Diplomarbeit

Eigenwerte und Spektralfunktion eines Differentialoperators 2. Ordnung, der rational vom Eigenwertparameter abhängt

ausgeführt am

Institut für Analysis, Technische Mathematik
und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

o. Univ. Prof. Dr. Heinz Langer

durch

Matthias Langer
Loeschenkohlgasse 4/15
1150 Wien

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In letzter Zeit wurden neben dem gewöhnlichen Eigenwertproblem auch viele verallgemeinerte Eigenwertprobleme untersucht. So auch solche, in denen der Eigenwertparameter nichtlinear auftritt. Speziell betrachten wir in dieser Arbeit einen Differentialoperator zweiter Ordnung, der rational vom Eigenwertparameter λ abhängt. Diese Operatorschar wurde u. a. von Bogomolova [Ba] und später von Langer, Mennicken, Möller und Adamjan [LMM], [AL], [ALM] studiert. Ähnliche Probleme entstehen zum Beispiel in der Magnetohydrodynamik.

Im ersten Kapitel wird die Äquivalenz des λ-rationalen Problems zu einem λ-linearen Eigenwertproblem mit einem Matrix-Operator in einem größeren Raum gezeigt. Weiters wird das wesentliche Spektrum dieses Operators bestimmt, und es werden einfache Eigenschaften von eingebetteten Eigenwerten untersucht.

Die genauere Untersuchung der Eigenwerte, insbesondere der eingebetteten Eigenwerte, steht im Mittelpunkt des zweiten Kapitels. Es werden unter anderem Schranken für die Anzahl der eingebetteten Eigenwerte hergeleitet. Wesentliche Hilfsmittel hierfür sind einerseits der Sturmsche Vergleichssatz und andererseits nukleare Operatoren und Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Schließlich wird im dritten Kapitel der Titchmarsh-Weylsche Koeffizient analog zu klassischen Sturm-Liouville-Problemen eingeführt. Die Dichte des dazugehörigen Spektralmaßes σ wird mit Hilfe von Reihenentwicklungen von Lösungen der Differentialgleichung berechnet. Außerdem wird eine Fourier-Transformation in den L^2_σ bestimmt.

An dieser Stelle möchte ich mich noch bei Herrn Prof. Dr. Heinz Langer für die sorgfältige Betreuung der Diplomarbeit bedanken.

Wien, September 1996

Kapitel 1

Die Operatorschar und ihre Linearisierung

1.1 Definition der Operatorschar

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + \left(\lambda + \frac{q}{u-\lambda}\right) y = 0 \tag{1.1}$$

auf dem Intervall $[0,1]$ mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0\,,\ y(1) = 0. \tag{1.2}$$

Hierbei seien q und u reelle, stetige Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit

$$\begin{aligned} &q(x) > 0\,,\ x \in [0,1], \\ &u \in C^1[0,1]\,,\ u'(x) > 0\,,\ x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Die komplexe Zahl λ ist der Eigenwertparameter, der in der Gleichung (1.1) nicht linear, sondern rational vorkommt. Bezüglich dieses Parameters wollen wir Spektraleigenschaften untersuchen. Für $\lambda \in u([0,1])$ besitzt die Differentialgleichung (1.1) eine Singularität bei $u^{-1}(\lambda)$ (eine sogenannte „floating singularity"). Der Wertebereich von u stellt also eine gewisse Ausnahmemenge dar. Wir definieren

$$\alpha := \min_{x\in[0,1]} u(x) = u(0)\,,\ \beta := \min_{x\in[0,1]} u(x) = u(1), \tag{1.3}$$

womit also $u([0,1]) = [\alpha,\beta]$ gilt.

Um das Problem (1.1), (1.2) funktionalanalytisch zu behandeln, definieren wir für jedes $\lambda \notin [\alpha,\beta]$ den folgenden Operator auf dem Raum $L^2(0,1)$:

$$L(\lambda)\, y := y'' + \left(\lambda + \frac{q}{u-\lambda}\right) y \tag{1.4}$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D} := \{y \in L^2(0,1) \,|\, y, y' \text{absolut stetig}\,,\ y'' \in L^2\,,\ y(0)=y(1)=0\}. \tag{1.5}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$ ist $L(\lambda)$ ein selbstadjungierter Operator in $L^2(0,1)$.

Definition: Die komplexe Zahl λ_0, $\lambda_0 \notin [\alpha, \beta]$, heißt **Eigenwert** von L, wenn ein $y_0 \in \mathcal{D}$, $y_0 \neq 0$, existiert, sodaß $L(\lambda_0)\, y_0 = 0$ gilt.
Die Menge aller Eigenwert von L bezeichnen wir mit $\sigma_p(L)$.
Weiters sei

$$\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta] \,|\, L(\lambda) \text{ ist nicht beschränkt invertierbar}\}$$

das **Spektrum** von L und

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta] \,|\, L(\lambda) \text{ ist beschränkt invertierbar}\}$$

die **Resolventenmenge** von L.

1.2 Transformation in ein λ-lineares Problem

Das in λ nichtlineare Eigenwertproblem kann in ein λ-lineares Problem transformiert werden. Wenn man

$$y_1 := y\,,\ y_2 := -\frac{\sqrt{q}}{u - \lambda} y$$

setzt, so ist die Gleichung (1.1) äquivalent zu

$$-y_1'' + \sqrt{q}\, y_2 - \lambda\, y_1 = 0. \tag{1.6}$$

Die Definition von y_1, y_2 ergibt umgeschrieben

$$\sqrt{q}\, y_1 + u\, y_2 - \lambda\, y_2 = 0. \tag{1.7}$$

Es sei A der Operator der 2. Ableitung

$$A\, y := -y'' \tag{1.8}$$

mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}$ von (1.5), also mit selbstadjungierten Randbedingungen, und

$$v(x) := \sqrt{q(x)} > 0. \tag{1.9}$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir die Gleichungen (1.6), (1.7) als Matrixgleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} A & v \\ v & u \end{pmatrix} \binom{y_1}{y_2} - \lambda \binom{y_1}{y_2} = 0$$

Wir definieren daher den Operator

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} A & v \\ v & u \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

im Raum $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = L^2(0,1) \oplus L^2(0,1)$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \mathcal{D} \oplus L^2(0,1)$. Hierbei bezeichnen u und v den Operator der Multiplikation mit $u(x)$ bzw. $v(x)$:

$$\begin{aligned} u:\ & y(x) \mapsto u(x)y(x) \\ v:\ & y(x) \mapsto v(x)y(x). \end{aligned}$$

Da u und v beschränkte Operatoren sind, ist $\widetilde{A}$ ein selbstadjungierter Operator.

Ziel der Arbeit ist es, das Spektrum von $\widetilde{A}$ zu untersuchen. Aus der Konstruktion des Operators $\widetilde{A}$ ergibt sich der folgende Satz über das Punktspektrum.

Satz 1.1 *Außerhalb von $[\alpha, \beta]$ stimmen die Eigenwerte von L und $\widetilde{A}$ überein. Diese sind alle einfach.*

Beweis: Aus der obigen Rechnung ergibt sich, daß ein Eigenwert von L auch Eigenwert von $\widetilde{A}$ ist. Umgekehrt, wenn λ Eigenwert von $\widetilde{A}$ ist, gelten die Gleichungen (1.6), (1.7) und für y_1 die Randbedingungen (1.2). Setzt man y_2 von (1.7) in (1.6) ein, so erhält man die Gleichung (1.1), also ist λ ein Eigenwert von L. Die Einfachheit der Eigenwerte ergibt sich daraus, daß eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit diesen Randbedingungen nur einen 1-dimensionalen Lösungsraum haben kann. ■

Für $\lambda \in \rho(\widetilde{A}) \cap \rho(u)$ kann man die Resolvente des Operators $\widetilde{A}$ folgendermaßen berechnen:

$$R_\lambda(\widetilde{A}) = \begin{pmatrix} -L(\lambda)^{-1} & L(\lambda)^{-1}(u-\lambda)^{-1}v \\ v(u-\lambda)^{-1}L(\lambda)^{-1} & (u-\lambda)^{-1} - v(u-\lambda)^{-1}L(\lambda)^{-1}(u-\lambda)^{-1}v \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Daraus folgt:

$$L(\lambda)^{-1} = -PR_\lambda(\widetilde{A})|_{\mathcal{H}_1}$$

wobei P die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_1$ ist. Die Inverse $L(\lambda)^{-1}$ der Operatorschar (1.4) ist also eine „compressed resolvent“ von $\widetilde{A}$ aus (1.10).

Der Operator $\widetilde{A}$ ist Spezialfall einer allgemeineren Klasse von Matrix-Operatoren, die in der Arbeit [AL] betrachtet wurden. Es seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ zwei Hilbert-Räume. Weiters seien A und C (möglicherweise unbeschränkte,) selbstadjungierte Operatoren auf $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$ und B ein beschränkter Operator von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$. Dann kann man den folgenden Operator auf $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ definieren

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C \end{pmatrix}$$

Über die Resolvente erhält man wie oben die Operatorschar

$$L(\lambda) = \lambda - A + B^*(C - \lambda)^{-1}B$$

auf dem Raum $\mathcal{H}_1$.

1.3 Das wesentliche Spektrum des Operators $\widetilde{A}$

Wir wollen jetzt das wesentliche Spektrum des Operators $\widetilde{A}$ bestimmen. Zuvor wiederholen wir die Definition des wesentlichen Spektrums. Siehe hierzu zum Beispiel [GGK], Chapter XI und XVII, aber auch [K], Chapter IV.

Definition: Ein abgeschlossener Operator T heißt **Fredholm-Operator**, wenn sein Wertebereich $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist und

$$\dim \operatorname{Ker}(T) < \infty\,,\ \operatorname{codim} \mathcal{R}(T) < \infty$$

gilt. Das **wesentliche Spektrum** $\sigma_{\text{ess}}(T)$ ist definiert durch

$$\sigma_{\text{ess}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ ist kein Fredholm-Operator}\}.$$

Es gilt $\sigma_{\text{ess}}(T) \subseteq \sigma(T)$. Man kann zeigen, daß die Voraussetzung der Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(T)$ bei Erfülltsein der anderen Bedingungen automatisch erfüllt ist. Die Definition des wesentlichen Spektrums ist uneinheitlich in der Literatur. In [K] z. B. ist das wesentliche Spektrum die Menge aller λ, für die $T - \lambda$ kein Semi-Fredholm-Operator ist. Aber für selbstadjungierte Operatoren stimmen diese Definitionen alle überein. Hier kann man das wesentliche Spektrum noch anders charakterisieren: Die Menge $\sigma(T) \setminus \sigma_{\text{ess}}(T)$ ist die Menge aller isolierten Eigenwerte endlicher Vielfachheit.[1] Für das wesentliche Spektrum gelten wichtige Störungssätze.

Satz 1.2 (Weyl) *Sei T ein abgeschlossener Operator und K ein kompakter Operator. Dann gilt*

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma_{\text{ess}}(T + K)$$

Daraus können wir einen weiteren Störungssatz folgern. Diesen findet man in [RS] und [K].

Satz 1.3 *Seien S, T abgeschlossene Operatoren. Wenn dann für ein $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$ der Operator*

$$(S - \lambda)^{-1} - (T - \lambda)^{-1}$$

kompakt ist, dann gilt

$$\sigma_{\text{ess}}(S) = \sigma_{\text{ess}}(T)$$

[1] siehe z. B. [GGK], Corollary XI.8.5

Beweis: Aus dem Satz von Weyl folgt

$$\sigma_{\text{ess}}((S-\lambda)^{-1}) = \sigma_{\text{ess}}((T-\lambda)^{-1})$$

Wenn wir

$$\sigma_{\text{ess}}(U^{-1}) = (\sigma_{\text{ess}}(U))^{-1} = \{\mu \,|\, \mu^{-1} \in \sigma_{\text{ess}}(U)\}$$

zeigen können, sind wir fertig. Es gilt aber

$$U^{-1} - \mu^{-1} = -\mu^{-1}(U-\mu)U^{-1},$$

woraus dann

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(U^{-1}-\mu^{-1}) &= \dim \operatorname{Ker}(U-\mu) \\ \operatorname{codim} \mathcal{R}(U^{-1}-\mu^{-1}) &= \operatorname{codim} \mathcal{R}(U-\mu) \end{aligned}$$

folgt. ■

Das wesentliche Spektrum von $\widetilde{A}$ wurde in [LMM] direkt bestimmt, in [ALMS] sogar für allgemeinere Matrix-Operatoren. Hier wollen wir $\widetilde{A}$ als Störung des Operators

$$\widetilde{A}_0 := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

betrachten. Das Spektrum von A besteht nur aus isolierten einfachen Eigenwerten, nämlich $\sigma(A) = \{n^2\pi^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Der Operator u hat rein kontinuierliches Spektrum $[\alpha, \beta]$, da die Funktion $u(x)$ stetig ist. Daher ist $\sigma_{\text{ess}}(u) = [\alpha, \beta]$. Daraus folgt aber $\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{A}_0) = [\alpha, \beta]$, weil beide Spektren einfach vereinigt werden.

