D I P L O M A R B E I T

Der Spektralsatz der nichtarchimedischen Funktionalanalysis

ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von ao. Univ-Prof. Dr. Harald Woracek

durch

Andreas Hula

Konrad Dudengasse 14
1130 Wien

Datum

Unterschrift

Vorwort

Die Idee zur vorliegenden Arbeit kam mir beim Studium des Lehrbuchs [1] von Reinhold Remmert. Darin erwähnt er, dass auch über anderen Körpern als $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ eine nichttriviale Theorie analytischer Funktionen aufbauen läßt.
Da es eine eigene Funktionentheorie für solche Körper gab, wollte ich wissen, ob auch in Richtung einer eigenen Funktionalanalysis schon geforscht worden war. Mit der Unterstützung meines späteren Diplomarbeitsbetreuers Professor Harald Woracek suchte ich nach Texten und Lehrbüchern zur nichtarchimedischen Funktionalanalysis. Wir wurden schnell fündig und insbesondere die Bücher [2] und [3] erwiesen sich als ergiebige Quellen zu diesem Thema.
Die Konstruktion des nichtarchimedischen Spektralsatzes wählte ich als Ziel der Arbeit, da dieser Spektralsatz erstens erst vor relativ kurzer Zeit veröffentlicht wurde (meine Quelle [4] ist 2002 in die AMS Datenbank aufgenommen worden) und zweitens der Spektralsatz und der darauf aufbauende Funktionalkalkül für mich schon in der archimedischen Theorie zwei der schönsten Resultate überhaupt waren. Der nichtarchimedische Spektralsatz gilt sogar noch etwas allgemeiner als der archimedische Spektralsatz für normale Operatoren.
Ich habe die Arbeit auf Deutsch verfaßt, da meines Wissens nach noch kein deutschsprachiges Lehrbuch den nichtarchimedischen Spektralsatz behandelt.
Die vorliegende Arbeit wurde im Anschluß an ein Projektpraktikum über die Konstruktion der p-adischen komplexen Zahlen geschrieben. Das Ergebnis des Praktikums findet sich als Kapitel 1 auch in dieser Arbeit und gelegentlich werden einige Aussagen über nichtarchimedische Körper und ultrametrische Räume aus diesem Kapitel 1 in späteren Kapiteln verwendet werden.
In Kapitel 2 beginnt die eigentliche Diplomarbeit mit einigen Anmerkungen und Sätzen zur Topologie total- unzusammenhängender Räume.
Kapitel 3 widmet sich den nichtarchimedischen Banachräumen und stellt alle im Folgenden bedeutsamen Aussagen über die nichtarchimedische Funktionalanalysis zur Verfühgung. Vorallem die Definition von Orthogonalität in Banachräumen macht einen großen Unterschied zur archimedischen Theorie. Auch Analoga kompakter Operatoren und separabler Räume werden behandelt. Nahezu alles, was in diesem Kapitel behandelt wird, ist auch notwendig für die späteren Kapitel.
So benötigt die Theorie nichtarchimedischer Maße, die den Inhalt von Kapitel 4 bildet, mehrfach Aussagen über Orthogonalität in Banachräumen. In diesem Kapitel werden auch diverse Aussagen bewiesen bzw. Sachverhalte erwähnt, die später nicht mehr benötigt werden, aber doch für sich allein interessant sind.
Das Kapitel 5 behandelt schließlich nichtarchimedische Banachalgebren, die Definiton des Spektrums und den Spektralsatz selbst.
Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse in Algebra, Topologie, (archimedischer) Funktionalanalysis und (archimedischer) Maßtheorie. Die letzten beiden Gebiete vor Allem deswegen um Vergleiche zwischen den Theorien nachvollziehen zu können.
Ich möchte mich noch herzlich bei meinem Betreuer Professor Woracek bedan-

ken, der mir viel Unterstützung und konstruktive Kritik hat angedeihen lassen.

WIEN, August 2005 *Andreas Hula*

Vorwort zum Projektpraktikum

Seit der Entdeckung der p-adischen Zahlen durch Kurt Hensel haben sich viele Mathematiker mit diesem interessanten Beispiel eines nichtarchimedisch bewerteten Körpers beschäftigt und eine ansehnliche Theorie der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und gewisser Erweiterungskörper entwickelt.
Durch eine Bemerkung im Buch von Reinhold Remmert „Funktionentheorie 1“ erfuhr ich von der Funktionentheorie über anderen Körpern als $\mathbb{C}$ und interessierte mich insbesondere dafür, wie weit Analogien zum archimedischen Fall möglich sind bzw auch Funktionalanalysis über einem geeigneten Erweiterungskörper bisher studiert wurde. Zu Zwecken der Funktionalanalysis ist es natürlich besonders wichtig, dass der betrachtete Grundkörper sowohl algebraisch abgeschlossen, als auch analytisch vollständig ist. Diese Bedingungen führen in natürlicher Weise zu den p-adischen komplexen Zahlen $\mathbb{C}_p$, welche auch für die Theorie p-adischer analytischer Funktionen die beherrschende Rolle spielen. Daher habe ich die genaue Konstruktion der p-adischen komplexen Zahlen als Thema meines Projektpraktikums gewählt.
Die Arbeit ist so aufgebaut, dass zuerst von Definition und Eigenschaften ultrametrischer Räume(Kapitel 1) und Gruppen(Kapitel 2) ausgehend über die p-adischen ganzen Zahlen(Kapitel 3) die p-adischen Zahlen konstruiert werden(Kapitel 4). Nach dieser zunehmenden Spezialisierung der betrachteten Objekte werden in Kapitel 5 allgemein bewertete und insbesondere nichtarchimedisch bewertete Körper betrachtet. Der Satz von Ostrowski in diesem Kapitel ist ein kleiner Höhepunkt der Arbeit, da er die Klassifikation aller Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ erlaubt. In Kapitel 6 wird dann der algebraische Abschluß der p-adischen Zahlen konstruiert und insbesondere gezeigt, dass dieser nicht vollständig ist. Eine Konstruktion mit Hilfe von Ultrafiltern erlaubt in Kapitel 7 die Konstruktionen eines vollständigen und algebraisch abgeschlossenen Körpers Ω_p, der den algebraischen Abschluß der p-adischen Zahlen umfaßt. Für unsere Zwecke suchen wir allerdings einen möglichst kleinen(weil eventuell separablen) vollständigen und abgeschlossen Erweiterungskörper des algebraischen Abschlußes. Dieser wird im Kapitel 8 konstruiert, in dem der algebraische Abschluß in Ω_p (topologisch) abgeschlossen wird. Der entstehende Körper sind die p-adischen komplexen Zahlen und diese haben die geforderten Vollständigkeitseigenschaften. Weiters wird deren algebraische Isomorphie zu den bekannten komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ gezeigt.
An Vorkenntnissen werden Analysis, Algebra und etwas Topologie gebraucht. In etwa in dem Umfang der üblichen Grundvorlesungen bzw. im Falle der Topologie die Grundkenntnisse der mengentheoretischen Topologie(Satz von Tychonoff, Produkträume, metrische Räume).
Ich möchte mich an dieser Stelle noch bei meinem Projektbetreuer H.Woracek bedanken. Ohne ihn hätte die Arbeit nicht die vorliegende Form erreicht.

Andreas Hula

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die p-adischen komplexen Zahlen

1.1 Ultrametrische Räume

Definition 1.1 *Sei M eine Menge. Eine Abbildung $M \times M \mapsto \mathbb{R}$ heißt Ultrametrik auf M, wenn gilt:*

(a)
$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(b)
$$d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$$

(c)
$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \quad \forall x, y, z \in M$$

Die Gleichung (c) aus der Definition heißt verschärfte Dreiecksungleichung und die Menge M wird mit einer solchen Metrik zu einem sogenannten ultrametrischen Raum. Aus der verschärften Dreiecksungleichung folgen viele, in Vergleich zur z.B euklidischen Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ ungewohnte, Eigenschaften der Topologie.

Lemma 1.2 *In einem ultrametrischen Raum M gilt:*

(a) Falls $d(x, z) > d(z, y)$, dann gilt $d(x, y) = d(x, z)$. Anschaulich gesprochen ist also jeder Punkt einer Kugel $B_{\leq r}(a) := \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$ auch Mittelpunkt der Kugel. Die Aussage gilt analog für offene metrische Kugeln $B_{<r}(a) := \{x \in M : d(x, a) < r\}$.

(b) Falls $c \in B_{<r}(a) \cap B_{\leq r'}(b), \quad a,b,c \in M$ *mit* $r \leq r'$ *folgt* $B_{\leq r}(b)$*. Es ist dabei nicht wesentlich, ob man metrisch offene oder abgeschlossene Kugeln nimmt.*

(c) Der Durchmesser $\delta(B_{\leq r}(a)) := \max_{y,x \in B_{\leq r}(a)} d(x,y)$ *einer Kugel ist kleiner gleich ihrem Radius.*

Beweis:

(a) Folgt sofort aus der verschärften Dreiecksungleichung.

(b) Sei c gemeinsamer Punkt von $B_{<r}(a)$ und $B_{\leq r'}(b)$. Aus (a) folgt $B_{<r}(a) = B_{<r}(c)$ und $B_{\leq r'}(b) = B_{\leq r'}(c)$. Damit gilt $B_{<r}(c) \subset B_{\leq r'}(c)$ falls $r \leq r'$, sowie $B_{\leq r'}(c) \subset B_{<r}(c)$ falls $r' < r$.
Alle anderen Fälle gehen analog.

(c) gilt offensichtlich. $\square$

Weiters gilt:

Satz 1.3 *Sei* M *ein ultrametrischer Raum. Dann gelten:*

(a) Falls $d(x,z) \neq d(z,y)$*, dann gilt* $d(x,y) = \max\{d(x,z), d(z,y)\} \quad \forall x,y,z \in M$.

(b) Falls $x \in S_r(a)$*, wobei* $S_r(a) := \{x \in M : d(x,a) = r\}$ *und* $r > 0$*, dann gilt* $B_{<r}(x) \subset S_r(a)$ *und* $S_r(a) = \cup_{x \in S_r(a)} B_{<r}(x)$.

Beweis:

(a) Folgt sofort aus der verschärften Dreiecksungleichung

(b) Enthält eine Kugel B den Punkt a nicht dann liegt sie auf der Sphäre $S_r(a)$ wobei $r = d(a,B)$, $d(a,B) = \inf_{x \in B} d(a,x)$:

Falls $B = B_{<s}(b)$, dann gilt $r = d(a,b) \geq s$ und $B \subset S_r(a)$
Falls $B = B_{\leq s}(b)$, dann gilt $r = d(a,b) > s$ und $B \subset S_r(a)$
$\square$

Korollar 1.4 *Für* $n \geq 3$ *gilt: Die Punkte* $x_1, \ldots, x_n$ *seien Teil eines Zykluses,* $x_{n+1} = x_1$*. Dann existieren zumindest zwei Paare aufeinanderfolgender Punkte, deren Abstand maximal ist.*

Beweis:
Induktiv gilt für eine endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$:

$$d(x_1, x_n) \leq \max\{d(x_1, x_2), \ldots, d(x_{n-1}, x_n)\}.$$

Für $n \geq 3$ gilt: Die Punkte $x_1, \ldots, x_n$ seien Teil eines Zykluses, $x_{n+1} = x_1$ und o.B.d.A gelte $d(x_1, d_n) = \max\{d(x_1, x_2), \ldots, d(x_n, x_{n+1})\}$. Da gilt $d(x_1, d_n) \leq \max\{d(x_1, x_2), \ldots, d(x_{n-1}, x_n)\}$, existiert also zumindest ein Index i mit $d(x_1, x_n) = d(x_i, x_{i+1})$. $\square$

Satz 1.5 *(a) Jede Sphäre $S_r(a)$ ist sowohl abgeschlossen, als auch offen.*

(b) Die abgeschlossenen Kugeln mit Radius größer 0 sind auch offen.

(c) Alle offenen Kugeln sind abgeschlossen.

(d) Seien B und B' zwei disjunkte Kugeln.
Dann gilt

$$d(B, B') = d(x, x') \quad \forall x \in B, x' \in B'$$

Beweis:

(a) Folgt aus Punkt (b) des vorigen Satzes.

(b) Falls $r > 0$ dann ist $B_{\leq r}(a) = B_{<r}(a) \cup S_r(a)$ und somit offen.

(c) Mit $r > 0$ ist $S_r(a)$ offen. Daher ist $B_{<r}(a) = B_{\leq r}(a) - S_r(a)$ abgeschlossen. Für $r = 0$ ist die Aussage trivial.

(d) Man wähle vier Punkte aus zwei disjunkten Kugeln $x, y \in B, x', y' \in B'$ und bilde den Zyklus x, x', y', y. Zwei der möglichen Paare dieses vierer Zyklus haben maximalen Abstand und dies müssen x, x' und y, y' sein:

$$d(x, x') = d(y, y')$$

Daher haben alle Paare von Punkten den gleichen Abstand und dieser ist:

$$d(B, B') = \inf_{x \in B, x' \in B'} d(x, x') \qquad \square$$

Die Topologie eines Ultrametrischen Raumes wird also von clopen(zugleich offenen und abgeschlossenen) Mengen erzeugt.
Im Bezug auf Cauchy-Folgen im metrischen Sinne gilt eine besonders angenehme Eigenschaft.

Satz 1.6 *(a) Eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in M ist bereits dann eine Cauchy-Folge, wenn gilt:*

$$d(x_n, x_{n+1}) \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

(b) Falls $x_n \longrightarrow x \neq a$ dann gilt $d(x_n, a) = d(x, a)$ falls n hinreichend groß ist.

Beweis:

(a) Aus $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon \quad \forall n \geq N$ folgt:

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \max_{0\leq i\leq m} \{x_{n+i}, x_{n+i+1}\} < \epsilon \qquad \forall n \geq N$$

und $m \geq 0$.

(b) Es gilt $d(x_n, a) = d(x, a)$ sobald $d(x_n, x) < d(x, a)$. □

Eine nützliche Aussage über kompakte Teilmengen ultrametrischer Räume:

Satz 1.7 *Sei $\Omega \subset X$ kompakt:*

(a) $\forall a \in X - \Omega$ gilt: Die Menge der angenommenen Abstände $d(x, a) \quad (x \in \Omega)$ ist endlich.

(b) $\forall a \in \Omega$ gilt: Die Menge der Abstände $d(x, a) \quad (x \in \Omega - a)$ ist diskret in den positiven reellen Zahlen.

Beweis:

(a) $d(x, y) < d(x, a) \Rightarrow d(y, a) = d(x, a)$, da $a \notin \Omega$ ist die Funktion $f : x \to d(x, a)$ lokal konstant auf Ω und stetig. Die Urbilder $f^{-1}(c)$(für $c \in f(\Omega)$) bilden eine offene Überdeckung von Ω. Daher ist das Bild eine endliche Menge.

(b) Die Abbildung $f : x \to d(x, a)$ ist lokal konstant auf Ω und daher hat für $\epsilon > 0$ ihre Einschränkung auf die kompakte Menge $\Omega - B_{<\epsilon}(a)$ eine endliche Bildmenge.
Daher sind alle Mengen der Form $[\epsilon, \infty) \cap \{d(x, a) : x \in \Omega, x \neq a\}$ endlich.
Also ist $f(\Omega - a)$ diskret in $[0, \infty)$. □

$Zusammenfassung$:
In einem ultrametrischen Raum M gelten:

(a) Jeder Punkt in einer metrischen Kugel ist Mittelpunkt der Kugel.

$$b \in B_{\leq r}(a) \Rightarrow B_{\leq r}(b) = B_{\leq r}(a).$$

Analog für offene Kugeln.

(b) Falls zwei Kugeln einen Punkt gemeinsam haben, ist eine schon in der anderen enthalten.

(c) Sphären sind zugleich offen und abgeschlossen. $S_r(a) = \cup_{x \in S_r(a)} B_{<r}(x)$.

(d) Eine Folge ist eine Cauchy-Folge, genau dann wenn $d(x_n, x_{n+1}) \longrightarrow 0$.

(e) Ist der ultrametrische Raum kompakt, dann ist die Menge der Abstände $\{c \in \mathbb{R} : \exists x, y \in M, x \neq y, c = d(x, y)\}$ für einen festen Punkt x, diskret in den positiven reellen Zahlen.

In ultrametrischen Räumen gibt es neben der metrischen Vollständigkeit eine zusätzliche Vollständigkeitseigenschaft.

Definition 1.8 *Ein ultrametrischer Raum X heißt sphärisch vollständig, wenn jede abnehmende Folge von abgeschlossenen Kugeln einen nichtleeren Durchschnitt hat:*

$$\forall (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, r_j \leq r_i \forall j < i, B_{\leq r_j}(x_j) \subset B_{\leq r_i}(x_i), \forall j < i \Rightarrow \bigcap_i B_{\leq r_i}(x_i) \neq \emptyset.$$

Anmerkung:
Aus sphärisch vollständig folgt vollständig, da über die Definition einer Cauchy-Folge eine passende Folge von Kugeln gefunden werden kann. Aus der Definition einer Cauchyfolge, weiß man,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : d(x_i, x_j) < \epsilon. \quad \forall i, j > N$$

Damit ist mit $\epsilon = \frac{1}{n}$,$x_j \in B_{\leq \frac{1}{n}}(x_n), \forall n, j > N$. Da für zwei Kugeln die einen Punkt gemeinsam haben wenigstens eine in der anderen enthalten sein muß, bilden diese Kugeln eine abnehmende Folge und aufgrund der sphärischen Vollständigkeit hat die Folge der $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ nichtleeren Schnitt. Es gibt also mindestens ein Element, das bis auf ein beliebiges ϵ an jedem x_i(i groß genug) liegt. Gegen dieses konvergiert die Folge definitionsgemäß. Die Umkehrung gilt nicht. Die Eigenschaft der sphärischen Vollständigkeit spielt in der nicht-archimedischen Funktionalanalysis eine große Rolle, da sie ein Analogon zum Satz von Hahn-Banach ermöglicht. Für manche Aussagen wiederrum sind die noch zu definierenden sphärisch vollständigen nichtarchimedischen Körper zu groß. Zum Beispiel sind sphärisch vollständige Banachräume nie reflexiv und ein Analogon des Satzes von Riesz wird z.B. durch sphärische Vollständigkeit eines nichtarchimedischen Körpers weniger scharf.

1.2 Ultrametrische Gruppen

Ist auf einer abelschen Gruppe eine translationsinvariante Ultrametrik gegeben, so läßt sich eine sogenannte ultrametrische Bewertung auf der Gruppe folgendermaßen definieren:

Definition 1.9 *Sei G eine abelsche Gruppe, auf der eine stetige Abbildung $|.|: G \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben sei, für die gilt*

$$|-x| = |x|$$

und

$$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Eine solche Gruppe nennen wir eine ultrametrische oder ultrametrisch-bewertete Gruppe. Die Abbildung $|.|$ heißt eine ultrametrische Bewertung auf G.

Lemma 1.10 *Sei G eine abelsche Gruppe. Ist auf G eine ultrametrische Bewertung gegeben, so definiert $d(x,y) = |x-y|$ eine translationsinvariante Ultrametrik auf G.*
Ist umgekehrt eine translationsinvariante Ultrametrik $d(.,.)$ auf G gegeben, so definiert $|x| := d(x,0)$ eine ultrametrische Bewertung auf G.

Beweis: Trivial. □
Für die Konvergenz von Reihen gilt:

Satz 1.11 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in einer vollständigen ultrametrischen Gruppe G. Dann gilt*

$$(a_n)_{n\geq 0} \to 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \textit{ist konvergent}$$

Beweis:
Die Notwendigkeit der Bedingung ist trivial. Umgekehrt gilt für die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\geq 0} : S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$. Da also $d(S_{n+1}, S_n) \longrightarrow 0)$ ist die Folge der Partialsummen konvergent.□

Zusammenfassung:

(a) (Der Stärkste gewinnt)
Sei G eine ultrametrische Gruppe. Dann gilt:

$$|x| > |y| \Rightarrow |x+y| = |x|$$

(b) (Dreieckseigenschaft)
In einer ultrametrischen Gruppe sind alle Dreiecke gleichschenkelig:

$$a+b+c = 0, |c| < |b| \Rightarrow |a| = |b| \quad a,b,c \in G$$

(c) (Kompetitivität)
Seien $a_1, \dots, a_n \in G$.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \Longrightarrow \exists i \neq j \qquad |a_i| = |a_j| = \max |a_k|$$

(d) (Cauchyeigenschaft)
Seien $a_n \in G, \forall n$. Dann gilt:

$$(a_n)_{n \geq 0} \quad \text{ist eine Cauchyfolge} \Longleftrightarrow d(a_n, a_{n+1}) \longrightarrow 0.$$

(e) (in vollständigen Gruppen)
Sei G eine vollständige ultrametrische Gruppe und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in G.

$$\sum_{n \geq 0} a_n \quad \text{ist konvergent} \Longleftrightarrow a_n \longrightarrow 0.$$

(f) (Betragskonvergenz)
Seien $a_n, a \in G, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_n \longrightarrow a \neq 0 \Longrightarrow \exists N : \quad |a_n| = |a|, n \geq N$$

1.3 Die p-adischen ganzen Zahlen $\mathcal{Z}_p$

Definition 1.12 *Eine p-adische ganze Zahl ist eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}, a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Die Menge der p-adischen ganzen Zahlen $\mathcal{Z}_p$ ist dann $\{0, 1, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$.*

Anmerkung:
Man kann eine p-adische ganze Zahl a also auch als formale Potenzreihe $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ schreiben.

