Lemma 3.3.7 ein Widerspruch wäre.
Im zweiten Fall, folgt aus $y \in M$, dass $(x,y) = 0$ für alle $x \in X$ und daher laut Definition 3.3.2, dass $y = 0$ und daher $M = \{0\}$.
Daher sind, wenn T irreduzibel ist, $\{0\}$ und Y die einzigen unter S invarianten Unterräume von Y. Die Umkehrung im Lemma folgt sofort, wenn man die Rollen von S und T vertauscht. $\square$

3.4 Endliche topologische Darstellungen

Im Folgenden können wir nur die allerwichtigsten Begriffe aus der Topologie erwähnen. Eine ausführliche Darstellung kann zum Beispiel in [SN] gefunden werden.

Definition 3.4.1 *Eine Menge X gemeinsam mit einer Familie $\ell = \{U\}$ bestehend aus Teilmengen von X heißt topologischer Raum falls gilt*

1. $\varnothing \in \ell$ *und* $X \in \ell$
2. *Die Vereinigung aller Elemente einer beliebigen Teilmenge von ℓ liegt in ℓ*
3. *Der Durchschnitt aller Elemente einer endlichen Teilmenge von ℓ liegt in ℓ*

Definition 3.4.2 *Eine Menge G heißt topologische Gruppe, falls*

1. *G ist eine Gruppe*
2. *G ist ein seperabler topologischer Raum*

3. *die Funktion $f_1(g) = g^{-1}$ ist eine stetige Abbildung von G nach G und die Funktion $f_2(g,h) = gh$ ist eine stetige Abbildung von $G \times G$ nach G.*

Definition 3.4.3 *Sei G eine topologische Gruppe und X ein endlich dimensionaler Vektorraum ungleich $\{0\}$. Eine Darstellung von G nach X für die zusätzlich noch gilt, dass für jedes beliebige $x \in X$ die Abbildung $g \to T(g)x$ stetig ist, nennen wir eine endliche topologische Darstellung.*

Definition 3.4.4 *Sei X eine beliebige Menge. $M \subset X$ und $N \subset X$ heißen eine Zerlegung von X falls gilt:*

$$M \cup N = X,\ M \cap N = \emptyset,\ M \neq \emptyset,\ N \neq \emptyset$$

Eine Teilmenge M eines topologischen Raums X heißt zusammenhängend, falls es keine Zerlegung in zwei abgeschlossene Mengen gibt.

Definition 3.4.5 *Sei G eine topologische Gruppe und S_1 und S_2 zwei nichtleere Teilmengen von G. Die kleinste abgeschlossene Untergruppe von G die alle Elemente der Form*

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \text{ mit } g_1 \in S_1,\ g_2 \in S_2$$

enthält heißt Kommutator (i.Z.: $K(S_1, S_2)$) der Mengen S_1 und S_2. Für $K(G,G)$ schreiben wir kurz G'.

Weiters definieren wir induktiv die folgenden beiden Sequenzen von Mengen:

$$G^{(1)} = G',\ G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$$

$$G^{[1]} = K(G,G),\ G^{[n]} = K(G, G^{[n-1]})$$

und legen fest:

Definition 3.4.6 *Eine topologische Gruppe heißt auflösbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass*

$$G^{(n)} = \{e\}$$

Für eine auflösbare Gruppe heißt die kleinste Zahl, für die diese Gleichung erfüllt ist, der Rang der auflösbaren Gruppe G.
Weiters heißt eine Gruppe G nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$G^{[n]} = \{e\}$$

SATZ 3.4.7 *(Satz von Lie, ohne Beweis) Jede endliche, irreduzible Darstellung einer zusammenhängenden, auflösbaren topologischen Gruppe G ist eindimensional.*

Bemerkung:
Angenommen G sei eine kommutative Gruppe, dann gilt stets

$$g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = e, \ \forall g_1, g_2 \in G$$

und damit

$$G' = K(G, G) = \{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} : \ g_1, g_2 \in G\} = \{e\}$$

d.h . eine kommutative Gruppe ist immer eine auflösbare Gruppe mit Rang 1. Der Satz von Lie kann also als Verallgemeinerung von Lemma 3.1.12 gesehen werden und der Beweis kann auch als Induktionsbeweis nach dem Rang geführt werden. Die dafür benötigten topologischen Grundlagen würden uns jedoch zu weit führen. Man findet den Beweis in [SN].

Korollar 3.4.8 *Sei T eine endliche Darstellung einer zusammenhängenden, auflösbaren topologischen Gruppe in einen Raum X, dann gibt es einen Vektor $x_0 \neq 0$ in X, der ein Eigenvektor für alle Operatoren $T(g)$ ist.*

Beweis: Der Raum X besitzt einen Unterraum $X_1 \neq \{0\}$, der invariant unter allen Operatoren $T(g)$ ist und auf den die Einschränkung $T|_{X_1}$ irreduzibel ist. Laut dem Satz von Lie ist X_1 eindimensional. Sei x_0 ein Vektor aus X_1 ungleich Null, so gilt also $T(g)x_0 \in X_1$ und damit:

$$T(g)x_0 = \lambda(g)x_0 \text{ für alle } g \in G$$

wobei λ eine komplexwertige Funktion und damit ein Charakter von G ist, was bedeutet, dass x_0 ein Eigenvektor für alle $T(g)$ ist. $\square$

Bemerkung:
Wenn wir die stetigen Darstellungen der $GL(n, \mathbb{C})$ suchen, so ist implizit als Topologie immer die sogenannte natürliche Topologie gemeint. Diese wird festgelegt, indem man jede Matrix der $GL(n, \mathbb{C})$ als Punkt in $\mathbb{C}^{n^2}$ auffasst, und dessen euklidische Topologie verwendet.

4 Eine Physikalische Motivation

4.1 Der Zusammenhang zwischen der Lorentzgrupppe und der $SL(2,\mathbb{C})$ - Die Spinorenabbildung

In der Folge werden wir uns ausschließlich mit den echten, orthochronen Lorentztransformationen, wie sie im ersten Kapitel definiert wurden befassen. Wir werden jede solche Transformation als Lorentztransformation bezeichnen und die Gruppe kurz Lorentzgruppe nennen und L dafür schreiben.

Definition 4.1.1 *Für die Gruppe aller Matrizen der Ordnung n mit Determinante $\neq 0$ schreiben wir $GL(n,\mathbb{C})$. Die Teilmenge aller Matrizen mit Determinante gleich 1 bezeichnen wir mit $SL(n,\mathbb{C})$.*
Insbesondere interessieren wir uns für die Menge aller komplexen $2\times 2-$ Matrizen mit Determinante gleich 1, also für die $SL(2,\mathbb{C})$.

Wegen $det(AB) = det(A)det(B)$ ist die $SL(n,\mathbb{C})$ eine Untergruppe der Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$.
Weiters führen wir ein:

Definition 4.1.2 *Ein Gruppenhomomorphismus $spin : SL(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{L}$ heißt Spinabbildung, falls*

1. *spin surjektiv ist*
2. *$spin(A) = spin(B) \Leftrightarrow A = \pm B$*

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$, so definieren wir die Matrix $R(A)$ durch:

$$R(A) = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} & \bar{a}b & b\bar{b} \\ a\bar{c} & a\bar{d} & b\bar{c} & b\bar{d} \\ \bar{a}c & \bar{b}c & \bar{a}d & \bar{b}d \\ c\bar{c} & c\bar{d} & \bar{c}d & d\bar{d} \end{pmatrix}$$

Weiters seien G und G^{-1} folgendermaßen festgelegt:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } G^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es läßt sich leicht nachrechnen, dass G^{-1} wirklich die inverse Matrix von G ist. Weiters gilt:

$$G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_4 \\ x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 \\ -x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Wir interessieren uns für die Abbildung $spin : SL(2, \mathbb{C}) \to L$ mit $spin(A) = GR(A)G^{-1}$, wobei explizit ausgerechnet gilt:

$$spin(\begin{pmatrix} a & b \\ d & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^1 \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 & \Lambda_4^2 \\ \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 & \Lambda_4^3 \\ \Lambda_1^4 & \Lambda_2^4 & \Lambda_3^4 & \Lambda_4^4 \end{pmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1^1 &= \frac{1}{2}(a\bar{d} + \bar{b}c + b\bar{c} + \bar{a}d) \quad , \quad \Lambda_2^1 = \frac{i}{2}(a\bar{d} + \bar{b}c - b\bar{c} - \bar{a}d) \\
\Lambda_1^2 &= \frac{1}{2}(-a\bar{d} + \bar{b}c - b\bar{c} + \bar{a}d) \quad , \quad \Lambda_2^2 = \frac{1}{2}(a\bar{d} - \bar{b}c - b\bar{c} + \bar{a}d) \\
\Lambda_1^3 &= \frac{1}{2}(a\bar{b} - c\bar{d} + \bar{a}b - \bar{c}d) \quad , \quad \Lambda_2^3 = \frac{i}{2}(a\bar{b} - c\bar{d} - \bar{a}b + \bar{c}d) \\
\Lambda_1^4 &= \frac{1}{2}(a\bar{b} + c\bar{d} + \bar{a}b + \bar{c}d) \quad , \quad \Lambda_2^4 = \frac{i}{2}(a\bar{b} + c\bar{d} - \bar{a}b - \bar{c}d) \\
\Lambda_3^1 &= \frac{1}{2}(a\bar{c} + \bar{a}c - b\bar{d} - \bar{b}d) \quad , \quad \Lambda_4^1 = \frac{1}{2}(a\bar{c} + \bar{a}c + b\bar{d} + \bar{b}d) \\
\Lambda_3^2 &= \frac{i}{2}(-a\bar{c} + \bar{a}c + b\bar{d} - \bar{b}d) \quad , \quad \Lambda_4^2 = \frac{i}{2}(-a\bar{c} + \bar{a}c - b\bar{d} + \bar{b}d) \\
\Lambda_3^3 &= \frac{1}{2}(a\bar{a} - c\bar{c} - b\bar{b} + d\bar{d}) \quad , \quad \Lambda_4^3 = \frac{1}{2}(a\bar{a} - c\bar{c} + b\bar{b} - \bar{d}d) \\
\Lambda_3^4 &= \frac{1}{2}(a\bar{a} + c\bar{c} - b\bar{b} - d\bar{d}) \quad , \quad \Lambda_4^4 = \frac{1}{2}(a\bar{a} + c\bar{c} + b\bar{b} + \bar{d}d)
\end{aligned}$$

Die Abbildung *spin* ist dann eine Spinabbildung, die wir Pauli-Spinabbildung nennen.

Beweis: Für einen vollständigen Beweis fehlen uns die genauen Kenntnisse über die Struktur der Lorentzgruppe. Es gelten aber folgende Teilaussagen der Behauptung:

1. $spin(A) \in L,\ \forall A \in SL(2, \mathbb{C})$:

$spin(A)$ ist orthochron, da offensichtlich $\Lambda_4^4 > 0$. Weiters gilt, wie eine direkte Berechnung zeigt

$$det(R(A)) = (ad - bc)^2(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2 = 1$$

und damit auch

$$det(spin(A)) = det(G^{-1})det(spin(A))det(G) = det(R(A)) = 1$$

$spin(A)$ ist damit auch eine echte Lorentztransformation.

2. $spin(AB) = spin(A)spin(B)$

   Folgt aus der Tatsache, dass auch $R(AB) = R(A)R(B)$, die sich explizit nachrechnen läßt.

3. $spin(A) = spin(-A)$:

   Gilt offensichtlich aufgrund der Berechnung der Einträge Λ_j^i.

4. $spin(A) = spin(B) \Rightarrow A = \pm B$:

   Sei $spin(A) = spin(B)$ so gilt

$$spin(AB^{-1}) = spin(A)spin(B)^{-1} = spin(A)spin(A)^{-1} = e$$

   und daraus folgt aus den Matrixelementen Λ_j^i, dass $AB^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $spin$ ist surjektiv:

   Diesen Beweis findet man detailiert in [GN].