Wir wollen jetzt zeigen, daß $(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} - (\widetilde{A}_0-\lambda)^{-1}$ kompakt ist für $\lambda \in \rho(\widetilde{A}) \cap \rho(\widetilde{A}_0)$. Es ist

$$\begin{aligned} (\widetilde{A}-\lambda)^{-1} &= \begin{pmatrix} -L(\lambda)^{-1} & L(\lambda)^{-1}(u-\lambda)^{-1}v \\ v(u-\lambda)^{-1}L(\lambda)^{-1} & (u-\lambda)^{-1} - v(u-\lambda)^{-1}L(\lambda)^{-1}(u-\lambda)^{-1}v \end{pmatrix} \\ (\widetilde{A}_0-\lambda)^{-1} &= \begin{pmatrix} (A-\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & (u-\lambda)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus bekannten Sätzen[2] folgt, daß $(A-\lambda)^{-1}$ und $L(\lambda)^{-1}$ kompakt sind. Da kompakte Operatoren ein Ideal bilden im Ring aller beschränkten linearen Operatoren, folgt schon, daß $(\widetilde{A}-\lambda)^{-1} - (\widetilde{A}_0-\lambda)^{-1}$ kompakt ist. Aus dem Satz 1.3 folgt damit aber:

Satz 1.4 *Das wesentliche Spektrum des Operators $\widetilde{A}$ ist gegeben durch*

$$\sigma_{\text{ess}}(\widetilde{A}) = [\alpha, \beta]. \tag{1.12}$$

[2] siehe z. B. [N]

1.4 Eingebettete Eigenwerte

In diesem Abschnitt wollen wir einfache Eigenschaften von Eigenwerten untersuchen, die im wesentlichen Spektrum eingebettet sind. Sei $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$ Eigenwert von $\widetilde{A}$ und $x_0 := u^{-1}(\lambda_0)$. Es gelten dann die Gleichungen

$$-y_1'' + v\,y_2 - \lambda_0\,y_1 = 0 \tag{1.13}$$

$$v\,y_1 + u\,y_2 - \lambda_0\,y_2 = 0 \tag{1.14}$$

Aus Gleichung (1.14) folgt für $x \neq x_0$

$$y_2(x) = -\frac{v(x)}{u(x) - \lambda_0} y_1(x).$$

Da $y_2 \in L^2(0,1)$ ist, d. h.

$$\int_0^1 \frac{(v(x))^2}{|u(x) - \lambda_0|^2} |y_1(x)|^2 dx < \infty,$$

und y_1 absolut stetig ist, folgt $y_1(x_0) = 0$. D. h. y_1 hat zumindest bei $0, x_0$ und 1 Nullstellen. Setzt man y_2 in Gleichung (1.13) ein, so erhält man für y_1 die Gleichung (1.1) für alle $x \neq x_0$ mit den Randbedingungen (1.2). Der Ausdruck $\left(\lambda_0 + \frac{q(x)}{u(x) - \lambda_0}\right) y_1(x)$ ist bei x_0 stetig fortsetzbar, also ist y_1 sogar zweimal stetig differenzierbar.

Hat man umgekehrt eine zweimal stetig differenzierbare Lösung y von (1.1), (1.2), so muß y eine Nullstelle bei x_0 haben. Also kann man wieder wie oben $y_1 := y$, $y_2 := -\frac{v}{u - \lambda_0} y$ setzen, sodaß $y_1 \in \mathcal{D}$, $y_2 \in L^2(0,1)$. D. h. λ_0 ist Eigenwert von $\widetilde{A}$.

Die Eigenwerte von $\widetilde{A}$ in $[\alpha, \beta]$ sind also die Werte λ, für die eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $y \not\equiv 0$ von (1.1), (1.2) existiert. Diese Eigenwerte sind auch alle einfach.

Kapitel 2

Untersuchung der Eigenwerte

2.1 Ein Sturmscher Vergleichssatz

Für die Diskussion der Eigenwerte benötigen wir Aussagen über die Anzahl von Nullstellen von Lösungen von Differentialgleichungen. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist der folgende Vergleichssatz, den wir in einer Form brauchen, wo die Koeffizienten am Intervallende auch unbeschränkt sein dürfen.

Satz 2.1 (Sturmscher Vergleichssatz) *Es seien q_1 und q_2 stetige Funktionen auf dem offenen Intervall (x_1, x_2), und es gelte $q_1(x) > q_2(x)$ für $x \in (x_1, x_2)$. Weiters seien f_1 und f_2 auf $[x_1, x_2]$ stetige Lösungen der Gleichungen:*

$$\begin{aligned} f_1'' + q_1 f_1 &= 0 \\ \textit{bzw.} \quad f_2'' + q_2 f_2 &= 0 \end{aligned}$$

sodaß die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to x_1+ \\ x \to x_2-}} q_1(x) f_1(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{\substack{x \to x_1+ \\ x \to x_2-}} q_2(x) f_2(x)$$

existieren. Dann gilt:

$$f_2(x_1) = f_2(x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (x_1, x_2) : f_1(\xi) = 0.$$

D. h. zwischen den Nullstellen x_1, x_2 von f_2 liegt mindestens eine Nullstelle von f_1.

Beweis: Angenommen, es sei $f_1(x) \neq 0,\ x \in (x_1, x_2)$. O.B.d.A. sei $f_1(x) > 0$ auf (x_1, x_2). Auch können wir annehmen, daß x_1, x_2 zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von f_2 sind, also sei etwa $f_2(x) > 0$ auf (x_1, x_2). Aus der Gleichung

$$f_1 f_2'' - f_2 f_1'' + (q_2 - q_1) f_1 f_2 = 0$$

folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big(q_1(x) - q_2(x)\Big) f_1(x) f_2(x) dx = \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} \Big(f_1(x) f_2''(x) - f_2(x) f_1''(x)\Big) dx = \\
&= f_1(x) f_2'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f_1'(x) f_2'(x) dx - \underbrace{f_2(x) f_1'(x)\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} + \int_{x_1}^{x_2} f_1'(x) f_2'(x) dx = \\
&= f_1(x_2) f_2'(x_2) - f_1(x_1) f_2'(x_1)
\end{aligned}$$

Es ist

$$\int_{x_1}^{x_2} \Big(q_1(x) - q_2(x)\Big) f_1(x) f_2(x) dx > 0.$$

Andererseits gilt $f_1(x_2) \geq 0, f_1(x_1) \geq 0$ und $f_2'(x_2) \leq 0, f_2'(x_1) \geq 0$, also

$$f_1(x_2) f_2'(x_2) - f_1(x_1) f_2'(x_1) \leq 0,$$

im Widerspruch zur Gleichung (2.1). ■

2.2 Eigenwerte im Intervall (α, ∞)

In diesem Abschnitt werden wir Abschätzungen für die Eigenwerte im Intervall (β, ∞) und für die eingebetteten Eigenwerte im Intervall $(\alpha, \beta]$ herleiten. Daraus ergeben sich auch Aussagen über die Anzahl der eingebetteten Eigenwerte und Bedingungen dafür, daß keine solchen auftreten können. Der Eigenwert α wird erst in einem späteren Abschnitt betrachtet.

Wir bezeichnen die Eigenwerte von $\widetilde{A}$ im Intervall (α, ∞), die in wachsender Reihenfolge angeordnet seien, mit λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Wie wir in Abschnitt 1.4 gesehen haben, entsprechen die Eigenwerte von $\widetilde{A}$ und L einander. Wir können daher jetzt die Schar L, d. h. die Gleichung (1.1) betrachten. In den folgenden Überlegungen spielen die Zahlen $u^{-1}(\lambda_n)$ für $\lambda_n \in (\alpha, \beta]$ eine ähnliche Rolle wie der rechte Endpunkt des Intervalls $[0, 1]$ für $\lambda_n > \beta$. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, definieren wir Zahlen x_n folgendermaßen:

$$x_n := \begin{cases} u^{-1}(\lambda_n) & \text{für } \alpha < \lambda_n \leq \beta \\ 1 & \text{für } \lambda_n > \beta \end{cases} \tag{2.2}$$

Um die Eigenwerte geeignet abzählen zu können, brauchen wir das folgende Lemma über die Anzahl der Nullstellen der Eigenfunktionen.

Lemma 2.2 *Sei* $q \in C[0,1]$*,* $q(x) > 0$ *auf* $[0,1]$*,* $u \in C^1[0,1]$*,* $u'(x) > 0$ *auf* $[0,1]$*. Die Eigenwerte* λ_n *und die Zahlen* x_n *seien wir vorher definiert. Die zu* λ_n *gehörende Eigenfunktion sei* y_n $(n=1,2,\ldots)$*. Dann hat* y_n *mindestens* $n-1$ *Nullstellen im Intervall* $(0,x_n)$*.*

Beweis: Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion.
Für $n = 1$ ist die Aussage trivial.
$n \to n+1$:
Für alle $x \in (0,x_n)$ gilt folgende Ungleichung:

$$\lambda_n + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda_n} < \lambda_{n+1} + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda_{n+1}}$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt y_n im Intervall $(0,x_n)$ mindestens $n-1$ Nullstellen. Außerdem sind 0 und x_n auch Nullstellen. Nach dem Vergleichssatz besitzt damit y_{n+1} mindestens n Nullstellen im Intervall $(0,x_n)$ und daher auch im Intervall $(0,x_{n+1})$. ■

Damit können wir jetzt die folgende Abschätzung für die Eigenwerte λ_n beweisen.

Satz 2.3 *Sei* $q \in C[0,1]$*,* $q(x) > 0$ *auf* $[0,1]$*,* $u \in C^1[0,1]$*,* $u'(x) > 0$ *auf* $[0,1]$*. Die Eigenwerte von* $\tilde{A}$ *im Intervall* (α,∞) *seien in wachsender Reihenfolge angeordnet und mit* λ_n*,* $n = 1,2,\ldots$*, bezeichnet. Weiters sei*

$$q_0 := \min_{x\in[0,1]} q(x).$$

Dann gilt folgende Ungleichung:

$$\lambda_n > n^2\pi^2 + \frac{q_0}{\lambda_n - \alpha} \tag{2.3}$$

Beweis: Angenommen, es wäre:

$$\lambda_n \leq n^2\pi^2 + \frac{q_0}{\lambda_n - \alpha}$$

Dann folgt:

$$\lambda_n + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda_n} < \lambda_n - \frac{q_0}{\lambda_n - \alpha} \leq n^2\pi^2 \quad \forall x \in (0,x_n),$$

wobei x_n in (2.2) definiert ist. Die Funktion y_n hat nach dem Lemma mindestens $n-1$ Nullstellen im Intervall $(0,x_n)$. Nach dem Vergleichssatz müßte die Lösung $\tilde{y}$ der Gleichung

$$\tilde{y}'' + n^2\pi^2\tilde{y} = 0, \quad \tilde{y}(0) = 0$$

mindestens n Nullstellen im Intervall $(0,1)$ haben, aber $\tilde{y} = \sin(n\pi x)$ hat nur $n-1$ Nullstellen in $(0,1)$. Widerspruch! ■

Bemerkung: Wenn man y_n mit $\tilde{y} = \sin \frac{n\pi x}{x_n}$, der Lösung von

$$\tilde{y}'' + \frac{n^2\pi^2}{x_n^2}\tilde{y} = 0, \quad \tilde{y}(0) = 0,$$

vergleicht, erhält man statt (2.3) für $\lambda \in (\alpha, \beta]$ die noch schärfere Ungleichung:

$$\lambda_n > \frac{n^2\pi^2}{(u^{-1}(\lambda_n))^2} + \frac{q_0}{\lambda_n - \alpha} \tag{2.4}$$

Als Folgerung ergibt sich aus dem Satz sofort eine Abschätzung der Eigenwerte nach unten.