Definition 1.13 *Zur Definition der Addition: Seien a_0, b_0 die ersten Komponenten zweier p-adischer ganzer Zahlen a, b. Dann ist die erste Komponente ihrer Summe $a + b$ genau $a_0 + b_0$, falls diese Zahl kleiner gleich $p - 1$ ist. Anderenfalls läßt sich $a_0 + b_0$ eindeutig schreiben als $c_0 + mp$ mit einem $m \in \mathbb{N}$. Die erste Kompnente sei dann c_0. Im zweiten Fall addieren wir m zur Summe der nächsten Komponenten a_1, b_1. Dieser Vorgang wird nun induktiv fortgesetzt. Die so definierte Addition bezeichnen wir als Addition mit Übertrag.*
Zur Definition der Multiplikation werden die p-adischen ganzen Zahlen als Potenzreihen in p aufgefaßt(siehe Anmerkung oben):
Die Multiplikation entspricht dem Cauchyprodukt der Potenzreihen in p mit anschließendem Addieren mit Übertrag.

Anmerkung:
Addition und Multiplikation sind abelsch und assoziativ.

Lemma 1.14 *Jede p-adische ganze Zahl a hat ein additives Inverses.*

Beweis:
Sei $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ und sei $b = \sum_{i \geq 0} (p - 1 - a_i) p^i$. Dann ist $a + b + 1 = 0$ und damit $b + 1 = -a$.□
Damit bilden die p-adischen ganzen Zahlen eine eine additive abelsche Gruppe.

Korollar 1.15 (ohne Beweis) *Addition und Multiplikation erfüllen die Distributivgesetze, sodaß $\mathcal{Z}_p$ zu einem Ring wird.*

Satz 1.16 *Die p-adischen Zahlen sind nullteilerfrei.*

Beweis: Sei $a \neq 0$ $a \in \mathcal{Z}_p$, also $a = \Sigma_{i \geq 0} a_i p^i \neq 0$, und ebenso $b = \Sigma_{i \geq 0} a_i p^i \neq 0$. Seien a_ν und b_μ die ersten Koeffizienten $\neq 0$. Diese beiden Koeffizienten werden nicht durch p geteilt, nach Definition der ganzen p-adischen Zahlen. Daher teilt p auch nicht ihr Produkt, welches nach Definition der Multiplikation (Cauchyprodukt und Summieren mit Übertrag) der erste Koeffizient $\neq 0$ des Produktes ist. □
Die p-adischen ganzen Zahlen bilden also einen Integritätsbereich.

Satz 1.17 *In die p-adischen ganzen Zahlen sind die natürlichen Zahlen(und daher auch die ganzen Zahlen) in natürlicher Weise eingebettet.*

Beweis:
Da man jede natürliche Zahl als endliche Summe von p-Potenzen mit Koeffizienten $< p$ schreiben kann, sind die natürlichen Zahlen in natürlicher Weise in die ganzen p-adischen eingebettet. Da die ganzen p-adischen Zahlen bezüglich der Addition eine Gruppe bilden, sind auch die ganzen Zahlen darin eingebettet.
□
Anmerkung:
Die natürlichen Zahlen entsprechen genau den endlichen formalen Summen, die negativen ganzen Zahlen den Folgen welche ab einem Index gleich $p - 1$ sind.

Der Betrag einer ganzen p-adischen Zahl wird folgendermaßen definiert:

Defintion und Satz 1.18 *Durch* $|a| := p^{-\nu}$, *mit* $\nu = ord(a)$ *,wobei* $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ *und* $ord(a) = \min\{i : a_i \neq 0\}$, *werden die ganzen p-adischen Zahlen zu einer ultrametrischen Gruppe. Dies führt zur p-adischen Metrik auf* $\mathcal{Z}_p$: $d(x, y) = |x - y|$. *Die Topologie auf* $\mathcal{Z}_p$ *ist genau die Produkttopologie bezüglich der Faktoren* $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ *mit der diskreten Metrik.* $\mathcal{Z}_p$ *ist damit kompakt. Die Abbildung* $|.| : \mathcal{Z}_p \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ *nennt man Betragsfunktion auf* $\mathcal{Z}_p$ *und* $|x|$ *heißt der Betrag von* $x \in \mathcal{Z}_p$.

Beweis: Offensichtlich definiert $|x|$ eine Ultrametrik auf $\mathcal{Z}_p$ und die Metrik induziert die diskrete Topolgie auf jedem Produktfaktor. Die Kompaktheit folgt damit aus dem Satz von Tychonow.□

1.4 Die p-adischen Zahlen

Definition 1.19 *Die p-adischen Zahlen* $\mathbb{Q}_p$ *sind der Quotientenkörper des Integritätsrings* $\mathcal{Z}_p$.

Dieser ähnelt dem Ring der formalen Laurentreihen, wie $\mathcal{Z}_p$ den Potenzreihen.
Anmerkung:
Ein $a \in \mathbb{Q}_p$ ist von der Form $a = \sum_{n \geq i} a_i p^i$ mit i beliebig ganzzahlig. Die Ordnung einer solchen Reihe ist analog wie oben definiert $ord(x) = ord(\sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i p^i) = \min\{i : a_i \neq 0\}$

Satz 1.20 *Auf $\mathbb{Q}_p$ ist eine Abbildung $|.|$, die die Betragsfunktion auf $\mathcal{Z}_p$ fortsetzt, erklärt durch: $|x| = p^{-ord(x)}$ wobei die Ordnung als Ordnung der formalen Laurentreihe $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i p^i$ verstanden wird.*

Beweis:
Trivial. $\square$

Lemma 1.21 (ohne Beweis) *Da die Charakteristik der p-adischen Zahlen offensichtlich 0 ist, müssen sie die rationalen Zahlen als Teilkörper enthalten.*

Anmerkung:
Die natürlichen und ganzen Zahlen entsprechen den endlichen und den ab einem Index gleich $p-1$ Koeffizientenfolgen. Weiters entsprechen die rationalen Zahlen jenen p-adischen Zahlen, deren Koeffizientenfolge schließlich periodisch wird.

Satz 1.22 *Die p-adischen Zahlen bilden einen lokal-kompakten (und damit vollständigen) Körper.*

Beweis :
Offensichtlich ist $\mathcal{Z}_p$ eine kompakte Nullumgebung, womit die additive Gruppe und somit der ganze Körper lokalkompakt wird. Dass $\mathbb{Q}_p$ ein Körper ist, ist klar nach Konstruktion.$\square$
Alternativ dazu, kann man auch direkt von $\mathbb{Q}$ aus, die p-adischen Zahlen konstruieren.

Defintion und Satz 1.23 *Auf $\mathbb{Q}$ ist die p-adische Metrik erklärt durch:*
$|x| = p^{-\nu}$ wobei $x = p^{\nu}(\frac{m}{n})$ mit teilerfremden m und n, die auch p nicht teilt. Jede rationale Zahl kann eindeutig so dargestellt werden und auf diese Weise wird eine Abbildung $|.|$ definiert, die durch $d(x, y) = |x - y|$ eine Ultrametrik auf $\mathbb{Q}$ definiert. Es ist $\mathbb{Q}_p$ dann die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich dieser Metrik.

Beweis:
Man rechnet leicht nach, dass $|.|$ wirklich eine (translationsinvariante) Ultrametrik auf $\mathbb{Q}$ definiert. Die Darstellbarkeit einer rationalen Zahl als p-adischer Systembruch liefert unmittelbar die Äquivalenz der beiden Definitionen. $\square$

1.5 Nichtarchimedische Körper

Die p-adischen Zahlen sind das bekannteste Beispiel eines nicht-archimedischen Körpers. Bevor wir solche Körper definieren können, müssen wir allgemein den Begriff des bewerteten Körpers einführen.

Definition 1.24 *Eine Abbildung* $|.|$ *von einem Körper* K *nach* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *heißt Bewertung (Absolutbetrag), wenn gilt:*

(a)
$$|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

(b)
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(c)
$$|xy| = |x||y|$$

Das Paar $(K, |.|)$ *nennt man dann einen bewerteten Körper. Die Menge* $\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \exists y \in K, |y| = x\}$ *nennt man Wertebereich von* $|.|$ *und falls der Wertebereich in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *diskret liegt, dann heißt* K *diskret bewertet. Liegt der Wertebereich dicht in* $\mathbb{R}_{\geq 0}$*, so heißt* K *dicht bewertet.*

Analog dem gewöhnlichen Absolutbetrages auf $\mathbb{R}$ induziert eine Bewertung offensichtlich eine Metrik auf K. Damit sind auch die üblichen Definitionen(Vollständigkeit etc,) von einem metrischen Raum auf den Körper übertragbar. Die Eigenschaft archimedisch zu zu sein, ist eine Eigenschaft der Bewertung:

Definition 1.25 *Eine Bewertung auf einem Körper* K *heißt archimedisch, wenn die Menge* $\{|n \cdot 1_K| : n \in \mathbb{N}\}$ *unbeschränkt in* $\mathbb{R}$ *ist. Sonst heißt sie nicht-archimedisch und der Körper nicht-archimedisch bewertet bzw. nichtarchimedischer Körper.*

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

Satz 1.26 *Sei* K *ein Körper mit einer Bewertung* $|.|$*. Dann sind äquivalent:*

(a) Die Bewertung ist nicht-archimedisch.

(b)
$$|n1_K| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(c)
$$|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\} \qquad \forall a, b \in K.$$

(d)
$$|a| < |b| \Rightarrow |b - a| = |b| \qquad \forall a, b \in K.$$

Beweis:
Es sind $(b) \Rightarrow (a)$ und $(c) \Rightarrow (b)$ trivial.
$(a) \Rightarrow (c)$:

Sei $r := \sup\{|n1_K| : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $|nx| \le r|x|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$. Seien $a, b \in K$ und $s := \max\{|a|, |b|\}$. Dann gilt

$$|a+b|^m = |(a+b)^m| \le \sum_j |\binom{m}{j} a^j b^{n-j}| \le (m+1)rs^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und daher

$$|a+b| \le (\lim_m \sqrt[m]{(m+1)r})s = s = \max\{|a|, |b|\}.$$

$(c) \Rightarrow (d)$:
$|b| \le \max\{|a|, |b-a|\}$. Ist dann $|b| > |a|$, dann ist

$$|b| \le |b-a| \le \max\{|b|, |-a|\} = |b|.$$

$(d) \Rightarrow (c)$:
Ist $|a+b| > |a|$, dann ist $|b| = |(a+b)-a| = |a+b|$. Insbesondere ist $|a+b| \le |b|$. Analog falls $|a+b| > |b|$, dann folgt $|a+b| \le |a|$. $\square$
Anmerkung:
Aus diesem Satz folgt, dass $A := \{x \in K : \quad |x| < 1\}$ in einem nichtarchimedischen Körper ein Ideal (sogar ein maximales) ist im Ring $R := \{x \in K : |x| \le 1\}$.
Damit kann man definieren:

Definition 1.27 *Sei K ein nichtarchimedischer Körper und A, R wie oben. Dann heißt der Köper $k = R/M$ der Restklassenkörper von K.*

Im Gegensatz dazu sei nocheinmal an die Definition des Primkörpers erinnert.

Definition 1.28 *Der kleinste Unterkörper eines Körpers K heißt Primkörper von K. Seine Ordnung heißt Charakteristik von K.*

Satz 1.29 (Ostrowski) *Jeder nicht-trivale Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ ist entweder eine geeignete positive Potenz des p-adischen Absolutbetrages $|x| = p^{-\nu}$ oder eine geeignete positive Potenz des gewöhnlichen Absolutbetrages.*

Beweis:
Ist die Bewertung nichtarchimedisch, dann bildet $\{n \in \mathbb{Z} : |n| < 1\}$ ein Primideal nach dem vorigen Satz. Es gibt daher eine Primzahl p, sodaß $\{n \in \mathbb{Z} : |n| = 1\} = \{n \in \mathbb{Z} : p \not| n\}$. Wir wählen τ sodaß $|p| = p^{-\tau}$ und somit ist $|.|^{\frac{1}{\tau}}$ einfach die p-adische Bewertung.
Angenommen die Bewertung ist archimedisch.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $L(n) := \max\{|n|, 1\}$. Wähle $m, n \in \{2, 3, \dots\}$ und sei s der ganzzahlige Teil von $k(\log m)(\log n)^{-1}$. Da $m^k < n^{s+1}$ gilt, gibt es $a_0, \dots, a_s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, sodaß $m^k = a_0 + a_1 n + \dots + a_s n^s$. Für diese gilt, mit $A := \max\{|0|, |1|, \dots, |n-1|\}$:

$$|m|^k = |m^k| \le \sum_i |a_i||n|^i \le (s+1)AL(n)^s.$$

Es folgt

$$\log L(m) \leq k^{-1}[\log(s+1) + \log A + s\log L(n)]$$

$$\leq k^{-1}\log(k\frac{\log m}{\log n}+1) + k^{-1}\log A + \frac{\log m}{\log n}\log L(n).$$

Für festes m, n gilt diese Ungleichung $\forall k \geq 2$. Es ist daher notwendig $\log L(m) \leq (\log m)(\log n)^{-1}\log L(n)$. Aus Symmetriegründen gilt:

$$\frac{\log L(m)}{\log m} = \frac{\log L(n)}{\log n}. \qquad (m, n \in \{2, 3, \dots\})$$

Daher gibt es ein $\tau \geq 0$, sodaß $\log L(m)/\log m = \tau \quad \forall m \in \mathbb{N}$, also

$$\max\{|m|, 1\} = m^\tau. \qquad (m \in \mathbb{N})$$

Induktiv beweist man $|m| \leq m$. Daher ist $\tau \leq 1$. Da die Bewertung archimedisch ist, ist $\tau > 0$ und $|m| = m^\tau$ für alle natürlichen m. Damit ist $|x|$ die τ-te($\tau \in (0, 1]$) Potenz des gewöhnlichen Absolutbetrages auf $\mathbb{Q}$ und dies war zu zeigen. □

Nichtarchimedische Bewertungen seien im Folgenden durch die verschärfte Dreiecksungleichung charakterisiert. Wie schon gezeigt ist diese Forderung zur ursprünglichen Definition äquivalent.

Es gilt die folgende wichtige Aussage über die Normäquivalenz auf endlichdimensionalen Vektorräumen über vollständigen nicht diskret bewerteten, nichtarchimedischen Körpern.

Satz 1.30 *Sei K ein vollständiger und nicht-diskret nicht-archimedisch bewerteter Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Dann sind alle Normen auf V äquivalent.*

Beweis:

Durch Induktion nach Dimension n des Vektorraumes V. Die Eigenschaft gilt offensichtlich für den Fall $n = 1$, also genügt es den Induktionsschritt von $n-1$ nach n zu zeigen.

Wir wählen eine Basis $(e_i)_{i\in I}$ und betrachten den Vektorraumisomorphismus $\varphi : K^n \mapsto V$, der die kanonische Basis von K^n auf die konkret gewählte Basis von V abbildet.

Nehmen wir an K^n ist mit der sup-Norm versehen, dann müssen wir zeigen, dass φ in beide Richtungen stetig ist, für jede gegebene Norm $\|\cdot\|$ auf V. Für $x = (x_i) \in K^n$, haben wir

$$\|x_1e_1 + \dots + x_ne_n\| \leq \sum |x_i|\|e_i\| \leq \max|x_i| \cdot \sum \|e_i\|,$$

$$\|\varphi(x)\| \leq C\|x\|_\infty \qquad (C = \sum \|e_i\|),$$

womit φ stetig ist.

Sei nun umgekehrt F der Unterraum von V der von den hinteren $n-1$ Basisvektoren erzeugt wird. Nach Induktionsvoraussetzung ist die gegebene Norm äquivalent zur sup-Norm der Komponenten. Insbesondere ist F abgeschlossen und vollständig in V. Da $e = e_1 \notin F$, können wir definieren

$$d(e, F) = \inf_{y \in F} \|e - y\| > 0$$

und setzen $\gamma = d(e, F)/\|e\| \leq 1$. Weiters gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Konstante c_F mit

$$\|y\| \geq c_F \cdot \max_{2 \leq i \leq n} |x_i| \qquad (y = \sum_{2 \leq i \leq n} x_i e_i \in F).$$

Für jedes $v = \varphi(x) \in E - F$, also von der Form $v = \xi e + y \quad (\xi \neq 0, y \in F)$ können wir schreiben:

$$v = \xi(e + y/\xi)$$

mit

$$\|v\| = \|v - \xi e\| \leq \max\{\|v\|, \|\xi e\|\} = |\xi| \cdot \|e - y'\|$$

$$\geq |\xi| \cdot d(e, F) = |\xi| \gamma \|e\| = \gamma \|\xi e\|,$$

und daher

$$\|y\| = \|v - \xi e\| \leq \max\{\|v\|, \|\xi e\|\} \leq \max\{\|v\|, \gamma^{-1}\|v\|\} = \|v\|/\gamma.$$

Damit ist $\|v\| \geq \gamma \|y\|$. Wir haben also gezeigt

$$\|v\| \geq \gamma \|\xi e\|, \quad \|v\| \geq \gamma \|y\|,$$

$$\|v\| \geq \gamma \cdot \max\{\|\xi e\|, \|y\|\},$$

und da $\|y\| \geq c_F \max_{i \geq 2} |x_i|$ war, haben wir

$$\|\varphi(x)\| = \|v\| \geq \gamma \max\{|\xi| \|e\|, c_F \max_{i \geq 2} |x_i|\}$$

$$\geq c \max_{i \geq 1} |x_i| = c \cdot \|x\|_\infty,$$

mit $x_1 = \xi$ und $c = c_V = \gamma \min(c_F, \|e\|)$. $\square$

1.6 Der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}_p$

Bevor wir nun eine Aussage über Absolutbeträge auf endlichen Erweiterungen von $\mathbb{Q}_p$ machen können, benötigen wir noch den:

Satz 1.31 *Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{Q}_p$ sind alle Normen äquivalent.*

Beweis: Sei n die Dimension des Vektorraums V und sei (e_i) eine Basis von V und sei $\mathbb{Q}_p^n$ der Vektorraum der n-Tupel aus $\mathbb{Q}_p$ mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation. Dann ist

$$x = (x_i) \mapsto v = \sum x_i e_i = \varphi(x)$$

ein algebraischer Isomorphismus $\varphi : \mathbb{Q}_p^n \mapsto V$. Auf dem Raum $\mathbb{Q}_p^n$ sei die sup-Norm gewählt und zu zeigen ist noch, dass φ in beide Richtungen stetig ist. Es ist

$$\| \sum x_i e_i \| \leq \max \|x_i e_i\| = \max |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \max \|e_i\| \cdot \max |x_i| = C\|x\|_\infty,$$

wobei $C = \max \|e_i\|$. Das zeigt, dass $\|\varphi(x)\| \leq C\|x\|_\infty$ und φ stetig ist.
Für die Umkehrung zeigen wir, dass φ eine offene Abbildung ist.
Sei $B = B_{\leq 1} := \{x \in \mathbb{Q}_p^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{Q}_p^n$. Wir zeigen, dass $\varphi(B)$ eine offene Kugel um 0 enthält.
S_1 sei die Einheitssphäre in $\mathbb{Q}_p^n$. S_1 ist offensichtlich kompakt, als abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel (diese ist kompakt, da $\mathbb{Q}_p$ lokal-kompakt und V endlichdimensional ist). Damit ist $\varphi(S_1)$ ebenfalls kompakt. Diese Bildmenge enthält sicher nicht die 0. Der Abstand von 0 zu $\varphi(S_1)$ ist also positiv und an irgendeinem Punkt $\varphi(x_0)$ wird ein Minimum angenommen:

$$x \in S_1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \geq \|\varphi(x_0)\| = \epsilon > 0.$$

Habe nun $v \in V - \{0\}$ eine Norm kleiner Epsilon. Dann hat für $|\lambda| \leq 1, \lambda \in \mathbb{Q}_p$ der Vektor $\lambda \cdot x$ ebenfalls Norm kleiner Epsilon. Insbesondere

$$\lambda \in K, |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda v \notin \varphi(S_1).$$

Wir können nun schreiben

$$v = \sum_i v_i e_i = \varphi((v_i)).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die letzte Komponente die Größte ist:

$$0 \neq |v_n| = \max |v_i| = \|(v_i)\|_\infty.$$

Mit $\lambda = 1/v_n$, haben wir $\lambda v = \varphi((v_i/v_n)) = \varphi(w) \in \varphi(S_1)$. Dieser Skalar λ erfüllt $|\lambda| > 1$, sodaß

$$\|(v_i)\|_\infty = |v_n| = \frac{1}{|\lambda|} < 1.$$

Das zeigt, dass $v = \varphi((v_i))$ mit $\|(v_i)\|_\infty < 1 : v \in \varphi(B)$, wobei $B = B_{\leq 1}(0, \mathbb{Q}_p^n)$. Daher ist

$$B_{<\epsilon}(V) \subset \varphi(B).$$

□

Satz 1.32 *Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung des Absolutbetrages von $\mathbb{Q}_p$ auf K.*

Beweis:

Eindeutigkeit:
Seien $|x|$ und $|x|'$ zwei Absolutbeträge auf K, die den Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}_p$ fortsetzen. Dann kann man, wie gewohnt K als Vektorraum über $\mathbb{Q}_p$ auffassen und die beiden Beträge als Normen.
Es existieren also $c > 0$ und $C > 0$ mit

$$c|x| \leq |x|' \leq C|x|.$$

Da die Absolutbeträge multiplikativ sind gilt für $x = y^n$:

$$c(|y|)^n \leq (|y|')^n \leq C(|y|)^n$$

was äquivalent dazu ist, dass:

$$c^{\frac{1}{n}}|y| \leq |y|' \leq C^{\frac{1}{n}}|y|.$$

Und in dieser Ungleichung geht für $n \longrightarrow \infty$ sicherlich

$$c^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1 \quad \text{und} \quad C^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1.$$

Also sind die Beträge gleich!