$\square$

Von grundlegender Bedeutung wird in Zukunft der folgende einfache Sachverhalt sein:
Angenommen es sei eine Darstellung $\hat{T} : L \to X$ gegeben. So ist auch $T : SL(2,\mathbb{C}) \to X$ mit $T = \hat{T} \circ spin$ eine Darstellung. Für diese gilt natürlich: $T(-g) = \hat{T}(spin(-g)) = \hat{T}(spin(g)) = T(g)$.
Sei umgekehrt $T : SL(2,\mathbb{C}) \to X$ eine Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $T(g) = T(-g),\ \forall g \in SL(2,\mathbb{C})$, dann können wir $\hat{T} : L \to X$ folgendermaßen definieren: Sei $L \in L$, dann existiert ein $g \in SL(2,\mathbb{C})$, sodass

$spin(g) = L$. Aufgrund der der Definition einer Spinabbildung ist dann eine Darstellung $\hat{T} : L \to X$ durch $\hat{T}(L) = T(g)$ wohldefiniert.
Das heißt, es gibt eine bijektive Beziehung zwischen den Darstellungen von L und den Darstellungen von $SL(2, \mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $T(-g) = T(g), \ \forall g \in SL(2, \mathbb{C})$. Diese wird vermittelt durch

$$T = \hat{T} \circ spin$$

Lemma 4.1.3 *Sei G eine Matrixgruppe (bzgl. der Multiplikation von Matrizen), sei für jedes $g \in G$ auch $-g \in G$ und sei $T : G \to H$ eine endliche, irreduzible Darstellung von G. Dann gilt entweder*

$$T(-g) = +T(g) \text{ für alle } g \in G \text{ oder } T(-g) = -T(g) \text{ für alle } g \in G$$

Beweis: Sei I die Einheitsmatrix, so gilt: $T(-g) = T(-Ig) = T(-I)T(g)$, d.h. es reicht zu zeigen, dass

$$T(-I) = +T(I) \text{ oder } T(-I) = -T(I)$$

Nun gilt: $T(-I)$ ist eine lineare Abbildung mit

$$T(-I)T(h) = T(-Ih) = T(h(-I)) = T(h)T(-I), \ \forall h \in G$$

Damit gibt es nach dem Lemma von Schur ein $\lambda \in \mathbb{C}$ sodass $T(-I) = \lambda I$. Da aber

$$T(-I)T(-I) = T((-I)(-I)) = T(I) = I$$

folgt $(\lambda I)(\lambda I) = \lambda^2 I = I$, also $\lambda^2 = 1$ bzw. $\lambda = \pm 1$ und daher $T(-I) = \pm I$. □

Unter den endlich-dimensionalen, irreduziblen Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$ sind als genau jene keine Darstellungen der Lorentzgruppes, für die gilt, dass $T(-g) = -T(g), \ \forall g \in SL(2, \mathbb{C})$. Nichtsdestotrotz werden solche Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$ manchmal auch zweiwertige Darstellungen der Lorentzgruppe genannt.

4.2 Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$

Bei der Konstruktion des Minkowskiraums geht man meistens von einigen, wenigen, experimentiell untermauerten Annahmen aus, von denen man bereit ist sie als Axiome zu akzeptieren. Insbesondere soll in einem Minkowskiraum gelten, dass jeder zulässige Beobachter über ein Koordinatensytem verfügt,

in dem er die Ereignisse, die durch die Vektoren des Raums repräsentiert werden, einordnen kann. Es kann gezeigt werden, dass die Übergänge zwischen den Koordinatensystemen von zwei beliebigen zulässigen Beobachtern genau durch die Lorentztransformationen beschrieben werden.
Der Minkowskiraum erscheint für viele Anwendungen der Physik sehr unpraktisch, da ausschließlich die sogenannten "Weltereignisse" als Elemente darin vorkommen, und andere "Objekte" wie z.B. elektrische Felder, die z.B. durch lineare Transformationen $L : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ beschrieben werden nicht darin enthalten sind. Insbesondere erweist es sich als günstig, wenn für jedes beliebige r und s der Raum T^r_s aller $(r+s)$-linearen Funktionen

$$\phi : \underbrace{\mathcal{M}^* \times ... \times \mathcal{M}^*}_{r} \times \underbrace{\mathcal{M} \times ... \times M}_{s} \to \mathbb{R}$$

darin enthalten ist, da die meisten physikalischen Sachverhalte durch solche Funktionen beschrieben (oder zumindest lokal approximiert) werden können. Da für alle r, s der Raum T^r_s ein Tensorraum ist (vgl. Kapitel 2.3), soll es also einen Isomorphismus zwischen $\otimes^r_s(\mathcal{M}) = (\otimes^r(\mathcal{M}))\otimes(\otimes^s(\mathcal{M}^*))$ und eines Teilraums der zu konstruierenden Struktur geben.
Bemerkung:
Historisch gesehen wurde nach der Publikation der Relativitätstheorie zuerst genau mit diesen Räumen $\otimes^r_s(\mathcal{M})$ gerechnet, deren Elemente Welttensoren genannt werden. Es galt einige Zeit als allgemein anerkannt, dass jedes physikalische Gesetz in der Sprache von Welttensoren formuliert werden sollte und dass dies auch immer möglich sei. Wie wir aber in diesem Kapitel ausführen werden sind Welttensoren zur Beschreibung gewisser Sachverhalte aus der Quantentheorie ungeeignet.

Wir wollen bei der Konstruktion einer besser geeigneten Struktur als dem Minkowskiraum von folgender Idee ausgehen:
Die zulässigen Beobachter des Minkowskiraums sollen in derselben Form weiterexistieren, d.h. es sollen weder welche dazukommen noch wegfallen. Insbesondere wird durch zwei feste, zulässige Beobachter ja genau eine Lorentztransformation induziert. Es sollen also auch diese bestehen bleiben und wieder durch lineare Abbildungen beschrieben werden.
Bei dieser Formulierung drängt sich die Darstellungstheorie schon fast auf: Wir könnten versuchen alle Darstellungen T der Lorentzgruppe zu finden und jede davon würde einen Raum induzieren, der der Annahme gerecht wird. $T(g)$ würde dann die Lorentztransformation g im Darstellungsraum beschreiben. Die Bedingungen

1. $T(e) = 1$

2. $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$

erscheinen ad hoc naheliegend, da:

1. e in $\mathcal{M}$ nicht den Beobachter wechselt und $T(e)$ daher im neuen Raum auch nicht den Beobachter wechseln soll.

2. Durch g_1g_2 die Transformation von Beobachter 1 zu Beobacher 3 beschrieben wird, wenn g_1 die Transformation von 1 zu 2 und g_2 von 2 zu 3 beschreibt und auch im neuen Raum diese Beziehung bestehen bleiben soll.

Wie sich allerdings herausstellte, gibt es Objekte in der Quantentheorie, die nicht in dieses Schema passen. Genauer, gilt für die sogenannten Bosionen, die z.B. den Zustand von Elektronen oder Protonen beschreiben, dass sie nicht bei einer Rotation um 2π in den ursprünglichen Zustand zurückkehren jedoch bei einer Rotation um 4π. Eine Rotation ist eine Lorentztransformation, und insbesondere entspricht eine Rotation um 2π der Einheitsmatrix e. Da $T(e) = 1$ gilt, kann obiger Sachverhalt unmöglich durch eine Darstellung von L beschrieben werden. Eigentlich beschreibt e zwei, für Bosionen, komplett verschiedene Vorgänge, nämlich sowohl eine Rotation um 2π als auch um 4π. Wenn man davon ausgeht, dass dies im Prinzip die einzigen zwei Vorgänge sind, die von e beschrieben werden (und davon wollen wir ausgehen), so ist es naheliegend eine Abbildung, wie die Spinabbildung einzuführen, für die ja gilt:

$$spin^{-1}(e) = \{g : spin(g) = e\} = \{\pm e_s\}$$

Wobei e_s die Einheitsmatrix in $SL(2, \mathbb{C})$ ist.
Wie wir gesehen haben, sind genau jene Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$ keine Darstellungen der Lorentzgruppe, für die gilt:

$$T(-g) = -T(g)$$

und für diese folgt:

$$T(spin^{-1}(e)) = T(\pm e_s) = \pm T(e_s)$$

Wie man leicht sieht, kann $T(+e_s)$ nun eine Rotation um 4π beschreiben während $T(-e_s)$ eine Rotation um 2π beschreibt, für die offensichtlich gilt:

$$T(-e_s)(A) = -T(e_s)A = -A \text{ und } T(-e_s)T(-e_s)A = T(e_s)A = A$$

Sei T also eine Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$, so beschreibt die Menge $T(spin^{-1}(e))$ genau jene beiden Vorgänge, die durch e beschrieben werden. Wir werden also im nächsten Kapitel beginnen, alle Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ zu finden. Dies wird uns auf direktem Weg zu den Spinoren führen.
Natürlich erhalten wir auf diesem Weg auch alle Darstellungen der Lorentzgruppe, die ja genau jene sind, für die $T(g) = T(-g)$ gilt.
Folgender nicht ganz leicht zu zeigender Satz ermöglicht es uns, uns auf die irreduziblen Darstellungen zu beschränken, da jede vollständig zerlegbare Darstellung als Summe von irreduziblen Darstellungen beschrieben werden kann:

SATZ 4.2.1 *(ohne Beweis) Jede endliche Darstellung der Gruppe $SL(n,\mathbb{C})$ ist vollständig zerlegbar.*

Bemerkung:
Einen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in [SN, Kapitel X und XI]. Bereits die Darstellungen der $GL(n,\mathbb{C})$ erfüllen diesen Satz nicht notwendigerweise. Eine Darstellung der $GL(2,\mathbb{C})$, deren Operatoren durch die Matrizen

$$T(g) = \begin{pmatrix} 1 & ln|det(g)| \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, ist zum Beispiel nicht vollständig reduzibel. Allerdings ist die $GL(n,\mathbb{C})$ isomorph zur $(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \times SL(n,\mathbb{C})$ wobei $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ die Gruppe der komplexen Zahlen bezüglich der Multiplikation ist. Jede Darstellung T der $GL(n,\mathbb{C})$ kann damit als Produkt geschrieben werden:

$$T(\lambda g_1) = T_0(\lambda)T_1(g_1) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, g_1 \in SL(n,\mathbb{C})$$

Wenn also eine Darstellung der $GL(n,\mathbb{C})$ nicht vollständig reduzibel ist, tritt notwendigerweise dieser Faktor $T_0(\lambda)$ auf.

5 Endliche Darstellungen der vollen linearen Gruppe

5.1 Die $GL(n,\mathbb{C})$ und ihre Untergruppen

Die Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$, die wir in der Folge oft kurz mit G bezeichnen werden, wenn n aus dem Zusammenhang klar ist, besitzt einige wichtige Untergruppen:

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & \dots & 0 \\ k_{21} & k_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} : k_{11}, \dots, k_{nn} \neq 0,\ k_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} : h_{11}, \dots, h_{nn} \neq 0,\ h_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \neq 0 \right\}$$

$$Z_- := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & z_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} : z_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

$$Z_+ := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1n} \\ 0 & 1 & z_{23} & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} : z_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

Bemerkung:
Aus der Topologie entnehmen wir folgende Tatsachen:

1. Sowohl die $GL(n, \mathbb{C})$ als auch die $SL(n, \mathbb{C})$ sind zusammenhängend.

2. K und H sind abgeschlossene, zusammenhängende und auflösbare Untergruppen der $GL(n, \mathbb{C})$.

3. $Z_+ = H^{(1)}$ und $Z_- = K^{(1)}$.

5.2 Zerlegungen der $GL(n, \mathbb{C})$

Lemma 5.2.1 *Jedes Element $k \in K$ kann eindeutig in der Form*

$$k = dz_- \text{ mit } d \in D, z_- \in Z_-$$

bzw. in der Form

$$k = z_- d \text{ mit } d \in D, z_- \in Z_-$$

dargestellt werden.

Beweis: $k = dz_-$ ist äquivalent zu dem Gleichungssystem:

$$k_{pq} = \lambda_p z_{pq}, p \geq q$$

Für $q = p$ ergibt das

$$\lambda_p = k_{pp}$$

und für $p > q$

$$z'_{pq} = \frac{k_{pq}}{k_{pp}}$$

Daraus läßt sich jedes λ_p und jedes z_{pq} für $q < p$ eindeutig bestimmen. Da für $q > p$ folgt, dass $z_{pq} = 0$ ist der erste Teil des Lemmas bewiesen. Vollkommmen analog folgt der zweite Teil wobei wir zu dem System $\lambda_p = k_{pp}$ und $z_{pq} = \frac{k_{qp}}{k_{pp}}$ kommen. $\square$

Lemma 5.2.2 *Jedes Element $h \in H$ kann eindeutig in der Form*

$$h = dz \text{ mit } d \in D, z \in Z_+$$

bzw. in der Form

$$h = zd \text{ mit } d \in D, z \in Z_+$$

dargestellt werden.

Beweis: Analog zum Beweis des vorhergehenden Lemmas erhalten wir $\lambda_p = h_{pp}$ und $z_{pq} = \frac{h_{pq}}{h_{pp}}$ im ersten bzw. $\lambda_p = h_{pp}$ und $z_{pq} = \frac{h_{pq}}{h_{qq}}$ im zweiten Fall des Lemmas. $\square$

Bemerkung:
Eine Matrix heißt regulär falls

$$\Delta_l(g) \neq 0, \forall l = 1, 2, ..., n$$

wobei

$$\Delta_l(g) = det \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{l1} & \cdots & g_{ll} \end{pmatrix}$$

Mit G_{reg} bezeichnen wir die Menge aller regulären Matrizen. In einigen Beweisen des nächsten Kapitel werden wir verwenden, dass die regulären Matrizen in G dicht liegen und dass daher eine gleichmäßig stetige Funktion auf G_{reg} stetig fortsetzbar auf G ist (siehe dazu auch [SN]).
In der Folge werden wir eine Zerlegung für reguläre Elemente in G kennenlernen.

Lemma 5.2.3 *Sei $g \in G_{reg}$ so kann es eindeutig in der Form*

$$g = kz \ mit \ k \in K, z \in Z_+$$

dargestellt werden.