Folgerung 2.4 *Für die Eigenwerte $\lambda_n \in (\alpha, \beta)$ gilt:*

$$\lambda_n > n^2\pi^2 + \frac{q_0}{\beta - \alpha}; \tag{2.5}$$

für die Eigenwerte $\lambda_n > \beta$ gilt:

$$\lambda_n > \frac{n^2\pi^2 + \alpha + \sqrt{(n^2\pi^2 - \alpha)^2 + 4q_0}}{2} \tag{2.6}$$

und, wenn man weiter abschätzt,

$$\lambda_n > n^2\pi^2. \tag{2.7}$$

Für $\beta < \pi^2$ kann man die Ungleichung (2.7) auch mit einem min-max-Prinzip beweisen, wie in [AL] ausgeführt ist, denn die Spektren von A und u sind dann getrennt und die Zahlen $n^2\pi^2$ sind genau die Eigenwerte von A.

Als weitere Folgerung erhalten wir, daß sich die Eigenwerte von $\widetilde{A}$ nicht von rechts gegen β häufen können.

Für die Anzahl der eingebetteten Eigenwerte im halboffenen Intervall $(\alpha, \beta]$ können wir folgende Abschätzung angeben:

Folgerung 2.5 *Gilt für $n \in \mathbb{N}_0$*

$$\beta \leq (n+1)^2\pi^2 + \frac{q_0}{\beta - \alpha}, \tag{2.8}$$

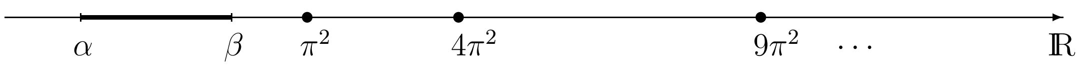
dann gibt es in $(\alpha, \beta]$ höchstens n Eigenwerte.

Das läßt folgende Interpretation zu: Die Eigenwerte des Problems mit $q(x) \equiv 0$ sind gerade die Eigenwerte von A, also $k^2\pi^2$. Wenn n von diesen Zahlen $\leq \beta$ sind, dann gibt es höchstens n Eigenwerte des Problems mit $q(x) > 0$ im Intervall $(\alpha, \beta]$. Dies stellt eine Verschärfung der Bemerkung nach der Proposition 4 in [ALM] dar, wo diese Aussage für $n=0$ bewiesen wurde.

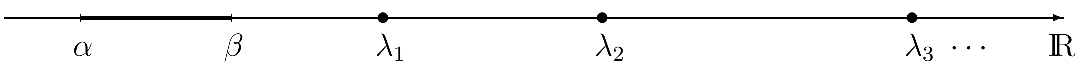
Außerdem wird die obere Schranke für die Anzahl der möglichen Eigenwerte in $(\alpha, \beta]$ kleiner, wenn $q_0 = \min q(x)$ größer wird. Wenn q_0 hinreichend groß ist, gibt es überhaupt keine Eigenwerte in $(\alpha, \beta]$.

Wir wollen nun die Ergebnisse anhand einiger Bilder veranschaulichen. Es bezeichne ein dicker Strich auf der reellen Achse das wesentliche Spektrum und Punkte die Eigenwerte des Operators $\widetilde{A}$.

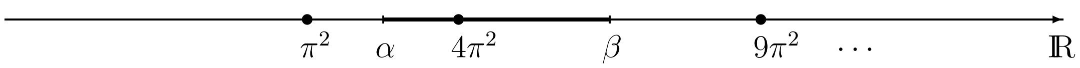
1. Nehmen wir zuerst ein Beispiel mit $\beta < \pi^2$. Für $q(x) \equiv 0$ ergibt sich folgendes Bild:



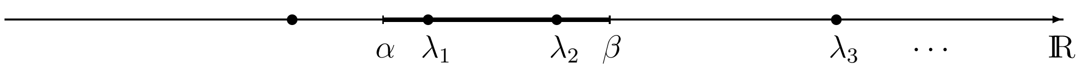
Wenn dann $q(x) > 0$ ist, ändert sich nicht viel, die Eigenwerte verschieben sich nur nach rechts:



2. Als nächstes Beispiel betrachten wir ein u, sodaß $4\pi^2 < \beta < 9\pi^2$. Für $q(x) \equiv 0$ ergibt sich:



Jetzt ändert sich allerdings das Bild, wenn $q(x) > 0$ ist:



Hier kann es aber sein, daß die eingebetteten Eigenwerte nicht auftreten. Es gibt zwar sicher ein λ, sodaß die linke Randbedingung erfüllt ist, aber dann muß die rechte Randbedingung nicht erfüllt sein. Wenn jedoch q genügend groß ist, erhält man folgendes Bild:

Es ist jetzt interessant zu fragen, wie scharf die Abschätzungen (2.3) bzw. (2.4) sind. Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wann ein eingebetteter Eigenwert existieren kann.

Satz 2.6 *Sei* $u \in C^1[0,1]$, $u'(x) > 0$. *Wenn*

$$\lambda > \frac{\pi^2}{\left(u^{-1}(\lambda)\right)^2} \tag{2.9}$$

ist, dann gibt es ein $q \in C[0,1]$, $q(x) > 0$, *sodaß* λ *Eigenwert von* $\widetilde{A}$ *ist.*

Beweis: Es sei $x_0 := u^{-1}(\lambda)$ und $x_1 < x_0$ so gewählt, daß

$$\frac{\pi^2}{x_1^2} < \lambda$$

ist. Wenn man jetzt $\tilde{q}(x) > 0$ so wählt, daß

$$\lambda + \frac{\tilde{q}(x)}{u(x) - \lambda} > \frac{\pi^2}{x_1^2}$$

auf dem Intervall $[0, x_1]$ gilt, so hat die 2mal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (1.1) mit $q = \tilde{q}$ im Intervall $(0, x_1)$ aufgrund des Vergleichssatzes (Vergleich mit der Funktion $\sin \frac{\pi x}{x_1}$) eine Nullstelle. Wenn man jetzt $q(x) = t \cdot \tilde{q}(x)$, $t \geq 1$, ansetzt und t variiert, so verschiebt sich mit wachsendem t die Nullstelle stetig gegen 0. Es gibt also ein q, sodaß 0 Nullstelle der Lösung der Differentialgleichung ist. Nun braucht man aber nur mehr q im Intervall $(x_0, 1]$ so abzuändern, daß 1 auch Nullstelle der Lösung ist. Das ist kein Problem, weil der Term $\frac{q(x)}{u(x)-\lambda}$ dort positiv ist. ∎

Als Folgerung erhalten wir sofort: Wenn $\beta > \pi^2$ ist, dann gibt es ein $\lambda \in (\alpha, \beta)$ und ein $q \in C[0,1]$, $q(x) > 0$, sodaß λ Eigenwert von $\widetilde{A}$ ist.

2.3 Der Eigenwert α

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß sich die Ergebnisse des vorigen Abschnitts nicht auf den Eigenwert α übertragen lassen. Wir werden nämlich zeigen, daß es bei beliebiger Funktion $u \in C^1[0,1]$ mit $u'(x) > 0$ eine geeignete Funktion q gibt, sodaß α ein Eigenwert von $\widetilde{A}$ ist.

Als erstes wählen wir $u(x) = x$ und $q(x) \equiv c^2$, wobei c noch zu bestimmen ist. Damit ist also $\alpha = 0$, und wir erhalten mit $\lambda{=}\alpha{=}0$ die Gleichung:

$$y'' + \frac{c^2}{x} y = 0 \tag{2.10}$$

Wir zeigen, daß die Funktion

$$y(x) = \sqrt{x} J_1(2c\sqrt{x}) \tag{2.11}$$

eine Lösung von (2.10) ist, wobei J_1 die Besselfunktion 1. Ordnung ist, d. h. Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0. \tag{2.12}$$

Mit (2.11) erhalten wir:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} J_1(2c\sqrt{x}) + c J_1'(2c\sqrt{x}) \\ y''(x) &= -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} J_1(2c\sqrt{x}) + \frac{c}{2x} J_1'(2c\sqrt{x}) + \frac{c^2}{\sqrt{x}} J_1''(2c\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Damit ist die Beziehung (2.10) äquivalent zu

$$\frac{c^2}{\sqrt{x}} J_1''(2c\sqrt{x}) + \frac{c}{2x} J_1'(2c\sqrt{x}) - \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} J_1(2c\sqrt{x}) + \frac{c^2}{\sqrt{x}} J_1(2c\sqrt{x}) = 0$$

d. h.

$$4c^2 x J_1''(2c\sqrt{x}) + 2c\sqrt{x} J_1'(2c\sqrt{x}) + (4c^2 x - 1) J_1(2c\sqrt{x}) = 0,$$

was äquivalent zur Besselschen Differentialgleichung (2.12) ist. Es erfüllt also die Funktion (2.11) die Gleichung (2.10). Außerdem hat (2.11) bei 0 eine Nullstelle. Jetzt muß c so gewählt werden, daß auch die Randbedingung $y(1) = 0$ erfüllt ist. D. h. $2\,c$ muß Nullstelle von J_1 sein. Wenn man also $q(x) \equiv c^2 = \xi^2/4$ wählt, wobei ξ eine Nullstelle von J_1 ist, dann ist 0 eine Eigenwert.

Zur Illustration sind hier die ersten Nullstellen ξ von J_1 und die dazugehörigen Werte von q angegeben:

ξ	q
3,8317	3,6705
7,0156	12,3047
10,1735	25,8750
13,3237	44,3802
16,4706	67,8202
19,6159	96,1959
22,7601	129,5055

Für beliebiges $u \in C^1[0,1]$, $u'(x) > 0$, versuchen wir jetzt ein q zu finden, sodaß wir wieder Gleichung (2.10) erhalten. Da u stetig differenzierbar ist, $u'(x) > 0$ und $u(0) = \alpha$ gilt, folgt:

$$u(x) - \alpha = x\, u_1(x)$$

mit einem stetigen $u_1 > 0$, und daher:

$$\alpha + \frac{q(x)}{u(x) - \alpha} = \alpha + \frac{q(x)}{x u_1(x)} = \frac{q(x) + \alpha x u_1(x)}{x u_1(x)}$$

Wir setzen jetzt

$$\frac{q(x) + \alpha x u_1(x)}{u_1(x)} = c^2,$$

wobei c so gewählt werden muß, daß $q(x) > 0$ gilt für alle $x \in [0,1]$.

$$q(x) = c^2 u_1(x) - \alpha x u_1(x) = u_1(x)(c^2 - \alpha x) \tag{2.13}$$

Wenn $c^2 > \alpha$, dann ist $q(x) > 0$. Aber c kann beliebig groß gewählt werden. Wenn man also $q(x)$ wie in (2.13) wählt mit einem c, sodaß $J_1(2c) = 0$, dann ist α ein Eigenwert. Damit haben wir also den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.7 *Gilt $u \in C^1[0,1]$ und $u'(x) > 0$, dann gibt es eine positive, stetige Funktion $q(x)$, sodaß α ein Eigenwert von $\widetilde{A}$ ist. Dieses q kann sogar so gewählt werden, daß $\min\limits_{x \in [0,1]} q(x)$ beliebig groß ist.*

2.4 Eigenwerte im Intervall $(-\infty, \alpha]$

Wir untersuchen nun das Spektrum im Intervall $(-\infty, \alpha]$. Außerhalb des wesentlichen Spektrums können nur isolierte Eigenwerte auftreten. Wir haben schon gesehen, daß sich diese bei β nicht häufen können. Jetzt zeigen wir, daß sie sich auch nicht bei α häufen können. Das ist äquivalent dazu, daß im Intervall $(-\infty, \alpha)$ nur endlich viele Eigenwerte liegen, da der Operator $\widetilde{A}$ nach unten halbbeschränkt ist.

Satz 2.8 *Sei $q \in C[0,1]$, $q(x) > 0$ auf $[0,1]$, $u \in C^1[0,1]$, $u'(x) > 0$ auf $[0,1]$. Dann besitzt $\widetilde{A}$ höchstens endlich viele Eigenwerte im Intervall $(-\infty, \alpha)$.*

Beweis: Die Funktion $\lambda + \frac{y(x)}{u(x) - \lambda}$ ist für jedes feste $x \in (0,1)$ streng monoton wachsend in λ auf dem Intervall $(-\infty, \alpha]$. Es seien y_1, y_2 Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \alpha$. Aus dem Vergleichssatz folgt, daß y_2 mehr Nullstellen im Intervall $(0,1)$ haben muß als y_1. D. h. mit wachsendem λ nimmt die Anzahl der Nullstellen zu.