Existenz:
Durch die Betrachtung Galois'scher Erweiterungen unter der Voraussetzung der Existenz einer Fortsetzung, kommt man zu folgendem Ansatz:

Wenn K eine endliche Erweiterung vom Grad d von $\mathbb{Q}_p$ ist und für jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ die lineare Abbildung l_x definiert ist durch $l_x(y) : y \rightarrow xy$, dann gilt:

$$f(x) = |\det(l_x)|^{\frac{1}{d}}$$

ist ein Absolutbetrag auf K, der mit dem üblichen Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}_p$ übereinstimmt.
Offensichtlich ist für $a \in \mathbb{Q}_p$ die $\det(l_a) = a^d$ und daher die d-te Wurzel wieder gleich a. Aus der Multiplikativität von det folgt die von f und auf $\mathbb{Q}_p$ stimmen die beiden offensichtlich überein. Einzig die verschärfte Dreiecksungleichung muß noch gezeigt werden. Hier geht die Lokal-Kompaktheit von $\mathbb{Q}_p$ ein. Wir wählen auf K irgendeine Norm, deren Wertebereich auf K mit dem der Bewertung auf $\mathbb{Q}_p$ übereinstimmt. Zum Beispiel kann man die kanonische Basis aus d Vektoren von K über $\mathbb{Q}_p$ annehmen, mit der sup-norm auf den Komponenten. Da die stetige Funktion f nicht auf der kompakten Menge $\|x\| = 1$ verschwindet, ist sie dort nach oben und nach unten beschränkt:

$$0 < \epsilon \leq f(x) \leq A < \infty \qquad (\|x\| = 1).$$

Für $x \neq 0, x \in K$ wähle $\lambda \in Q_p$ mit $\|x\| = |\lambda|$.
Der Vektor $\frac{x}{\lambda}$ hat Norm 1,

$$\epsilon \leq f(\frac{x}{\lambda}) \leq A \qquad x \neq 0,$$

und da $f(\frac{x}{\lambda}) = \frac{f(x)}{\lambda}$,

$$\epsilon|\lambda| \leq f(x) \leq A|x| \qquad (x \neq 0)$$

$$\epsilon\|x\| \leq f(x) \leq A\|x\| \qquad (x \neq 0)$$

Daher gilt mit $a = \epsilon^{-1}$ sowohl $\|x\| \leq af(x)$ als auch $f(x) \leq A\|x\|$. Angenommen $f(x) \leq 1$ und somit $\|x\| \leq a$.
Wir folgern:

$$\begin{aligned} f(1+x) \leq A\|1+x\| &\leq A \quad \max\{\|x\|, 1\} \\ &\leq A \quad \max\{\|1\|, a\} = C = C\max\{f(1), f(x)\} \end{aligned}$$

Wir können also im Allgemeinen, falls $f(y) \geq f(x)$, durch y dividieren und die obige Ungleichung auf $\frac{x}{y}$ anwenden, da $f(\frac{x}{y}) = \frac{f(x)}{f(y)} \leq 1$. Multiplizieren wir nun beide Seiten mit $f(y)$, dann erhalten wir:

$$f(x+y) \leq C\max\{f(x), f(y)\}.$$

Dieser Absolutbetrag stimmt auf $\mathbb{Q}_p$ mit dem p-adischen überein, und ist beschränkt auf den natürlichen Zahlen, also ist er sicher ein nichtarchimedischer Absolutbetrag.□
Also läßt sich auf jeder endlichen Erweiterung ein passender Absolutbetrag finden. Der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}_p$ läßt sich jedoch nicht in endlich vielen Schritten erreichen. Es stellt sich also die Frage, ob der algebraische Abschluß ebenfalls ein nicht-archimedisch bewerteter Körper bzw. noch lokal-kompakt(und damit vollständig) ist. Zur letzten Frage liefert der folgende Satz schon ein Indiz:

Satz 1.33 *Ein lokal-kompakter Vektorraum V über $\mathbb{Q}_p$ ist endlich-dimensional.*

Beweis:
Man wähle eine kompakte Umgebung Ω der 0 in V, sowie einen Skalar $a \in \mathbb{Q}_p \quad (0 < |a| < 1)$. Die Inneren der Translate $x + a\Omega \quad (x \in V)$ bilden ein offene Überdeckung von V. Es existieren also endlich viele Vektoren a_i mit:

$$\Omega \subset \bigcup_i (a_i + a\Omega)$$

Sei L nun die lineare Hülle dieser endlich vielen(o.B.d.A seien es d) a_i. Dieser d-dimensionale Unterraum ist isomorph zu zu $\mathbb{Q}_p^d$ und damit abgeschlossen bzw vollständig. In dem hausdorffschen Quotientenraum V/L ist das Bild A von Ω

eine kompakte 0 Umgebung mit $A \subset aA$ woraus folgt $a^{-n}A \subset A$ nach Induktion. Da $|a^{-n}| \longrightarrow 0$, muß gelten:

$$A \subset V/L \subset \cup_{n \geq 1} a^{-n} A \subset A.$$

Insbesondere ist V/L kompakt; $V/L = 0 \Rightarrow V = L$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum.$\square$

Also wird der (unendliche) algebraische Abschluß zumindest nicht lokal-kompakt sein. Dass er auch nicht vollständig ist, wird sich später zeigen. Dass $\mathbb{Q}_p$ nicht schon algebraisch abgeschlossen ist, sieht man übrigens z.B. anhand von Eisenstein Polynomen in $\mathcal{Z}_p$(analog zu Eisensteinpolynomen in den ganzen Zahlen über den rationalen). In der Tat ist der algebraische Abschluß damit bestimmt unendlich-dimensional.

Definition 1.34 *Bezeichne im Folgenden $\mathbb{Q}_p^a$ einen festen algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}_p$.*

Der algebraische Abschluß ist bewertet, da jedes Element in einer endlichen Erweiterung liegt und dort einen eindeutigen Betrag hat. Daher ist $\mathbb{Q}_p^a$ ein nicht-archimedisch bewerteter Körper. Aufgrund des letzten Satzes ist $\mathbb{Q}_p^a$ nicht lokal-kompakt. Es erhebt sich die Frage nach der Vollständigkeit. Dazu definieren wir:

Definition 1.35 *Ein topologischer Raum heißt Baire-Raum, wenn der Bairesche Kategoriensatz in ihm gilt.*

Bekanntermaßen sind vollständige metrische Räume Baire-Räume. In unserem Fall gilt aber:

Satz 1.36 $\mathbb{Q}_p^a$ *ist kein Baire-Raum(und damit insbesondere nicht vollständig).*

Beweis:
Wir definieren eine Folge von Teilmengen:

$$X_n = \{x \in \mathbb{Q}_p^a : deg(x) := [\mathbb{Q}_p(x) : \mathbb{Q}_p] = n\} \subset \mathbb{Q}_p^a$$

womit sicher $\mathbb{Q}_p^a = \cup_{n \geq 1} X_n$ gilt. Ausserdem ist $\lambda X_n \subset X_n$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ sowie $X_n + X_m \subset X_{nm}$, insbesondere:

$$X_n + X_n \subset X_{n^2}$$

Die Teilmengen sind abgeschlossen. Ist x im Abschluß von X_n ($x = \lim x_i, x_i \in X_n$), dann sei für alle i, $f_i(X) \in \mathbb{Q}_p[X]$ ein Polynom von möglichst geringem Grad mit Wurzel x_i und den Koeffizienten in $\mathcal{Z}_p$(nötigenfalls durch skalieren). Wenigstens ein Koeffizient muß ungleich 0 sein. Falls nötig kann zu einer Teilfoge übergegangen werden, die (Koeffizientenweise in der Norm) konvergiert. Also $f_i \longrightarrow f$ und $f \in \mathcal{Z}_p[X]$. f hat Grad $\leq n$ und wenigstens einen Koeffizienten ungleich 0. Aufgrund der verschärften Dreiecksungleichung ist die Konvergenz gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{Q}_p^a$. Da die Folge (x_i) beschränkt ist, gilt:

$$f(x) - f_i(x_i) = f(x) - f(x_i) + f(x_i) - f_i(x_i) \longrightarrow 0,$$

da die beiden Folgen rechts gegen 0 gehen. Damit folgt $f(x) = \lim f_i(x_i) = 0$ und $x \in X_n$

Die Teilmengen X_n haben keinen inneren Punkt. Für jede abgeschlossene Kugel $B \subset \mathbb{Q}_p^a$ von positivem Radius haben wir $\mathbb{Q}_p^a = \mathbb{Q}_p B$. Daher kann eine solche Kugel nicht in einem X_n enthalten sein und auch kein Translat davon. $\Box$

Für weitere Betrachtungen (insbesondere um die Separabilität von $\mathbb{Q}_p^a$ zu zeigen) benötigt man Krasner's Lemma, aus dem sich die stetige Abhängigkeit der Wurzeln eines Polynoms in $\mathbb{Q}_p$ von den Koeffizienten herleiten läßt.

Satz 1.37 (Krasners Lemma) *Sei $K \subset \mathbb{Q}_p^a$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und sei $a \in \mathbb{Q}_p^a$. Bezeichne a^σ die Konjugierten von a über K und $r = \min_{a^\sigma \neq a} |a^\sigma - a|$. Dann erzeugt jedes Element $b \in B_{<r}(a; \mathbb{Q}_p^a)$ (gemeint ist: Kugel in $\mathbb{Q}_p^a$) über K eine Erweiterung, die $K(a)$ enthält.*

Beweis:
Sei $b \in K$, sodass $a \notin K(b)$. Die Charakteristik aller vorkommenden Körper ist 0, also existiert ein Konjugiertes Element $a^\sigma \neq a$ von a über $K(b)$(σ ein Automorphismus der $K(b)$ elementweise festläßt). Wir schätzen nun den Abstand von a zu b ab:

$$|b - a^\sigma| = |(b-a)^\sigma| = |b - a|,$$

$$|a - a^\sigma| \leq \max\{|a - b|, |b - a^\sigma)\} = |b - a|.$$

Daraus erkennt man:

$$|b - a| \geq |a - a^\sigma| \geq r.$$

Wenn also $b \in B_{<r}(a)$ also $|b - a| < r$, dann muß schon gelten:

$$a \in K(b) \Longrightarrow K(a) \subset K(b). \Box$$

Aus Krasner's Lemma kann man nun die stetige Abhängigkeit der Wurzeln von den Koeffizienten eines Polynoms folgern. Für ein Polynom f sei $\|f\| := \max\{|a_i|\}$, wobei $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$.

Satz 1.38 (Stetigkeit der Wurzeln einer Gleichung) *Sei K eine endliche Erweiterung über den p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und a ein festes Element $a \in \mathbb{Q}_p^a$ vom Grad n über K mit Minimalpolynom $f \in K[X]$ vom Grad n. Dann gibt es ein positives ϵ, sodass jedes normierte Polynom $g \in K[X]$ vom Grad n mit $\|g - f\| < \epsilon$ eine Wurzel $b \in K(a)$ hat die die gleiche Erweiterung erzeugt:*

$$K(b) = K(a).$$

Beweis:
g kann in $\mathbb{Q}_p^a$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden.

$$g = \prod (X - b_i).$$

Nun werten wir bei a aus:

$$\prod(a - b_i) = g(a) = g(a) - f(a)$$

Sei $M := \max_{0 \leq i \leq n}\{|a|^i\} = \max\{1, |a|^n\}$. Dann kann man abschätzen:

$$\prod |a - b_i| = |g(a) - f(a)| \leq \|g - f\|M$$

also gibt es wenigstens einen Index i, für den gilt:

$$|a - b_i| \leq \|g - f\|^{\frac{1}{n}} M^{\frac{1}{n}}.$$

Wählt man ϵ also klein genug und $\|g - f\| < \epsilon$, so ist nach Krasner's Lemma $K(a) \subset K(b_i)$ für ein i. Aber der Grad von b_i ist kleiner gleich n da $degg = n$ und $g(b_i) = 0$. Daher gilt $K(b_i) = K(a)$. $\square$.

Daraus muß noch ein Korollar gebildet werden, welches die Konvergenz der Wurzeln mit den Koeffizienten zeigt:

Korollar 1.39 *Sei f ein normiertes irreduzibles Polynom, $a \in \mathbb{Q}_p^a$ eine Wurzel von f und $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von normierten Polynomen mit Koeffizienten in K und alle vom selben Grad wie f. Falls $g_i \to f$ koeffizientenweise, dann gibt es eine Folge von Wurzeln (x_i) der (g_i), sodass $x_i \in K(a)$ für genügend große i und $x_i \to a$.*

Beweis:
Sobald $\|g_i - f\| < \epsilon$ klein genug ist, können wir den obigen Satz verwenden, und folgern, dass $|a - x_i|$ klein ist, für zumindest ein i. Genauer:

$$|a - x_i| \leq \|g_i - f\|^{\frac{1}{n}} \dot{M}^{\frac{1}{n}}.$$

Daraus sieht man, dass $|a - x_i| \to 0$, und die Konvergenz $x_i \to a$ folgt(in $K(a)$). $\square$

Nun folgt leicht, dass gewünschte Ergebnis:

Korollar 1.40 *Der algebraische Abschluß $\mathbb{Q}_p^a$ von $\mathbb{Q}_p$ ist ein separabler metrischer Raum.*

Beweis:
Sei $a \in \mathbb{Q}_p^a$ und f sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}_p$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ liegt können wir Polynome mit rationalen Koeffizienten beliebig nahe bei f finden. Wir wählen also eine Folge $(g_i) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $g_i \to f$. Nach dem vorigen Korollar gibt es also eine Folge von Wurzeln (x_i) die gegen a konvergiert. Das zeigt, dass der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p^a$ liegt. Dieser algebraische Abschluß ist sicher abzählbar, da die Menge der Polynome zu einem fixen Grad, mit Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$, abzählbar ist. $\square$

1.7 Der universelle Körper Ω_p

Wir wollen nun die Vervollständigung von $\mathbb{Q}_p^a$ betrachten. Dazu konstruieren wir einen Erweiterungskörper der sogar sphärisch vollständig ist.
Sei R der normierte Ring der beschränkten Folgen in $\mathbb{Q}_p^a$ mit der Supremumsnorm(also $\ell^\infty(\mathbb{Q}_p^a)$). Auf $\mathbb{N}$ sei ein Ultrafilter Υ der die Mengen $[n, \infty) \quad (n \in \mathbb{N})$ enthält fest gewählt. Damit liegt also für alle $A \subset \mathbb{N}$ entweder A oder A^c in Υ. Nun hat jede beschränkte Folge reeller Zahlen einen Limes auf Υ. Wir definieren nun ϕ:

$$\phi(\alpha) = \lim |\alpha_i| \geq 0. \qquad \alpha \in \ell^\infty(\mathbb{Q}_p^a \qquad \text{(limes auf } \Upsilon!)$$

Zur Bedeutung des Limes auf Υ:
Es ist wesentlich, zu wissen, dass das Bild eines Ultrafilters unter einer beliebigen Abbildung wieder ein Ultrafilter ist und das in einem kompakten Raum jeder Ultrafilter konvergiert.

Definition 1.41 *Sei (x_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen und Υ ein Ultrafilter von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Die Zahlenfolge (x_n) definiert eine Abbildung $n \mapsto x_n$ von $\mathbb{N} \to [\inf x_n, \sup x_n]$. Das Bild von Υ unter dieser Abbildung ist ein Ultrafilter in diesem kompakten Intervall. Daher konvergiert der Ultrafilter gegen eine Zahl $\alpha \in [\inf x_n, \sup x_n]$. Wir definieren $\lim_\Upsilon x_n := \alpha$.*

Durch Faktorisieren nach einem maximalen Ideal erhalten wir nun einen Körper:

Satz 1.42 *Die Teilmenge $\Lambda = ker\phi$ ist ein maximales Ideal im Ring R und $\Omega_p = R/\Lambda$ ein Körper der $\mathbb{Q}_p^a$ umfaßt.*

Beweis:
Wir zeigen, dass jedes Element $\alpha \notin \Lambda$ modΛ-invertierbar ist. Ist α nicht im Ideal, dann bedeutet das ja gerade, dass der $\lim r = \phi(\alpha)$ nicht verschwindet. Es existiert also eine Teilmenge $A \in \Upsilon$ mit $\frac{r}{2} < |\alpha_i| < 2r \quad (i \in A)$. Wir definieren jetzt eine Folge $\beta = (\beta_i)$ durch

$$\beta_i = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} & \text{für } i \in A \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $|\beta_i| \leq \frac{2}{r}$ ist die Folge beschränkt und nach Konstruktion verschwindet $1-\alpha\beta$ auf ganz A, weswegen $1 - \alpha\beta \in \Lambda$. Das zeigt, dass α/Λ invertierbar ist im Quotienten Ω_p. Daher ist der Quotient ein Körper und Λ ein maximales Ideal in R. Die konstanten Folgen sind eine natürliche Einbettung von $\mathbb{Q}_p^a$ in Ω_p.

ϕ ist eine Bewertung auf Ω_p. Für $a \in \Omega_p$ gilt:

$$|a| = |a|_{\Omega_p} := \phi(a) = \lim_{\Upsilon} |a|.$$

Diese Bewertung(bzw. Absolutbetrag) setzt die Bewertung von $\mathbb{Q}_p^a$ fort. Weiters ist sie verträglich mit der Quotientennorm:

Satz 1.43 *Der Absolutbetrag* $|.|_{\Omega_p}$ *stimmt mit der Quotientennorm von* R/Λ *überein. Genauer:*

$$|a|_{\Omega_p} = \|\alpha/\Lambda\|_{R/\lambda} := \inf_{\beta\in\Lambda} \|\alpha - \beta\|.$$

Beweis:
Es gilt $\lim_\Upsilon |\gamma_i| \leq \sup |\gamma_i|$,$\gamma \in R$ und daher:

$$\lim_\Upsilon |\alpha_i| = \lim_\Upsilon |\alpha_i - \beta_i| \leq \sup |\alpha_i - \beta_i| \quad (\beta \in J),$$

$$|a|_{\Omega_p} \leq \|\alpha - \beta\|.$$

Damit folgt:

$$|a|_{\Omega_p} \leq \|a\|_{R/\Lambda}.$$

Umgekehrt, falls $a = \alpha \bmod \Lambda$, dann kann man für jede Teilmenge $A \in \Upsilon$ eine Folge β definieren mit $\beta_i = 0 (i \in A)$und $\beta_i = \alpha_i$ sonst. Womit $\beta \in \Lambda$ und $\|\alpha - \beta\| = \sup_{i\in A} |\alpha_i|$ und

$$\|a\|_{R/\Lambda} \leq \inf_{A\in\Upsilon} \sup_{i\in A} |\alpha_i| = \limsup |\alpha_i| =$$

$$\lim_\Upsilon |\alpha_i| = |a|_{\Omega_p}. \qquad \square$$

Womit wir einen wohldefinierten Absolutbetrag auf Ω_p haben, dessen Wertebereich übrigens(ohne Beweis) alle nicht-negativen reellen Zahlen sind.
Ω_p hat nun bereits eine sehr erfreuliche Eigenschaft:

Satz 1.44 Ω_p *ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis:
Sei f ein normiertes irreduzibles Polynom $f \in \Omega_p$ vom Grad $n \geq 1$. Wir zeigen, dass f eine Wurzel in Ω_p hat. Zuerst wählen wir Repräsentanten für die Koeffizienten:

$$a_k = (\alpha_{ki})_i \bmod \Lambda.$$

Damit können wir eine Familie von Polynomen bilden:

$$f_i(X) = X^n + \sum_{k<n} \alpha_{ki} X^i \in \mathbb{Q}_p^a[X].$$

Da $\mathbb{Q}_p^a$ algebraisch abgeschlossen ist, hat jedes dieser Polynome Wurzeln in $\mathbb{Q}_p^a$. Das Produkt dieser Wurzeln ist(bis auf ein Vorzeichen) genau α_{0i}. Es gibt also mindestens eine Wurzel ξ_i mit $\xi_i \leq |\alpha_{0i}|^{\frac{1}{n}}$. Die Folge $\xi = (\xi_i)$ ist also beschränkt($\|\xi\| \leq \|a_0\|^{\frac{1}{n}}$), also $\xi \in R$ und die Klasse x von ξ ist eine Wurzel von f in Ω_p. $\square$

Wie schon angekündigt, hat Ω_p sogar sphärische Vollständigkeit.