Beweis: Wir versuchen zuerst ein Element $\dot{z} \in Z_+$ zu finden sodass $g\dot{z} \in K$ Da $\dot{z}_{pq} = 0$ für $p > q$ und $k_{pq} = 0$ für $p < q$ ist $g\dot{z} \in K$ äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\sum_{s=1}^{q-1} g_{ps}\dot{z}_{sq} + g_{pq} = 0, \text{ für } p < q$$

Sei $q > 1$ fix und $p = 1, 2, ..., q-1$. Obiges System ist ein Gleichungssystem in den Unbekannten $\dot{z}_{1q}, ..., \dot{z}_{q-1,q}$ dessen Determinante gleich $\Delta_q(g)$ ist und daher ungleich Null da g regulär ist. Daher hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, d.h. es gibt ein Element $\dot{z}$ sodass $g\dot{z} \in K$. Daher haben wir $g = k\dot{z}^{-1}$ und da Z_+ ein Gruppe ist existiert eine Zerlegung der gegebenen Form.
Angenommen es sei nun $g = kz = k_1 z_1$ mit $k, k_1 \in K$ und $z, z_1 \in Z_+$. Es folgt $kz = k_1 z_1$, $k^{-1}k_1 = zz_1^{-1} \in K \cap Z_+ = \{e\}$. Das heißt es ist $k^{-1}k_1 = e$

und $zz_1^{-1} = e$ und daher $k = k_1$ und $z = z_1$. Das bedeutet die Zerlegung ist eindeutig. □

Aus diesen Zerlegungen erhalten wir noch:

Korollar 5.2.4 *Jede Matrix $g \in G_{reg}$ kann eindeutig in der Form:*

$$g = dz_- z_+ \text{ mit } d \in D, z_- \in Z_-, z_+ \in Z_+$$

sowie

$$g = z_- dz_+ \text{ mit } d \in D, z_- \in Z_-, z_+ \in Z_+$$

dargestellt werden. Diese Zerlegung heißt auch Gauss-Zerlegung.

5.3 Die irreduziblen endlichen Darstellungen der $GL(n, \mathbb{C})$

Definition 5.3.1 *Sei T eine Darstellung von G nach X. Ein Vektor $x \in X$, $x \neq 0$ heißt Gewichtsvektor der Darstellung T (bezüglich der Gruppe D) falls*

$$T(d)x = v(d)x, \forall d \in D$$

wobei v ein stetiger Charakter der Gruppe D ist. Dieser heißt dann Gewicht der Darstellung T.
Weiters heißt ein Vektor $x_0 \in X, x_0 \neq 0$, Vektor mit höchstem Gewicht der Darstellung T, falls

- $T(d)x_0 = \alpha(d)x_0, \forall d \in D$
- $T(z)x_0 = x_0, \forall z \in Z_+$

wobei α ein stetiger Charakter von D ist. Dieser heißt in einem solchen Fall ein höchstes Gewicht der Darstellung T.
Außerdem heißt ein Vektor $x_0 \in X, x_0 \neq 0$, Vektor mit niedrigstem Gewicht der Darstellung T, falls

- $T(d)x_0 = \alpha(d)x_0, \forall d \in D$
- $T(z)x_0 = x_0, \forall z \in Z_-$

wobei α ein stetiger Charakter von D ist. Dieser heißt in einem solchen Fall ein niedrigstes Gewicht der Darstellung T.

SATZ 5.3.2 *Sei T eine Darstellung von $G = GL(n, \mathbb{C})$ nach X. Dann gibt es einen Vektor mit höchstem und einen mit niedrigstem Gewicht.*

Beweis: Da H zusammenhängend und auflösbar ist, gibt es laut Korollar 3.4.8 einen gemeinsamen Eigenvektor x_0 für alle Operatoren $T(h)$:

$$T(h)x_0 = \alpha(h)x_0$$

Da D eine Untergruppe von H ist und T weiters stetig ist, folgt, dass α ein stetiger Charakter von D ist. Weiters gilt, da die $\alpha(h)$ komplexe Zahlen und daher kommutativ sind und $Z_+ = H^{(1)}$, dass $T(z)x_0 = x_0$.
Da K ebenfalls zusammenhängend und auflösbar ist und $Z_- = K^{(1)}$ lässt sich der Beweis, dass es einen Vektor mit niedrigstem Gewicht gibt, analog führen. $\square$

SATZ 5.3.3 *Sei T eine Darstellung von $G = GL(n,\mathbb{C})$ nach X und sei T außerdem irreduzibel. Dann gibt es (bis auf skalare Vielfache) genau einen Vektor mit höchstem und genau einen mit niedrigstem Gewicht.*

Beweis: Sei Y ein Vektorraum der dual zu X ist unter einer nichtsingulären Sesquilinearform $(.,.)$ und sei weiters $\hat{T}$ die adjungierte Darstellung zu T von G nach Y. Sei weiters $y_0' \in Y$ ein Vektor mit niedrigstem Gewicht und $\hat{\mu}$ ein niedrigstes Gewicht von $\hat{T}$. Wenn nun $g = z_- d z_+ \in G_{reg}$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(T(g)x_0, y_0') &= (T(z_-)T(d)T(z_+)x_0, y_0') = \text{ (laut Definition 5.3.1)}\\
&= (T(z_-)T(d)x_0, y_0') = \text{ (laut Lemma 3.3.5)}\\
&= (T(d)x_0, \hat{T}({z_-}^{-1})y_0') = (\alpha(d)x_0, y_0') =\\
&= \alpha(d)(x_0, y_0')
\end{aligned}$$

Analog gilt:

$$(T(g)x_0, y_0') = (T(d)x_0, y_0') = (x_0, \hat{T}(x_-^{-1})y_0') = \hat{\mu}(d^{-1})(x_0, y_0')$$

Damit gilt:

$$(\alpha(d) - \hat{\mu}(d^{-1}))(x_0, y_0') = 0$$

Wäre nun $(x_0, y_0') = 0$ dann wäre ja $(T(g)x_0, y_0') = 0,\ \forall g \in G_{reg}$ und daher für alle $g \in G$ und weiter, da T irreduzibel ist $(x, y_0') = 0,\ \forall x \in X$, was der Nichtsingularität von $(.,.)$ widerspricht. Das heißt es gilt $(x_0, y_0') \neq 0$ und daher:

$$\alpha(d) = \hat{\mu}(d^{-1})$$

Sei nun x_1 ein anderer Vektor mit höchstem Gewicht und $\alpha_1(d)$ das dazugehörige Gewicht so gilt:

$$\alpha_1(d) = \hat{\mu}(d^{-1}) = \alpha(d)$$

Wenn nun

$$c = (x_1, y_0')/(x_0, y_0')$$

so gilt wegen der Bilinearität von $(.,.)$ und der Voraussetzung für c:

$$(cx_0 - x_1, y_0') = c(x_0, y_0') - (x_1, y_0') = 0$$

Wäre nun $cx_0 - y_1 \neq 0$ so sieht man aus der Definition eines Vektors mit höchstem Gewicht leicht, dass wegen der Linearität aller Abbildungen $T(g)$ auch $cx_0 - x_1$ ein Vektor mit höchstem Gewicht wäre, was aber der vor gezeigten Bedingung $(x_0, y_0') \neq 0$ widerspricht. D.h. $cx_0 - x_1 = 0$ und daher $cx_0 = x_1$.
Den Beweis, dass es genau ein niedrigstes Gewicht gibt, erhält man wieder analog. □

Lemma 5.3.4 *Sei T eine endlich-dimensionale Darstellung von G nach X. Sei x_0 ein Vektor mit höchstem Gewicht und $\alpha(d)$ das dazugehörige höchste Gewicht. Dann ist T irreduzibel falls:*

1. $X = span\{T(g)x_0 : g \in G\}$
2. *x_0 ist der einzige Vektor mit höchstem Gewicht von T (abgesehen von skalaren Vielfachen).*

Beweis: Sei $M \neq \{0\}$ ein invarianter Unterraum von X unter T. Es gibt dann einen Vektor mit höchstem Gewicht x_0' von der Einschränkung von T auf M. Sei x_0 ein Vekor mit höchstem Gewicht in X so ist wegen Annahme (2) dieser ein skalares Vielfache von x_0' und liegt daher in M. Da M invariant gilt auch $span\{T(g)x_0 : g \in G\} \subseteq M$. Wegen Annahme (1) ist dieser *span* gleich X und daher gilt $M = X$. Daher ist T irreduzibel. □

5.4 Die kanonische Realisierung der endlichen, irreduziblen Darstellungen von G

Definition 5.4.1 *Sei T eine irreduzible Darstellung von $GL(n, \mathbb{C})$ in einen endlich-dimensionalen Raum X. Sei weiters Y dual zu X bezüglich $(.,.)$ und*

$y_0' \in Y$ ein Vektor mit niedrigstem Gewicht der adjungierten Darstellung. Sei weiters Φ' die Menge aller komplexwertigen linearen Funktionen auf G. Wir definieren eine Abbildung $\phi : X \to \Phi'$ durch

$$\phi(x)(g) = f_x(g) = (T(g)x, y_0')$$

Lemma 5.4.2 *Die Abbildung ϕ ist linear.*

Beweis: Da $T(g)$ linear ist und $(.,.)$ multilinear gilt:

$$f_{\alpha x+\beta y}(g) = (T(g)(\alpha x+\beta y), y_0') = \alpha(T(g)x, y_0')+\beta(T(g)y, y_0') = \alpha f_x(g)+\beta f_y(g)$$

$\square$

Lemma 5.4.3 *Die Abbildung ϕ ist injektiv.*

Beweis: Sei $M := Kern(\phi)$ und sei $a \in M$ dann gilt, dass $(T(g)a, y_0') = 0, \forall g \in G$. Wenn nun $g_1 \in G$ beliebig so ist $(T(g)T(g_1)a, y_0') = (T(gg_1)a, y_0') = 0$ d.h. dass auch $T(g_1)x \in M$ und dass M somit invariant unter allen $T(g_1)$ ist. Da aber T irreduzibel ist gilt $M = X$ oder $M = \{0\}$. Im ersten Fall wäre $(x, y_0') = 0, \forall x \in X$ was unmöglich ist. D.h. $Kern(\phi) = \{0\}$ und ϕ ist damit injektiv. $\square$

Definition 5.4.4 *In der Folge werden wir mit Φ das Bild von X unter der Abbildung ϕ verstehen.*

Somit ist Φ ein Vektorraum von linearen Funktionen von G nach $\mathbb{C}$. Die Abbildung $\phi : X \to \Phi$ die wie oben definiert ist durch

$$\phi(x) = f_x(g) = (T(g)x, y_0')$$

ist ein linearer Isomorphismus.
Wir wollen den Raum Φ in der Folge genauer untersuchen.

Lemma 5.4.5 *Jede Funktion $f_x(g) \in \Phi$ erfüllt die Bedingung:*

$$f_x(kg) = \alpha(k)f_x(g)$$

wobei $k \in K$ beliebig und $\alpha(k)$ der Eigenwert zu einem gemeinsamen Eigenvektor der Operatoren $T(k)$ (dieser existiert ja immer) ist.

Beweis: Sei $\hat{T}$ adjungiert bezüglich $(.,.)$, $y'_0 \in Y$ ein Vektor mit niedrigstem Gewicht und $\hat{\mu}$ ein niedrigstes Gewicht so gilt:

$$\begin{aligned} f_x(kg) &= (T(kg)x, y'_0) = (T(k)T(g)x, y'_0) = \\ &= (T(g)x, T'(k)y'_0) = (T(g)x, \hat{T}^{-1}(k)y'_0) \\ &= (T(g)x, \hat{\mu}(k^{-1}y'_0) = \hat{\mu}(k^{-1}(T(g)x, y'_0) \\ &= \alpha(k)f_x(g) \end{aligned}$$

□

Lemma 5.4.6 *Sei $f_x(g) \in \Phi$ und $g_0 \in G$ beliebig, dann ist auch die Funktion $f_x(gg_0) \in \Phi$.*

Beweis: Es gilt:

$$f_x(gg_0) = (T(gg_0)x, y'_0) = (T(g)T(g_0)x, y'_0) = f_{T(g_0)x}(g) \in \Phi$$

□

Lemma 5.4.7 *Seien $x \in X$ und $T(g_0)(x) = y \in X$. Dann ist der Operator, der f_x auf f_y abbildet gegeben durch:*

$$f_y(g) = f_{T(g_0)(x)}(g) = f_x(gg_0)$$

Beweis:

$$f_{T(g_0)(x)}(g) = (T(g)T(g_0)(x), y'_0) = (T(gg_0)x, y'_0) = f_x(gg_0)$$

□

Wir fassen die Aussagen 5.4.5 bis 5.4.7 in folgendem Korollar zusammen:

Korollar 5.4.8 *Sei T eine irreduzible Darstellung von G nach X. Dann ist die Darstellung $\tilde{T}$ definiert durch*

$$\tilde{T}(g_0)f_x(g) = f_x(gg_0)$$

eine zu T äquivalente Darstellung von G nach Φ.