Sei weiters y_0 Lösung der Differentialgleichung für $\lambda = \alpha$ mit $y_0(0) = 0, y_0'(0) = 1$. Diese hat eine endliche Anzahl an Nullstellen im Intervall $(0,1)$. Wieder folgt aus dem Vergleichssatz, daß alle Eigenfunktionen zu Eigenwerten $\lambda < \alpha$ höchstens so viele Nullstellen wie y_0 haben können. Daraus folgt aber, daß es nur endlich viele Eigenwerte $< \alpha$ geben kann. ∎

Als nächstes zeigen wir, daß bei beliebigem u Eigenwerte im Intervall $(-\infty, \alpha)$ auftreten, sobald q genügend groß ist. Diese Eigenwerte wandern quasi aus dem wesentlichen Spektrum heraus, wenn q wächst.

Satz 2.9 *Es sei $u \in C[0,1]$ beliebig. Dann existiert eine Zahl C, $C \geq 0$, sodaß gilt:*

$$\min_{x\in[0,1]} q(x) > C \quad \Rightarrow \quad \widetilde{A} \text{ besitzt mindestens einen Eigenwert } < \alpha.$$

Beweis: Mit $\vec{y} = \binom{y_1}{y_2} \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, $\|\vec{y}\| = 1$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A}\vec{y}, \vec{y}) &= (\begin{pmatrix} A & v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \\
&= (Ay_1, y_1) + (vy_2, y_1) + (vy_1, y_2) + (uy_2, y_2) = \\
&= \int_0^1 |y_1'|^2 dx + \int_0^1 vy_2\bar{y}_1 dx + \int_0^1 vy_1\bar{y}_2 dx + \int_0^1 u|y_2|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Wenn wir jetzt

$$y_1 := \sin \pi x, \quad y_2 := -\sin \pi x$$

wählen (es ist $\|\vec{y}\| = 1$), so stimmt der Ausdruck auf der rechten Seite von (2.14) überein mit

$$\begin{aligned}
&\pi^2 \int_0^1 \cos^2 \pi x \, dx + \int_0^1 (u(x) - 2v(x)) \sin^2 \pi x \, dx \leq \\
&\qquad \leq \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} (u(x) - 2v(x)) \leq \\
&\qquad \leq \frac{\pi^2}{2} + \frac{\beta}{2} - \min_{x\in[0,1]} v(x)
\end{aligned}$$

Wenn

$$\min_{x\in[0,1]} v(x) > \frac{\pi^2 + \beta}{2} - \alpha,$$

dann ist $(\widetilde{A}\vec{y}, \vec{y}) < \alpha$ und daher $\min \sigma(\widetilde{A}) < \alpha$. Also muß es Eigenwerte im Intervall $(-\infty, \alpha)$ geben. ∎

2.5 Nukleare Operatoren, Spur, Hilbert-Schmidt-Operatoren

Für den nächsten Abschnitt müssen wir einige Begriffe und Sätze bereitstellen. Die Ergebnisse sind den Kapiteln VI-VIII von [GGK] entnommen. Es sei in diesem Abschnitt $\mathcal{H}$ ein beliebiger separabler Hilbertraum, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sei die Menge der linearen, beschränkten Operatoren und $\mathcal{S}_\infty$ die Menge der kompakten Operatoren auf $\mathcal{H}$. Sei A für diesen Abschnitt beliebig aus $\mathcal{S}_\infty$. Dann ist A^*A ein positiver, kompakter Operator. Es sei

$$\lambda_1(A^*A) \geq \lambda_2(A^*A) \geq \dots$$

die nicht wachsende Folge der positiven Eigenwerte von A^*A, entsprechend ihrer Vielfachheit oft gezählt.
Definition: Der j-te **Singulärwert** des Operators A ist gegeben durch

$$s_j(A) := \sqrt{\lambda_j(A^*A)}.$$

Bricht die Folge ab, d. h. ist A von endlichem Rang n, so sei

$$s_j(A) := 0\,,\ j > n.$$

Es gilt die folgende Gleichung für die Singulärwerte:[1]

$$s_j(A) = \min\left\{\|A - K\| \,\middle|\, \operatorname{Rang} K \leq j-1\right\}$$

Wir kommen nun zu einer wichtigen Teilklasse der kompakten Operatoren.

Definition: Die Elemente der Menge

$$\mathcal{S}_1 := \left\{A \in \mathcal{S}_\infty \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) < \infty\right\}$$

heißen **nukleare Operatoren** oder **Trace-Class-Operatoren**.

Mit der Norm

$$\|A\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \tag{2.15}$$

wird $\mathcal{S}_1$ zu einem Banachraum. Die Operatoren von endlichem Rang liegen bezüglich dieser Norm dicht in $\mathcal{S}_1$. Da $s_1(A) = \|A\|$, folgt

$$\|A\|_1 \geq \|A\|. \tag{2.16}$$

[1]siehe [GGK], Theorem VI.1.5

Der Raum $\mathcal{S}_1$ ist sogar ein zweiseitiges Ideal im Ring $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Genauer:[2]
Es seien $A \in \mathcal{S}_1$, $B, C \in \mathcal{L}$. Dann gilt:

$$BAC \in \mathcal{S}_1 \quad \text{und} \quad \|BAC\|_1 \leq \|B\| \|A\|_1 \|C\|. \tag{2.17}$$

Der in der linearen Algebra wichtige Begriff der Spur läßt sich jetzt auf Operatoren aus $\mathcal{S}_1$ verallgemeinern. Für Operatoren von endlichem Rang sei

$$\mathrm{tr} A := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j,$$

wobei λ_j die von 0 verschiedenen Eigenwerte von A sind. Da diese Operatoren dicht in $\mathcal{S}_1$ sind, kann man nun folgende Definition geben.

Definition: Sei A_n eine Folge von Operatoren von endlichem Rang, sodaß

$$A_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} A.$$

Die **Spur** von A ist dann definiert durch

$$\mathrm{tr} A := \lim_{n \to \infty} \mathrm{tr} A_n$$

Man zeigt leicht, daß die Definition von der Folge A_n unabhängig ist. Die Spur ist ein lineares, stetiges Funktional auf dem Raum $\mathcal{S}_1$, denn es gilt

$$|\mathrm{tr} A| \leq \|A\|_1 , \; A \in \mathcal{S}_1. \tag{2.18}$$

Es gilt nun der folgende Satz:[3]
Sei $A \in \mathcal{S}_1$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die Folge der Eigenwerte von A, gezählt entsprechend ihrer Vielfachheit. Dann gilt:

$$\mathrm{tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j. \tag{2.19}$$

Daraus ergibt sich sofort für $A \in \mathcal{S}_1$, $B \in \mathcal{L}$:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \tag{2.20}$$

weil $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.[4]

Für nukleare Integraloperatoren läßt sich die Spur durch die folgende Formel einfach berechnen, welche für Anwendungen wichtig ist.[5]

[2] siehe [GGK], Proposition VI.4.2
[3] siehe [GGK], Theorem VII.6.1
[4] siehe dazu z. B. [GGK] Chapter III.2, Gleichung (3)
[5] siehe [GGK], Theorem VII.2.3

Satz 2.10 *Sei A ein Integraloperator auf $L^2(a,b)$*

$$(Ay)(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt\,,\ a \le x \le b$$

mit der auf $[a,b] \times [a,b]$ stetigen Funktion K. Weiters sei $A \in \mathcal{S}_1$. Dann gilt:

$$\mathrm{tr}A = \int_a^b K(t,t)dt \tag{2.21}$$

Wir kommen nun zu einer weiteren wichtigen Klasse von kompakten Operatoren (siehe dazu [GGK], Chapter VIII).

Definition: Die Elemente der Menge

$$\mathcal{S}_2 := \Big\{ A \in \mathcal{S}_\infty \,\Big|\, \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^2 < \infty \Big\}$$

heißen **Hilbert-Schmidt-Operatoren**.

Mit dem inneren Produkt

$$(A,B) := \mathrm{tr}(AB^*) \tag{2.22}$$

wird $\mathcal{S}_2$ zu einem Hilbertraum. Die zugehörige Norm ist

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.23}$$

Das Skalarprodukt ist wohldefiniert, denn es gilt:

$$A,B \in \mathcal{S}_2 \quad \Rightarrow \quad AB \in \mathcal{S}_1 \text{ und } \|AB\|_1 \le \|A\|_2 \|B\|_2 \tag{2.24}$$

Wie $\mathcal{S}_1$ ist auch $\mathcal{S}_2$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}$. Wenn $A \in \mathcal{S}_2$, $B, C \in \mathcal{L}$, gilt:

$$BAC \in \mathcal{S}_2 \text{ und } \|BAC\|_2 \le \|B\| \|A\|_2 \|C\|. \tag{2.25}$$

Analog wie bei nuklearen Operatoren gilt für Hilbert-Schmidt-Operatoren die Ungleichung:

$$\|A\| \le \|A\|_2 \tag{2.26}$$

Für Integraloperatoren hat man eine einfache Formel für die Hilbert-Schmidt-Norm:

Satz 2.11 *Es sei A ein Integraloperator auf $L^2(a,b)$*

$$(Ay)(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt\,,\ a \le x \le b$$

mit einer auf $[a,b] \times [a,b]$ quadratintegrierbaren Funktion K. Dann gilt:

$$A \in \mathcal{S}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b\int_a^b K(s,t)ds\,dt < \infty$$

und

$$\|A\|_2 = \left(\int_a^b\int_a^b K(s,t)ds\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.6 Kriterien für $(-\infty,\alpha] \cap \sigma_p(\widetilde{A}) = \emptyset$

Wir haben in 2.4 gesehen, daß Eigenwerte im Intervall $(-\infty,\alpha)$ auftreten, wenn q genügend groß ist. Es zeigt sich, daß es dort keine Eigenwerte gibt, wenn q klein ist und einige weitere Voraussetzungen erfüllt sind. Unter den folgenden Bedingungen kann sogar auch der Eigenwert $\lambda = \alpha$ ausgeschlossen werden. Teile des Beweises des folgenden Satzes sind der Arbeit [ALM] entnommen. Es bezeichne $(f(x))_+$ den Positivteil von $f(x)$:

$$(f(x))_+ := \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{für } f(x) < 0 \end{cases}$$

Satz 2.12 *Sei $q \in C[0,1]$, $q(x) > 0$ auf $[0,1]$, $u \in C^1[0,1]$, $u'(x) > 0$ auf $[0,1]$. Wenn dann*

$$\int_0^1 \Big(\alpha + \frac{q(x)}{u(x)-\alpha}\Big)_+ x\,(1-x)\,dx < 1 \tag{2.27}$$

gilt, so besitzt $\widetilde{A}$ keinen Eigenwert im Intervall $(-\infty,\alpha]$.

Beweis: i) Wir betrachten zuerst $\lambda < \alpha$. Es sei wie in (1.8) der Operator A durch $Ay = -y''$ mit den Randbedingungen $y(0)=y(1)=0$ definiert. Der Operator A^{-1} ist ein nuklearer, positiver Operator, da er die Eigenwerte $\lambda_k(A^{-1}) = \frac{1}{k^2\pi^2}$ hat und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k(A^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} < \infty$$

gilt. Außerdem kann er als Integraloperator

$$(Ay)(x) = \int_0^1 K(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

mit dem Kern

$$K(x,\xi) = \begin{cases} x\,(1-\xi)\,, & 0\leq x\leq \xi\leq 1 \\ (1-x)\,\xi\,, & 0\leq \xi\leq x\leq 1 \end{cases}$$

geschrieben werden.
Weiters sei $Q(\lambda;x)$ der Koeffizient von y in der Differentialgleichung (1.1), also

$$Q(\lambda;x) := \lambda + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda},$$

und $\hat{Q}(\lambda)$ der Operator der Multiplikation mit der Funktion $Q(\lambda;\cdot)$. Dann gilt für $\lambda\in(-\infty,\alpha)$:

$$\begin{aligned}
&\lambda \text{ ist Eigenwert von } \widetilde{A} \\
\Leftrightarrow\ & \exists y \in \mathcal{D}\,,\ y\neq 0: \\
& \qquad -Ay + \hat{Q}(\lambda)y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \exists y \in \mathcal{D}\,,\ y\neq 0: \\
& \qquad -A^{\frac{1}{2}}y + A^{-\frac{1}{2}}\hat{Q}(\lambda)y = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \exists z \in L^2(0,1)\,,\ z\neq 0: \\
& \qquad -z + A^{-\frac{1}{2}}\hat{Q}(\lambda)A^{-\frac{1}{2}}z = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 1 \text{ ist Eigenwert des Operators } T(\lambda) := A^{-\frac{1}{2}}\hat{Q}(\lambda)A^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Dabei ist $T(\lambda)$ ein selbstadjungierter, nuklearer Operator, weil $\hat{Q}(\lambda)\in\mathcal{L}$, $A^{-\frac{1}{2}}\in\mathcal{S}_2$. Da wir für die weiteren Überlegungen positive Operatoren benötigen, definieren wir die Funktion

$$Q_+(\lambda;x) := (Q(\lambda;x))_+$$

Analog sei $\hat{Q}_+(\lambda)$ der Operator der Multiplikation mit der Funktion $Q_+(\lambda;\cdot)$ und

$$T_+(\lambda) := A^{-\frac{1}{2}}\hat{Q}_+(\lambda)A^{-\frac{1}{2}}.$$

Wegen $Q(\lambda;x)\leq Q_+(\lambda;x)$ gilt

$$T(\lambda)\leq T_+(\lambda) \quad (-\infty<\lambda<\alpha).$$

Der Operator $T_+(\lambda)$ ist ein positiver, nuklearer Operator, mit Hilfe seiner Spur können wir die Norm abschätzen:

$$\|T_+(\lambda)\| \leq \operatorname{tr}(T_+(\lambda)) = \operatorname{tr}(A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda))$$