Satz 1.45 Ω_p *ist sphärisch vollständig(und damit insbesondere auch vollständig).*

Beweis:
Betrachten wir also eine abnehmende Folge von Kugeln $(B_n)_{n\geq 0}$ mit $B_n = B_{\leq r}(a_n)$ in Ω_p. Die verschärfte Dreiecksungleichung sagt aus, dass:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r_n \quad \text{und} \quad (r_n) \text{ fallend ist.}$$

Wir gehen nun von den Mittelpunkten $a_n \in R/\Lambda$ zu Repräsentanten $\alpha \in R$ über. Da:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r_n < r_{n-1}$$

und da der Absolutbetrag die Quotientennorm ist, wählen wir induktiv α_{n+1}, sodass noch immer gilt, dass $\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\| < r_{n-1}$. Dann gilt $\|\alpha_k - \alpha_n\| < r_{n-1}$ für alle $k \geq n$. Die i-te Komponente erfüllt $\|\alpha_{ki} - \alpha_{ni}\| < r_{n-1} \quad (k \geq n)$. Wir gehen nun zur Diagonalfolge $\xi = (\xi_i)$ in R über, mit $\xi_i = \alpha_{ii}$. Es muß gelten:

$$\|\xi - \alpha_n\| \leq \sup_{i\geq n} |\xi_i - \alpha_{ni}| \leq r_{n-1}$$

da das Intervall $[n, \infty)$ zum Ultrafilter Υ gehört. Also gilt für $x = \xi \bmod \Lambda$:

$$|x - a_n| \leq \|\xi - \alpha_n\| \leq r_{n-1},$$

$$|x - a_{n-1}| \leq \max\{|x - a_n|, |a_n - a_{n-1}|\} \leq r_{n-1}.$$

also $x \in B_{n-1}$. Da das für alle $n > 0$ gemacht werden kann, folgern wir $x \in \bigcap B_n$ und der Schnitt ist nichtleer. Damit ist Ω_p sphärisch vollständig. $\square$

Ein Wort noch zu der Bezeichnung „universell“, die Ω_p im Titel des Kapitels trägt:

Definition 1.46 *Einen nichtarchimedischen Körper K nennt man maximal, wenn es keinen bewerteten Köper gibt, der K echt enthält und denselben Wertebereich der Bewertung und denselben Restklassenkörper hat.*

Es gilt

Satz 1.47 (ohne Beweis) *Ein nichtarchimedischer Körper ist maximal dann und nur dann, wenn er sphärisch vollständig ist.*

Der Beweis würde leider weit über diese Arbeit hinausführen.

1.8 Die p-adischen komplexen Zahlen $\mathbb{C}_p$

Definition 1.48 *$\mathbb{C}_p$ ist der Abschluß von $\mathbb{Q}_p^a$ in Ω_p.*

Anmerkung:
Damit ist $\mathbb{C}_p$ sicher vollständig und ein separabler (,denn $\mathbb{Q}_p^a$ ist separabel und liegt dicht) metrischer Raum.
$\mathbb{C}_p$ ist nicht lokal-kompakt, denn (ohne Beweis) es ist der Wertebereich von $\mathbb{C}_p$,

durch Fortsetzung des Absolutbetrages von $\mathbb{Q}_p^a$, gleich $p^{\mathbb{Q}}$. Da die Bewertung aber eine stetige Abbildung ist, müßte für einen lokalkompakten nichtarchimedischen Körper das Bild lokal-endlich in $\mathbb{R}$ sein. $p^{\mathbb{Q}}$ liegt aber dicht.
Aus der Normäquivalenz über vollständigen nichtdiskreten nichtarchimedischen Körpern folgt wieder die Eindeutigkeit des Absolutbetrages auf endlichen Erweiterungen vollständiger nicht-archimedischer Körper. K-Automorphismen in einer Erweiterung L sind isometrisch.
Um die algebraische Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}_p$ zu zeigen benötigt man eine Verallgemeinerung von Krasner's lemma:

Satz 1.49 *Sei Ω eine beliebige algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $K \subset \Omega$ ein vollständiger Teilkörper. Sei $a \in \Omega$ algebraisch über K. Weiters bezeichne a^σ seine Konjugierten in Ω über K. $r := \min_{a^\sigma \neq a} |a^\sigma - a|$. Dann erzeugt jedes Element b, algebraisch über K, mit $b \in B_{<r}(a)$ eine Körpererweiterung $K(b)$ die $K(a)$ enthält.*

Beweis:
Wir beweisen wieder die Negation.
Für ein algebraisches Element b mit $a \notin K(b)$ hat a ein Konjugiertes $a^\sigma \neq a$ über $K(b)$ und:

$$|b - a^\sigma| = |(b-a)^\sigma| = |b - a|,$$

$$|a - a^\sigma| \leq |\max\{|a - b|, |b - a^\sigma|\} = |b - a|.$$

Daher:

$$|b - a| \geq |a - a^\sigma| \geq r. \qquad \square$$

Satz 1.50 *$\mathbb{C}_p$ ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis:
Sei L eine endliche(insbesondere algebraische) Erweiterung von $\mathbb{C}_p$. Wir können Krasner's Lemma anwenden, da $\mathbb{C}_p$ vollständig ist, Ω_p algebraisch abgeschlossen und der Absolutbetrag auf Ω_p den p-adischen fortsetzt. Angenommen $L = \mathbb{C}_p(a)$ seine eine Erweiterung vom Grad ≥ 1 und sei $f \in \mathbb{C}_p[X]$ das normierte irreduzible Polynom von a. Da $\mathbb{Q}_p^a$ dicht liegt in $\mathbb{C}_p$, können wir ein Polynom $g \in Q_p^a[X]$ nahe genug bei f wählen, damit eine Wurzel von g den Körper L über $\mathbb{C}_p$ erzeugt. Da aber $\mathbb{Q}_p^a$ algebraisch abgeschlossen ist, liegt diese Wurzel schon in $\mathbb{Q}_p^a$ und f muß vom Grad 1 sein $\Rightarrow L = \mathbb{C}_p$. $\square$

Satz 1.51 *$\mathbb{C}_p$ ist nicht sphärisch vollständig.*

Beweis:
Gegeben eine strikt fallende Folge von Radien r_n(mit Zahlen die im Wertebereich des Absolutbetrages auf $\mathbb{C}_p$ liegen). Wir beginnen mit der Kugel $B = B_{\leq r_0}(0)$ und wählen zwei abgeschlossene disjunkte Kugeln B_0 und B_1 mit gleichem Radius $r_1 < r_0$. In jeder der beiden Kugeln können wir zwei abgeschlossene disjunkte Kugeln mit Radius $r_2 < r_1$ wählen. Wir bezeichnen diese dann mit B_{i0} und B_{i1}. Sie sind abgeschlossene und disjunkte Kugeln in B_i.

Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man abnehmende Folgen abgeschlossener Kugeln:

$$B_i \supset B_{ij} \supset \cdots \supset B_{ij\ldots k} \supset B_{ij\ldots kl} \supset \ldots .$$

Die Indizes sind hier entweder 0 oder 1. Zwei Kugeln, die unterschiedliche Multiindizes gleicher Länge haben, sind disjunkt. Zu einer gegebenen binären Folge $(i) = (i_1, i_2, \ldots)$ können wir definieren:

$$B_{(i)} = \bigcap_{n \geq 1} B_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Dieser Durchschnitt ist entweder leer oder eine abgeschlossene Kugel vom Radius $r = \lim r_n$. Alle $B_{(i)}$ sind nun sicher offen in $\mathbb{C}_p$, weil $r > 0$. Ist irgendwo in zwei binären Folgen zumindest ein Index verschieden, so sind die zugehörigen Kugeln ab diesem Index und ihre Schnittmengen sicher disjunkt. Da $\mathbb{C}_p$ aber separabel ist, besteht diese überabzählbare Familie von disjunkten offenen Mengen, nur aus höchstens abzählbar vielen verschiedenen disjunkten Mengen. Also müssen die meisten $B_{(i)}$ leer sein. □

Interessanterweise sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}_p$ in algebraische Hinsicht fast ident. Um das zu zeigen, benötigen wir das

Lemma 1.52 *Der Körper $\mathbb{C}_p$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis:
Die Einheitskugel von $\mathbb{Q}_p$ ist $\mathcal{Z}_p$ und dieses hat die Machtigkeit des Kontinuums (offensichtlich kann man surjektiv nach $[0, 1]$ abbilden, wobei man höchstens abzählbar oft ein Element mehrfach trifft). Der Körper $\mathbb{Q}_p$ ist die abzählbare Vereinigung von Kugeln $p^m\mathcal{Z}_p$ und hat somit auch die Mächtigkeit des Kontinuums. Ebenso haben alle endlichen Körpererweiterungen die selbe Mächtigkeit. Der algebraische Abschluß hat die gleiche Mächtigkeit wie der Polynomring über $\mathbb{Q}_p$ und der ist wieder von der Mächtigkeit des Kontinuums. Schließlich hat das abzählbares Produkt $(\mathbb{Q}_p^a)^{\mathbb{N}}$ keine größere Mächtigkeit und dieses Produkt enthält sicher alle Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}_p^a$. Die Mächtigkeit von $\mathbb{C}_p$ ist offensichtlich kleiner gleich der Mächtigkeit dieses Produkts. □
Jetzt benötigen wir den Begriff der Transzendenzbasis.

Definition 1.53 *Eine Transzendenzbasis einer Körpererweiterung K/k ist eine Familie von Elementen $(X_i)_{i\in I}$, sodaß der Unterkörper $k(X_i)_{i\in I} \subset K$ rein transzendent über k ist und $K/k(X_i)_{i\in I}$ eine algebraische Erweiterung ist.*

Anmerkung:
Je zwei algebraische Abschlüsse eines Körpers k sind k-isomorph.
Jede Körpererweiterung K/k hat eine Transzendenzbasis.
Je zwei Transzendenzbasen von K/k haben selbe Mächtigkeit.

Jetzt können wir den Beweis zu Ende führen:

Satz 1.54 *Die Körper $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}_p$ sind algebraisch isomorph.*

Beweis:
Jede Erweiterung der rationalen Zahlen von der Mächtigkeit des Kontinuums hat eine Transzendenzbasis dieser Mächtigkeit. Wir können also in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}_p$ Basen $(X_i)_{i\in I}$ und $(Y_i)_{i\in I}$ wählen(mit gleicher Indexmenge). $\mathbb{C}$ ist der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}(X_i)_{i\in I}$ und $\mathbb{C}_p$ ist der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}(Y_i)_{i\in I}$. Damit sind diese beiden algebraischen Abschlüsse isomorph. $\square$

Es benötigt der Beweis das Auswahlaxiom(bei der Existenz der Transzendenzbasen), weswegen ein algebraischer Isomorphismus leider nicht kanonisch gegeben ist.

Kapitel 2

Grundbegriffe der nicht-archimedischen Topologie

Im Folgenden werden einige Begriffe der Topologie ultrametrischer Räume erklärt, die für das Verständnis der nicht-archimedischen Maßtheorie und Spektraltheorie notwendig sind.

Definition 2.1 *Eine Menge heißt clopen in einer gegebenen Topologie, wenn sie zugleich offen und abgeschlossen ist.*

Definition 2.2 *Ein topologischer Raum X heißt null-dimensional, falls er eine Basis aus clopen-Mengen hat.*

Definition 2.3 *Ein topologischer Raum X heißt $\mathbb{N}$-kompakt, genau dann wenn es eine Homöomorphismus von X in einen abgeschlossenen Unterraum eines Produktes höchstens abzählbarer diskreter Räume gibt.*

Anmerkung:
Die kompakten Mengen eines nulldimensionalen Raumes bilden einen Mengenring $\mathcal{B}_c(X)$. Ist X lokalkompakt und nulldimensional, dann überdeckt $\mathcal{B}_c(X)$ den Raum X.
Ist X nun ein lokalkompakter nulldimensionaler Hausdorffraum und R ein Subring von $\mathcal{B}_c(X)$, der X überdeckt und die Punkte von X trennt, dann ist $R = \mathcal{B}_c(X)$.

Definition 2.4 *Der Stone-Raum eines booleschen Rings R ist die Menge aller nicht-trivialen Ringhomomorphismen $R \mapsto \mathbb{F}_2$ mit der Teilraumtopologie bezüglich $\mathbb{F}_2^R$. $\mathbb{F}_2$ trägt die diskrete Topologie.*

Defintion und Satz 2.5 (ohne Beweis) *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}(X)$ der Ring der clopen-Mengen von X. Der Stone-Raum von $\mathcal{B}(X)$ heißt*

Banaschewski-Kompaktifizierung von X und wird kurz als X^{ζ} geschrieben. Dieser Raum ist kompakt und für X nulldimensional und hausdorffsch liegt X dicht in X^{ζ}. Kompakte Räume bleiben topologisch unverändert. Stetige Abbildungen auf X setzen sich eindeutig auf X^{ζ} fort.
Die Einbettung wird gegeben durch die Abbildung ζ:

$$[\zeta(x)](U) = \begin{cases} 1 \in \mathbb{F}_2 & \textit{falls } x \in U \\ 0 \in \mathbb{F}_2 & \textit{falls } x \notin U \end{cases}$$

Anmerkung:
Ist X der Stone-Raum eines booleschen Rings R, dann ist X ein kompakter Hausdorffraum und R ist isomorph zu $\mathcal{B}(X)$. Ist umgekehrt Y ein kompakter nulldimensionaler Hausdorffraum, dann ist Y homöomorph zum Stone-Raum von $\mathcal{B}(Y)$.
Bemerkung:
Für ein Mengensystem z.B. $\mathcal{A}$ wird für $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{A}$ kurz $\bigcap \mathcal{A}$ geschrieben.
Um eine nützlich Aussage über Maße auf gewissen null-dimensionalen Räumen zu gewinnen, benötigen wir noch zwei Definitionen.

Definition 2.6 *Ein σ-Ideal in $\mathcal{B}(X)$ ist ein Ideal J mit der Eigenschaft, dass $\cup A_n \in J$, falls $A_1, A_2, \dots \in J$ und $\cup A_n \in \mathcal{B}(X)$.*

Definition 2.7 *Ein Ideal J in $\mathcal{B}(X)$ heißt frei, falls die Vereinigung über das ganze Ideal, ganz X ist. Ansonsten heißt J fix. Zu einem maximalen fixen Ideal gibt es ein $a \in X$ mit $J = \{A \in \mathcal{B}(X) : a \notin A\}$.*

Ein sehr bedeutende Aussage, bezüglich Maßen auf $\mathbb{N}$-kompakten Räumen liefert der folgende

Satz 2.8 *Die folgenden Aussagen über einen nulldimensionalen Hausdorffraum X sind äquivalent:*

(a) X ist $\mathbb{N}$-kompakt.

(b) Jedes maximale Ideal des booleschen Rings $\mathcal{B}(X)$ welches ein σ-Ideal ist, ist fix.

(c) Jedes nicht-triviale σ-additive $\{0,1\}$-wertige Maß auf $\mathcal{B}(X)$ ist eine Punktmasse.

Beweis:
(b) $\Leftrightarrow$ *(c)*:
Die maximalen Ideale J von $\mathcal{B}(X)$ entsprechen eins-zu-eins den nicht-trivialen additiven Abbildungen $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ die definiert werden durch

$$U \in J \Longleftrightarrow \mu(U) = 0.$$

Damit entsprechen die maximalen σ-Ideale, den entsprechenden σ-additiven Abbildungen und die fixen Ideale den Punktmassen.
$(a) \Rightarrow (c)$:
Sei S eine Menge und f ein Homöomorphismus von X auf eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^S$. Wähle ein σ-additives $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto \{0,1\}, \mu \neq 0$. Es definiert

$$\nu(U) := \mu(f^{-1}(U)) \qquad [U \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^S)]$$

ein nicht-triviales σ-additives $\{0,1\}$-wertiges Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{N}^S)$.
Für jedes $s \in S$ ist $\mathbb{N}^S$ die Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen $\{y \in \mathbb{N}^S) : y_s = n\}$. Hierbei bezeichne y_s die s-te Stelle von $y \in \mathbb{N}^S$. Es gibt also für jedes $s \in S$ ein eindeutiges $n(s) \in \mathbb{N}$, sodaß die Menge $\{y \in \mathbb{N}^S : y_s = n(s)\}$ ν-Maß eins hat. Definiere $b \in \mathbb{N}^S$ durch $b_s := n(s) \quad (s \in S)$. Falls $s_1, \ldots, s_m \in S$. dann ist $\nu(\cap_i\{y \in \mathbb{N}^S : y_{s_i} = b_{s_i}\}) = 1$, sodaß die Menge $\cap_i\{y \in \mathbb{N}^S : y_{s_i} = b_{s_i}\}$ das Bild $f(X)$ schneiden muß. Daher ist $b \in \overline{f(X)} = f(X)$ und es gibt ein $a \in X$ mit $f(a) = b$.
Wenn nun $U \in \mathbb{B}(X)$ und $a \in U$, dann gibt es $s_1, \ldots, s_m \in S$ mit $U \supset f^{-1}(\cap_i\{y \in \mathbb{N}^S : y_{s_i} = f(a)_{s_i})$. Dann ist $\mu(U) \geq \nu(\cap_i\{y \in \mathbb{N}^S : y_{s_i} = b_{s_i}\}) = 1$, sodaß $\mu(U) = 1$. Daraus folgt, dass μ ein Punktmasse in a ist.
$(c) \Rightarrow (a)$:
Sei S die Familie aller abzählbaren clopen Partitionen von X. Für $\mathcal{U} \in S$ und $x \in X$ bezeichne $U(X)$ das Element von $\mathcal{U}$, welches x enthält. Wir betrachten jedes $\mathcal{U} \in S$ als diskreten topologischen Raum. Dann ist $x \mapsto U(X)$ eine stetige Abbildung $X \mapsto \mathcal{U}$.
Wir betrachten nun den Produktraum $\prod S := \prod_{\mathcal{U} \in S} \mathcal{U}$ und versehen in mit der Produkttopologie. Wir haben damit eine stetige Injektion $f : X \mapsto \prod S$, welche gegeben wird durch

$$f(x)_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}(x) \qquad (x \in X, \mathcal{U} \in S).$$

Ist $U \in \mathcal{B}(X)$, dann ist $\mathcal{U} := \{U, X \backslash U\} \in S$ und $U = \{x : f(x)_{\mathcal{U}} = U\}$. Daher ist f ein Homöomorphismus von X auf $f(X) \subset \prod S$. Wir sind fertig, wenn $f(X)$ abgeschlossen ist.
Sei nun $y \in \prod S$ aus dem Abschluß von $f(X)$. Sind $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in S$, dann ist $\{z \in \mathbb{N}^S : z_{\mathcal{U}} \cap z_{\mathcal{V}} \neq \emptyset\}$ eine abgeschlossene Untermenge von $\mathbb{N}^S$ die $f(X)$ enthält. Daher gilt:

$$y_{\mathcal{U}} \cap y_{\mathcal{V}} \neq \emptyset \qquad (\mathcal{U}, \mathcal{V} \in S).$$

Definiere $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ durch:

$$\mu(U) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists \mathcal{U} \in S, U = y_{\mathcal{U}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $\mathcal{U} \in S$, dann gibt es ein eindeutiges $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $U_0 = y_{\mathcal{U}}$. Dafür ist $\mu(U_0) = 1$. Für alle anderen Elemente $U \in \mathcal{U}$ gilt $U \cap y = \emptyset$, weswegen $\mu(U) = 0$. Insgesammt ist

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} \mu(U) = 1 \qquad (\mathcal{U} \in S).$$

Seien nun $U_1, U_2, \dots \in \mathcal{B}(X)$ paarweise disjunkt und $\cup U_n \in \mathcal{B}(X)$. Wendet man das letzte Ergebnis zuerst auf $\mathcal{U} = \{X \setminus \cup U_n, U_1, U_2, \dots\}$ dann auf $\mathcal{U} = \{U \setminus U_n, X \setminus \cup U_n\}$ an, dann erhält man $\sum \mu(U_n) = \mu(\cup U_n)$. Daher ist μ σ-additiv!
Angenommen (c) gilt, dann muß μ die Punktmasse für irgendein $a \in X$ sein. Für jedes $\mathcal{U} \in S$ gibt es dann $a \in y_{\mathcal{U}}$ mit $y_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}(a) = f(a)$. Daher ist $y = f(a) \in f(X)$. $\square$

Generell sollten die betrachteten Mengen nicht zu groß werden. Gemeint ist, dass im Folgenden nur sogenannte kleine Kardinalitäten betrachtet werden.