Beweis: Damit die beiden Darstellungen äquivalent sind, brauchen wir eine lineare, bijektive Abbildung $A : X \to \Phi$ mit $AT(g) = \tilde{T}(g)A$. Die Abbildung $\phi(x) = f_x$ ist linear und bijektiv und es gilt:

$$\phi(T(g)(x))(g) = f_{T(g)(x)}(g) = f_x(gg_0) = \tilde{T}(g_0)(f_x(g)) = \tilde{T}(g_0)(\phi(x)(g))$$

□

Lemma 5.4.9 *Sei Φ^* ein endlich-dimensionaler Raum von stetigen Funktionen auf G, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *$f(kg) = \alpha(k)f(g)$ wobei α eine eindimensionale Darstellung von K ist.*
2. *Sei $g_0 \in G$ beliebig, so folgt aus $f(g) \in \Phi^*$, dass $\bar{f}(g) = f(gg_0) \in \Phi^*$.*

Sei weiters T eine Darstellung von G nach Φ^*, die definiert ist durch:

$$T(g_0)f(g) = f(gg_0)$$

Dann gibt es nur einen Vektor f_0 mit höchstem Gewicht, der festgelegt ist durch:

$$f_0(dz_-z_+) = c\alpha(d) \text{ für } g = dz_-z_+ \in G_{reg}$$

Beweis: Da $K^{(1)} = Z_-$ und α eindimensional ist, gilt für $z = k_1k_2k_1^{-1}k_2^{-1} \in Z_-$, dass $\alpha(z) = \alpha(k_1)\alpha(k_2)\alpha(k_1)^{-1}\alpha(k_2)^{-1} = 1$.
Sei nun $f_0(g)$ ein Vektor mit höchstem Gewicht. Da $dz_- \in K$, $\forall d \in D$, $z_- \in Z_-$ gilt dann laut der ersten Voraussetzung

$$f_0(dz_-z_+) = \alpha(dz_-)f_0(z) = \alpha(d)\alpha(z_-)f_0(z_+) = \alpha(d)f_0(z_+)$$

Laut der zweiten Bedingung und der Definition eines Vektors mit höchstem Gewicht gilt außerdem:

$$f_0(gz_+) = T(z_+)f_0(g) = f_0(g) \text{ für alle } z \in Z_+$$

und es folgt:

$$f_0(dz_-z_+) = f_0(dz_-) = \alpha(d)f_0(e) = C \cdot \alpha(d)$$

Wäre $C = f_0(e) = 0$ so wäre f_0 die Nullfunktion und damit kein höchstes Gewicht, also Widerspruch.
Sei $f_1(g)$ ein zweiter Vektor mit höchstem Gewicht. Dann würde gelten, dass

$$f_1(g) = C_1\alpha(d)$$

und damit

$$f_1(g) = \frac{C_1}{C}f_0(g) \text{ für } g = dz_-z_+$$

und daher für alle $g \in G$. Aus dieser Gleichung folgt die Eindeutigkeit bis auf skalare Vielfache. $\square$

Definition 5.4.10 *Sei* $\alpha(\delta)$ *ein Charakter von* D *und* f_0 *die Funktion* $f_0(g) = f_0(\delta z_- z_+) = \alpha(\delta) f_0(e)$ *so bezeichnet*

$$\Phi_\alpha = span\{f_{g_0}(g) = f(g_0 g) : \; g_0 \in G\}$$

Definition 5.4.11 *Ein Charakter* $\alpha(d)$ *von* D *heißt induktiv falls gilt:*

1. *Die Funktion definiert durch* $f_0(g) = f_0(\delta z_- z_+) = \alpha(\delta) f_0(e)$ *ist stetig auf ganz* G*.*

2. Φ_α *ist endlich dimensional*

Definition 5.4.12 *Sei* α *ein induktiver Charakter von* D*.* T_α *bezeichnet dann die Darstellung von* G *nach* Φ_α *definiert durch:* $T_\alpha(g_0) f(g) = f(g g_0)$

Alle Funktionen in Φ_α erfüllen die Bedingung $f(kg) = \alpha(k) f(g)$, da mit den Festlegungen $k = dz_-$ und $gg_0 = d' z'_- z'_+$ für $f(g) = f_0(gg_0)$

$$f(g) = f_0(kgg_0) = f_0(dz_- d' z'_- z'_+) = C\alpha(dz_- d' z'_-) = C\alpha(dz_-)\alpha(d' z'_-) = \alpha(k) f_0(gg_0)$$

für $gg_0 \in G_{reg}$ und daher für alle $g, g_0 \in G$ gilt.
Sei weiter T_α die Darstellung, die definiert ist durch:

$$T_\alpha(g_0) f(g) = f(gg_0) \text{ für } f \in \Phi_\alpha$$

so gelten die folgenden drei Sätze:

SATZ 5.4.13 *Sei* α *ein induktiver Charakter von* D *dann ist* T_α *eine irreduzible Darstellung von* $GL(n, \mathbb{C})$ *mit höchstem Gewicht* α*.*

Beweis: Sei $f_0(g)$ ein Vektor mit höchstem Gewicht von T_α. Laut (2) der Definition eines induktiven Charakters gilt: $span\{T_\alpha(g) f_0 : g \in G\} = \Phi_\alpha$ und laut Lemma 5.4.9 ist $f_0(g)$ der einzige Vektor mit höchstem Gewicht. Laut Lemma 5.3.4 ist T_α dann irreduzibel. $\square$

SATZ 5.4.14 *Das höchste Gewicht einer endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellung von* $GL(n, \mathbb{C})$ *ist induktiv und jede endlich-dimensionale irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht* α *ist äquivalent zu* T_α*.*

Beweis: Sei T eine endliche irreduzible Darstellung von $GL(n,\mathbb{C})$ mit einem höchstem Gewicht α. T ist äquivalent zu $\tilde{T}$ in den Raum Φ aus Korollar 5.4.8. Laut 5.4.9 gibt es einen Vektor der Form $f_0(g) = C\alpha(d)$ für $g = dz_-z_+$ mit höchstem Gewicht α in Φ. Da T irreduzibel ist, ist auch $\tilde{T}$ irreduzibel und es gilt daher, da es keine invarianten Unterräume gibt, dass

$$\Phi = span\{(\tilde{T}(g_0)(f))(g)\} = span\{f(gg_0)\}$$

Das heißt laut Definition von Φ_α, dass $\Phi = \Phi_\alpha$ und $\tilde{T} = T_\alpha$. α ist daher induktiv und $T \sim T_\alpha$. $\square$

SATZ 5.4.15 *Zwei endlich-dimensionale irreduzible Darstellungen von $GL(n,\mathbb{C})$ sind äquivalent genau dann wenn ihre höchsten Gewichte gleich sind.*

Beweis: Zwei endliche Darstellungen mit demselben höchsten Gewicht α sind äquivalent zu T_α und daher auch zueinander. Die Umkehrung ist offensichtlich. $\square$

T_α wird auch die kanonische Realisierung der irreduziblen Darstellung der $GL(n,\mathbb{C})$ mit höchstem Gewicht α genannt.
Wir haben also alle endlich-dimensionalen Darstellungen der $GL(n,\mathbb{C})$ gefunden - abgesehen davon, dass wir die induktiven Charaktere noch nicht kennen. Wir wollen aber auch noch eine zweite Möglichkeit (in der Folge mit $\dot{T}$ bezeichnet) kennenlernen.
Wie wir wissen erfüllen alle Funktionen in Φ_α die Bedingung $f(kg) = \alpha(k)f(g)$. Insbesondere gilt also:

$$f(g) = f(kz) = \alpha(k)f(z) \text{ für } g = kz \in G_{reg}$$

Für jede Funktion $f \in \Phi$ definieren wir die Funktion $\dot{f} : Z_+ \to \mathbb{C}$ durch $\dot{f}(z_+) = f(z_+)$ für alle $z_+ \in Z_+$. $\dot{f}$ ist also nichts anderes als die Einschränkung von f auf Z_+.
Sei F_α der Raum aller so festgelegten Funktionen $\dot{f}$, dann haben wir also eine Abbildung $A : \Phi_\alpha \to F_\alpha$ die definiert ist durch:

$$A(f)(kz) = f(z) = \dot{f}(z)$$

Offensichtlich ist A linear. Außerdem gilt:

$$A(f)(kz) = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \Rightarrow \alpha(k)f(z) = 0 \Rightarrow f(kz) = 0$$

Das heißt der Kern von A ist gleich $\{0\}$ und die Abbildung ist damit injektiv. Da sie laut Definition auch surjektiv ist folgt, dass A ein Isomorphismus ist.

Die Darstellungsoperatoren $\dot{T}(g_0)$ sollen nun durch den Isomorphismus aus den Operatoren $T(g_0) : \Phi_\alpha \to \Phi_\alpha$ entstehen. Genauer soll gelten:

$$A(T_\alpha(g_0)(f) = \dot{T}_\alpha(g_0)(A(f))$$

Daraus erhalten wir:

$$T_\alpha(g_0)f(kz) = f(kzg_0) = \alpha(k)f(zg_0) =$$

$$\alpha(k)t_\alpha(g_0)f(z) = \alpha(k)\dot{T}_\alpha(g_0)\dot{f}(z)$$

Wir schreiben $zg_0 = k_1 z_1$ und erhalten:

$$f(gg_0) = f(kzg_0) = f(kk_1z_1) = \alpha(k)\alpha(k_1)f(z_1)$$

und daraus durch Kürzen weiter:

$$\dot{T}_\alpha(g_0)f(z) = \alpha(k_1)f(z_1)$$

Wir schreiben für $z_1 = z\overline{g}_0$ da ja z_1 aus diesen beiden Variablen berechnet wird und da außerdem noch gilt: $\alpha(k_1) = \alpha(k_1)\alpha(z_1) = \alpha(zg_0)$ erhalten wir schliesslich:

$$\dot{T}_\alpha(g_0)f(z) = \alpha(zg_0)f(z\overline{g}_0)$$

Nun wollen wir noch den Raum F_α explizit darstellen: Laut Definition ist

$$\Phi_\alpha = span\{f_0(gg_0)\} = span\{T(g_0)f_0(g), g \in G\}$$

für das Bild F_α von Φ_α unter der Abbildung A gilt daher:

$$F_\alpha = span\{A(T_\alpha(g_0)f_0(g))\} = span\{T_\alpha(g_0)f_0(z)\}$$

$f_0(z)$ ist aber immer eine konstante Funktion, d.h. $f_0(z) \equiv C$ und damit ist

$$F_\alpha = span\{\alpha(zg) \cdot C\} = span\{\alpha(zg)\}$$

Wir fassen das Gesagte in folgendem Satz zusammen:

SATZ 5.4.16 *Sei T eine endliche irreduzible Darstellung T der Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ mit höchstem Gewicht α. Dann ist diese äquivalent zu einer Darstellung $\dot{T}_\alpha$ die wie folgt definiert ist. Der Raum F_α der Darstellung ist gleich $span\{\alpha(zg) : g \in GL(n, \mathbb{C})\}$ und die Operatoren der Abbildung sind definiert durch:*
$\dot{T}_\alpha(g)f(z) = \alpha(zg)f(z\overline{g})$ wobei $z_1 = z\overline{g}$ definiert ist durch $zg = k_1z_1$.

Was jetzt noch bleibt wäre alle induktiven Charaktere von $GL(n, \mathbb{C})$ zu bestimmen. Obwohl das auch im allgemeinen Fall möglich ist, werden wir uns hier auf $G = GL(2, \mathbb{C})$ beschränken.

5.5 Die induktiven Charaktere der $GL(2,\mathbb{C})$

Sei in der Folge $G = GL(2,\mathbb{C})$, so ist es üblich die entsprechenden Untergruppen geringfügig zu modifizieren:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Die Gausszerlegung hat dann folgende Form:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ 0 & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} + k_{12}z_{21} & k_{12} \\ k_{22}z_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

woraus wir durch Koeffizientenvergleich und Umformen folgendes erhalten:

$$z_{21} = \frac{g_{21}}{g_{22}} \text{ , } k_{11} = \frac{det(g)}{g_{22}} \tag{6}$$

$$k_{12} = g_{12} \text{ , } k_{22} = g_{22} \tag{7}$$

Anstatt z_{21} schreiben wir kurz x und nennen x den Parameter der Matrix z. Außerdem legen wir fest: $f(x) = f(z)$.
Als erstes wollen wir den Parameter x_1 der Matrix $z_1 = z\bar{g}_0$ finden, also z_1 in $zg = k_1 z_1$.
Durch Matrizenmultiplikation erhalten wir:

$$zg = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{11}x + g_{21} & g_{12}x + g_{22} \end{pmatrix}$$

und laut 6 gilt also:

$$x_1 = \frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}}$$

und daher:

$$f(z\bar{g}) = f(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{12}x + g_{22}})$$

Weiters gilt laut 6 für $zg = z\_dz\overline{g}$ wegen der Gleichung:

$$dz_- = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_{12}^- \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 x_{12}^- \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dass

$$\lambda_2 = k_{22} = g_{12}x + g_{22} \text{ und } \lambda_1 = k_{11} = \frac{det(zg)}{g_{12}x + g_{22}} = \frac{det(g)}{g_{12}x + g_{22}}$$