Der Operator $A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)$ ist ein nuklearer Integraloperator mit dem Kern

$$K_1(x,\xi) = \begin{cases} x\,(1-\xi)\,Q(\lambda;\xi)\,, & 0\leq x\leq \xi\leq 1 \\ (1-x)\,\xi\,Q(\lambda;\xi)\,, & 0\leq \xi\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Nach Satz 2.10 ist die Spur dieses Operators das Integral über die Diagonale des Kerns, also

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)) &= \int_0^1 K_1(x,x)dx = \\ &= \int_0^1 x(1-x)Q_+(\lambda;x)dx \leq \underbrace{\int_0^1 x(1-x)Q_+(\alpha;x)dx}_{=:\,c} < 1\end{aligned}$$

nach Voraussetzung. Daraus folgt $\sigma(T_+(\lambda)) \subseteq [-c,c]$, und weiters $\sigma(T(\lambda)) \subseteq (-\infty,c]$. Also ist 1 kein Eigenwert von $T(\lambda)$ und die Aussage ist für $\lambda \in (-\infty,\alpha)$ bewiesen.

ii) Jetzt bleibt noch der Fall $\lambda=\alpha$ zu betrachten. Dazu betrachten wir an Stelle von $T(\lambda)$ die Operatoren

$$V(\lambda) := \hat{Q}(\lambda)A^{-1}$$

Der Operator $\hat{Q}(\alpha)$ ist ein unbeschränkter Operator mit dem Definitionsbereich

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\hat{Q}(\alpha)) &= \Big\{y \in L^2(0,1)\Big| y(x)Q(\alpha;x) \in L^2(0,1)\Big\} = \\ &= \Big\{y \in L^2(0,1)\Big| \frac{y(x)}{x} \in L^2(0,1)\Big\}.\end{aligned}$$

Weil $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(\hat{Q}(\alpha))$, ist $V(\alpha)=\hat{Q}(\alpha)A^{-1}$ ein überall definierter Operator, und da er ein abgeschlossener Operator ist, ist er nach dem Satz vom abgeschlossenem Graphen beschränkt. Wir wollen jetzt zeigen, daß für $\lambda \nearrow \alpha \quad V(\lambda) \to V(\alpha)$ in der starken Operatortopologie gilt, d. h.

$$V(\lambda)\, y \to V(\alpha)\, y \quad \forall y \in L^2(0,1)\,,\ \lambda \nearrow \alpha$$

Es sei $y \in L^2(0,1)$. Da $A^{-1}y \in \mathcal{D}(A)$, kann man

$$(A^{-1}y)(x) = x\, y_1(x) \ \text{ mit } \ y_1 \in C[0,1]$$

schreiben. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|V(\lambda)\, y - V(\alpha)\, y\|^2 &= \|\hat{Q}(\lambda)A^{-1}\, y - \hat{Q}(\alpha)A^{-1}\, y\|^2 = \\ &= \|\hat{Q}(\lambda)(x\, y_1(x)) - \hat{Q}(\alpha)(x\, y_1(x))\|^2 = \\ &= \int_0^1 \Big|\Big(Q(\lambda;x) - Q(\alpha;x)\Big)x\, y_1(x)\Big|^2\, dx \leq \\ &\leq \max_{t\in[0,1]} y_1(t) \cdot \int_0^1 |Q(\lambda;x)\, x - Q(\alpha;x)\, x|^2 dx\end{aligned}$$

Für $\lambda \nearrow \alpha$ konvergiert die Funktion $Q(\lambda; x)x$ punktweise gegen die Funktion $Q(\alpha; x)x$. Außerdem ist $Q(\lambda; x)x \leq Q(\alpha; x)x$. Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\int_0^1 |Q(\lambda; x)\, x - Q(\alpha; x)\, x|^2 dx \to 0 \text{ für } \lambda \nearrow \alpha$$

und damit $V(\lambda)\, y \to V(\alpha)\, y$. Nach dem obigen hatten wir

$$\sigma(T(\lambda)) = \sigma(A^{-\frac{1}{2}} \hat{Q}(\lambda) A^{-\frac{1}{2}}) \subseteq (-\infty, c].$$

Für zwei beliebige Operatoren A_1, A_2 gilt aber

$$\sigma(A_1 A_2) \setminus \{0\} = \sigma(A_2 A_1) \setminus \{0\}.$$

Daraus folgt dann

$$\sigma(V(\lambda)) = \sigma(\hat{Q}(\lambda) A^{-1}) \subseteq (-\infty, c].$$

Damit erhalten wir $\|(V(\lambda) - I)y\| \geq (1-c)\|y\|$ und wegen der Konvergenz von $V(\lambda)$ gegen $V(\alpha)$ auch $\|(V(\alpha) - I)y\| \geq (1-c)\|y\|$. Aus der Tatsache, daß 1 kein Eigenwert von $V(\alpha)$ ist, folgt, daß α kein Eigenwert von $\widetilde{A}$ ist. ■

Durch eine einfache Abschätzung kann man die Bedingung (2.27) in eine handlichere Form bringen.

Folgerung 2.13 *Sei $q \in C[0,1]$, $q(x) > 0$ auf $[0,1]$, $u \in C^1[0,1]$, $u'(x) > 0$ auf $[0,1]$. Wenn dann $\alpha > 0$ und*

$$\alpha + \frac{\max_{x \in [0,1]} q(x)}{\min_{x \in [0,1]} u'(x)} < 2$$

gilt, so besitzt $\widetilde{A}$ keinen Eigenwert im Intervall $(-\infty, \alpha]$.

Beweis: Es gilt:

$$\int_0^1 \Big(\alpha + \frac{q(x)}{u(x) - \alpha}\Big)_+ x\,(1-x)\, dx \leq \int_0^1 \Big(\alpha + \frac{q(x)\, x}{u(x) - \alpha}\Big)_+ (1-x)\, dx$$

Den Bruch kann man folgendermaßen abschätzen:

$$\frac{q(x)\, x}{u(x) - \alpha} = \frac{q(x)\, x}{u'(\xi)\, x} \quad (\text{mit } \xi \in (0, x)) \;\leq \frac{\max_{x \in [0,1]} q(x)}{\min_{x \in [0,1]} u'(x)}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \Big(\alpha + \frac{q(x)\,x}{u(x)-\alpha}\Big)_+ dx \;\le\; \Bigg(\alpha + \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} q(x)}{\min\limits_{x\in[0,1]} u'(x)}\Bigg)_+ \cdot \int_0^1 (1-x)\,dx \;=$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg(\alpha + \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} q(x)}{\min\limits_{x\in[0,1]} u'(x)}\Bigg)_+$$

Aus der Voraussetzung folgt aber auch

$$\Bigg(\alpha + \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} q(x)}{\min\limits_{x\in[0,1]} u'(x)}\Bigg)_+ < 2$$

und damit die Behauptung. ■

Für positives α kann man die Bedingung etwas abschwächen, sodaß sich dann ergibt:

Folgerung 2.14 *Sei $q \in C[0,1]$, $q(x) > 0$ auf $[0,1]$, $u \in C^1[0,1]$, $u'(x) > 0$ auf $[0,1]$. Wenn $\alpha \ge 0$ und*

$$\frac{\alpha}{3} + \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} q(x)}{\min\limits_{x\in[0,1]} u'(x)} < 2$$

gilt, so besitzt $\widetilde{A}$ keinen Eigenwert im Intervall $(-\infty, \alpha]$.

Beweis: Hier gilt folgendes:

$$\int_0^1 \Big(\alpha + \frac{q(x)}{u(x)-\alpha}\Big)_+ x\,(1-x)\,dx \;=$$

$$= \int_0^1 \alpha\, x\,(1-x)\,dx + \int_0^1 \frac{q(x)\,x}{u(x)-\alpha}(1-x)\,dx \;=$$

$$= \frac{\alpha}{6} + \int_0^1 \frac{q(x)\,x}{u(x)-\alpha}(1-x)\,dx \;\le$$

$$\le \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\max\limits_{x\in[0,1]} q(x)}{\min\limits_{x\in[0,1]} u'(x)} \;<\; 1$$

■

Wenn zum Beispiel $\alpha < 6$ ist und $q(x)$ klein genug gewählt wird, kann es keinen Eigenwert im Intervall $(-\infty, \alpha]$ geben. Es kann auch dann keinen Eigenwert dort geben, wenn man $q(x)$ festhält und $u(x)$ durch eine negative additive Konstante ändert, sodaß der Wertebereich von $u(x)$ gegen $-\infty$ verschoben wird.

Man kann aber die Bedingung in der letzten Folgerung noch abschwächen, indem man die Norm des Operators $A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)$ nicht durch die Spur, sondern durch die Hilbert-Schmidt-Norm abschätzt.

Satz 2.15 *Sei $q \in C[0,1]$, $q(x) > 0$ auf $[0,1]$, $u \in C^1[0,1]$, $u'(x) > 0$ auf $[0,1]$. Wenn $\alpha \geq 0$ und*

$$\frac{\alpha}{3} + \frac{\max\limits_{x\in[0,1]} q(x)}{\min\limits_{x\in[0,1]} u'(x)} < 3$$

gilt, so besitzt $\widetilde{A}$ keinen Eigenwert im Intervall $(-\infty, \alpha]$.

Beweis: Wie wir schon gesehen haben, ist der Operator $A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)$, $\lambda < \alpha$ ein Integraloperator mit dem Kern

$$K_1(x,\xi) = \begin{cases} x\,(1-\xi)\,Q(\lambda;\xi)\,, & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \\ (1-x)\,\xi\,Q(\lambda;\xi)\,, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Er ist ein nuklearer Operator und daher ein Hilbert-Schmidt-Operator. Es gilt $\|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\| \leq \|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die Hilbert-Schmidt-Norm bezeichnet.

Die Hilbert-Schmidt-Norm eines Integraloperators läßt sich aber leicht berechnen (Satz 2.11):

$$\|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\|_2 = \int_0^1\int_0^1 |K_1(x,\xi)|^2 dx d\xi =$$

$$= \int_0^1\int_0^\xi (1-\xi)^2 x^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi)-\lambda}\right)^2 dx d\xi +$$

$$+ \int_0^1\int_\xi^1 (1-x)^2 \xi^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi)-\lambda}\right)^2 dx d\xi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \xi^3(1-\xi)^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi)-\lambda}\right)^2 d\xi + \frac{1}{3}\int_0^1 (1-\xi)^3\xi^2 \left(\lambda + \frac{q(\xi)}{u(\xi)-\lambda}\right)^2 d\xi \leq$$

$$\leq \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\alpha\xi + \frac{\max\limits_{t\in[0,1]} q(t)}{\min\limits_{t\in[0,1]} u'(t)}\right) \Big[\xi(1-\xi)^2 + (1-\xi)^3\Big] d\xi =$$

mit $\gamma := \dfrac{\max\limits_{t\in[0,1]} q(t)}{\min\limits_{t\in[0,1]} u'(t)}$

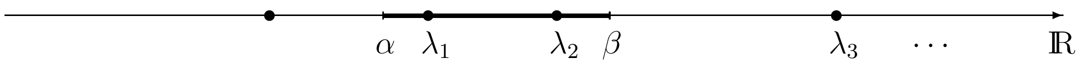
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-\xi)^2(\alpha\xi+\gamma)^2 d\xi = \frac{1}{9}\left(\frac{\alpha^2}{10} + \frac{\alpha\gamma}{2} + \gamma^2\right) \leq \frac{1}{9}\left(\frac{\alpha}{3} + \gamma\right)^2 < 1$$

Daraus folgt $\|A^{-1}\hat{Q}_+(\lambda)\| < 1$. Den Rest des Beweises kann man von Satz 2.12 wörtlich übernehmen. ∎

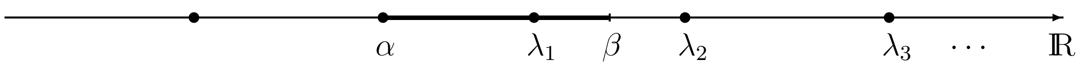
Daraus folgt wieder, daß es keinen Eigenwert $< \alpha$ geben kann, wenn z. B. $\alpha < 9$ und $q(x)$ hinreichend klein gewählt wird. Man sieht aber, daß man mit dem Wert 9 schon recht nahe am Wert $\pi^2 \approx 9,87$ ist.