Definition 2.9 *Eine Kardinalzahl* $\mathfrak{m}$ *heißt meßbar, falls es eine Menge der Mächtigkeit* $\mathfrak{m}$ *gibt und ein nichttriviales* σ*-additives Maß* $\mathcal{B}(X) \mapsto \mathbb{R}$*, dass keine anderen Werte als* 0 *oder* 1 *annimmt, aber dennoch keine Punktmasse ist. Ist* $\mathfrak{m}$ *nicht meßbar, dann auch alle kleineren Kardinalitäten nicht und* $\mathfrak{m}$ *heißt dann klein.*

Wie schon gesagt, wollen wir nur kleine Kardinalitäten betrachten.
Anmerkung:
Die Annahme, dass überhapt alle Kardinalzahlen klein sind, ist konsistent mit ZFC!

Kapitel 3

Nicht-archimedische Banachräume

Um den Spektralsatz der nicht-archimedischen Funktionalanalysis zu beweisen sind einige Resultate über Banachräume und Orthogonalbasen notwendig. Letztere sind schon für die nicht-archimedischen Maße unverzichtbare Hilfsmittel.

3.1 Nichtarchimedische Banachräume

3.1.1 Definition und elementare Eigenschaften

Wir beginnen mit der Definition eines Banachraums im nicht-archimedischen:

Definition 3.1 *Sei E ein Vektorraum über einem nichtarchimedischen Körper K. Eine Norm $\|.\|$ ist eine Abbildung $E \to \mathbb{R}^+$ für die gilt:*

(a)

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(b)

$$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\} \qquad (x, y \in E)$$

(c)

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \qquad (\alpha \in K, x \in E)$$

Eine solche Norm induziert in natürlicher Weise ein Ultrametrik auf E. Damit wir E zu einem null-dimensionalen Hausdorffraum und Addition und Skalarmultiplikation sind stetig in der ultrametrischen Topologie.

Definition 3.2 *Ein topologischer Vektorraum über K heißt normierter Raum, wenn es eine Norm $\|.\|$ gibt, die die Topologie von E induziert. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.*

Beispiel:
Sei X ein nulldimensionaler lokalkompakter Hausdorffraum, K ein nichtarchimedischer Körper. $\mathcal{BC}(X)$ bezeichne die beschränkten stetigen Funktionen $X \to K$. Diese bilden einen Banachraum bezüglich der Supremumsnorm.
Die beschränkten stetigen Funktionen, für die $f(X)$ präkompakt ist in K, bilden einen abgeschlossenen Unterraum $PC(X)$ von $\mathcal{BC}(X)$.
Der Raum $C_\infty(X) := \{f \in \mathcal{BC}(X) : \forall\epsilon > 0 \exists A \subset X, A$ ist kompakt $, |f(x)| < \epsilon, \forall x \notin A\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $PC(X)$.

Die metrische Vervollständigung eines normierten Raumes ist in natürlicher Weise ein Banachraum.
Weiters können in der nichtarchimedischen Theorie auch Banachräume noch stärker vervollständigt werden. Dazu definieren wir:

Definition 3.3 *Ein Banachraum E heißt sphärisch vollständig, falls er als (ultra)-metrischer Raum sphärisch vollständig ist.*

Anmerkung:
Jeder normierte Vektorraum E läßt sich in einen sphärisch vollständigen normierten Vektorraum F isometrisch einbetten, sodaß kein echter sphärisch vollständiger Teilraum von F das eingebettete E enthält.
Völlig analog dem archimedischen Fall, definiert man Isomorphie, Isometrien, den (topologischen) Dualvektorraum, lineare Hülle oder die schwache Topologie. In jedem Fall erwähnenswert ist aber, dass der Wertebereich der Bewertung auf dem Körper, bis auf 0, gänzlich verschieden sein kann, von dem Wertebereich der nicht-archimedischen Norm (z.B. weil die Bewertung auf K diskret ist). Dadurch kann es z.B. passieren, dass die Einheitskugel leer ist. Das hat für die Definition einer Norm auf dem Raum der linearen Abbildungen zwischen normierten Räumen Konsequenzen.

Definition 3.4 *Bezeiche $L(E,F)$ den Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen zwischen zwei normierten Vektorräumen E,F. Dann soll die Abbildung*

$$\|.\| : T \mapsto \|T\| := \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0\} \qquad (T \in L(E,F))$$

Norm auf $L(E,F)$ heißen.

Satz 3.5 *Die Norm auf $L(E,F)$ ist eine Norm im Sinne der ersten Definition. Weiters ist $L(E,F)$ genau dann ein Banachraum, wenn F einer ist.*

Beweis:
Die erste Aussage ist trivial, die zweite wird genau wie im archimedischen Fall bewiesen. □

Wie schon erwähnt, wird der duale Vektorraum genau als $L(E,K)$ definiert. Wir schreiben auch für $L(E,E)$ kurz $L(E)$. Speziell für $L(E)$ haben wir in gewohnter Weise ein Multiplikation durch Verknüpfung der Abbildungen und die Ungleichung $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$. Damit gilt

Satz 3.6 *Die als Verknüpfung definierte Multiplikation auf $L(E)$ ist $\|.\|$-stetig. Damit ist $L(E)$ eine normierte Algebra. Außerdem gilt mit der obigen Definition der Norm:*

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \qquad [x \in E, T \in L(E,F)].$$

Beweis:
Folgt direkt aus der Defintion, wie im archimedischen Fall. □

Die Konvergenz von Reihen verhält sich wie bei nichtarchimedischen abelschen Gruppen. Konvergenz ist stets unbedingt!
Direkte Summen lassen sich ebenso leicht einführen, wenn man als Norm auf einem kartesischen Produkt $E \times F$ die Abbildung $\|(x,y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$ nimmt. Für endliche Summen läßt sich diese Konstruktion natürlich iterieren. Auf einem endlich-dimensionalen K^n nehmen wir als Norm immer die max-Norm als gegeben an. Für unendliche Summen muß man anders definieren:

Definition 3.7 *Sei I eine beliebige Indexmenge, E_i normierte Räume $\forall i \in I$. Die Teilmenge eines kartesischen Produktes $\prod_{i\in I} E_i$, für die gilt $\{\|a_i\| : i \in I\}$ ist beschränkt, erzeugt einen linearen Teilraum auf dem eine Norm erklärt werden kann durch $\|a\| := \sup\{\|a_i\| : i \in I\}$. Diesen Raum bezeichnen wir mit $\times_{i\in I} E_i$.*
Die Elemente, sodaß für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{i \in I : \|a_i\| \geq \epsilon\}$ endlich ist, bilden einen abgeschlossenen linearen Teilraum bezeichnet durch $\oplus_{i\in I} E_i$. Man nennt dies die direkte Summe der E_i.

Im Hinblick auf die später wichtigen Orthogonalbasen werden wir als nächstes eine Basis eines Banachraums definieren. Dazu ist noch die Definition eines bestimmten Raums notwendig.

Definition 3.8 *Sei X eine nichtleere Menge und s eine Funktion $X \to (0,\infty)$. Für $f : X \to K$ sei:*

$$\|f\|_s := \sup\{|f(x)|s(x) : x \in X\}.$$

Die Funktionen für die dieses sup *endlich ist bilden einen Banachraum $l^\infty(X : s)$ unter der Norm $\|.\|_s$.*
Als $c_0(X : s)$ bezeichnen wir den abgeschlossenen Unterraum, welcher aus den Funktionen besteht, für die für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{x \in X : |f(x)|s(x) \geq \epsilon\}$ endlich ist.

Anmerkung:
$c_0(X : s)$ ist die abgeschlossene lineare Hülle der charakteristischen Funktionen von einpunktigen Teilmengen von X, in $l^\infty(X : s)$.

Definition 3.9 *Eine Basis eines Banachraums ist eine Familie $\{x_i i \in I : x_i \in E\}$ zusammen mit einer Abbildung $S : c_0(I : \|.\|) \to E$ definiert als $S(f) := \sum_{i\in I} f(x_i)x_i$ wobei S bijektiv sein muß.*

Weiters kann man Quotientenräume, wie gewohnt definieren.
Im nichtarchimedischen Fall ist es möglich einen Begriff von Orthogonalität zu geben, der auch für Banachräume nützlich ist. Die Idee dazu kommt aus einer Eigenschaft von Hilberträumen in der archimedischen Theorie. Das ist auch deshalb sehr interessant, weil es große Schwierigkeiten gibt Analoga zu Hilberträumen zu konstruieren. Eine für die Funktionalanalysis wirklich gewinnbringende Theorie zu inneren Produkten im unendlich-dimensionalen Nichtarchimedischen ist mir bisher nicht bekannt.

3.1.2 Orthogonalität im Banachraum

Definition 3.10 *Sei E ein normierter Raum und D ein abgeschlossener linearer Teilraum. Dann sei $dist(x, D) := \inf_{y \in D} \|x - y\|$. Wir definieren dann den Winkel zwischen zwei Vektoren als*

$$\angle(x, y) := \frac{dist(x, [y])}{\|x\|}.$$

Zwei Vektoren heißen dann Orthogonal, falls $\angle(x, y) = \angle(y, x) = 1$.

Die angesprochene Analogie zum archimedischen Fall liegt darin, dass im reellen oder komplexen Hilbertraum der Winkel zwischen zwei Vektoren mit $\arcsin(\frac{dist(x,[y])}{\|x\|})$ definiert werden kann. Der arcsin interessiert uns im Nichtarchimedischen nicht.
Dass diese Definition sinnvoll ist haben wir uns damit noch nicht überlegt. Die Eigenschaften der Winkelabbildung werden das aber schnell klar machen.
Zuvor benötigen wir allerdings noch zwei Hilfssätze:

Satz 3.11 *Falls $a_1, a_2, \dots, a_n$ Elemente eines normierten Vektorraums E sind und $\|a_i\| \neq \|a_j\|, \forall i \neq j$, dann ist*

$$\|a_1 + \cdots + a_n\| = \max\{\|a_i\| : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Beweis:
Sicher ist $\|a_1 + \cdots + a_n\| \leq \max\{\|a_i\| : i = 1, \dots, n\}$.
Für die Umkehrung nehmen wir an $\|a_1\| < \cdots < \|a_n\|$. Bezeichne s die Summe der a_i, dann ist $a_n = s - (a_1 + \cdots + a_n)$, sodaß

$$\|a_n\| \leq \max\{\|s\|, \max\{\|a_i\| : i < n\}\} = \max\{\|s\|, \|a_{n-1}\|\}.$$

Da wir der Größe nach geordnet hatten, muß gelten $\|a_n\| \leq \|s\|$. $\square$
Daraus folgt auch unmittelbar, dass für eine Folge $(a_i), a_i \in E, \forall i$, $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ konvergiert wenn a_i eine Nullfolge ist(die Umkehrung ist klar).
Der nächste Satz wird für die Bestimmung der Eigenschaften der Orthogonalität benötigt.

Satz 3.12 *Seien x, y Elemente eines normierten Raumes E. Sei $t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1$ und $\|x + y\| \geq t\|x\|$. Dann gilt auch $\|x + y\| \geq t\|y\|$ und damit*

$$\|x + y\| \geq t \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Beweis:
Angenommen $\|x+y\| < t\|y\|$. Dann gilt $\|x+y\| < \|y\| = \|-y\|$. Daraus folgt mit dem obigen Satz $\|x\| = \|y\|$ und $\|x+y\| \geq t\|x\| = t\|y\|$. $\square$
Jetzt hat man alle Mittel um die elementaren Eigenschaften der Orthogonalität zu bestimmen.

Satz 3.13 *Seien $x, y \neq 0$ zwei Elemente aus einem normierten Raum E. Dann gilt:*

(a) $0 \leq \angle(x,y) \leq 1$. *Es gilt $\angle(x,y) = 0$ dann und nur dann, wenn x und y linear abhängig sind.*

(b)
$$\angle(\alpha x, \beta y) = \angle(x,y) \qquad (\forall \alpha, \beta \neq 0, \alpha, \beta \in K).$$

(c)
$$\angle(x,y) = \angle(y,x)$$

(d)
$$\angle(x,y) = \inf\{\|\alpha x + \beta y\| / \max\{\|\alpha x\|, \|\beta y\| : \alpha, \beta \neq 0\}.$$

(e)
$$\|x\|\angle(x, x+y) = \|y\|\angle(y, x+y).$$

Beweis:
(a) und (b) gelten laut Definition. (c) folgt aus (d). (e) aus der Gleichheit $dist(x, [x+y]) = dist(y, [x+y])$. Zum Beweis von (d):
Seien $\alpha, \beta \in K$. Dann ist

$$\|\alpha x + \beta y\| \geq dist(\alpha x, [y]) = |\alpha| dist(x, [y]) = \|\alpha x\| \angle(x,y);$$

also(hier geht der obige Satz ein) $\|\alpha x + \beta y\| \geq \angle(x,y) \max\{\|\alpha x\|, \|\beta y\|\}$.
Das ist die eine Richtung von (d). Für die andere beachte man:

$$\begin{aligned} \angle(x,y) \qquad &= \inf\{\|x+\beta y\| / \|x\| : \beta \in K\} \geq \\ &\inf\{\|x+\beta y\| / \max\{\|x\|, \|\beta y\|\} : \beta \in K\} \\ &\inf\{\|\alpha x + \beta y\| / \max\{\|\alpha x\|, \|\beta y\|\} : \alpha, \beta \neq 0\}. \quad \square \end{aligned}$$

Insbesondere die Symmetrie in x und y ist eine sehr wichtige Eigenschaft. Man kann die Orthogonalität von zwei Vektoren x und y nun zum Beispiel auch ausdrücken durch

$$\|\alpha x + \beta y\| = \max\{\|\alpha x\|, \|\beta y\|\} \qquad (\forall \alpha, \beta \in K)$$

Definition 3.14 *Ist D ein linearer Unterraum von E, so schreiben wir $x \perp D$, wenn $x \perp y, \forall y \in D$.*

Im Zusammenhang damit gibt es noch einen wichtigen Begriff:

Definition 3.15 *Sei E ein normierter Vektorraum und D ein Unterraum von E. E heißt eine unmittelbare(oder direkte) Erweiterung von D, falls 0 das einzige Element von E ist, das auf ganz D orthogonal steht.*

Zur Orthogonalität von Folgen von Elementen:

Definition 3.16 *Sei (x_i) eine Folge in E. Wir sagen, die Folge ist orthogonal, falls $\forall m \in \mathbb{N}$ und $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ gilt*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m\| = \max\{\|\alpha_i x_i\| : i = 1, \ldots, m\}.$$

Eine Abschwächung dieser Forderung liefert das folgende Konzept:

Definition 3.17 *Unter den gleichen Vorraussetzungen wie oben, heißt eine Folge t-orthogonal($0 < t \leq 1, t \in \mathbb{R}$), wenn gilt*

$$\|\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_m x_m\| \geq t \max\{\|\alpha_i\| : i = 1, \ldots, m\}$$

Analog dem Archimedischen sind Komplemente und ortho-Komplemente abgeschlossener Teilräume definiert. Die Orthogonalität zweier Teilräume ist durch die paarweise Orthogonalität ihrer Elemente bestimmt.
Zur Reflexivität von Banachräumen gibt es im Nichtarchimedischen mehrere wichtige Begriffe:

Definition 3.18 *Wir definieren eine lineare Abbildung $J_E : E \mapsto E''$ durch $a \mapsto a^*$ wobei gilt $a^*(f) := f(a) \quad (\forall a \in E, f \in E')$. Wenn J_E*

(a) eine surjektive lineare Isometrie ist, heißt E reflexiv.

(b) eine lineare Isometrie ist, heißt E pseudoreflexiv.

(c) ein linearer Homöomorphismus auf einen Unterraum von E'' ist, heißt E topologisch pseudoreflexiv.

3.1.3 Hauptsätze der Funktionalanalysis

Als Nächstes werden wir zeigen, dass einige Grundpfeiler der archimedischen Funktionalanalysis auch in der nichtarchimedischen Theorie gelten.

Satz 3.19 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Sei T eine lineare Abbildung eines Banachraums E in einen Banachraum F, sodaß $graph(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $E \times F$ ist. Dann ist T stetig.*

Beweis:
Wähle $\pi \in K, 0 < |\pi| < 1$ und sei $B := \overline{\{x \in E : \|Tx\| \leq 1\}}$. Die Mengen $\pi^{-n}B \quad (n \in \mathbb{N})$ sind abgeschlossen und ihre Vereinigung ist E. Nach dem Baireschen Kategoriensatz gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, ein $\epsilon > 0$ und ein $a \in E$, sodaß $B_\epsilon(a) \subset \pi^{-m}B$. Dann ist

$$B_\epsilon(0) \subset a + \pi^{-m}B \subset \pi^{-m}B + \pi^{-m}B = \pi^{-m}B.$$

Mit $\delta := |\pi|^m\epsilon$ gilt $B_\delta(0) \subset B$. Für jedes $x \in E, \|x\| \leq \delta$ gibt es ein $x' \in E, \|Tx'\| \leq 1, \|x - x'\| \leq |\pi|\delta$, also $\|\pi^{-1}x - \pi^{-1}x'\| \leq \delta$. Für so ein x können wir induktiv eine Folge $x_0, x_1, \ldots$ konstruieren, sodaß für alle n, $\|Tx_n\| \leq 1$ und

$$\|\pi^{-n-1}x - \pi^{-n-1}x_0 - \pi^{-n}x_1 - \cdots - \pi^{-1}x_n\| \leq \delta.$$

Daher ist $\|x - (x_0 + \pi x_1 + \cdots + \pi x_n)\| \leq |\pi|^{n+1}\delta$. Damit folgt $x = \sum \pi^n x_n$. Weiters konvergiert $\sum \pi^n T x_n$ und gemäß unserer Voraussetzung ist diese Summe Tx. Es ist daher $\|Tx\| \leq 1$ für jedes $x \in B_\delta(0)$. Daher ist T stetig. $\square$
Eine sehr wichtige Folgerung ist der

Satz 3.20 (Satz von der offenen Abbildung) *Seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$ surjektiv. Dann ist T eine offene Abbildung.*

Beweis:
Sei $D := T^{-1}(0)$ und P die Quotientenabbildung $E \mapsto E/D$. Dies induziert eine lineare Abbildung $\overline{T} : E/D \mapsto F$, sodaß $T = \overline{T}P$. $\overline{T}$ ist ein Homöomorphismus (das folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen).
Sei jetzt $U \subset E$ offen. Dann ist $P(U)$ offen in E/D und $\overline{T}P(U)$(also T) ist offen in F. $\square$
Und daraus folgt ein weiterer Grundsatz der Funktionalanalysis, nämlich der Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit.

Satz 3.21 (Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit) *Sei E ein Banachraum und E ein normierter Vektorraum. Ist $\mathcal{S} \subset L(E, F)$, sodaß $\forall x \in E$ die Menge $\{Sx : S \in \mathcal{S}\}$ beschränkt ist in F. Dann ist $\mathcal{S}$ eine beschränkte Teilmenge in $L(E, F)$.*

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $E_n := \{x \in E : \forall S \in \mathcal{S}, \|Sx\| \leq n\}$ abgeschlossen in E. Da $\cup E_n = E$ ist, hat zumindest ein E_n nichtleeres Inneres. Weiters ist jedes E_n eine Gruppe.
Daher gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(0) \subset E_n$. Sei $\pi \in K, 0 < |\pi| < 1$. Für jedes $x \in E$ gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, für das $\epsilon|\pi| \leq |\pi|^m\|x\| \leq \epsilon$. Daher ist $\pi^m x \in B_\epsilon(0)$, sodaß $\forall S \in \mathcal{S}$ gilt

$$\|Sx\| = |\pi|^{-m}\|S(\pi^m x)\| \leq |\pi|^{-m}n \leq (n/\epsilon|\pi|)\|x\|.$$

Daher ist $\mathcal{S} \subset \{T \in L(E, F) : \|T\| \leq n/\epsilon|\pi|\}$. $\square$
Der ebenfalls sehr wichtige Satz von Hahn-Banach läßt sich allerdings nur über sphärisch vollständigen Grundkörpern beweisen. Sein nichtarchimedisches Analogon heißt Ingleton's Theorem.

Satz 3.22 (Ingleton's Theorem) *Sei V ein Unterraum eines normierten Raumes E über einem sphärisch vollständigen Grundkörper K. Dann ist die Einschränkungsabbildung*

$$\psi \mapsto \varphi = \psi_{|_V}, E' \mapsto V'$$

surjektiv und zu jedem $\varphi \in V'$ existiert eine normgleiche Fortsetzung auf E'.