Jeder stetige Charakter (d.h. jede eindimensionale Darstellung) $\alpha(d)$ hat die Form

$$\lambda_1{}^{p_1}\overline{\lambda_1}^{q_1}\lambda_2{}^{p_2}\overline{\lambda_2}^{q_2}$$

wobei $p_i, q_i \in \mathbb{C}$ mit $p_i - q_i \in \mathbb{Z}$.
Damit ergibt sich durch Einsetzen:

$$\alpha(zg) = (\frac{det(g)}{g_{12}x + g_{22}})^{p_1}(\frac{\overline{det(g)}}{g_{11}x + g_{22}})^{q_1}(g_{11}x + g_{22})^{p_2}(\overline{g}_{12}\overline{x} + \overline{g}_{22})^{q_2}$$

Und für $\dot{T}$:

$$\dot{T}(g)f(z) = det(g)^{p_1}\overline{det(g)}^{q_1}(g_{12}x + g_{22})^{p_2-p_1}(\bar{g}_{12}\bar{x} + \bar{g}_{22})^{q_2-q_1}f(\frac{g_{11}x + g_{21}}{g_{11}x + g_{22}})$$

Um die induktiven Charktere darunter zu finden verwenden wir folgendes Lemma:

Lemma 5.5.1 *Der Charakter $\alpha(d)$ ist genau dann induktiv, wenn $r = p_2 - p_1$ und $s = q_2 - q_1$ in $\mathbb{N}$ liegen.*

Beweis: Sei $\alpha(d)$ induktiv und der span aller $\alpha(z)$ damit endlich-dimensional mit Dimension $k-1$. Für alle $g_1, \ldots g_k \in G$ gibt es dann Konstanten $C_1, \ldots, C_k$ (nicht alle gleich Null) sodass:
$\sum(C_i\alpha(zg_i)) = 0$
Wir legen nun fest: $g_i = \begin{pmatrix} x_j{}^{-1} & 1 \\ 0 & x_j \end{pmatrix}$
wobei x_j eine beliebige komplexe Zahl $\neq 0$ ist. Durch Einsetzten erhalten wir:

$$\alpha(zg_j) = (x + x_j)^r(\overline{x} + \overline{x}_j)^s \text{ wobei } r = p_2 - p_1, s = q_2 - q_1$$

Obige Gleichung wird dann zu:

$$\sum(C_i(x + x_i)^r(\overline{x} + \overline{x}_i)^s) = 0$$

für beliebige komplexe Zahlen x, x_i ungleich Null. Durch $k-1$ maliges Differenzieren nach x erhalten wir, wenn wir danach $x = 0$ setzen das Gleichungssystem:

$$\sum(C_i x_i^r \overline{x}_i^s) = 0$$

$$\sum(rC_i x_i^{r-1}\overline{x}_i^s) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum(r(r-1)\dots(r-k+1)C_i\overline{x}_i^s)=0$$

Nachdem dieses Gleichungssystem für gewisse C_i gilt, die nicht alle gleich Null sind, muss die Determinante gleich Null sein. Diese ist gleich:

$$r^k(r-1)^{k-1}\dots(r-k+1)\prod(\overline{x}_i^s)w(x_1,\dots,x_k)$$

wobei $w(x_1,\dots,x_k)$ die Vandermonde-Determinante der Zahlen x_i bezeichnet. Nachdem die Zahlen x_i beliegig wählbar sind und damit auch so, dass sie alle ungleich Null und verschieden sind, die Determinante aber gleich Null muss eine der Zahlen $r, r-1,\dots,r-k+1$ gleich Null sein. Daraus folgt dass r aus $\mathbb{N}$ sein muss. Analog erhält man $s \in \mathbb{N}$ wenn man nach $\overline{x}$ anstelle von x differenziert.
Sei nun umgekehrt $r, s \in \mathbb{N}$ so ist $\alpha(zg)$ ein Polynom vom $grad \leq s$ und damit auch jede Linearkombination von Polynomen α_i. Der span aller $\alpha(d)$ ist damit endlich-dimensional. $\square$

Offensichtlich besteht F_α aus den Polynomen vom Grad $\leq r$ in x und $\leq s$ in $\bar{x}$ und es gilt dann:

SATZ 5.5.2 *Eine endliche irreduzible Darstellung T der Gruppe $GL(n,\mathbb{C})$ wird durch zwei natürliche Zahlen r und s sowie zwei komplexe Zahlen p und q deren Differenz eine ganze Zahl ist beschrieben. Eine solche Darstellung ist dann äquivalent zur Darstellung $\dot{T}_\alpha$ in den Raum F_α der Polynome vom Grad $\leq r$ in x und $\leq s$ in $\bar{x}$. $\dot{T}_\alpha(g)$ ist definiert durch:*

$$\dot{T}_\alpha(g)(f(x,\bar{x}))=(det(g))^p(\overline{det(g)})^q(g_{12}x+g_{22})^r(\bar{g}_{12}\bar{x}+\bar{g}_{22})^s\times$$

$$f(\frac{g_{11}x+g_{21}}{g_{12}x+g_{22}},\frac{\bar{g}_{11}\bar{x}+\bar{g}_{21}}{\bar{g}_{12}\bar{x}+\bar{g}_{22}})$$

Die Dimension der Darstellung ist $(r+1)(s+1)$.

Offensichtlich wird eine Darstellung der $GL(n,\mathbb{C})$ ebenso durch vier komplexe Zahlen p_1, p_2, q_1, q_2 beschrieben wobei p_1-q_1 und p_2-q_2 in $\mathbb{Z}$ und p_2-p_1 und q_2-q_1 in $\mathbb{N}$ liegen. Diese Folge $< p_1, p_2, q_1, q_2 >$ nennt man auch Signatur von T.

Bemerkung:
Hätten wir die Gruppen K, Z_+ am Anfang nicht modifiziert, so hätten analoge Berechnungen zu folgender Formel geführt:

$$\dot{T}_\alpha(g)(f(x,\bar{x})) = (det(g))^p(\overline{det(g)})^q(g_{11}+g_{21}x)^r(\bar{g}_{11}+\bar{g}_{21}\bar{x})^s\times$$
$$f(\frac{g_{12}+g_{22}x}{g_{11}+g_{21}x},\frac{\bar{g}_{12}+\bar{g}_{22}\bar{x}}{\bar{g}_{11}+\bar{g}_{21}\bar{x}})$$

Komplett analog kann man alle Definitionen und Sätze auch für die $SL(2,\mathbb{C})$ durchführen.
Wieder ist das Problem des Findens aller irreduziblen Darstellungen äquivalent zum Finden aller induktiven Charaktere. Für $n = 2$ hat wieder jeder Charakter die Form

$$\alpha(d) = \lambda_1^{p_1}\bar{\lambda_1}^{q_1}\lambda_2^{p_2}\bar{\lambda_2}^{q_2}$$

wobei $p_1 - q_1$ und $p_2 - q_2$ in $\mathbb{Z}$ liegen
und wieder sind die induktiven jene, wo zusätzlich noch p_2-p_1 und q_2-q_1 in $\mathbb{N}$ liegen. Man nennt die Folge $< p_1, p_2, q_1, q_2 >$ wieder Signatur der Darstellung. Es gibt dann zu jeder Darstellung T der $SL(2,\mathbb{C})$ eine äquivalente Darstellung in den Raum aller Polynome F_α vom Grad $\leq r = p_2 - p_1$ in x und $\leq s = q_2 - q_1$ in $\bar{x}$ deren Operatoren definiert sind durch:

$$\dot{T}_\alpha f(x,\bar{x}) = (g_{12}x+g_{22})^p(\bar{g}_{12}\bar{x}+\bar{g}_{22})^s f(\frac{g_{11}x+g_{21}}{g_{11}x+g_{22}},\frac{\bar{g}_{12}\bar{x}+\bar{g}_{21}}{\bar{g}_{12}\bar{x}+\bar{g}_{22}})$$

Es gilt also folgender Sachverhalt:

Korollar 5.5.3 *Jede irreduzible Darstellung der Gruppe $SL(n,\mathbb{C})$ ist eine Einschränkung einer irreduziblen Darstellung von $GL(n,\mathbb{C})$ auf $SL(n,\mathbb{C})$.*

6 Spinoren

6.1 Spin space

Definition 6.1.1 *Ein Vektorraum β über $\mathbb{C}$ auf dem eine Abbildung $\langle.,.\rangle : \beta\times\beta\to\mathbb{C}$ definiert ist, für die gilt*

1. *Es gibt $\phi,\psi\in\beta$ sodass $\langle\phi,\psi\rangle\neq 0$*

2. *$\langle\phi,\psi\rangle = -\langle\psi,\phi\rangle, \forall\phi,\psi\in\beta$*

3. $\langle a\phi + b\psi, \xi\rangle = a\langle\phi, \xi\rangle + b\langle\psi, \xi\rangle, \forall\phi, \psi, \xi \in \beta, a, b \in \mathbb{C}$

4. $\langle\phi, \psi\rangle\xi + \langle\xi, \phi\rangle\psi + \langle\psi, \xi\rangle\phi = 0, \forall\phi, \psi, \xi \in \beta$

heißt Spinraum.
Ein Element von β heißt Spinvektor.

In den folgenden Lemmas bezeichnet β immer einen beliebigen Spinraum, $\langle ., . \rangle$ die dazugehörige Abbildung und ϕ, ψ und ξ Spinvektoren in β.

Lemma 6.1.2 *Es gilt:* $\langle\phi, \phi\rangle = 0,\ \forall\phi \in \beta$.

Beweis: Laut Punkt 2 der Definition gilt: $\langle\phi, \phi\rangle = -\langle\phi, \phi\rangle,\ \forall\phi \in \beta$ und damit $\langle\phi, \phi\rangle = 0$. □

Lemma 6.1.3 $\langle ., . \rangle$ *ist bilinear.*

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass $\langle\phi, a\psi + b\xi\rangle = a\langle\phi, \psi\rangle + b\langle\phi, \xi\rangle \forall\phi, \psi, \xi \in \beta a, b \in \mathbb{C}$.
Es gilt aber:

$$\begin{aligned}\langle\phi, a\psi + b\xi\rangle &= -\langle a\psi + b\xi, \phi\rangle = -a\langle\psi, \phi\rangle - b\langle\xi, \phi\rangle = \\ &= a\langle\phi, \psi\rangle + b\langle\phi, \xi\rangle\end{aligned}$$

□

Lemma 6.1.4 *Seien $\phi, \psi \in \beta$ sodass $\langle\phi, \psi\rangle \neq 0$. Dann ist $\{\phi, \psi\}$ eine Basis von β. Insbesondere gilt also immer $dim(\beta) = 2$.*

Beweis:

1. Angenommen ϕ, ψ wären linear abhängig, also $\phi = \lambda\psi$. Laut 6.1.2 wäre dann $\langle\phi, \psi\rangle = \langle\lambda\psi, \psi\rangle = \lambda\langle\psi, \psi\rangle = 0$. Widerspruch.

2. Sei $\xi \in \beta$ beliebig. Punkt 4 der Definition gibt dann: $\langle\phi, \psi\rangle\xi = -\langle\xi, \phi\rangle\psi - \langle\psi, \xi\rangle\phi$. Da $\langle\phi, \psi\rangle \neq 0$ haben wir ξ als Linearkombination von ϕ und ψ dargestellt.

□

Definition 6.1.5 *Sei β ein Spinraum. Eine Basis $\{s^1, s^0\}$ heißt Spinframe wenn gilt: $\langle s^1, s^0\rangle = 1 = -\langle s^0, s^1\rangle$*

Lemma 6.1.6 *Zu jedem Spinraum β gibt es auch einen Spinframe $\{s^1, s^0\}$.*

Beweis: Seien ϕ, ψ so gewählt, dass $\langle \phi, \psi\rangle \neq 0$. Solche Spinvektoren existieren laut Definition immer. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\langle \phi, \psi\rangle \ > 0$ und definieren $s^1 = \langle \phi, \psi\rangle^{\frac{1}{2}}\phi$ und $s^0 = \langle \phi, \psi\rangle^{\frac{1}{2}}\psi$. Wegen der Bilinearität von $\langle ., .\rangle$ gilt dann $\langle s^1, s^0\rangle = \langle \phi, \psi\rangle^{-1}\langle \phi, \psi\rangle = 1$ $\square$

Lemma 6.1.7 *Es sei $\{s^1, s^0\}$ ein Spinframe und $\phi = \sum_{i=1}^{2} \phi_i s^i$, so gilt $\phi_1 = \langle \phi, s^0\rangle$ und $\phi_0 = -\langle \phi, s^1\rangle$.*

Beweis: $\langle \phi, s^0\rangle = \phi_1\langle s^1, s^0\rangle + \phi_0\langle s^0, s^0\rangle = \phi_1$ wegen der Bilinearität von $\langle ., .\rangle$. Analog für ϕ_0. $\square$

Lemma 6.1.8 *Es sei $\{s^1, s^0\}$ ein Spinframe und $\phi = \sum_{i=1}^{2} \phi_i s^i$ bzw. $\psi = \sum_{i=1}^{2} \psi_i s^i$. Dann gilt:*

$$\langle \phi, \psi\rangle = det \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{pmatrix} = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1$$

Beweis: $\langle \phi, \psi\rangle = \langle \phi_1 s^1 + \phi_0 s^0, \psi_1 s^1 + \psi_0 s^0\rangle = \phi_1\psi_1\langle s^1, s^1\rangle + \phi_1\psi_0\langle s^1, s^0\rangle + \phi_0\psi_1\langle s^0, s^1\rangle + \phi_0\psi_0\langle s^0, s^0\rangle = \phi_1\psi_0 - \phi_0\psi_1$ $\square$