Wir wollen nun die Ergebnisse der letzten Abschnitte wieder illustrieren. Betrachten wir ein u, sodaß für $q(x) \equiv 0$ das Spektrum folgendermaßen aussieht:

Für $q(x) > 0$, aber klein ergibt sich dann:



Im wesentlichen Spektrum sind zwei mögliche Eigenwerte eingebettet, die Eigenwerte im Intervall (β, ∞) wandern nach rechts, der eine Eigenwert im Intervall $(-\infty, \alpha)$ wandert nach links. Wenn man jetzt q vergrößert, ergibt sich folgendes Bild:



Der eine Eigenwert im Intervall $(-\infty, \alpha)$ ist weiter nach links gewandert. Bei α ist jetzt aber ein Eigenwert dazugekommen. Die Eigenwerte im Intervall (α, ∞) sind nach rechts gerückt. Wenn q noch größer ist, erhält man dann:

Der Eigenwert bei α ist jetzt auch nach links gerückt.

Allgemein wandern mit wachsendem q die Eigenwerte im Intervall $(-\infty, \alpha]$ nach links und im Intervall (α, ∞) nach rechts. Bei α entstehen immer wieder neue Eigenwerte.

Kapitel 3

Die Spektraldichte

Für dieses Kapitel seien q und u holomorphe Funktionen auf einer Umgebung U von $[0,1]$. Für diesen Fall kann man nämlich Reihenentwicklungen der Lösungen der Differentialgleichung um die Singularität angeben. Mit Hilfe dieser Reihenentwicklungen kann man die Spektraldichte des Titchmarsh-Weylschen Koeffizienten berechnen. Zuerst wollen wir diesen Titchmarsh-Weylschen Koeffizienten einführen.

3.1 Der Titchmarsh-Weylsche Koeffizient

Es sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$. Der Operator $L(\lambda)^{-1}$ kann für $\lambda \notin \sigma(\widetilde{A})$ mit Hilfe der Greenschen Funktion als Integraloperator geschrieben werden:

$$(L(\lambda)^{-1}y)(x) = \int_0^1 G(x,\xi;\lambda)y(\xi)d\xi \tag{3.1}$$

mit

$$G(x,\xi;\lambda) = \frac{1}{W(\psi,\chi)} \begin{cases} \psi(x;\lambda)\chi(\xi;\lambda), & x \leq \xi \\ \chi(x;\lambda)\psi(\xi;\lambda), & x \geq \xi \end{cases} \tag{3.2}$$

und der Wronskischen Determinante

$$W(\psi,\chi) = \psi\chi' - \psi'\chi,$$

wobei ψ und χ Lösungen der Differentialgleichung (1.1) sind und die Randbedingungen bei $x=0$ bzw. $x=1$ erfüllen, also $\psi(0;\lambda)=0$, $\chi(1;\lambda)=0$. Dazu sei φ und ψ eine Lösungsbasis:

$$\begin{aligned} \varphi(0;\lambda) &= 1 \qquad & \varphi'(0;\lambda) &= 0 \\ \psi(0;\lambda) &= 0 \qquad & \psi'(0;\lambda) &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Funktion χ setzt man als Linearkombination von φ und ψ an, sodaß $\chi(1;\lambda)=0$.

$$\chi(x;\lambda) = \varphi(x;\lambda) + m(\lambda)\psi(x;\lambda)$$

Die Funktion $m(\lambda) = -\dfrac{\varphi(1,\lambda)}{\psi(1,\lambda)}$ nennen wir den **Titchmarsh-Weylsche Koeffizienten**, wie bei klassischen Sturm-Liouville-Problemen. Die Wronskische Determinante von ψ und χ ist

$$\begin{aligned} W(\psi,\chi) &= \psi\chi' - \psi'\chi = \psi(\varphi' + m\psi') - \psi'(\varphi + m\psi) = \\ &= \psi\varphi' - \psi'\varphi = \psi(0;\lambda)\varphi'(0;\lambda) - \psi'(0;\lambda)\varphi(0;\lambda) = -1 \end{aligned}$$

Sie ist unabhängig von x, da die 1. Ableitung in der Differentialgleichung nicht auftritt. Damit erhält dann die Greensche Funktion die Gestalt

$$G(x,\xi;\lambda) = \begin{cases} -\psi(x;\lambda)\chi(\xi;\lambda), & x \le \xi \\ -\chi(x;\lambda)\psi(\xi;\lambda), & x \ge \xi \end{cases} \tag{3.4}$$

Wir wollen nun m genauer untersuchen. Es sei

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, z > 0\}\,,\ \mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, z < 0\}$$

Satz 3.1 *Der Titchmarsh-Weylsche Koeffizient m ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus [\alpha,\beta]$. Dort entsprechen den Polen von m genau die Eigenwerte von L. Weiters ist m eine Nevanlinna-Funktion, d. h. m ist holomorph in $\mathbb{C}^+$ und $\mathrm{Im}\, m(\lambda) \ge 0$ für $\lambda \in \mathbb{C}^+$.*

Beweis: Die erste Behauptung ist klar, weil φ und ψ holomorph in λ sind. Die zweite Behauptung folgt daraus, daß λ genau dann Eigenwert von L ist, wenn $\psi(1;\lambda) = 0$. Die dritte Behauptung erhält man folgendermaßen. Aus

$$\chi''(x;\lambda) + \left(\lambda + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda}\right)\chi(x;\lambda) = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left[\chi''(x;\lambda) + \left(\lambda + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda}\right)\chi(x;\lambda)\right]\overline{\chi(x;\lambda)}dx = \\ &= \chi'(x;\lambda)\overline{\chi(x;\lambda)}\Big|_0^1 - \int_0^1 |\chi'(x;\lambda)|^2 dx + \int_0^1 \left(\lambda + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda}\right)|\chi(x;\lambda)|^2 dx = \\ &= -m(\lambda) - \int_0^1 |\chi'(x;\lambda)|^2 dx + \int_0^1 \left(\lambda + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda}\right)|\chi(x;\lambda)|^2 dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad m(\lambda) = \int_0^1 \left(\lambda + \frac{q(x)}{u(x)-\lambda}\right)|\chi(x;\lambda)|^2 dx - \int_0^1 |\chi'(x;\lambda)|^2 dx$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$. Da die Differentialgleichung (1.1) reell ist, gilt $\chi(x;\overline{\lambda}) = \overline{\chi(x;\lambda)}$ für reelles x. Daraus folgt:

$$\frac{m(\lambda) - \overline{m(\lambda)}}{\lambda - \overline{\lambda}} = \int_0^1 \Big(1 + \frac{q(x)}{|u(x) - \lambda|^2}\Big) |\chi(x;\lambda)|^2 dx \geq 0$$

Also ist m eine Nevanlinna-Funktion. ■

Der Titchmarsh-Weylsche Koeffizient m läßt daher eine Integraldarstellung

$$m(\lambda) = a + b\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{1+t^2}\Big) d\sigma(t) \tag{3.5}$$

zu, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und σ ein Maß auf $\mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, d\sigma(t) < \infty$$

ist. Das Maß σ läßt sich durch die Stieltjessche Umkehrformel berechnen. Für ein Intervall $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$\sigma(\Delta) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \Big(m(\lambda + i\varepsilon) - m(\lambda - i\varepsilon)\Big) d\lambda \tag{3.6}$$

Außerhalb von $[\alpha, \beta]$ besitzt m nur Pole, also ist σ dort diskret und besitzt in den Eigenwerten λ_j das Maß $\sigma(\{\lambda_j\}) = -\mathrm{res}(m; \lambda_j)$. Um σ im Intervall $[\alpha, \beta]$ genauer bestimmen zu können, müssen wir die Lösungen der Differentialgleichung (1.1) für $\lambda \in [\alpha, \beta]$ genauer untersuchen. Da die Gleichung eine Singularität hat, beschäftigen wir uns jetzt allgemein mit solchen Differentialgleichungen.

3.2 Differentialgleichungen mit schwachen Singularitäten

Wir betrachten Gleichungen mit einer *schwachen* (oder *regulären*) *Singularität*,[1] d. h. Gleichungen des folgenden Typs:

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{3.7}$$

Die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ seien in einer Umgebung von x_0, $x_0 \in \mathbb{C}$, mit Ausnahme von x_0 holomorph. Bei x_0 besitze $a(x)$ einen Pol von höchstens 1. Ordnung

[1] siehe hierzu zum Beispiel [H], S. 274–284.

und $b(x)$ einen Pol von höchstens 2. Ordnung. Es sollen also für $|x - x_0| \leq \rho$ folgende Laurent-Entwicklungen gelten:

$$a(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$b(x) = \sum_{n=-2}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Dann kann man folgenden Lösungsansatz machen:

$$g(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{3.8}$$

Dabei muß r notwendigerweise die Indexgleichung erfüllen:

$$r(r-1) + a_{-1} r + b_{-2} = 0. \tag{3.9}$$

Die beiden Lösungen von (3.9) seien r_1, r_2. Dann sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$:
   Durch den Ansatz (3.8) erhält man mit r_1 und r_2 zwei linear unabhängige Lösungen von (3.7) für $|x - x_0| \leq \rho$.

2. $r_1 = r_2$:
   Man erhält eine Lösung von (3.7) für $|x - x_0| \leq \rho$.

3. $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}, r_1 > r_2$:
   Man erhält mit r_1 durch den Ansatz (3.8) eine Lösung von (3.7) für $|x - x_0| \leq \rho$. Mit r_2 lassen sich im Potenzreihenansatz die Koeffizienten nicht so bestimmen, daß (3.8) die Gleichung erfüllt.

In den Fällen 2 und 3 erhält man durch den Ansatz $y(x) = g(x)\tau(x)$ eine zweite, linear unabhängige Lösung der Gleichung (3.7).

3.3 Reihenentwicklung der Lösung der Differentialgleichung

Betrachten wir nun wieder unsere Gleichung (1.1) und halten vorerst λ fest. Bei $x = x_\lambda := u^{-1}(\lambda)$ liegt eine schwache Singularität mit $a_{-1} = b_{-2} = 0$ vor, da für die Koeffizienten $a(x) \equiv 0$ und

$$b(x) = \lambda + \frac{q(x)}{u(x) - \lambda} = \sum_{n=-1}^{\infty} b_n (x - x_\lambda)^n = \frac{1}{x - x_\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-1} (x - x_\lambda)^n$$

gilt, wobei zu beachten ist, daß die Koeffizienten b_n von λ abhängen. Somit lautet die Indexgleichung (3.9):

$$r(r-1)=0$$

Die beiden Lösungen unterscheiden sich um eine ganze Zahl, also ist nach dem vorher Gesagten nur $r=1$ möglich. Für g ergibt sich daher:

$$g(x)=(x-x_\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_\lambda)^n \tag{3.10}$$

Für die zweite Ableitung erhalten wir:

$$g''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+1)\,n\,(x-x_\lambda)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}(n+2)(n+1)(x-x_\lambda)^n$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (1.1) ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}(n+2)(n+1)(x-x_\lambda)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_{n-1}(x-x_\lambda)^n\cdot\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x-x_\lambda)^m\equiv 0 \tag{3.11}$$

Daraus folgt:

$$c_{n+1}(n+2)(n+1)+\sum_{l=0}^{n}b_{n-l-1}\,c_l=0$$

bzw.

$$c_n=-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{l=0}^{n-1}b_{n-l-2}\,c_l\,,\ \ n\geq 1$$

Wir können o.B.d.A. $c_0=1$ setzen, d. h. $g'(x_\lambda)=1$. Für die weiteren Koeffizienten ergibt sich:

$$\begin{aligned}c_1&=-\frac{b_{-1}}{2}\\ c_2&=\frac{b_{-1}^2}{12}-\frac{b_0}{6}\end{aligned}$$

Dabei ist

$$b_{-1}=\operatorname{res}(b(x);x_\lambda)=\operatorname{res}\Big(\frac{q}{u-\lambda};x_\lambda\Big)=\frac{q(x_\lambda)}{u'(x_\lambda)} \tag{3.12}$$

Damit hat $g(x)$ folgende Form:

$$g(x)=(x-x_\lambda)-\frac{b_{-1}}{2}(x-x_\lambda)^2+\dots \tag{3.13}$$

Die Funktion $g(x)$ ist eine holomorphe Lösung der Differentialgleichung und läßt sich auf ganz U fortsetzen.