Beweis:
Zuerst zeigen wir, dass eine stetige Linearform auf V normgleich auf $V+Ka, (a \in E, a \notin V)$ fortgesetzt werden kann. Es muß für $\psi = \overline{\varphi}$ gelten

$$\|\psi(x+\lambda a)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x+\lambda a\| \qquad (x \in V, \lambda \in K)$$

Für $\lambda = 0$ gilt dies, da $\psi_{|_V} = \varphi$. Ist $\lambda \neq 0$, dann können wir durch $-\lambda$ dividieren und erhalten als Bedingungen:

$$\|\psi(x-a)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x-a\| \quad (x \in V),$$
$$\|\psi(x)-\psi(a)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x-a\| := r_x \quad (x \in V).$$

Wir wählen also $\alpha = \psi(a)$ aus dem Schnitt der Kugeln $B_x = B_{\leq r_x}(\varphi(x)) \subset K$. Für je zwei Punkte $x, y \in V$ liegt zwischen $\varphi(x) \in B_x$ und $\varphi(y) \in B_y$ der Abstand

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x-y\| \leq \|\varphi\| \max\{\|x-a\|, \|y-a\|\} = \max\{r_x, r_y\}.$$

Das bedeutet $B_x \cap B_y \neq \emptyset$. Da K sphärisch vollständig ist, ist $\cap_{x \in V} B_x$ nichtleer und jedes Element dieses Schnitts ist ein mögliches $\alpha = \psi(a)$.
Wir betrachten nun die Menge aller Paare (V', φ') bestehend aus einem Unterraum $V' \supset V$ und einer normgleichen Fortsetzung von φ auf V'. Offensichtlich erhält man eine Halbordung durch

$$(V'', \varphi'') \succ (V', \varphi') \Longleftrightarrow V'' \supset V', \varphi''_{|_{V'}} = \varphi'$$

Jede Kette solcher Paare hat eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Paar. Nach dem ersten Teil des Beweises, muß dieses Paar auf ganz E definiert sein. $\square$

3.1.4 Räume vom abzählbaren Typ

Der Begriff der Separabilität spielt eine bedeutende Rolle in der archimedischen Funktionalanalysis. Dort ist die Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge des Banachraums äquivalent zur Existenz einer abzählbaren Teilmenge, deren lineare Hülle dicht liegt. Diese Äquivalenz kommt dadurch zustande, dass die betrachteten Grundkörper schon separabel sind. In der nichtarchimedischen Theorie muß das für den Grundkörper keineswegs erfüllt sein. Aber es gibt viele Räume, die abzählbare Mengen enthalten, deren abgeschlossene lineare Hülle der ganze Raum ist.

Definition 3.23 *Ein Banachraum E heißt vom abzählbaren Typ, wenn er die abgeschlossene lineare Hülle einer höchstens abzählbaren Teilmenge ist. Ist der Grundkörper K separabel(z.B $\mathbb{C}_p$), dann fällt dieser Begriff mit der Separabilität von E zusammen.*

Vorbereitend, benötigen wir nun einen kleinen

Satz 3.24 *Sei F ein abgeschlossener linearer Unterraum eines normierten Vektorraumes E und $a \in E, a \notin F$.*

(a) $[a] + F$ ist abgeschlossen. Ist F vollständig, dann auch $[a] + F$.

(b) Für jedes $t \in R$ mit $0 < t < 1$, gibt es ein $e \in E$ mit $[a] + F = [e] + F$ und

$$dist(e, F) \geq t\|e\|.$$

Für ein solches e gilt

$$\|\alpha e + x\| \geq \max\{\|\alpha e\|, \|x\|\} \qquad (\alpha \in K, x \in F).$$

Mit $0 \leq |\pi| < 1$ kann man e so wählen, dass

$$|\pi| \leq \|e\| \leq 1.$$

(c) Ist F sphärisch vollständig, dann kann man in (b) $t = 1$ wählen.(also $e \perp F$)

Beweis:
Setze $r := dist(a; F)$. Es gibt ein $z \in F$ mit$\|a - z\| \leq t^{-1}r$. Setze $e_0 := a - z$, dann ist $[a] + F = [e] + F$ und $t\|e_0\| \leq r = dist(e_0 + z, F) = dist(e_0, F)$.
Ist e ein nichttriviales Element von E, sodaß $t\|e\| \leq dist(e, F)$. Für jedes $\alpha \in K, x \in F$ gilt $\|\alpha e + x\| \geq dist(\alpha e, F) \leq t\|\alpha e\|$ und daher $\|\alpha e + x\| \geq t \max\{\|\alpha e\|, \|x\|\}$. Die Abbildung $(\alpha, x) \mapsto \alpha e + x$ ist daher ein linearer Homöomorphismus von $K \oplus F$ auf $[a] + F$, sodaß $[a] + f$ metrisch vollständig und abgeschlossen in E ist. Die letzte Aussage gilt, durch Multiplikation von e mit einem Skalar, offensichtlich.
Sei nun F sphärisch vollständig. Wir suchen ein $z \in F$ mit $\|a - z\| = r$. Für jedes $s > r$ ist $B_s(a) \cap F$ eine Kugel in F mit Radius s. Es enthält nun $\cap_{s>r} B_s(a) \cap F$ ein Element z. Nun ist $\|a - z\| \leq \inf\{s : s > r\}$ und $\|a - z\| \geq dist(a, F) = r$. □
Im Folgenden sei ein endlichdimensionaler K^n immer mit der Maximumsnorm versehen. Wir können nun eine nützliche Aussage über endlich-dimensionale Vektorräume machen.
Anmerkung:
Es bezeichnet im folgenden Satz K_{s_i} den Grundkörper K als Vektorraum über sich selbst mit der Norm $\|e_1\| := s_1 \in \mathbb{R}_+$, wobei e_1 den kannonischen Basisvektorbezeichnet.

Satz 3.25 *Sei E ein n-dimensionaler normierter Vektorraum. Dann gilt:*

(a) E ist linear homöomorph zu K^n.

(b) E ist ein Banachraum. Alle linearen Abbildungen $E \mapsto K$ sind stetig. Alle linearen Unterräume sind abgeschlossen und komplementiert.

(c) Für jedes $t \in (0,1)$ gibt es eine t-orthogonale Folge $e_1, \dots, e_n \in E$ die eine Basis von E bildet.

(d) Für jedes $t \in (0,1)$ gibt es positive reelle Zahlen $s_1, \dots, s_n$ und eine lineare Bijektion $T : K_{s_1} \oplus \cdots \oplus K_{s_n} \mapsto E$, sodaß

$$t\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|x\| \qquad (x \in K_{s_1} \oplus \cdots \oplus K_{s_n}).$$

(e) E ist reflexiv.

Beweis:
Alle diese Eigenschaften folgen leicht aus dem vorigen Satz. □

Wir kommen nun gewissermaßen zum Hauptsatz über Banachräume vom abzählbaren Typ.

Satz 3.26 *Sei E ein unendlich-dimensionaler Banachraum vom abzählbaren Typ. Dann gilt*

(a) Für jede Folge $t_i \in (0,1)$, hat E eine Basis $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, sodaß

$$\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\| \geq \max\{t_i\|\alpha_i e_i\| : i = 1, \dots, m\}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$.

(b) Für jedes $t \in (0,1)$ enthält E eine t-orthogonale Folge die eine Basis von E bildet. E ist linear homöomorph zu c_0.

(c) Für jedes $t \in (0,1)$ gibt es eine Funktion $s : \mathbb{N} \mapsto (0,1)$ und eine lineare Bijektion $S : c_0(\mathbb{N} : s) \mapsto E$, sodaß

$$t\|x\| \leq \|Sx\| \leq \|x\| \qquad [x \in c_0(\mathbb{N} : s)].$$

(d) E ist pseudoreflexiv.

(e) *Sei E ein abgeschlossener linearer Teilraum von E. Dann sind sowohl D als auch E/D vom abzählbaren Typ. D ist komplementiert. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Projektion von E auf D mit Norm kleiner gleich $1 + \epsilon$.*

(f) *Sei D ein linearer Unterraum von E, sei $f' \in D$ und $\epsilon > 0$. Dann kann f' fortgesetzt werden zu $\overline{f'} \in E'$ mit $\|\overline{f'}\| \leq (1+\epsilon)\|f\|$.*

Beweis:
Sei $\pi \in K$, $0 < \pi < 1$.
Zu (a): Wir dürfen annehmen, dass $t_1 < t_2 < \dots$. Wir wählen eine Folge $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$ linearer Teilräume von E, sodaß jedes E_n n-dimensional ist und $\overline{\cup E_n} = E$. Nach Satz 3.24 können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $e_n \in E_n$ wählen, für das gilt:

$$|\pi| \leq \|e_n\| \leq 1$$

$$\|\alpha e_n + x\| \geq \frac{t_n}{t_{n+1}} \max\{\|\alpha e_n\|, \|x_n\|\} \quad (\alpha \in K, x \in E_{n-1}).$$

Es folgt induktiv, dass für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, gilt

$$\|\alpha_n e_n + \dots + \alpha_1 e_1\| \geq \max_{i \leq n}\{\frac{t_i}{t_{n+1}}\|\alpha_i e_i\| : i \leq n\}.$$

Da $t_{n+1} < 1$ ist, haben wir die gesuchte Ungleichung. Es bleibt zu zeigen, dass $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Basis ist.
Sei $s : \mathbb{N} \mapsto [0, \infty)$ die Funktion $i \mapsto \|e_i\|$. Dann erhalten wir eine Abbildung $S : c_0(\mathbb{N} : s) \mapsto E$ durch

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \qquad [(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in c_0(\mathbb{N} : s)].$$

S ist offensichtlich linear und $\|S\| \leq 1$. Es folgt nun weiters, dass

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\| \geq t_1 \max\{\|\alpha_i e_i\|\} \quad (n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K).$$

Daher ist $\|Sx\| \geq t_1\|x\|$. S ist also ein linearer Homöomorphismus auf einen abgeschlossenen linearen Teilraum von E. Dieser Teilraum enthält aber alle e_i, also muß S surjektiv sein und die e_i eine Basis.
Zu (b):
Man wende das obige auf $t_i = \sqrt[i]{t}$. Die Folge der e_i ist dann t-orthogonal. Da $|\pi| < s(i) < 1$ gilt sind $c_0(\mathbb{N} : s)$ und c_0 identlische Mengen und die Identität ist ein Homöomorphismus.
Zu (c):
Analog (b).
Zu (d):
Sei $a \in E$ und $t \in (0, 1)$: wir konstruieren ein nichttriviales $f \in E'$ mit $|f(a)| \geq t\|f\|\|a\|$.

Seien s und S wie in (c). Es gibt ein $b = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in c_0(\mathbb{N} : s)$, sodass $Sb = a$ und es gibt ein i mit $\|b\| = s(i)|\beta_i\|$. Sei $f : E \mapsto K$ die Funktion die jedem $x \in E$ die i-te Koordinate von $S^{-1}x$ zuordnet. Dann ist $f \in E'$, $\|f\| \leq s(i)^{-1}\|S^{-1}\| \leq s(i)^{-1}t^{-1}$, während andrerseits $|f(a)| = |\beta_i| = s(i)^{-1}\|b\| \geq s(i)^{-1}\|Sb\| = s(i)^{-1}\|a\|$.
Zu (e):
Klarerweise ist $F := E/D$ vom abzählbaren Typ. Sei Q die Quotientenabbildung $E \mapsto F$. Sei $\epsilon > 0, t := (1+\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$. F hat eine Basis bestehend aus Elementen einer t-orthogonalen Folge $e_1, e_2, \dots$. Für jedes i sei $a_i \in E$, sodass $Qa_i = e_i$ und $\|e_i\| \geq t\|a_i\|$. Ist $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in K$, dann gilt

$$\|\sum_i \lambda_i a_i\| \leq \max\{|\lambda_i|t^{-1}\|e_i\|\} \leq t^{-2}\|\sum_i \lambda_i e_i\|.$$

Also gibt es ein $T \in L(E,F)$ mit $Te_i = a_i$ und $\|T\| \leq t^{-2} = 1+\epsilon$. Es ist $QT = id_F$. Sei nun $P := I - TQ$. Dann ist $P \in L(E)$ und $\|P\| \leq 1+\epsilon$. Wegen $QP = Q - QTQ = Q - id_F \circ Q = Q - Q = 0$ folgern wir, dass $P(E)$ im Kern von Q enthalten ist. Dieser Kern ist D und auf D gilt $Q = 0$, also $\|P\| = 1$. Es ist also P eine Projektion von E auf D mit Norm $1+\epsilon$.
Zu (f):
Wir nehmen an, D sei abgeschlossen. Sei P wie in (e) und $\tilde{f} := f \circ P$. □

Korollar 3.27 *Ein Banachraum E ist lokalkompakt dann und nur dann, wenn K lokalkompakt und E endlichdimensional ist.*

Beweis:
Ist E endlichdimensional und K lokalkompakt, dann zeigt man, wie im Fall $\mathbb{Q}_p^n$, dass E lokalkompakt ist.
Ist umgekehrt E lokalkompakt, dann enthält E einen abgeschlossenen linearen Teilraum der Homöomorph zu K ist, also ist K lokalkompakt. Wäre E weiters unendlichdimensional, so gibt es einen abgeschlossenen Teilraum der homöomorph zu c_0 ist. c_0 ist aber nicht lokalkompakt. □

Korollar 3.28 *In einem Banachraum E mit Basis X ist jeder abgeschlossene lineare Teilraum vom abzählbaren Typ komplementiert.*

Beweis:
Sei E ein Banachraum mit Basis X und D ein abgeschlossener linearer Teilraum vom abzählbaren Typ. D enthält also eine abzählbare Teilmenge Y, mit $cls(Y) = D$. Jedes $y \in Y$ kann geschrieben werden als

$$y = \sum_{x \in X} \lambda_{xy} x$$

Für geeignete $\lambda_{xy} \in K$. Für jedes $y \in Y$ gibt es nur höchstens abzählbarviele x, für die $\lambda_{xy} \neq 0$. Es ist also auch die Menge $Z := \{x \in X : \exists y \in Y, \lambda_{xy} \neq 0\}$ höchstens abzählbar. Offensichtlich ist $cls(X \backslash Z)$ ein Komplement von $cls(Z)$ in E, während D ein Komplement in $cls(Z)$ hat. Daher hat D ein Komplement in E. □

3.1.5 Kompakte Operatoren

Um alle wichtigen Sätze über die Orthogonalität auch beweisen zu können, sind an einigen wenigen Stellen Analoga kompakter Operatoren nötig. Da die Bedeutung der kompakten Operatoren für den Spektralsatz ansonsten aber eher gering ist, werden die Sätze über diese Operatoren hier ohne Beweis angegeben.

Definition 3.29 *Im Folgenden bezeichne B_K die abgeschlossene Einheitskugel in K und B_E selbige in einem normierten Raum E.*

Bei der Definition kompakter Operatoren sind einige zusätzliche Begriffe von Bedeutung:

Definition 3.30 *Eine nichtleere Teilmenge von E heißt absolut konvex, wenn mit $x, y \in E$ auch $\lambda x + \mu y, (\lambda, \mu \in B_K)$ in der Menge enthalten sind. Es bezeichne $\overline{Co}Y$ für ein nichtleeres $Y \subset E$ den Schnitt über alle abgeschlossenen absolut konvexen Teilmengen von E die Y enthalten. Diese Menge heißt abgeschlossene absolut konvexe Hülle von Y.*
Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt kompaktoid, falls es für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Menge $X \subset E$ gibt, mit $A \subset B_\epsilon(0) + \overline{Co}X$.

Man überlegt sich leicht, dass Untermengen von Kompaktoiden wieder kompaktoid sind, ebenso wie Summen und Vereinigungen. Gleichfalls sind Bilder von Kompaktoiden unter stetigen Abbildungen wieder kompaktoid.
Im Folgenden spielen Banachräume, in denen alle eindimensionalen Unterräume orthokomplementiert sind, eine Rolle.

Satz 3.31 *Sei E ein Banachraum.*

(a) Ist K sphärisch vollständig, dann hat jeder eindimensionale lineare Teilraum ein Orthokomplement.

(b) Ohne die Vorraussetzung über K gilt dasselbe auch, wenn E isomorph zu einem $c_0(I : s)$ ist.

(c) Falls jeder eindimensionale Unterraum von E orthokomplementiert ist, dann ist E pseudoreflexiv und sogar jeder endlichdimensionale Unterraum ist Orthokomplementiert.

Diese Komplementeigenschaft hat nun eine interessante Folgerung:

Satz 3.32 *Sei $\pi \in K, 0 < |\pi| < 1$. Sei E ein Banachraum vom abzählbaren Typ und X eine nichtleere beschränkte und absolut konvexe Teilmenge von E. Dann gelten:*

1. *Falls für* $t \in (0,1)$ *jede* t*-orthogonale Folge von Elementen in* X *gegen* 0 *geht, dann gibt es eine* t*-orthogonale Folge* $e_1, e_2, \dots \in \pi^{-1}X$*, sodaß* $\lim e_n = 0$ *und* $X \subset \overline{Co}\{e_1, e_2, \dots\}$*.*

2. *Angenommen jeder eindimensionale Unterraum von* E *hat ein Orthokomplement. Falls jede orthogonale Folge in* X *gegen* 0 *geht, dann gibt es eine orthogonale Folge* $e_1, e_2, \dots \in \pi^{-1}X$ *mit* $\lim e_n = 0$ *und* $X \subset \overline{Co}\{e_1, e_2, \dots\}$*.*

3. *Angenommen die Bewertung von* K *sei diskret. Falls jede orthogonale Folge in* X *gegen* 0 *strebt, gibt es eine orthogonale Folge* $e_1, e_2, \dots \in X$ *mit* $\lim e_n = 0$ *und* $X \subset \overline{Co}\{e_1, e_2, \dots\}$*.*

Nun läßt sich die Eigenschaft kompaktoid zu sein etwas besser charakterisieren.

Satz 3.33 *Sei* X *eine beschränkte absolut konvexe Teilmenge eines Banachraums* E*. Sei* $0 < t < 1$*. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(a) X *ist kompaktoid.*

(b) Jede abzählbare Teilmenge von X *ist kompaktoid.*

(c) Für jedes $\epsilon > 0$ *gibt es einen endlichdimensoinalen Unterraum* D*, sodaß* $X \subset D + B_\epsilon(0)$*.*

(d) Es gibt eine präkompakte Menge $Y \subset E$ *mit* $X \subset \overline{Co}Y$*.*

(e) Es gibt eine t*-orthogonale Folge* $a_1, a_2, \dots \in E$ *mit* $\lim a_n = 0$ *und* $X \subset \overline{Co}\{a_1, a_2, \dots\}$*.*

(f) Jede t*-orthogonale Folge in* X *strebt gegen* 0*.*

(g) Die lineare Hülle von $\overline{X}$ *enthält keinen unendlichdimensionalen Unterraum von* E*, der abgeschlossen in* E *ist.*

(h) Sei D *ein Unterraum von* E*, sodaß* $\overline{X} \cap D$ *offen in* D *ist, dann ist* D *endlichdimensional.*

Man kann sofort verschärfen

Satz 3.34 *Seien E und X wie im vorigen Satz.*
(1)
Angenommen jeder eindimensionale Unterraum von E hat ein Orthokomplement. Dann ist Bedingung (a) des vorigen Satzes äquivalent zu jeder der beiden Folgenden:

(a) *Es gibt eine orthogonale Folge $a_1, a_2, \dots \in E$ mit $\lim a_n = 0$ und $X \subset \overline{Co}\{a_1, a_2, \dots\}$.*

(b) *Jede orthogonale Folge in X geht gegen 0.*

(2)
Falls die Bewertung auf K diskret ist, dann ist (a) des vorigen Satzes äquivalent zu :
Es gibt eine orthogonale Folge $a_1, a_2, \dots \in E$, sodaß $\overline{X} = \overline{Co}\{a_1, a_2, \dots\}$.

Nun können wir kompakte Operatoren definieren:

Definition 3.35 *Seien E, F Banachräume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt kompakt, falls $T(B_E)$ kompaktoid ist.*

Diese Operatoren sind offensichtlich stetig. Sie sind den vollstetigen Operatoren der archimedischen Theorie verwandt:

Satz 3.36 *Seien E, F Banachräume, $T \in L(E, F)$. T ist kompakt dann und nur dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $S \in L(E, F)$ mit $S(E)$ endlichdimensional existiert und $\|T - S\| \leq \epsilon$.*

Überhaupt lassen sich kompakte Operatoren schön charakterisieren:

Satz 3.37 *Seien E, F Banachräume. Für $T \in L(E, F)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *T ist kompakt.*

(b) *Für jedem abgeschlossenen Unterraum D vom abzählbaren Typ, ist die Einschränkung von T auf D kompakt.*

(c) *$T(E)$ enthält keinen unendlichdimensionalen Unterraum, der abgeschlossen in F ist.*

(d) Es gibt $a \in c_0, U \in L(E, l^\infty)$ *und* $S \in L(c_0, F)$*, sodaß* $T = SM_aU$*.*

(e) Es gibt $a_1, a_2, \dots \in F$ *und* $g_1, g_2, \dots \in E'$*, sodaß* $\lim \|a_n\|\|g_n\| = 0$ *und* $Tx = \sum g_n(x)a_n \quad (x \in E)$*.*

(f) Für $n \in \mathbb{N}_0$ *sei* $v_n(T) := \inf\{\|T_{|_D}\| : D$ *ist linearer Teilraum der Codimension* $\leq n\}$*. Dann ist* $\lim v_n(T) = 0$*.*

(g) Ist D *ein unendlich-dimensionaler Teilraum von* E*, dann ist* $\inf\{\|Tx\|/\|x\|; x \in D, x \neq 0\} = 0$*.*

Damit haben wir alle wichtigen Sätze über kompakte Operatoren.