Lemma 6.1.9 *Die Vektoren $\phi, \psi \in \beta$ sind genau dann linear unabhängig wenn $\langle \phi, \psi\rangle \neq 0$.*

Beweis: Aus $\langle \phi, \psi\rangle \neq 0$ folgt die lineare Unabhängigkeit von ϕ und ψ laut 6.1.4. Sei umgekehrt $\langle \phi, \psi\rangle = 0$ so müssen wir die lineare Abhängigkeit zeigen. Wenn $\phi = 0$ oder $\psi = 0$ so sind die Vektoren trivialerweise linear abhängig. Sei also $\phi \neq 0$ und $\psi \neq 0$ und seien $a, b \in \beta$ weiters so gewählt, dass $\langle a, b\rangle \neq 0$. Wir legen dann fest: $\xi_1 = a - \psi$ und $\xi_2 = b - \phi$. Aus Punkt 4 von Definition 6.1.1 folgt dann

$$\langle \phi, \psi\rangle\xi_1 + \langle \xi_1, \phi\rangle\psi + \langle \psi, \xi_1\rangle\phi = 0$$

und da laut Voraussetzung $\langle \phi, \psi\rangle = 0$ gilt weiter

$$\langle \xi_1, \phi\rangle\psi + \langle \psi, \xi_1\rangle\phi = 0$$

Analog erhält man, wenn man ξ_2 statt ξ_1 verwendet:

$$\langle \xi_2, \phi \rangle \psi + \langle \psi, \xi_2 \rangle \phi = 0$$

Das heißt wir haben zwei Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von ϕ und ψ gefunden. Für den Beweis der linearen Abhängigkeit von ϕ und ψ müssen wir noch zeigen, dass zumindest eine davon nicht trivial ist. D.h. wir wollen beweisen, dass zumindest ein auftretender Koeffizient ungleich Null ist.
Angenommen also, es würde gelten, dass

$$\langle \xi_1, \phi \rangle = \langle \psi, \xi_1 \rangle = \langle \xi_2, \phi \rangle = \langle \psi, \xi_2 \rangle = 0$$

Durch Einsetzen und wegen $\langle \phi, \psi \rangle = 0$ erhält man

$$0 = \langle a - \psi, \phi \rangle = \langle a, \phi \rangle \text{ und } 0 = \langle \psi, b - \phi \rangle = \langle \psi, b \rangle$$

und damit

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle a, b \rangle - \langle \psi, b \rangle - \langle a, \phi \rangle + \langle \psi, \phi \rangle = \langle a, b \rangle$$

Wieder aus Punkt 4 der Definition erhält man aber

$$\langle \psi, \xi_1 \rangle \xi_2 + \langle \xi_2, \psi \rangle \xi_1 + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \psi = 0$$

und da $\psi \neq 0$ gilt weiter $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0$ was im Widerspruch zur Annahme $\langle a, b \rangle \neq 0$ steht. $\square$

Definition 6.1.10 *Wir definieren $sl(2)$ als die Menge aller linearen Abbildungen von β in sich unter denen $\langle ., . \rangle$ invariant ist. Also:*

$$A \in sl(2) \Leftrightarrow \langle A(\phi), A(\psi) \rangle = \langle \phi, \psi \rangle \forall \phi, \psi \in \beta$$

Lemma 6.1.11 *Die Menge $sl(2)$ bildet eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen.*

Beweis: Seien $A_1, A_2 \in sl(2)$ so gilt:

$$\langle (A_1 \circ A_2)(\phi), (A_1 \circ A_2)(\psi) \rangle = \langle A_1(A_2(\phi)), A_1(A_2(\psi)) \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$$

laut Voraussetzung. Weiters liegt die Identitätsabbildung trivialerweise in $sl(2)$.
Wir zeigen, dass jedes $A \in sl(2)$ bijektiv ist:

Angenommen es gebe ein $\phi \neq 0$ mit $A(\phi) = 0$. Wir wählen dann ein $\psi \in \beta$, sodass $\{\phi, \psi\}$ linear unabhängig ist. Das ist immer möglich, da $dim\beta = 2$. Es gilt dann: $\langle\phi, \psi\rangle = \langle A(\phi), A(\psi)\rangle = \langle 0, \psi\rangle = 0$. Laut Lemma 6.1.9 wären dann $\{\phi, \psi\}$ linear abhängig. Widerspruch. D.h. A ist injektiv und da β endlichdimensional ist, folgt, dass A bijektiv ist.
Sei weiters $A \in sl(2)$ und $\phi, \psi \in \beta$ beliebig. Dann gibt es ϕ', ψ' mit $A(\phi') = \phi$ und $A(\psi') = \psi$. Es gilt dann:

$$\langle\phi, \psi\rangle = \langle A(\phi'), A(\psi')\rangle = \langle\phi', \psi'\rangle = \langle A^{-1}(\phi), A^{-1}(\psi)\rangle$$

Da ϕ und ψ beliebig waren folgt damit aus $A \in sl(2)$ auch $A^{-1} \in sl(2)$. □

Trivialerweise bilden die Elemente der $sl(2)$ Spinframes auf Spinframes ab. Der Bezug zur $SL(2, \mathbb{C})$ wird durch folgendes Lemma hergestellt:

Lemma 6.1.12 *Eine Abbildung $T : \beta \to \beta$ liegt genau dann in $sl(2)$ wenn die Matrix von T bezüglich jedes beliebigen Spinframes in $SL(2, \mathbb{C})$ liegt.*

Beweis: Sei $A : \beta \to \beta$ eine lineare Transformation und $B = \{s^1, s^0\}$ ein Spinframe. Seien t_{ab} die Elemente der Matrix der Abbildung A bezüglich B. Für zwei beliebige Vektoren $\phi, \psi \in \beta$ seien ϕ_i und ψ_j die Koordinaten bezüglich B. Es gilt dann:

$$\langle\phi, \psi\rangle = det \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{pmatrix}$$

sowie:

$$\begin{aligned} \langle A(\phi), A(\psi)\rangle &= det \begin{pmatrix} t_{11}\phi_1 + t_{10}\phi_0 & t_{11}\psi_1 + t_{10}\psi_0 \\ t_{01}\phi_1 + t_{00}\phi_0 & t_{01}\psi_1 + t_{00}\psi_0 \end{pmatrix} = \\ &= det \begin{pmatrix} t_{11} & t_{10} \\ t_{01} & t_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{pmatrix} = \\ &= det \begin{pmatrix} t_{11} & t_{10} \\ t_{01} & t_{00} \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also kann man die Ausdrücke unter der Voraussetzung $\langle A(\phi), A(\psi)\rangle = \langle\phi, \psi\rangle$ gleichsetzen und erhält nach Kürzen, dass $det(A) = 1$. Sei umgekehrt $det(T) = 1$ so fällt in der zweiten Gleichung der Ausdruck

$$det \begin{pmatrix} t_{11} & t_{10} \\ t_{01} & t_{00} \end{pmatrix}$$

weg und es folgt, dass

$$\langle A(\phi), A(\psi)\rangle = det\begin{pmatrix} \phi_1 & \psi_1 \\ \phi_0 & \psi_0 \end{pmatrix} = \langle\phi, \psi\rangle$$

□

Bemerkung:
Sei β ein Spinraum und $\{s^1, s^0\}$. In der Folge bezeichnet β^* den Dualraum von β, das heißt den Raum aller linearen Funktionen von β nach $\mathbb{R}$ und $\{s_1, s_0\}$ bezeichnet die zu $\{s^1, s^0\}$ duale Basis.
Es gilt dann $s_a(s^b) = \delta_a^b$ laut der Definition für eine Dualbasis.
Die Elemente von β^* heißen Spincovektoren. Ist $\phi \in \beta$, so definieren wir $\phi^* \in \beta^*$ durch.

$$\phi^*(\psi) = \langle\phi, \psi\rangle$$

Lemma 6.1.13 *Für jede Funktion f^* im Dualraum von β gibt es ein $\phi \in \beta$ sodass $f(\psi) = \phi^*(\psi) = \langle\phi, \psi\rangle$.*

Beweis: Sei $f \in \beta^*$. Man wähle einen Spinframe $\{s^1, s^0\}$ und definiere $\phi := f(s^0)s^1 - f(s^1)s^0 \in \beta$. Dann ist
$\phi^*(\psi) = \langle\phi, \psi\rangle = \langle f(s^0)s^1 - f(s^1)s^0, \psi\rangle = f(s^0)\langle s^1, \psi\rangle - f(s^1)\langle s^0, \psi\rangle + f(s^1)\langle\psi, s^0\rangle = f(s^1)\psi_1 + f(s^0)\psi_0$ (laut 6.1.7)
Da aber auch:
$f(\psi) = f(\psi_1 s^1 + \psi_0 s^0) = \psi_1 f(s^1) + \psi_0 f(s^0) = \phi^*(\psi)$
folgt: $f = \psi^*$ □

Definition 6.1.14 *Sei β ein Spinraum. Mit $\bar{\beta}$ bezeichnen wir den konjugierten Vektorraum von β (siehe Definition 1.1.2). Die Elemente von $\bar{\beta}$ nennen wir konjugierte Spinvektoren.*

Lemma 6.1.15 *Es sei $\{s^1, s^0\}$ ein Spinframe in β und $\bar{s}^1$ und $\bar{s}^0$ die dazugehörigen Vektoren in $\bar{\beta}$. Weiters sei $\phi = \phi_1 s^1 + \phi s^0$ beliebig in β. Es gilt dann: $\bar{\phi} = \bar{\phi}_1\bar{s}^1 + \bar{\phi}_0\bar{s}^0$. Insbesondere ist $\{\bar{s}^1, \bar{s}^0\}$ also Basis von $\bar{\beta}$.*

Beweis: $\bar{\phi} = \overline{\phi_1 s^1 + \phi_0 s^0} = \overline{\phi_1 s^1} + \overline{\phi_0 s^0} = \bar{\phi}_1\bar{s}^1 + \bar{\phi}_0\bar{s}^0$ □

Schlussendlich defineren wir noch:

Definition 6.1.16 *$\bar{\beta}^*$ bezeichnet in gewohnter Weise den Dualraum von $\bar{\beta}$. Die Elemente davon heißen konjungierte Spincovektoren. Sei $\{\bar{s}^1, \bar{s}^0\}$ eine Basis von $\bar{\beta}$ so schreiben wir für die dazu duale Basis $\{\bar{s}_1, \bar{s}_0\}$.*

Offensichtlich gilt, dass $\bar{\beta}^*$ ein konjungierter Raum von β^* ist.
Sei in der Folge $B = \{s^1, s^0\}$ ein Spinframe, so wird eine Darstellung T_B der $sl(2)$ in den Raum β induziert durch die Selbstdarstellung, also durch

$$T_B(g)(\phi) = g \cdot \phi$$

Genauso definieren wir die Darstellungen $\bar{T}_B, T_B^*$ und $\bar{T}_B^*$ der $sl(2)$ (und damit auch der $SL(2, \mathbb{C})$) in die Räume $\bar{\beta}, \beta^*$ und $\bar{\beta}^*$ durch:

1. $T^*(g)(x^*) = (g \cdot x)^*$
2. $\bar{T}(A)(\bar{x}) = \overline{g \cdot x}$
3. $\bar{T}^*(A)(\bar{x}^*) = \overline{g \cdot x}^*$

Alle drei Punkte definieren eine Darstellung der Gruppe $sl(2)$ und damit, wenn man einen Spinframe festhält auch eine Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$. **Beweis:**

1. $T(e) = 1$:
   (a) $T^*(e)(x^*) = (e \cdot x)^* = x^*$
   (b) $\bar{T}(e)(\bar{x}) = \overline{e \cdot x} = \bar{x}$
   (c) $\bar{T}^*(e)(\bar{x}^*) = \overline{(e \cdot x)}^* = \bar{x}^*$
2. $T(g_1)T(g_2) = T(g_1 g_2)$:

$$\begin{aligned} T^*(g_1 g_2)(x^*) &= (g_1 \cdot g_2 \cdot x)^* = (g_1 \cdot (g_2 \cdot x))^* = \\ &= T^*(g_1)((g_2 \cdot x)^*) = T^*(g_1)(T^*(g_2)(x)) \end{aligned}$$

   und analog für die anderen beiden Darstellungen.

□

Definition 6.1.17 *Sei β ein Spinraum und $\bar{\beta}, \beta^*, \bar{\beta}^*$ entsprechende Vektorräume sowie r, s, m, n feste natürliche Zahlen. Wir bezeichnen das Tensorprodukt*

$$\beta^{r,s}_{m,n} = (\otimes^r \beta^*) \otimes (\otimes^s \bar{\beta}^*) \otimes (\otimes^m \beta) \otimes (\otimes^n \bar{\beta})$$

als Spinorenraum mit Wertigkeit $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$.

Ein Element von $\beta^{r,s}_{m,n}$ heißt Spinor mit Wertigkeit $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$ oder auch "Spinor mit m nichtgepunkteten unteren Indizes, n gepunkteten unteren Indizes, r ungepunkteten oberen Indizes und s gepunkteten oberen Indizes".