Um eine zweite, linear unabhängige Lösung der Gleichung zu erhalten, machen wir den Ansatz $y(x) = g(x)\tau(x)$. Einsetzen in die Differentialgleichung (1.1) ergibt:

$$g''\tau + 2g'\tau' + g\tau'' + \left(\lambda + \frac{q}{u-\lambda}\right) g\tau = 0$$
$$\Rightarrow 2g'\tau' + g\tau'' = 0$$

Wenn wir $w := \tau'$ setzen, erhalten wir:

$$2g'w + gw' = 0$$
$$\Rightarrow \frac{w'}{w} = -2\frac{g'}{g}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} w &= C\frac{1}{g^2} = \frac{C}{\left((x-x_\lambda) - \frac{b_{-1}}{2}(x-x_\lambda)^2 + \dots\right)^2} = \\ &= \frac{C}{(x-x_\lambda)^2 - b_{-1}(x-x_\lambda)^3 + \dots} = \\ &= C\left(\frac{1}{(x-x_\lambda)^2} + b_{-1}\frac{1}{x-x_\lambda} + \dots\right) \end{aligned}$$

Setzen wir o.B.d.A. hier $C := -\frac{1}{b_{-1}}$, dann ergibt sich

$$w(x) = -\frac{1}{b_{-1}}(x-x_\lambda)^{-2} - (x-x_\lambda)^{-1} + \dots$$

Für τ erhalten wir dann:

$$\tau(x) = \frac{1}{b_{-1}(x-x_\lambda)} - \operatorname{Log}(x-x_\lambda) + C_1 + \dots \tag{3.14}$$

Wir setzen o.B.d.A. hier $C_1 := 0$. Die Lösung $g\tau$ der Differentialgleichung hat dann folgende Form:

$$\begin{aligned} g(x)\tau(x) &= \\ &= -\operatorname{Log}(x-x_\lambda)\left((x-x_\lambda) - \frac{b_{-1}}{2}(x-x_\lambda)^2 + \dots\right) + \frac{1}{b_{-1}} - \frac{1}{2}(x-x_\lambda) + \dots \end{aligned}$$

Die Lösung $g\tau$ läßt sich auch auf $U \setminus \{x_\lambda\}$ holomorph fortsetzen, bei $x = x_\lambda$ besitzt sie einen Verzweigungspunkt. Außerhalb von x_λ besitzt $g\tau$ keine Singularität, weil die Differentialgleichung dort regulär ist. Wo g eine Nullstelle hat (die höchstens einfach sein kann), besitzt τ allerdings einen einfachen Pol. Zu beachten ist auch, daß $g \in \mathcal{D}$ für $\lambda \in [\alpha, \beta]$, jedoch $g\tau \notin \mathcal{D}$.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung in Abhängigkeit von λ. Für die Funktionen $g(x)$ und $\tau(x)$ schreiben wir jetzt $g(x;\lambda)$ bzw. $\tau(x;\lambda)$. Die Lösungen hängen holomorph von λ ab, bis auf die Singularität bei $\lambda = u(x)$ und etwaigen Polen von τ.

Die Wronskische Determinante der Lösungen g und $g\tau$ hängt nur von λ ab, da der Koeffizient der ersten Ableitung in der Differentialgleichung verschwindet. Wir schreiben hierfür $W(\lambda)$:

$$W(\lambda) = W(g, g\tau) = g(g\tau)' - g'g\tau = g^2\tau' = -\frac{1}{b_{-1}} = -\frac{u'(x_\lambda)}{q(x_\lambda)} \tag{3.15}$$

Untersuchen wir jetzt die Funktion $\tau(x;\lambda)$ genauer. Sie hat die folgende Gestalt

$$\begin{aligned}\tau(x;\lambda) &= \hat{\tau}(x;\lambda) - \operatorname{Log}(x - x_\lambda) = \\ &= \hat{\tau}(x;\lambda) - \ln|x - x_\lambda| - i\operatorname{Arg}(x - x_\lambda)\end{aligned}$$

wobei $\hat{\tau}(x;\lambda)$ reell ist für $x, \lambda \in \mathbb{R}$, $x \neq x_\lambda$. Definiert man jetzt für diese x, λ die reelle Funktion

$$\begin{aligned}\Theta(x;\lambda) &:= \hat{\tau}(x;\lambda) - \ln|x - x_\lambda| = \\ &= \frac{1}{b_{-1}(x - x_\lambda)} - \ln|x - x_\lambda| + \ldots,\end{aligned} \tag{3.16}$$

so gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau(x; \lambda \pm i\varepsilon) = \begin{cases} \Theta(x;\lambda), & x > x_\lambda \\ \Theta(x;\lambda) \pm i\pi, & x < x_\lambda \end{cases} \tag{3.17}$$

Außerdem ist $g\Theta$ eine reelle Lösung der Differentialgleichung.

3.4 Die Spektraldichte des Titchmarsh-Weylschen Koeffizienten

Wir wollen nun den Titchmarsh-Weylschen Koeffizienten durch die Funktionen g und τ ausdrücken. Dazu wählen wir wieder folgende Lösungsbasis:

$$\begin{aligned}\varphi(0;\lambda) &= 1 \qquad & \varphi'(0;\lambda) &= 0 \\ \psi(0;\lambda) &= 0 \qquad & \psi'(0;\lambda) &= 1\end{aligned}$$

Für φ setzen wir an:

$$\varphi = A\,g + B\,g\tau$$

Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} A\,g(0;\lambda) \;&+\; B\;\, g(0;\lambda)\tau(0;\lambda) &&= 1 \\ A\,g'(0;\lambda) \;&+\; B\,[g'(0;\lambda)\tau(0;\lambda) + g(0;\lambda)\tau'(0;\lambda)] &&= 0 \end{aligned}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} A &= \frac{g'(0;\lambda)\tau(0;\lambda) + g(0;\lambda)\tau'(0;\lambda)}{g(0;\lambda)^2\tau'(0;\lambda)} \\ B &= -\frac{g'(0;\lambda)}{g(0;\lambda)^2\tau'(0;\lambda)} \end{aligned}$$

Für ψ setzen wir an:

$$\psi = C\,g + D\,g\tau$$

Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$\begin{array}{lclcl} C\,g(0;\lambda) & + & D\;\, g(0;\lambda)\tau(0;\lambda) & = & 0 \\ C\,g'(0;\lambda) & + & D\,[g'(0;\lambda)\tau(0;\lambda) + g(0;\lambda)\tau'(0;\lambda)] & = & 1 \end{array}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} C &= -\frac{g(0;\lambda)\tau(0;\lambda)}{g(0;\lambda)^2\tau'(0;\lambda)} \\ D &= \frac{g(0;\lambda)}{g(0;\lambda)^2\tau'(0;\lambda)} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi(x;\lambda) &= g(x;\lambda)\frac{g(0;\lambda)\tau'(0;\lambda) - g'(0;\lambda)(\tau(x;\lambda) - \tau(0;\lambda))}{g(0;\lambda)^2\tau'(0;\lambda)} \\ \psi(x;\lambda) &= g(x;\lambda)\frac{\tau(x;\lambda) - \tau(0;\lambda)}{g(0;\lambda)\tau'(0;\lambda)} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den Titchmarsh-Weylschen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= -\frac{\varphi(1;\lambda)}{\psi(1;\lambda)} = \\ &= -\frac{g(0;\lambda)\tau'(0;\lambda) - g'(0;\lambda)(\tau(1;\lambda) - \tau(0;\lambda))}{g(0;\lambda)(\tau(1;\lambda) - \tau(0;\lambda))} = \\ &= \frac{g'(0;\lambda)}{g(0;\lambda)} - \frac{\tau'(0;\lambda)}{\tau(1;\lambda) - \tau(0;\lambda)} \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Dichte des Maßes σ der Integraldarstellung (3.5) von m im Intervall $[\alpha, \beta]$ bestimmen. Es sei für das folgende jetzt vorausgesetzt, daß $\widetilde{A}$ keinen Eigenwert im Intervall $[\alpha, \beta]$ besitzt. Dann ist $m(\lambda)$ um $[\alpha, \beta]$ beschränkt, und wir können die Dichte mit Hilfe der Stieltjesschen Umkehrformel (3.6) berechnen. Es sei Δ ein Intervall, $\Delta \subseteq [\alpha, \beta]$, sodaß Δ keinen Punkt λ mit $g(0;\lambda) = 0$ enthält (diese sind nur endlich viele). Dann gilt:

$$\sigma(\Delta) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta} \Big(m(\lambda + i\varepsilon) - m(\lambda - i\varepsilon)\Big) d\lambda =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \Big[- \frac{\tau'(0; \lambda + i\varepsilon)}{\tau(1;\lambda) - \tau(0;\lambda + i\varepsilon)} + \frac{\tau'(0;\lambda - i\varepsilon)}{\tau(1;\lambda) - \tau(0;\lambda - i\varepsilon)} \Big] d\lambda$$

$$= -\int_{\Delta} \tau'(0,\lambda) \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\Theta(1;\lambda) - \Theta(0;\lambda) - i\pi} - \frac{1}{\Theta(1;\lambda) - \Theta(0;\lambda) + i\pi} \right] d\lambda$$

$$= \int_{\Delta} \frac{-\tau'(0;\lambda)}{\left(\Theta(1;\lambda) - \Theta(0;\lambda)\right)^2 + \pi^2} d\lambda$$

Also gilt der folgende Satz:

Satz 3.2 *Die Bezeichnungen seien wie oben. Weiters besitze $\widetilde{A}$ keinen Eigenwert im Intervall $[\alpha, \beta]$. Dann ist die Dichte des Maßes σ im Intervall $[\alpha, \beta]$ gegeben durch*

$$\frac{-\tau'(0;\lambda)}{\left(\Theta(1;\lambda) - \Theta(0;\lambda)\right)^2 + \pi^2} \tag{3.18}$$

3.5 Eine Fourier-Transformation

Wir wollen jetzt noch eine Fourier-Transformation zwischen $\mathcal{H}_1$ und L^2_σ bestimmen, wobei σ das Maß in der Integraldarstellung (3.5) von m ist. Bezeichnen wir dazu die Spektralfunktion von $\widetilde{A}$ mit E_λ und sei $\vec{f} = \binom{f}{0} \in \widetilde{\mathcal{H}}$. Außerdem sei $N > 0$ mit $[\alpha, \beta] \subseteq (-N, N)$ und weder N noch $-N$ ein Eigenwert von $\widetilde{A}$. Dann gilt mit der Stieltjesschen Umkehrformel:

$$\begin{aligned}
&(E_N \vec{f}, \vec{f}) - (E_{-N}\vec{f}, \vec{f}) = \qquad (3.19)\\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{N} [(R_{\lambda + i\varepsilon}(\widetilde{A})\vec{f}, \vec{f}) - (R_{\lambda - i\varepsilon}(\widetilde{A})\vec{f}, \vec{f})] d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{N} [(-L(\lambda + i\varepsilon)^{-1} f, f) - (-L(\lambda - i\varepsilon)^{-1} f, f)] d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{\alpha - 0} \int_0^1 \int_0^1 [G(x,\xi;\lambda + i\varepsilon) - G(x,\xi;\lambda - i\varepsilon)] f(\xi) d\xi\, \overline{f(x)} dx d\lambda - \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\alpha - 0}^{\beta + 0} \int_0^1 \int_0^1 [G(x,\xi;\lambda + i\varepsilon) - G(x,\xi;\lambda - i\varepsilon)] f(\xi) d\xi\, \overline{f(x)} dx d\lambda - \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\beta + 0}^{N} \int_0^1 \int_0^1 [G(x,\xi;\lambda + i\varepsilon) - G(x,\xi;\lambda - i\varepsilon)] f(\xi) d\xi\, \overline{f(x)} dx d\lambda
\end{aligned}$$