3.2 Maße auf σ-Algebren

Ein wichtiges Ergebnis für die Maßtheorie K-wertiger Mengenfunktionen, betrifft die Analogie zur archimedischen Definition. Man kann Maße zwar auch auf σ-Algebren definieren, doch die dadurch erhältlichen Maße stellen sich als mehr oder weniger trivial heraus. Der Beweis dieses Ergebnisses gehört dennoch in dieses Kapitel, da damit interessante Aussagen über den Raum c_0 gemacht werden können.
Zuvor einige Definitionen:

Definition 3.38 *Sei* $\mathcal{R}$ *eine* σ*-Algebra von Teilmengen einer Menge* X *und sei* $\mu : \mathcal{R} \mapsto K$ σ*- additiv. Eine Menge* $A \in \mathcal{R}$ *heiße* μ*-Nullmenge, falls* $\mu(B) = 0$ *für alle* $B \in \mathcal{R}, B \subset A$*. Für* $A, B \in \mathcal{R}$ *schreiben wir* $A < B$ *falls* $A \backslash B$ *Nullmenge ist. Wir nennen* A, B *äquivalent, wenn sie sich nur um eine Nullmenge unterscheiden.*
Eine nicht-Nullmenge $A \in \mathcal{R}$ *heißt Atom, falls jede Teilmenge von* A *in* $\mathcal{R}$ *entweder eine Nullmenge oder äquivalent zu* A *ist.*

Falls A ein Atom ist und $B \in \mathcal{R}$, dann gilt trivialerweise entweder $A < B$ oder $A < X \backslash B$.

Satz 3.39 *Seien* $X, \mathcal{R}, \mu$ *wie oben. Dann gibt es eine Folge von paarweise disjunkten Atomen* $A_1, A_2, \dots$*, sodaß* $X \backslash \cup A_n$ *eine Nullmenge ist und*

$$\mu(A) = \sum \{\mu(A_n) : n \in \mathbb{N}; A_n < A\} \qquad (A \in \mathcal{R}).$$

Beweis:
Seien A, A_n, B, C Mengen aus $\mathcal{R}$. Für alle A setzen wir

$$\|A\| := \sup_{B \subset A} \min\{1, |\mu(B)|\}$$

Falls $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}$ und $B \subset \cup A_n$, dann ist B eine Vereinigung von paarweise disjunkten Elementen $B_1, B_2, \dots$ von $\mathcal{R}$ für die $B_n \subset A_n \quad (n \in \mathbb{N}$; dann ist $|\mu(B)| \leq \sup |\mu(B_n)|$, weswegen $\min\{1, |\mu(B)|\} \leq \sup \|A_n\|$. Daher:

$$\| \cup_n A_n\| = \sup_n \|A_n\| \qquad (A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}).$$

Weiters setzen wir

$$r(A) := \sup_{B \subset A, \|B\| = \|A\|} \|A \backslash B\| \qquad (A \in \mathcal{R})$$

Sei nun $A \in \mathcal{R}$ keine Nullmenge. Es gibt $A_1, A_2, \dots$, sodaß für jedes n,

$$\begin{aligned} &A_1 = A, \quad A_{n+1} \subset A_n; \\ &\|A_{n+1}\| = \|A_n\|; \\ &\|A_n \backslash A_{n+1}\| \geq \frac{1}{2} r(A_n) \end{aligned}$$

Sei $B := \cap A_n$. Für jedes n wählen wir $C_n \subset A_n \backslash A_{n+1}$, sodaß $|C_n| \geq (\frac{1}{2}) \|A_n \backslash A_{n+1}\|$. Gemäß der σ-Additivität von μ muß diese Folge konvergieren. Es gilt $\lim \mu(C_n) = 0, \lim \|A_n \backslash A_{n+1}\|$ und $\lim r(A_n) = 0$. Für alle $n, A_n = \cup_{k \geq n} (A_k \backslash A_{k+1}) \cup B$. Daher gilt

$$\|A\| = \lim \|A_n\| = \lim_n \max\{\sup_{k \geq n} \|A_k \backslash A_{k+1}\|, \|B\|\} = \|B\|.$$

Daher ist $\|B\| \neq 0$ und B keine Nullmenge. Zu zeigen ist, dass B ein Atom ist. Dafür muß für jedes $C \subset B$ entweder C oder $B \backslash C$ eine Nullmenge sein.
Nun gilt $\|B\| = \max\{\|C\|, \|B \backslash C\|\}$, sodaß entweder $\|C\| = \|B\|$ oder $\|B \backslash C\| = \|B\|$. o.B.d.A gelte Ersteres.
Für jedes n gilt $\|C\| = \|B\| = \|A\| = \|A_n\|$ und damit $\|B \backslash C\| \leq \|A_n \backslash C\| \leq r(A_n)$. Da der $\lim r(A_n) = 0$, muß $B \backslash C$ eine Nullmenge sein.
Jede nicht-Nullmenge enthält also ein Atom. Falls $A_1, A_2, \dots$ Atome sind und $A_i \cap A_j$ eine Nullmenge für $i \neq j$, dann konvergiert $\sum \mu(A_i)$ und $\lim \mu(A_i) = 0$. Damit gibt es nur höchstens abzählbar viele Atome und die Aussage des Satzes ist klar. $\square$

Satz 3.40 *Sei I eine Indexmenge. Für jedes σ-additive $\mu : P(I) \mapsto K$ ist $i \mapsto \mu(\{i\})$ ein Element von $c_0(I)$ und*

$$\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu(\{i\}) \qquad (A \subset I)$$

Beweis:
Wir wenden das vorhergehende Lemma auf $\mathcal{R} = P(I)$ an. Sei A ein Atom und werde $\nu : P(I) \mapsto 0, 1$ definiert als

$$\nu(B) := \begin{cases} 0 \in \mathbb{R} & \text{falls } \mu(B) = 0 \in k \\ 1 \in \mathbb{R} & \text{falls } \mu(B) = \mu(A) \\ \end{cases}$$

Dann ist ν σ-additiv. ν ist die Punktmasse in einem $i \in I$. Dann ist im Sinne des vorigen Lemmas A äquivalent zu $\{i\}$. Für die Atome relativ zu μ, die wir gemäß dem vorigen Lemmas erhalten, können wir Punktmassen nehmen. Es gibt also eine(endliche oder unendliche Folge) in I sodaß für alle $A \in P(I)$ gilt:

$$\mu(A) = \sum \{\mu(\{i\}) : n \in \mathbb{N}, i_n \in A\}. \quad \square$$

Satz 3.41 *Sei K nicht sphärisch vollständig, I eine Indexmenge. Dann gilt:*

(a) Sei $f \in l^\infty(I)'$. Wähle $a_i := f(\xi_{\{i\}}) \quad (i \in I)$. Dann ist $a \in c_0$ und

$$f(x) = \sum_{i \in I} a_i x_i \qquad [x \in l^\infty(I)].$$

Die Funktion $A \mapsto f(\xi_A) \quad (A \subset I)$ ist σ-additiv. auf $P(I)$.

(b) Falls $f \in l^\infty(I)'$ und f verschwindet identisch auf $c_0(I)$, dann ist $f = 0$. Der Quotientenraum $l^\infty(I)\backslash c_0(I)$ hat einen trivialen Bidualraum.

(c) $c_0(I)$ und $l^\infty(I)$ sind reflexiv.

Beweis:
(b) und (c) sind direkte Folgerungen aus (a). Zu (a):
Sei nun $f \in l^\infty(I)'$ und definiere $a : I \mapsto K$ wie in (a). Es ist $A \mapsto f(\xi_A)$ σ-additiv $P(I) \mapsto K$. Daher ist a ein Element von $c_0(I)$ und mit $A = I$ gilt

$$f(1) = \sum_{i \in I} f(\xi_{\{i\}}).$$

Nun sei $x \in l^\infty(I)$. Für $y \in l^\infty(I)$ definiere $xy \in l^\infty(I)$ als $(xy)_i := x_i y_i \quad (i \in I)$. Dann ist $y \mapsto f(xy)$ ein Element g von $l^\infty(I)'$ und es gilt

$$\begin{aligned} f(x) = g(1) &= \sum_{i \in I} g(\xi_{\{i\}}) = \sum_{i \in I} f(x\xi_{\{i\}}) \\ &= \sum_{i \in I} f(x_i \xi_{\{i\}}) = \sum_{i \in I} x_i f(\xi_{\{i\}}) = \sum_{i \in I} x_i a_i. \quad \square \end{aligned}$$

3.3 Orthogonalsysteme

Als nächstes wenden wir uns Orthogonalsystemen und -basen zu. Denn diese spielen ein bedeutende Rolle, für die Theorie der straffen Maße, welche die Analoga der Borelmaße im Archimedischen sind.
Um den Begriff des Orthogonalsystems angemessen zu definieren, benötigen wir einen Hilfssatz:

Satz 3.42 *Sei E ein Banachraum, $\{E_i\}_{i\in I}$ eine Familie von linearen Unterräumen von E. dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) Sind $i_1, \ldots, i_m$ verschiedene Elemente von I und $x_k \in E_{i_k}$ für $k = 1, \ldots, m$, dann gilt $\|\sum x_k\| = \max \|x_k\|$.

(b) Es gibt eine Familie $\{P_i\}_{i\in I}$, sodaß für jedes i P_i die Orthoprojektion von $\overline{\sum E_j}$ auf $\overline{E_i}$ ist und $P_iP_j = 0$ für $i \neq j$, sowie

$$x = \sum_{i\in I} P_i x \qquad (x \in \overline{\sum E_j}).$$

(c) Für alle $J \subset I$ ist $\sum_{j\in J} E_j \perp \sum_{i\notin J} E_i$.

(d) Für jedes $j \in I, E_j \perp \sum_{i\neq j} E_i$.

(e) Es gibt eine lineare Ordnung $<$ von I, sodaß $E_j \perp \sum_{i<j} E_i$ für jedes $j \in I$.

Beweis:
o.B.d.A seien die E_i abgeschlossen und ihre abgeschlossene Summe ganz E.
$(a) \Rightarrow (b)$:
Für jedes $x \in \sum E_j$ gibt es eindeutige $q_i x \in E_i$, sodaß $x = \sum q_i x$ und nur endlich viele sind ungleich 0. Wir definieren lineare Abbildungen $q_i : \sum E_j \mapsto E_i : x \mapsto x_i$, wobei gilt $\|q_i\| \leq 1, q_i x = x$ falls $x \in E_i, q_i x = 0$ falls $x \in E_j, i \neq j$. Jedes q_i hat eine eindeutige stetige Fortsetzung $P_i : E \mapsto E_i$. Dann ist P_i eine Orthoprojektion und $P_iP_j = 0, i \neq j$.
Wir wählen schließlich $x \in E, \epsilon > 0$. Es gibt $y \in \sum E_j, \|x - y\| < \epsilon$. Sei $J := \{j \in I : P_j y \neq 0\}$. Dann ist $\sharp J$ endlich. Ist $j \notin J$, dann gilt

$$\|P_j x\| = \|P_j(x - y)\| \leq \|(x - y)\| < \epsilon$$

und weiters

$$\|x - \sum_{j\in J} P_j x\| = \|(x - y) - \sum_{j\in J} P_j(x - y)\| \leq \|x - y\| < \epsilon.$$

also ist $x = \sum P_j x$.
$(b) \Rightarrow (c)$:
Ist $x \in E$ und $\epsilon > 0$, dann kann es nur endlich viele $j \in I$ geben mit $\|x\| > \epsilon$. Daher ist für jedes $x \in E$,

$$P_J x := \sum_{j\in J} P_j x$$

konvergent. $P_j : E \mapsto E$ ist linear und $\|P_J\| \leq 1$. Weiters ist $P_jP_J = 0$ falls $j \notin J$ und $P_jP_J = P_j$ falls $j \in J$. Damit ist P_J eine Orthoprojektion deren

Bildbereich $\sum_{j\in J} E_j$ und deren Kern $\sum_{j\notin J} E_j$ enthält. Also gilt (c).
$(c) \Rightarrow (d)$ und $(d) \Rightarrow (e)$ sind trivial, wenn man den Wohlordnungssatz akzeptiert.
$(e) \Rightarrow (a)$.
Wir dürfen annehmen $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\|\sum x_k\| = \max\{\|\sum_{k<m} x_k\|, \|x_m\|\} = \\ &\max\{\|\sum_{k<m-1} x_k\|, \|x_{m-1}\|, \|x_m\|\} \quad = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_m\|\}. \quad \square\end{aligned}$$

Nun können wir Orthogonalsysteme definieren.

Definition 3.43 *Eine Familie $\{E_i\}_{i\in I}$ von linearen Teilräumen eines Banachraumes E heißt Orthogonalsystem von Teilräumen, wenn sie die äquivalenten Bedingungen des obigen Satzes erfüllt.*
Eine Familie von Vektoren heißt Orthogonalsystem, wenn die erzeugten Unterräume die entsprechende Bedingung erfüllen. Die Familie heißt Orthonormalsystem, wenn die Vektoren alle Norm 1 haben.

Ein Orthogonalsystem läßt sich zu einem maximalen Orthogonalsystem fortsetzen. Ein Orthogonalsystem ist maximal dann und nur dann, wenn E eine unmittelbare Erweiterung von $[X]$ ist.
Der Zusammenhang von Orthogonalität und linearer Unabhängigkeit ist im Nichtarchimedischen besonders interessant. Darauf wird nun näher eingegangen.

Defintion und Satz 3.44 *Sei k der Restklassenkörper von K und $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ die kanonische Abbildung $\{\alpha \in K : |\alpha| \leq 1\} \mapsto k$. Sei E ein normierter Vektorraum und $B_1(0) := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ sowie $D_1(0) := \{x \in E : \|x\| < 1\}$. Dann ist in natürlicher Weise $B_1(0)/D_1(0) =: S_1(0)$ eine additive Gruppe. Sei $x \mapsto \overline{x}$ die Quotientenabbildung. Dann wird $S_1(0)$ ein Vektorraum über k durch*

$$\overline{\alpha}\overline{x} := \overline{\alpha x} \qquad (\alpha \in K, |\alpha| \leq 1; x \in E, \|x\| \leq 1).$$

Für diesen Vektorraum gilt, wenn $X \subset B_1(0)$: i)
X ist ein Orthonormalsystem dann und nur dann, wenn $\{\overline{x} : x \in X\}$ linear unabhängig über k ist.
Weiters ist X ein maximales Orthonormalsystem dann und nur dann, wenn $\{\overline{x} : x \in X\}$ eine Basis von $S_1(0)$ über k ist.

Beweis:
Der erste Teil des Satzes ist klar. Der Rest folgt durch einfaches Nachrechnen.
$\square$

Damit haben wir eine wichtige Konsequenz

Satz 3.45 *Je zwei maximale Orthonormalsysteme im Banachraum E haben gleiche Mächtigkeit.*

Beweis:
Direkete Folgerung aus dem obigen Satz. □
Anmerkung:
Weiters sind die linearen Hüllen zweier maximaler OGS eines Banachraums isometrisch isomorph.

Definition 3.46 *Sei eine Basis eines Banachraums E wie oben definiert. Dann heißt eine Basis Orthogonalbasis, wenn das System der $x \in E$ ein Orthogonalsystem ist.*
Analog lassen sich t-orthogonale Basen definieren.

Definition 3.47 *Seien E, F Bacnachräume. Eine stetige lineare Surjektion $T : E \to F$ heißt strikt, wenn für jedes $a \in F$ ein $x \in E$ existiert, mit $Tx = a, \|T\|\|x\| = \|a\|$.*
Ein Banachraum F heißt projektiv, wenn für jeden Banachraum E und jede strikt Surjektion $T \in L(E, F)$ ein $S \in L(E, F)$ existiert. mit $TS = id$ und $\|T\|\|S\| \leq 1$.

Der Zusammenhang von Projektivität und der Existenz einer Orthogonalbasis ist Inhalt des nächsten Satzes:

Satz 3.48 (Gruson-van der Put) *Ein Banachraum E ist projektiv dann und nur dann, wenn E eine Orthogonalbasis hat.*

Beweis:
Sei $T : E \mapsto F$ eine strikte Surjektion und F habe eine Orthogonalbasis X. Für jedes $x \in X$ wähle ein $x' \in E$ für das $Tx = x'$ und $\|T\|\|x'\| = \|x\|$. Da X eine OGB ist, setzt sich $x \mapsto x'$ eindeutig zu einem $S \in L(F, E)$ fort. Es gilt $TS = id$ und $\|S\| \leq \|t\|^{-1}$.
Für die andere Richtung sei angenommen, dass E projektiv ist. Sei $Z := E \backslash \{0\}, s(z) := \|z\|$ und $(z \in Z)$. Dann ist $P : a \mapsto \sum_{z \in Z} a_z z$ eine strikte Surjektion $c_0(Z; s) \mapsto E$ mit Norm 1. Da E projektiv ist, gibt es ein lineares $T : E \mapsto c_0(Z; s)$ mit Norm 1 und $PT = id_E$. T ist dann eine Isometrie und es genügt zu zeigen, dass $T(E)$ eine OGB besitzt. Daher dürfen wir annehmen, dass E ein Teilraum eines Banachraumes F, der eine ONB hat, ist und dass es eine Orthoprojektion $P : F \mapsto E$ gibt.
Wir nennen eine Teilmenge Y von X stabil, wenn $P(Y) \subset [Y]$. Für eine stabile Menge gilt $E \cap [Y] = P(Y)$.
Für jedes abzählbare $Y \subset X$ gibt es ein abzählbares $Y' \subset X$ mit $P(Y) \subset [Y']$. Daher ist jedes abzählbare Y enthalten in einer abzählbaren stabilen Teilmenge von X.
Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Paare (Y, B), wobei $Y \subset X$ stabil und B eine OGB von $P([Y])$ ist. In natürlicher Weise, werden diese Paare durch komponentenweise Inklusion halbgeordnet. Zu zeigen ist damit, dass $\mathcal{S}$ ein maximales Element besitzt und dieses Element das gesuchte Objekt ist.
$\mathcal{S}$ ist nichtleer, da $(\emptyset, \emptyset)$ dazugehört. Wir wählen nun ein Teilkette $(Y_\lambda, B_\lambda)_\lambda$

aus der HO und setze $Y := \cup Y_\lambda, B := \cup B_\lambda$. Dann ist $Y \subset X$ und B ist eine orthogonale Menge von Vektoren. Außerdem gilt:

$$[Y] = \overline{\cup [Y_\lambda]}, P([Y]) \subset \overline{\cup P([Y_\lambda])}$$

und

$$[B] = \overline{\cup \|B_\lambda\|}.$$

Es folgt leicht, dass $(Y, B) \in \mathcal{S}$. Natürlich ist (Y, B) eine obere Schranke für die gewählte Kette. Somit hat $\mathcal{S}$ nach dem Lemma von Zorn ein maximales Element (Y_0, B_0).
Sei nun $Y_0 \neq X$. In dem Fall gibt es ein $y_1 \in X \backslash Y_0$. $\{y_1\}$ ist enthalten einer abzählbaren stabilen Teilmenge $Y_1 \subset X$. Dann ist $Y_0 \cup Y_1$ stabil und $Y_0 \cup Y_1$ enthält Y_0 echt.
Sei Q die natürliche Orthoprojektion $[X] \mapsto [Y_0]$ deren Kern $\|X \backslash Y_0\|$. Dann ist PQ eine lineare Abbildung mit Norm ≤ 1. Sie bildet $[X]$ auf $P([Y_0])$ ab und, da Y_0 stabil ist, es gilt $(PQ)^2 = PQ$. Daher ist PQ eine Orthoprojektion von $[X]$ auf $P([Y_0])$.
$D := \{z \in P([Y_0 \cup Y_1]) : PQz = 0\}$ ist ein Orthokomplement von $P([Y_0])$ in $P([Y_0 \cup Y_1])$. Hat nun D eine OGB B_1, dann hat $P([Y_0 \cup Y_1])$ die OGB $B \cup B_1$, was der Maximalität von (Y_0, B_0) widerspricht. Also sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass D eine OGB hat.
Da PQ eine Orthoprojektion auf $P([Y_0])$ ist, gilt $(I - PQ)P([Y_0]) = \{0\}$ und daher

$$D = (I-PQ)P([Y_0 \cup Y_1]) = (I-PQ)P([Y_0]) + (I-PQ)P([Y_1 \backslash Y_0]) = (I-PQ)P([Y_1 \backslash Y_0]).$$