Definition 6.1.18 *Sei B ein Spinframe so definieren wir eine Darstellung D_B der $SL(2, \mathbb{C})$ in einen Spinorenraum von fester Wertigkeit als Tensorprodukt der Darstellungen $T_B, \bar{T}_B, T^*_B, \bar{T}^*_B$. Diese erfüllt also:*

$$D_B(g)(x) = (\otimes^r T^*_B(g) w^*_i) \otimes (\otimes^s \bar{T}^*_B(g) \bar{x}^*_j) \otimes (\otimes^m T_B(g) y_k) \otimes (\otimes^n \bar{T}_B(g) \bar{z})$$

für

$$x = w^*_1 \otimes ... \otimes w^*_r \otimes \bar{x}^*_1 \otimes ... \otimes \bar{x}^*_j \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_m \otimes \bar{z}_1 \otimes ... \otimes \bar{z}_n$$

Wir nennen D_B die Spinorendarstellung mit Wertigkeit $\begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$.

Wir wollen noch die Matrizen der Darstellung D_B bestimmen. Offensichtlich gilt für die Matrix $t(g)$ des Darstellungsoperators $T(g)$ bezüglich der Basis B, dass $t(g) = g$. Weiters gilt laut Kapitel 1.1 für die Matrizen $t^*(g)$, $\bar{t}(g)$ und $\bar{t}^*(g)$ der Darstellungen $T^*(g)$, $\bar{T}(g)$ und $\bar{T}^*(g)$:

$$t^*(g) = (g^{-1})^T,\ \bar{t}(g) = \bar{g} \text{ und } \bar{t}^*(g) = (\bar{g}^{-1})^T$$

Wie man leicht nachrechnen kann, gilt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{10} \\ g_{01} & g_{00} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{10} \\ g_{01} & g_{00} \end{pmatrix}^{-1T} = \begin{pmatrix} g_{00} & -g_{01} \\ -g_{10} & g_{11} \end{pmatrix}$$

Und aus Lemma 3.2.4 folgt dann:

Korollar 6.1.19 *Die Einträge $d_{v_1 ... v_{r+s+m+n}\, j_1 \cdots j_{r+s+m+n}}$ der Matrix $d(g)$ des Darstellungsoperators $D_B(g)$ bezüglich der Basis B sind gegeben durch*

$$d_{v_1 ... v_{r+s+m+n}\, j_1 \cdots j_{r+s+m+n}} = g^*_{v_1 j_1} \cdots g^*_{v_r j_r} \cdots \bar{g}_{v_{r+s+m+1} j_{r+s+m+1}} \cdots \bar{g}_{v_{r+s+m+n} j_{r+s+m+n}}$$

Eine solche Darstellung D_B ist im allgemeinen nicht irreduzibel. Da aber jede Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ vollständig reduzibel ist, wollen wir in der Folge die irreduziblen Unterräume der Spinorenräume finden um danach zu zeigen, dass jede irreduzible Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ zu einer solchen Darstellung äquivalent ist:

Definition 6.1.20 *Wir bezeichnen*

$$sym^{r,s}_{m,n} = Y^r(\beta^*) \otimes Y^s(\bar{\beta})^* \otimes Y^m(\beta) \otimes Y^n(\bar{\beta})$$

wobei $Y^p(E)$ die symmetrischen Tensoren von β bezeichnen.
Ein Spinor in $sym^{r,s}_{m,n}$ heißt symmetrisch. Ein Spinor heißt weiters symmetrisch in seinen unpunktierten oberen Indizes, falls er in der Menge

$$Y^r(\beta^*) \otimes (\otimes^s \bar{\beta}^*) \otimes (\otimes^m \beta) \otimes (\otimes^n \bar{\beta})$$

liegt und analog für seine anderen drei Teile.

Offensichtlich ist ein Spinor genau dann symmetrisch, wenn er in allen vier Teilen symmetrisch ist.
Bemerkung:
Offensichtlich bildet $sym^{r,s}_{m,n}$ einen Unterraum von $\beta^{r,s}_{m,n}$, da $Y^p(E)$ ein Unterraum von E ist. Da $dim(\beta) = 2$ ist folgt, dass

$$\begin{aligned} dim(sym^{r,s}_{m,n}) &= \begin{pmatrix} 2+r-1 \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+s-1 \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+m-1 \\ m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+n-1 \\ n \end{pmatrix} = \\ &= (r+1)(s+1)(m+1)(n+1) \end{aligned}$$

Im weiteren wollen wir uns der Einfachheit halber auf die Spinorenräume der Gestalt $\beta^{0,0}_{m,n}$ beschränken, was für das gewünschte Ergebnis ausreichend ist wir schreiben $\beta^{0,0}_{m,n} = \beta_{m,n}$ und $sym^{0,0}_{m,n} = sym_{m,n}$.
Es gilt nun:

Lemma 6.1.21 *Der Unterraum $sym_{m,n}$ ist invariant unter allen Abbildungen $D_B(g)$.*

Beweis: Sei $v \in Y^m(\beta) \otimes (\otimes^n(\bar{\beta}))$ symmetrisch in seinen unpunktierten, unteren Indizes, also schreibbar als:

$$v = \sum_{i=1}^{r}(\frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in S_p} \sigma(y_1 \otimes ... \otimes y_m) \otimes z))$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} D_B(g)(v) &= \sum_{i=1}^{r} T(g)(\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_p}\sigma(y_1\otimes ...\otimes y_m)\otimes \bar{T}(z)) = \\ &= \sum_{i=1}^{r}[\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_p} T_B(g)(y_{\sigma(1)})\otimes ...\otimes T_B(g)(y_{\sigma(m)})\otimes \bar{T}(z)] \end{aligned}$$

und, wenn man $T(g)(y_i) = y_i'$ setzt:

$$D_B(g)(v) = \sum_{i=1}^{r}(\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_p} y'_{\sigma(1)}\otimes ...\otimes y'_{\sigma(m)}\otimes \bar{T}(z))$$

$D_B(g)(v)$ ist also wieder symmetrisch in seinen unpunktierten, unteren Indizes. Analoges zeigt man für die punktierten unteren Indizes und schließt dass aus $v \in sym_{m,n}$ folgt, dass auch $T(g)(v) \in sym_{m,n}$. $\square$

SATZ 6.1.22 *Die Einschränkung der Darstellung $D_B(g)$ nach $\beta_{m,n}$ auf den Unterraum $sym_{m,n}$ ist irreduzibel und außerdem äquivalent zur Darstellung $\dot{T}_\alpha$ in den Raum der Polynome vom Grad $\leq m$ in x und $\leq n$ in $\bar{x}$.*

Beweis: Seien in der Folge m und n fest. Der Einfachheit wegen legen wir die folgende Notation fest:

$$\otimes(x) = \otimes(\underbrace{x, ..., x}_{m}, \underbrace{\bar{x}, ..., \bar{x}}_{n})$$

Offensichtlich liegt $\otimes(x)$ immer in $sym_{m,n}$. Außerdem bezeichnen dir die Einschränkung von $D_B(g)$ auf $sym_{m,n}$ in diesem Beweis mit $D'_B(g)$.
Seien $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \in Z_+$ und $d = \begin{pmatrix} {\lambda_2}^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in D$ beliebig, so gelten folgende Teilaussagen:

1. $\otimes(s_0)$ ist ein Vektor mit höchstem Gewicht der Darstellung D'_B.

$$T(z)(s_0) = T(z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s_0$$

$$\bar{T}(z)(\bar{s}_0) = \overline{T(z)(s_0)} = \bar{s}_0$$

sowie analog

$$T(d)(s_0) = \lambda_2 s_0$$

$$\bar{T}(d)(\bar{s}_0) = \bar{\lambda}_2 \bar{s}_0$$

Damit erhalten wir

$$D'_B(z)(\otimes(s_0)) = \otimes(T(z)(s_0)) = \otimes(s_0)$$

$$\begin{aligned} D'_B(d)(\otimes(s_0)) &= \otimes(T(d)(s_0)) = \otimes(\lambda_2 s_0, ..., \lambda_2 s_0, \bar{\lambda}_2 \bar{s}_0, ..., \bar{\lambda}_2 \bar{s}_0) = \\ &= \lambda_2^m \bar{\lambda}_2^n \otimes (s_0) \end{aligned}$$

2. Das zum Vektor mit höchstem Gewicht $\otimes(s_0)$ gehörige Gewicht $\alpha(d)$ ist gleich dem induktiven Charakter von $\dot{T}_\alpha$.

   Der induktive Charakter $\dot{\alpha}(d)$ ist gegeben durch

   $$\dot{\alpha}(d) = \lambda_2^{-p_1} \bar{\lambda}_2^{-q_1} \lambda_2^{p_2} \bar{\lambda}_2^{q_2} = \lambda_2^{p_2 - p_1} \bar{\lambda}_2^{q_2 - q_1} = \lambda_2^m \bar{\lambda}_2^n$$

   was genau dem höchsten Gewicht aus der ersten Aussage entspricht.

3. Die Mengen $E = \{e_i = \otimes(s_0 + is_1) : 0 \leqslant i \leqslant m\}$ sowie $\hat{E} = \{\hat{e}_i = \otimes(s_1 + is_0) : 0 \leqslant i \leqslant m\}$ sind beide Basen von $sym_{m,0}$

   Mit der obigen Notation gilt:

   $$\begin{aligned} \otimes(x_1 + x_2) &= \sum_{i_1,...,i_m}^{2} \otimes(x_{i_1}, ..., x_{i_m}) = \\ &= \pi_s(x_1, ..., x_1) + 2 \cdot \pi_s(x_1, ..., x_1, x_2) + ... + \pi_s(x_2, ..., x_2) \end{aligned}$$

   und mit der Festlegung

   $$\pi_s(x_1, ..., x_1, \underbrace{x_2, ..., x_2}_{i}) = \pi_{x_1, x_2}(i)$$

können wir schreiben

$$\otimes(x_1 + x_2) = \sum_{i=0}^{m} \pi_{x_1,x_2}(i)$$

Weiters halten wir fest, dass folgendes gilt:

$$\pi_{x,jy}(i) = \pi_s(x, ..., x, \underbrace{jy, ..., jy}_{i}) = j^i \pi_s(x, ..., x, y, ..., y) = j^i \pi_{x,y}(i)$$

Bilden x_1, x_2 außerdem eine Basis von β, so folgt laut Korollar 2.4.16 und Lemma 2.4.14, dass die Menge $\{\pi_{x_1,x_2}(i),\ i = 0, ..., m\}$ eine Basis von $sym_{m,0}$ bildet.

Aus Dimensionsgründen reicht es nun zu zeigen, dass die Elemente der Menge linear unabhängig sind. Sei also

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \otimes (s_0 + is_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \sum_{j=0}^{m} \pi_{s_0,is_1}(j) = \sum_{j=0}^{m} (\sum_{i=0}^{m} \lambda_i i^j) \pi_{s_0,s_1}(j) = 0$$

Da die s_0, s_1 und damit auch die $\pi_{s_0,s_1}(j)$ linear unabhängig sind, müsste gelten

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i i^j = 0,\ j = 0, ..., m$$

und es bleibt zu zeigen, dass daraus folgt, dass $\lambda_i = 0,\ \forall i = 0, ..., m$: Das Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1^0 & 2^0 & ... & m^0 \\ 0 & 1^1 & 2^1 & ... & m^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1^m & 2^m & ... & m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0$$

und man sieht, dass die Matrix eine Vandermonde-Matrix ist, die im allgemeinen folgende Form hat

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1^1 & x_2^1 & ... & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & ... & x_n^n \end{pmatrix}$$

und deren Determinante gegeben ist durch

$$det(V) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

In unserem Fall gilt also $x_i = i$ und da diese x_i alle verschieden sind, ist die Determinante ungleich Null. Daraus folgt, dass die Matrix invertierbar ist, und obiges Gleichungssystem damit nur die trivale Lösung besitzt.

Vollkommen analog beweist man die Aussage für die die Menge $\hat{E}$.

4. Die Menge $D'_B(g)(\otimes(s_0))$ erzeugt $sym_{m,0}$

   Sei $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $i \in \{0, ..., m\}$ so gilt

$$T(g)(s_0 + is_1) = g \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+1 \\ 1 \end{pmatrix} = s_0 + (i+1)s_1$$

   und damit auch

$$D'_B(g)(\otimes(s_0 + is_1)) = \otimes(s_0 + (i+1)s_1)$$

   und somit gilt für E aus der vorherigen Aussage, dass $E \subseteq D'_B(g)(s_0)$ und da E bereits eine Basis von $sym_{m,0}$ ist folgt die Aussage.