Für das erste Integral ergibt sich:

$$-\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-N}^{\alpha - 0} \int_0^1 \Bigg[\int_0^x \Big(\psi(\xi; \lambda + i\varepsilon)(\varphi(x;\lambda + i\varepsilon) + m(\lambda + i\varepsilon)\psi(x;\lambda + i\varepsilon)) -$$

$$- \psi(\xi;\lambda-i\varepsilon)(\varphi(x;\lambda-i\varepsilon)+m(\lambda-i\varepsilon)\psi(x;\lambda-i\varepsilon))\Big)f(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_x^1 \Big(\psi(x;\lambda+i\varepsilon)(\varphi(\xi;\lambda+i\varepsilon)+m(\lambda+i\varepsilon)\psi(\xi;\lambda+i\varepsilon)) -$$

$$- \psi(x;\lambda-i\varepsilon)(\varphi(\xi;\lambda-i\varepsilon)+m(\lambda-i\varepsilon)\psi(\xi;\lambda-i\varepsilon))\Big)f(\xi)d\xi\Bigg]\overline{f(x)}dxd\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-N}^{\alpha-0}\Bigg[m(\lambda+i\varepsilon)\int_0^1\int_0^1 \psi(x;\lambda+i\varepsilon)\psi(\xi;\lambda+i\varepsilon)f(\xi)\overline{f(x)}d\xi dx -$$

$$- m(\lambda-i\varepsilon)\int_0^1\int_0^1 \psi(x;\lambda-i\varepsilon)\psi(\xi;\lambda-i\varepsilon)f(\xi)\overline{f(x)}d\xi dx\Bigg]d\lambda =$$

$$= \sum_{-N<\lambda_j<\alpha} -\mathrm{res}(m;\lambda_j)\left|\int_0^1 \psi(x;\lambda_j)f(x)dx\right|^2 \tag{3.20}$$

Analog erhält man für das dritte Integral:

$$\sum_{\beta<\lambda_j<N} -\mathrm{res}(m;\lambda_j)\left|\int_0^1 \psi(x;\lambda_j)f(x)dx\right|^2 \tag{3.21}$$

Das zweite Integral wollen wir mit Hilfe der Funktionen g und τ umschreiben. Dazu müssen wir die Greensche Funktion für $\lambda \notin \sigma(\widetilde{A})$ berechnen. Die Funktionen

$$y_1(x;\lambda) = (\tau(x;\lambda) - \tau(0;\lambda))g(x;\lambda) \tag{3.22}$$
$$y_2(x,\lambda) = (\tau(x;\lambda) - \tau(1;\lambda))g(x;\lambda) \tag{3.23}$$

erfüllen die Randbedingungen

$$y_1(0;\lambda) = 0 \;\text{ bzw. }\; y_2(1;\lambda) = 0$$

und genügen der Differentialgleichung. Die Wronskische Determinante dieser Funktionen lautet (Wir schreiben hier kurz τ_0 für $\tau(0;\lambda)$ und τ_1 für $\tau(1;\lambda)$):

$$\begin{aligned} & W((\tau-\tau_0)g,(\tau-\tau_1)g) = \\ &= (\tau-\tau_0)\,g\,((\tau-\tau_1)g)' - (\tau-\tau_1)\,g\,((\tau-\tau_0)g)' = \\ &= (\tau-\tau_0)(\tau-\tau_1)gg' + (\tau-\tau_0)\tau' g^2 - \\ &\quad - (\tau-\tau_1)(\tau-\tau_0)gg' - (\tau-\tau_1)\tau' g^2 = \\ &= (\tau_1-\tau_0)\tau' g^2 = (\tau(1;\lambda)-\tau(0;\lambda))\underbrace{W(\lambda)}_{\neq 0}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

wobei $W(\lambda)$ in (3.15) definiert ist.

Die Greensche Funktion lautet nun:

$$G(x,\xi;\lambda) = \frac{1}{W(y_1,y_2)} \cdot \begin{cases} y_1(x;\lambda)y_2(\xi;\lambda), & x \leq \xi \\ y_2(x;\lambda)y_1(\xi;\lambda), & x \geq \xi \end{cases}$$

$$= \frac{g(x;\lambda)g(\xi;\lambda)}{W(\lambda)(\tau(1;\lambda)-\tau(0;\lambda))} \cdot \begin{cases} (\tau(x;\lambda)-\tau(0;\lambda))(\tau(\xi;\lambda)-\tau(1;\lambda)), & x \leq \xi \\ (\tau(x;\lambda)-\tau(1;\lambda))(\tau(\xi;\lambda)-\tau(0;\lambda)), & x \geq \xi \end{cases}$$

Um den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}[G(x,\xi;\lambda+i\varepsilon) - G(x,\xi;\lambda-i\varepsilon)] \tag{3.25}$$

zu berechnen, braucht man nur die Teile mit τ zu betrachten, weil der Rest keine Verzweigung hat. Dabei müssen wir mehrere Fälle unterscheiden, je nachdem, wo x und ξ liegen. Wir verwenden dabei auch folgende Beziehung:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} (\tau(1;\lambda \pm i\varepsilon) - \tau(0;\lambda \pm i\varepsilon)) = (\Theta(1;\lambda) - \Theta(0;\lambda)) \mp i\pi$$

Wir berechnen:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left[\frac{(\tau(x;\lambda+i\varepsilon)-\tau(0;\lambda+i\varepsilon))(\tau(\xi;\lambda+i\varepsilon)-\tau(1;\lambda+i\varepsilon))}{\tau(1,\lambda+i\varepsilon)-\tau(0,\lambda+i\varepsilon)} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\tau(x;\lambda-i\varepsilon)-\tau(0;\lambda-i\varepsilon))(\tau(\xi;\lambda-i\varepsilon)-\tau(1;\lambda-i\varepsilon))}{\tau(1;\lambda-i\varepsilon)-\tau(0;\lambda-i\varepsilon)} \right] = \tag{3.26}$$

i) $0<x<\xi<u^{-1}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} (3.26) &= (\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda)) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda)+i\pi}{\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda)-i\pi} - \frac{\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda)-i\pi}{\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda)+i\pi} \right] = \\ &= (\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda)) \frac{2\pi i(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(0;\lambda))}{(\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda))^2+\pi^2} \end{aligned}$$

Für $0<\xi<x<u^{-1}(\lambda)$ ergibt sich das gleiche, weil man x und ξ einfach vertauschen kann.

ii) $0<x<u^{-1}(\lambda)<\xi<1$:

$$\begin{aligned} (3.26) &= (\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda))(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda)) \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda)-i\pi} - \frac{1}{\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda)+i\pi} \right] = \\ &= 2\pi i \frac{(\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda))(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda))}{(\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda))^2+\pi^2} \end{aligned}$$

iii) $0<\xi<u^{-1}(\lambda)<x<1$:
Im vorigen Ergebnis muß man einfach x und ξ vertauschen.

iv) $u^{-1}(\lambda)<x<\xi<1$:

$$\begin{aligned}
(3.26) \quad &= \left[\frac{\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda)-i\pi}{\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda)-i\pi} - \frac{\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda)+i\pi}{\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda)+i\pi}\right] \cdot \\
&\quad \cdot (\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda)) = \\
&= \frac{(\Theta(x;\lambda)-\Theta(1;\lambda))(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda))}{(\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda))^2+\pi^2}
\end{aligned}$$

Für $u^{-1}(\lambda)<\xi<x<1$ ergibt sich das gleiche, weil man nur x und ξ vertauschen muß.

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}[G(x,\xi;\lambda+i\varepsilon)-G(x,\xi;\lambda-i\varepsilon)] = \\
&\quad = \frac{g(x;\lambda)g(\xi;\lambda)}{W(\lambda)[(\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda))^2+\pi^2]} \cdot \\
&\quad \cdot \begin{cases} (\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda))(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(0;\lambda)), & x,\xi<u^{-1}(\lambda) \\ (\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda))(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda)), & x<u^{-1}(\lambda)<\xi \\ (\Theta(x;\lambda)-\Theta(1;\lambda))(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(0;\lambda)), & \xi<u^{-1}(\lambda)<\xi \\ (\Theta(x;\lambda)-\Theta(1;\lambda))(\Theta(\xi;\lambda)-\Theta(1;\lambda)), & u^{-1}(\lambda)<x,\xi \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung:

$$\widetilde{\psi}(x;\lambda) := \frac{1}{g(0;\lambda)\tau'(0;\lambda)} \cdot \begin{cases} (\Theta(x;\lambda)-\Theta(0;\lambda))g(x;\lambda), & x<u^{-1}(\lambda) \\ (\Theta(x;\lambda)-\Theta(1;\lambda))g(x;\lambda), & x>u^{-1}(\lambda) \end{cases} \tag{3.28}$$

Damit gilt also:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{-1}{2\pi i}[G(x,\xi;\lambda+i\varepsilon)-G(x,\xi;\lambda-i\varepsilon)] = \frac{-\tau'(0;\lambda)\widetilde{\psi}(x;\lambda)\widetilde{\psi}(\xi;\lambda)}{(\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda))^2+\pi^2} \tag{3.29}$$

Wenn man jetzt den Grenzwert $N\to\infty$ in der Formel (3.19) durchführt, so erhält man mit (3.20), (3.21) und (3.29) schließlich:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^2 dx &= (\vec{f},\vec{f}) = \\
&= \lim_{N\to\infty}((E_N\vec{f},\vec{f})-(E_{-N}\vec{f},\vec{f})) \\
&= \sum_{\lambda_j\in\sigma(\widetilde{A})\setminus[\alpha,\beta]} -\mathrm{res}(m;\lambda_j)\left|\int_0^1 \psi(x;\lambda_j)f(x)dx\right|^2
\end{aligned}$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta} \frac{-\tau(0;\lambda)}{\left(\Theta(1;\lambda)-\Theta(0;\lambda)\right)^2+\pi^2} \left| \int_0^1 \widetilde{\psi}(x;\lambda) f(x)dx \right|^2 d\lambda \tag{3.30}$$

Es sei σ das Maß aus dem vorigen Abschnitt. Wenn wir jetzt folgende Fourier-Transformation definieren:

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) := \begin{cases} \int_0^1 \widetilde{\psi}(x;\lambda) f(x)dx & \text{für } \lambda \in [\alpha,\beta] \\ \int_0^1 \psi(x;\lambda) f(x)dx & \text{für } \lambda \notin [\alpha,\beta] \end{cases} \tag{3.31}$$

so erhalten wir die Gleichung:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) \tag{3.32}$$

Es ist also $\mathcal{F}$ eine Isometrie von $\mathcal{H}_1$ in den Raum L^2_σ.

Literaturverzeichnis

[AG] N. I. Achieser, I. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum.* Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1981.

[AL] V. Adamjan, H. Langer, *Spectral properties of a class of rational operator valued functions.* Journal of Operator Theory 33 (1995), 259 – 277.

[ALM] V. Adamjan, H. Langer, R. Mennicken, *Eigenvalues of a Sturm-Liouville problem depending rationally on the eigenvalue parameter.* Proceedings of MTNS, Vol. II, Invited and Contributed Papers, 1993, 569 – 594.

[ALMS] F. V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, A. A. Shkalikov, *The essential spectrum of some matrix operators.* Mathematische Nachrichten 167 (1994), 5 – 20.

[Ba] Je. P. Bogomolova, *Einige Fragen der Spektraltheorie eines nichtselbstadjungierten Differentialoperators mit einer „fließenden" Singularität im Koeffizienten.* Differentsial'nje Uravnenija 21, 11 (1985), 1843 – 1849 [Russisch].

[GGK] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators, Vol. I.* Operator Theory: Advances and Application, Vol. 49, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, 1990.

[H] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1991.

[K] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1966.

[LMM] H. Langer, R. Mennicken und M. Möller, *A second order differential operator depending nonlinearly on the eigenvalue parameter.* Operator Theory: Advances and Application, Vol. 48, Birkhäuser Verlag, Basel, 1990, 319 – 332.

[MSS] R. Mennicken, H. Schmid, A. A. Shkalikov, *Criterion on the eigenvalue accumulation of nonlinear spectral problems for ordinary differential operators with singularities.* Proceedings of MTNS, Vol. II, Invited and Contributed Papers, 1993, 793 – 798.

[N] M. A. Naimark, *Lineare Differentialoperatoren.* Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

[RS] M. Reed, B. Simon, *Analysis of Operators.* Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 4, Academic Press, New York – London, 1978.