5. $sym_{m,0}$ hat (bis auf multiplikative Vielfache) nur einen einzigen Vektor mit höchstem Gewicht

   Sei $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_+$ so gilt

$$D'_B(z)(\hat{e}_i) = \hat{e}_{i+1},\ \forall \hat{e}_i \in \hat{E}$$

   Sei weiters $x_0 = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{e}_i$ Vektor mit höchstem Gewicht von $sym_{m,0}$ so würde gelten $T(z)(x_0) = x_0$, also

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{e}_{i+1} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \hat{e}_i$$

   was äquivalent ist zu

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i(\hat{e}_{i+1} - \hat{e}_i) = 0$$

durch Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} \lambda_i(\hat{e}_{i+1} - \hat{e}_i) &= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i(\otimes(s_1 + (i+1)s_0)) - \otimes(s_1 + is_0) = \\
&= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \sum_{j=0}^{m} (i+1)^j \pi_{s_1,s_0}(j) - i^j \pi_{s_1,s_0}(j) = \\
&= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \sum_{j=0}^{m} ((i+1)^j - i^j) \pi_{s_1,s_0}(j) = \\
&= \sum_{j=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{m} \lambda_i((i+1)^j - i^j) \right] \pi_{s_1,s_0}(j) = 0
\end{aligned}$$

und da die $\pi_{s_1,s_0}(j)$ wieder linear unabhängig sind folgt

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i((i+1)^j - i^j) = 0,\ j = 0, ..., m$$

Für $j = 0$ folgt, dass die λ_i beliebig sind, d.h. das Gleichungssystem ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1^1 - 0^1 & 2^1 - 1^1 & 3^1 - 2^1 & ... & m^1 - (m-1)^1 \\ 1^2 - 0^2 & 2^2 - 1^2 & 3^2 - 2^2 & ... & m^2 - (m-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^m - 0^m & 2^m - 1^m & 3^m - 2^m & ... & m^m - (m-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0$$

Durch summieren jeder Zeile mit der darüberliegenden erhält man eine Matrix, deren $(m \times m)$-Untermatrizen wieder alle Vandermonde-Matrizen sind. Die Spaltenvektoren sind also linear unabhängig und der Lösungsraum des Gleichungssystems ist ein-dimensional.

6. Die Darstellung D'_B nach $sym_{m,0}$ ist äquivalent zur Darstellung $\dot{T}_\alpha$ nach $P_{m,0}$ und jene nach $sym_{0,n}$ ist äquivalent zu jener nach $P_{0,n}$

   Laut Lemma 5.3.4 und Aussage 4 und 5 ist die Darstellung D'_B nach $sym_{m,0}$ irreduzibel. Laut und Satz 5.4.14 und Aussage 2 folgt der erste Teil der Aussage. Der zweite folgt analog.

7. Sei $P_{m,n}$ der Raum aller Polynome vom Grad $\leq m$ in x und vom Grad $\leq n$ in $\bar{x}$ und sei weiters $\phi : P_{m,0} \times P_{0,n} \to P_{m,n}$ die Abbildung, die für

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i \in P_{m,0} \text{ und } \bar{f}(x) = \sum_{j=0}^{n} q_j \bar{x}^j \in P_{0,n}$$

definiert ist durch

$$\phi(f, \bar{f})(x, \bar{x}) = \sum_{i,j=0}^{m,n} p_i q_j x^i \bar{x}^j$$

so ist das Paar $(P_{m,n}, \phi)$ ein Tensorprodukt von $P_{m,0}$ und $P_{0,n}$.

(a) ϕ ist bilinear, da:

$$\phi(k \cdot f, \bar{f})(x, \bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{m,n} k p_i q_j x^i \bar{x}^j = k \sum_{i,j=1}^{m,n} p_i q - j x^i \bar{x}^j = k\phi(f, \bar{f})(x, \bar{x})$$

und analog in der zweiten Variable.

(b) $\otimes^1$: $Im(\phi(P_{m,0}, P_{0,n})) = P_{m,n}$ Wir definieren die Funktionen

$$e_i(x) = x^i \in P_{m,0},\ \bar{e}_j(x) = \bar{x}^j \in P_{0,n},\ e_{i,j}(x, \bar{x}) = x^i \bar{x}^j \in P_{m,n}$$

und halten fest, dass die Mengen $\{e_i :\ 0 \leq i \leq m\}$, $\{\bar{e}_i :\ 0 \leq i \leq n\}$ und $\{e_{i,j} :\ 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$ Basen ihrer jeweiligen Räume sind. Die Aussage folgt sofort, da

$$\phi(e_i, \bar{e}_j) = e_{i,j}$$

(c) $\otimes^2$: Sei $\psi : P_{m,0} \times P_{0,n} \to H$ eine Bilinearform.
Wir bezeichnen mit $g : P_{m,n} \to H$ jene lineare Abbildung, für die gilt

$$g(e_{i,j}) = \psi(e_i, \bar{e}_j)$$

Daraus folgt:

$$\psi(f, \bar{f}) = \sum_{i,j=1}^{m,n} p_i q_j \psi(e_i, \bar{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{m,n} p_i q_j g(e_{i,j}) = g(\sum_{i,j=1}^{m,n} p_i q_j e_{i,j}) = g(\phi(f, \bar{f}))$$

8. Die Darstellung D'_B nach $sym_{m,n}$ ist äquivalent zur Darstellung $\dot{T}_\alpha$ nach $P_{m,0}$

   Folgt aus der Aussage 6 und der Tatsache, dass $sym_{m,n} = sym_{m,0} \otimes sym_{0,n}$ und $P_{m,n} = P_{m,0} \otimes P_{0,n}$.

□

6.2 Spinoralgebra und die klassischen Spinorenoperationen

Definition 6.2.1 *(äußeres Produkt) Seien $\beta^{r_1 s_1}_{m_1 n_1}$ und $\beta^{r_2 s_2}_{m_2 n_2}$ zwei Spinorenräume. Eine bilineare Abbildung*

$$\Phi : \beta^{r_1 s_1}_{m_1 n_1} \times \beta^{r_2 s_2}_{m_2 n_2} \to \beta^{r_1+r_2,\, s_1+s_2}_{m_1+m_2,\, n_1+n_2}$$

heißt äußeres Produkt von $\beta^{r_1 s_1}_{m_1 n_1}$ und $\beta^{r_2 s_2}_{m_2 n_2}$ falls gilt:

$$\Phi((\otimes w_i) \otimes (\otimes x_j) \otimes (\otimes y_k) \otimes (\otimes z_l), (\otimes w'_i) \otimes (\otimes x'_j) \otimes (\otimes y'_k) \otimes (\otimes z'_l)) =$$

$$(\otimes w_i) \otimes (\otimes w'_i) \otimes ... \otimes (\otimes z_l) \otimes (\otimes z'_l)$$

Laut Kapitel 2.2 ist das Paar $(\beta^{r_1+r_2,\, s_1+s_2}_{m_1+m_2,\, n_1+n_2}, \Phi)$ ein Tensorprodukt.

Ebenfalls laut Kapitel 2.2 ist ein äußeres Produkt eindeutig bestimmt und außerdem assoziativ.

Definition 6.2.2 *(Verjüngung) Seien r, s, m, n fest und eine multilineare Abbildung gegeben durch:*

$$\gamma^j_i : \underbrace{\beta^* \times ...\beta^*}_{r} \times \underbrace{\bar{\beta}^* \times ...\bar{\beta}^*}_{s} \times \underbrace{\beta \times ...\beta}_{m} \times \underbrace{\bar{\beta} \times ...\bar{\beta}}_{n} \to \beta^{r-1,\, s}_{m-1,\, n}$$

$$\gamma^j_i(w_1, ..., w_i, x_1, ..., x_j, y_1, ..., y_k, z_1, ..., z_l) =$$

$$= w_i(y_j) w_1 \otimes ...\hat{w}_i \otimes ...w_r \otimes x_1 ...x_j \otimes y_1 ...\hat{y}_j \otimes ...y_m \otimes z_1 \otimes ...z_n$$

dann wird eine lineare Abbildung C^j_i induziert:

$$C_i^j : \beta_{m,n}^{r,s} \to \beta_{m-1,\,n}^{r-1,\,s}$$

für die gilt:

$$C_i^j(w_1 \otimes ... \otimes w_i \otimes x_1 \otimes ... \otimes x_j \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_k \otimes z_1 \otimes ... \otimes z_l) =$$

$$= w_i(y_j) w_1 \otimes ... \hat{w}_i \otimes ... w_r \otimes x_1 ... x_j \otimes y_1 ... \hat{y}_j \otimes ... y_m \otimes z_1 \otimes ... z_n$$

wobei die Schreibweise $\hat{w}_i$ bedeutet, dass w_i weggelassen wird. C_i^j heißt Kontraktions- oder Verjüngungsoperator bezüglich (i, j).

6.3 Weltvektoren

Ein Weltvektor $v \in \mathcal{M}$ ist ein Vektor des Minkowskiraums. Wir wollen einen Zusammenhang zwischen Weltvektoren und Spinoren mit Wertigkeit $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ herstellen. Wir verwenden dabei G, G^{-1} und $R(g)$ wie wir sie in Kapitel 4.1 für die Paulispinabbildung definiert haben.
Seien eine zulässige Orthonormalbasis $\{e_i\}$ in $\mathcal{M}$ sowie ein Spinframe in β gegeben und sei weiters $v \in M$ mit den Koordinaten v_i bezüglich $\{e_i\}$. Wir definieren ein Spinor $V \in \beta_{1,1}^{0,0}$ durch seine vier Komponenten bezüglich $s_i \otimes \bar{s}_j$:

$$\begin{aligned} V_{11} &= v_3 + v_4 \quad , \quad V_{10} = v_1 + iv_2 \\ V_{01} &= v_1 - iv_2 \quad , \quad V_{00} = -v_3 + v_4 \end{aligned}$$

Laut der Bemerkung in Kapitel 4.1 gilt also:

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{10} \\ V_{01} \\ V_{00} \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:
Meist werden die 2×2 Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Pauli-Spinmatrizen bezeichnet und mit ihrer Hilfe kann man die obigen Gleichungen kompakter schreiben als:

$$V_{ij} = \sum_{a=1}^{4} \sigma_a^{ij} v_a$$

Sei nun $\Lambda \in Ł$ eine echte, orthochrone Lorentztransformation und v dadurch abgebildet auf den Vektor $\hat{v} = \Lambda v$.
Wenn nun *spin* die Paulispinabbildung ist, so gibt es ein $g \in SL(2, \mathbb{C})$ mit $Spin(g) = \Lambda$. Nun wollen wir zeigen, dass der durch die Komponenten

$$\hat{V}_{ij} = \sum_{a=1}^{4} \sigma_a^{ij} \hat{v}_a$$

definierte Spinor gleich dem Spinor definiert durch $\tilde{V}_{ij} = T(g)(V)$ ist.
Sei also

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

so sind die Matrixeinträge der Darstellung $D_G(g)$ laut Lemma 3.2.3 gegeben durch $d_{uv\,jk}(g) = g_{uj}\bar{g}_{vk}$. $\tilde{V}$ läßt sich demgemäß folgendermaßen als Matrixprodukt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{11} \\ \tilde{V}_{10} \\ \tilde{V}_{01} \\ \tilde{V}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} & \bar{a}b & b\bar{b} \\ a\bar{c} & a\bar{d} & b\bar{c} & b\bar{d} \\ \bar{a}c & \bar{b}c & \bar{a}d & \bar{b}d \\ c\bar{c} & c\bar{d} & c\bar{d} & d\bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{10} \\ V_{01} \\ V_{11} \end{pmatrix}$$

Die Matrix hier ist aber genau $R(g)$ aus Kapitel 4.1, womit wir den gewünschten Zusammenhang schon hergestellt haben, denn es gilt ja

$$spin(g) = G^{-1}R(g)G = \Lambda$$

und damit:

$$\hat{V} = G\Lambda v = GG^{-1}R(g)Gv = R(g)Gv = R(g)V = \tilde{V}$$

Bemerkung:
Offensichtlich ist diese Darstellung von der Form $T(-g) = T(g)$, wie man an der Matrix leicht sieht.
Komplett analog läßt sich eine Beziehung zwischen Spinoren mit Wertigkeit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und Vektoren in $\mathcal{M}^*$ herstellen.

Aus der Vorgehensweise dieses Kapitels wird auch der Zusammenhang zwischen dem Minkowskiraum und dem Spinorenraum unmittelbar klar:
Die verschiedenartigen Objekte, deretwegen wir in Kapitel 4.2 mit der Konstruktion der Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ begonnen haben, und von denen eben zum Beispiel die Menge aller Weltvektoren bzw. die Menge aller Welttensoren $\otimes_s^r \mathcal{M}$ eine Teilmenge bilden, entsprechen genau den Spinoren. Weiters gibt es eine bijektive Zuordnung zwischen den Beobachtern des Minkowskiraums und den spinframes sowie zwischen den echten, orthochronen Lorentztransformationen und den Darstellungen der $sl(2)$ bzw. wenn man einen Beobachter und einen spinframe festhält, den Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$.

Literatur

[SN] M.A. Naimark, A.I. Stern: Theory of Group Representations, 1982

[GN] G.L. Naber: The Geometry of Minkowski Spacetime, 1992

[GMS] Gel'fand, Minlos, Shapiro: Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications, 1963

[PR] Roger Penrose, Wolfgang Rindler: Spinors and space-time, Volume I: Two-Spinor calculus and relativistic fields, 1984

[WHG] W.H. Greub: Multilinear Algebra, 1967

[BOE] H. Boerner: Darstellungen von Gruppen, 1967

[HEI] Wolfgang Hein: Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen, 1990

[BRO] W.C. Brown: A second course in linear algebra, 1988