Es ist $Y_1 \backslash Y_0$ abzählbar. Also ist D vom abzählbaren Typ. Wir wählen eine (möglicherweise endliche) Folge $D_0, D_1, \ldots$ linearer Unterräume von D, sodaß $\dim D_n = n$ für jedes n und $\cup D_n$ ist dicht in D. Nach Satz 3.31 gibt es für jedes n eine Orthoprojektion P_n von F nach D_n. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, für welches D_n existiert, haben wir $D_{n-1} \neq D_n$, sodaß D_n ein Element e_n ungleich 0 enthält, mit $P_{n-1}(e_n) = 0$. Für dieses e_n sehen wir, dass gilt $e_n \perp D_{n-1}$. Also bilden die e_n eine OGB von D. $\square$

Mit diesem Satz kann man beweisen:

Satz 3.49 (Gruson) *Hat E eine Orthogonalbasis, dann auch jeder abgeschlossene lineare Teilraum.*

Beweis:
Sei D ein abgeschlossener linearer Teilraum von E. Es genügt zu zeigen, dass D projektiv ist. Sei T eine strikte Surjektion eines Banachraums H auf D. Wir bilden ein $S \in L(D, H)$, für das $TS = id$ gilt und $\|T\|\|S\| \leq 1$. O.b.d.A nehmen wir an $\|T\| = 1$. Man beachte $D \cong H/kerT$.
Sei nun $H* \supset H$ eine sphärische Vervollständigung von H und Q die Quotientenabbildung $H* \mapsto H*/kerT$. Die Einbettung $H \subset H*$ induziert eine isometrische Einbettung $H/kerT \subset H*/kerT$ und dadurch eine Isometrie $J : D \mapsto H*/kerT$, sodaß JT die Einschränkung von Q auf H ist. Da $H*/kerT$

sphärisch vollständig ist, enthält es eine sphärische Vervollständigung $J(D)*$ von $J(D)$. Nach dem Satz von Ingleton können wir J fortsetzen zu einer linearen Abbildung $R : E \mapsto J(D)*$ mit $\|R\| = 1$.
Sei $x \in E, Rx \neq 0$. Dann ist Rx ein Element der Unmittelbaren Erweiterung $J(D)*$ von $J(D)$, also gibt es ein $d \in D$ für das $\|Jd - Rx\| < \|Rx\|$ gilt. Da T strikt ist, gibt es ein $h \in H$ mit $Th = d$ und $\|h\| = \|d\|$. Damit ist $Qh - Rx \in H*/kerT$ und $\|Qh - Rx\| = \|JTh - Rx\| = \|Jd - Rx\| < \|Rx\|$, sodaß es ein $h' \in H*$ geben muß, mit $Qh' = Qh - Rx$ und $\|h'\| < \|Rx\|$. Da $\|Jd - Rx\| < \|Rx\|$ gilt, haben wir $\|h'\| < \|Rx\| = \|Jd\| = \|d\| = \|h\|$.
Sei nun $h* = h - h'$. Dann ist $h* \in H*/kerT, Qh* = Rx$ und $\|h*\| = \|h\| = \|Rx\| \leq \|x\|$. Daher gibt es für jedes $x \in E$ ein $h* \in H*$, für welches $Qh* = Rx$ gilt und $\|h*\| \leq \|x\|$.
Nehmen wir nun für x die Elemente der Orthogonalbasis X von E, so erhalten wir eine Abbildung $x \mapsto x*$ von X in $H*$ die sich eindeutig fortsetzt zu einem $\overline{S} \in L(E, H*)$ mit $\|S\| \leq 1$ und $Q\overline{S} = R$. Falls $\overline{S}$ D nach H abbildet, dann haben wir $J = R_{|D} = (Q\overline{S})_{|D} = Q \circ (\overline{S}_{|D}) = JT \circ (\overline{S}_{|D})$, sodaß $T \circ (\overline{S}_{|D}) = id_D$ und wir können definieren $S := \overline{S}_{|D}$.
Es bleibt zu zeigen, dass wirklich $\overline{S}(D) \subset H$. Sei $d \in D$, dann gibt es ein $h \in H$ mit $d \in Th$. In $H*/kerT$ gilt $Q\overline{S}d = Rd = Jd = JTh = Qh$ und daher $\overline{S}d \in h + kerQ = h + kerT \subset H$. $\square$
Ein einfaches Korollar aus diesem Satz ist das Folgende:

Korollar 3.50 *Hat ein Banachraum E eine Basis, dann auch jeder abgeschlossene lineare Teilraum.*

Beweis:
Folgt trivial aud dem obigen. $\square$.
Die folgende Aussage wird für die nicht-archimedischen Maße, wie auch den Spektralsatz benötigt.

Satz 3.51 *Für jeden Banachraum E sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(a) Jedes maximale Orthogonalsystem von Elementen von E ist eine Orthogonalbasis.

(b) Jeder abgeschlossene lineare Teilraum hat ein Orthokomplement.

(c) Jeder abgeschlossene lineare Teilraum vom abzählbaren Typ hat ein Orthokomplement.

(d) E ist nicht eine unmittelbare Erweiterung, eines echten abgeschlossenen linearen Teilraums.

(e) *Jedes abzählbare Orthogonalsystem von Elementen von E, kann zu eine OGB fortgesetzt werden.*

Beweis:
$(a) \Rightarrow (b)$:
Sei D ein abgeschlossener linearer Teilraum von E, dann wähle man ein maximales Orthogonalsystem X. Gemäß Vorraussetzung kann man X zu einer Orthogonalbasis Y von E fortsetzen. Es gibt nun eine Orthoprojektion P von E auf $[X]$, deren Kern ganz $[Y \backslash X]$ ist. Damit ist $(D \cap KerP) \perp [X]$, womit die Einschränkung von P auf D injektiv ist. Damit ist $D = P(D) = [X]$ und $KerP$ ist ein Orthokomplement von D.
$(b) \Rightarrow (c)$:
Trivial
$(c) \Rightarrow (d)$:
Angenommen E ist eine unmittelbare Erweiterung eines abgeschlossenen linearen Teilraums D von E. Sei $a \in E$. Dann hat D einen abgeschlossenen linearen Teilraum D_1 vom abzählbaren Typ, sodaß $dist(a, D) = dist(a, D_1)$. Gemäß γ existiert eine Orthoprojektion Q von E auf D_1. Es gilt für alle $x \in D$:

$$\begin{aligned} \|(a - Qa) - x\| &= \|a - (Qa + x)\| \\ \geq dist(a, D) &= dist(a, D_1) = \|a - Qa\|. \end{aligned}$$

Daher ist $a - Qa \perp D, a - Qa = 0$ und $a = Qa \in D_1 \subset D$.
$(d) \Rightarrow (a)$:
Ist X ein maximales Orthogonalsystem von Elementen von E, dann ist E eine unmittelbare Erweiterung von $[X]$. Falls (d) gilt, dann folgt $[X] = E$.
$(a) \Rightarrow (e)$ ist offensichtlich, $(e) \Rightarrow (c)$ analog zu $(a) \Rightarrow (b)$. $\square$.

Korollar 3.52 *Mit einem Banachraum E haben auch alle abgeschlossenen linearen Teilräume und Quotientenräume die Eigenschaften des vorigen Satzes.*

Beweis:
Habe E die Eigenschaften des vorigen Satzes und sei D ein abgeschlossener linearer Teilraum. Nach dem obigen Beweis von $(a) \Rightarrow (b)$ hat D die Eigenschaft (a). Gemäß (b) hat D ein Orthokomplement D_1 und D_1 hat die Eigenschaft (a). Es ist nun aber $D_1 \cong E/D$.$\square$.

Satz 3.53 *Ein endlichdimensionaler Banachraum E hat die obigen Eigenschaften genau dann, wenn er eine Orthogonalbasis hat.*

Beweis:
Das folgt daraus, dass zwei verschiedene OGB's stets gleichmächtig und ihre linearen Hüllen linear isometrisch sind. Damit hat ein endlichdimensionaler Banachraum E die Eigenschaft (a) , sobald er eine OGB hat. $\square$.

Satz 3.54 *Für einen unendlichdimensionalen Banachraum E sind die Bedingungen $(a)-(e)$ der vorigen zwei Sätze, jeweils äquivalent zu jeder der folgenden Aussagen:*
(f).
Jeder abgeschlossene lineare Teilraum von E ist sphärisch vollständig.
(g).
E hat eine Orthogonalbasis und ist sphärisch vollständig.
(h).
Jede strikt fallende Folge von Werten der Normfunktion auf E konvergiert gegen 0.
(i).
Die Bewertung auf K ist diskret. Mit $0 < |\pi| < 1, \pi \in K$ gibt es eine Menge X und eine Funktion $s : X \to (|\pi|, 1]$, sodaß

$$E \cong c_0(X : s)$$

und die Menge der Werte von s wohlgeordnet ist. Ist E vom abzählbaren Typ, dann sind alle diese Bedingungen äquivalent zur sphärischen Vollständigkeit von E.

Beweis:
Sei zuerst E vom abzählbaren Typ. η impliziert sphärische Vollständigkeit. Da umgekehrt $E' \neq \{0\}$, ist auch K sphärisch vollständig und es gibt eine OGB in E.
Für beliebiges E:
$(a) \Rightarrow (i)$:
Sei $\pi \in K$ wie üblich. E hat eine OGB X und wir können X so wählen, dass $|\pi| < \|x\| \leq 1, \forall x \in X$. Dann ist $E \cong c_0(X : \|.\|)$. Gilt ι nicht, dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in K$ und verschiedene $x_1, x_2, \dots \in X$, sodaß

$$1 \geq |\alpha_1|\|x_1\| > |\alpha_2|\|x_2\| > \dots > |\pi|.$$

Wir dürfen x_n durch $\alpha_n x_n$ ersetzen und können auch annehmen, dass $\alpha_n = 1$ für jedes n. Wir definieren $\varphi \in E'$ durch

$$\varphi(\sum_{x \in X} \lambda_x x) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{x_n}.$$

E hat die Eigenschaft δ und $\varphi \neq 0$, daher gibt es ein $c \neq 0, c \in E$ mit $c \perp \varphi^{-1}(0)$. Wir wählen c so, dass $\varphi(c) = 1$. Dann gibt es $\gamma_x \in K$, für die $c = \sum \gamma_x x$. Da $\varphi(c) = 1$, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|\gamma_{x_m}| \geq 1$. Damit gilt:

$$\|c\| \geq \|\gamma_{x_m} x_m\| \leq \|x_m\| > \|x_{m+1}\|.$$

Andrerseits ist $\varphi(c) = 1 = \varphi(x_m)$ und daher $c - x_{m+1} \in \varphi^{-1}(0) \perp c$. Also ist $\|x_{m+1}\| = \max\{\|c\|, \|x_{m+1}\|\} \geq \|c\|$ und das ist ein Widerspruch.
$(i) \Rightarrow (h)$:

Die Werte der Funktion $\|.\|$ auf $c_0(X : s)$ sind einfach die Werte $|\alpha|s(x)$.
$(h) \Rightarrow (f)$:
Ist E ein vollständiger ultrametrischer Raum in dem jede strikt fallende Folge von Abständen gegen 0 konvergiert, so ist E sphärisch vollständig.
$(f) \Rightarrow (g)$:
Sei D die abgeschlossene lineare Hülle eines maximalen OGS in E. Dann ist D nach ζ sphärisch vollständig und es gibt eine Orthogonalprojektion P von E auf D. Da das OGS maximal war, ist $P^{-1}(0) = \{0\}$ und $D = E$. D hat eine OGB.
$(g) \Rightarrow (a)$:
Sei D die abgeschlossene lineare Hülle eines maximalen OGS in E. Da zwei verschiedene maximale OGS gleichmächtig und ihre linearen Hüllen isometrisch isomorph sind, ist $D \cong E$, sodaß E sphärisch vollständig ist. Der Rest folgt wir oben. $\square$.
Aus diesem Satz folgen wichtige Korollare.

Korollar 3.55 *Sei K sphärisch vollständig und dicht bewertet. Ist E ein unendlichdimensionaler Banachraum, dann kann E' keine Orthogonalbasis haben.*

Beweis:
E' ist in diesem Fall sphärisch vollständig. Nun wende man den vorigen Satz an. $\square$
Das folgende Korollar wird an einer Stelle als Hilfsmittel für eine Aussage der nichtarchimedischen Maßtheorie benötigt. Es wird ohne Beweis angegeben, da dieser sich hauptsächlich auf die Sätze über Kompakte Operatoren stützt.

Korollar 3.56 (ohne Beweis) *Sei K dicht bewertet. Dann ist jede stetige lineare Abbildung $l^\infty \mapsto c_0$ kompakt, c_0 ist nicht komplementiert in l^∞ und l^∞ hat keine Basis.*

Nun können wir einen sehr wichtigen Satz von van der Put beweisen.

Satz 3.57 (van der Put) *Sei k_0 der Primkörper des Restklassenkörpers k von K. Sei X ein lokal-kompakter Raum. Sei weiters $\mathcal{U}$ ein maximales System offener kompakter Teilmengen von X, deren k_0-wertigen charakteristischen Funktionen linear unabhängig sind. Dann ist $\{\xi_U : U \in \mathcal{U}\}$ eine Orthonormalbasis von $C_\infty(X)$.*

Anmerkung:
Es gibt eine k_0-lineare Abbildung von k auf k_0, die alle Elemente von k_0 fest läßt. Es folgt leicht, dass die k_0-wertigen charakteristischen Funktionen eines Systems von Teilmengen von X linear unabhängig über k_0 sind, genau dann wenn sie linear unabhängig über k sind.
Beweis:
Sei K_0 der Primkörper von K. Wir konnen in natürlicher Weise k_0 mit dem Restklassenkörper von K_0 identifizieren. Die Bewertung auf K_0 ist diskret. Daher gibt es ein $t \in (0,1)$ für welches aus $\alpha \in K_0, |\alpha| < 1$ folgt $|\alpha| < t$.
Sei $\mathcal{B}_c(X)$ die Menge aller offenen kompakten Teilmengen von X und sei F die

lineare Hülle von $\{\xi_U : U \in \mathcal{B}_c(X)\}$. Für $U \in \mathcal{B}_c(X)$ bezeichne ϵ_U die k-wertige charakteristische Funktion von U. Weiters sei $D := [\{\xi_U : U \in \mathcal{U}\}]$.
Falls $U \in \mathcal{B}_c(X)$ gilt, dann folgt aus der Definition von $\mathcal{U}$, dass es $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}$ und $\beta_1, \ldots, \beta_m \in k_0$ gibt, sodaß $\epsilon_U = \sum \beta_i \epsilon_{U_i}$. Damit gibt es auch $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K_0$ mit $|\alpha_i| \leq 1$ für jedes i und $\|\xi_U - \sum \alpha_i \xi_{U_i}\| \leq 1$. Daher ist $dist(\xi_U, D) < t$. Schreibt man jedes Element von F als endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von paarweise disjunkten Elementen von $\mathcal{B}_c(X)$, dann sieht man, dass $dist(f, D) < t\|f\|$ für alle $f \in F, f \neq 0$. Da F dicht in $C_\infty(X)$ ist, gilt die gleiche Ungleichung für alle $f \in C_\infty(X), f \neq 0$. Wir folgern mit dem vorigen Satz das $D = C_\infty(X)$. □

Satz 3.58 *Sei Y ein topologischer Raum. Dann hat $PC(Y)$ eine Orthonormalbasis aus charakteristischen Funktionen von clopen Mengen und jedes Orthonormalsystem von charakteristischen Funktionen von clopen Mengen, kann zu einer Orthonormalbasis von $PC(Y)$ fortgesetzt werden.*

Beweis:
Es ist $PC(Y) \cong C(Y^\zeta)$. Weiters prüft man die lineare Unabhängigkeit über k leicht nach und erhält die Orthogonalität.

Satz 3.59 (Ellis) *Sei Y eine abgeschlossener Teilraum eines null-dimensionalen Hausdorffraumes X. Angenommen es ist Y kompakt oder die Überlagerungsdimension von X ist 0. Dann gibt es eine lineare Isometrie $T : PC(Y) \to PC(X)$, sodaß für jedes $f \in PC(Y)$, Tf eine Erweiterung von f ist.*

Beweis:
In beiden Fällen gibt es für jedes $U \subset Y$ clopen, eine clopen Menge $U' \subset X$ mit $U = U' \cap Y$. Sei $\mathcal{U}$ das System derjenigen clopen Teilmengen von Y, deren charakteristische Funktionen eine Orthonormalbasis für $PC(Y)$ bilden. Es gibt ein eindeutiges $T \in L(PC(Y), PC(X))$, sodaß $T\xi_U = \xi_{U'}$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Dieses T hat die gewünschten Eigenschaften. □

Als letztes benötigen wir noch ein Analogon des Weierstraßschen Approximationssatzes.

Satz 3.60 (Kaplansky) *Sei $X \subset K$ kompakt. Dann bilden die Polynomfunktionen auf X einen dichten Teilraum von $C(X)$.*

Beweis:
Die charakteristischen Funktionen der Mengen $X \cap B_\delta(c)$ mit $\delta > 0, c \in X$, bilden einen dichten linearen Teilraum von $C(X)$. Wir müssen also lediglich zeigen:
Ist $X \subset K$ kompakt, $0 \in X$, $0 < \delta < 1$ und $0 < \epsilon < 1$, dann gibt es eine Polynomfunktion P auf X, sodaß $|P(x) - \xi_{B_\delta(0)}(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in X$.
Für eine solche Wahl von δ und ϵ, wählen wir $c_1, \ldots, c_m \in X$, sodaß $X = B_\delta(0) \cup \bigcup_i B_\delta(c_i)$. Es seien $B_\delta(0), B_\delta(c_1), \ldots, B_\delta(c_m)$ paarweise disjunkt und

$|c_1| \le |c_2| \le \cdots \le |c_m|$. Damit ist $|c_1| > \delta$. Wir konstruieren nun eine Polynomfunktion P mit

$$|P(x) - 1| \le \epsilon \qquad \text{für } x \in B_\delta(0),$$
$$|P(x)| \le \epsilon \qquad \text{für } x \in \cup_i B_\delta(c_i).$$

Sei $k \in \mathbb{N}$, sodaß $(\delta/|c_1|)^k < \epsilon$. Dann ist für $x \in B_\delta(0)$ und alle i, $1 - (x/c_i)^k \in B_\epsilon(1)$. Wir wählen nun positive ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_m$ und definieren P durch

$$P(x) := \prod_{i=1}^{m} [1 - (\frac{x}{c_i})^k]^{n_i}.$$

Für jede Wahl der n_i gilt jedenfalls $|P(x) - 1| \le \epsilon$ für $x \in B_\delta(0)$. Wir wählen nun $x \in B_\delta(c_i)$ für irgendein i. Dann ist $|x| = |c_i|$, da $\delta < |c_i|$. Wir schätzen nun $|1 - (\frac{x}{c_j})^k|$ ab.
Für $j > i$,

$$|1 - (\frac{x}{c_i})^k| \le \max\{1, |\frac{x}{c_j}|^k\} = \max\{1, |\frac{c_i}{c_j}|^k\} = 1.$$

Für $j = i$,

$$|1 - (\frac{x}{c_j})^k| = |1 - \frac{x}{c_j}||1 + \frac{x}{c_j} + \cdots + (\frac{x}{c_j})^{k-1}|$$
$$\le \frac{|c_i - x|}{c_i} 1 \le \frac{\delta}{|c_1|}.$$

Für $j < i$,

$$|1 - (\frac{x}{c_j})^k| \le \max\{1, |\frac{x}{c_j}|^k\} = |\frac{c_i}{c_j}|^k.$$

Wir müssen also die n_i so wählen, dass für jedes i gilt:

$$|\frac{c_i}{c_1}|^{kn_1} |\frac{c_i}{c_2}|^{kn_2} \cdots |\frac{c_i}{c_{i-1}}|^{kn_{i-1}} (\frac{\delta}{c_1})^{n_i} \le \epsilon.$$

Dies ist aber möglich, da $\frac{\delta}{|c_1|} < 1$. $\square$
Damit sind alle Sätze, die zur Behandlung der K-wertigen Maße erforderlich sind, vorhanden.

Kapitel 4

Nicht-archimedische Maßtheorie

4.1 Maße mit Werten in nichtarchimedischen Körpern

Wir betrachten Mengenfunktionen mit Werten in einem nicht-archimedischen Körper K.
Ein Problem in der nicht-archimedischen Maßtheorie ist, dass es keine nicht-atomaren Borelmaße im Sinne der archimedischen Theorie gibt(Siehe Teil über nichtarchimedische Banachräume). Es zeigt sich, dass das Problem bei der Definition maß-artiger Mengenfunktionen nicht die σ-Additivität ist, sondern die Tatsache, dass das Mengensystem eine σ-Algebra sein soll. Auf Mengenringen lassen sich dagegen sehr wohl entsprechende nicht-triviale Funtionen definieren.

Definition 4.1 *Es sei im folgenden $\mathcal{R}$ ein Mengenring über einem topologischen Raum X, dessen Elemente X überdecken. $\mathcal{R}$ ist eine Basis für eine Topologie, die wir $\mathcal{R}$-Topologie nennen wollen. Statt stetig, kompakt .etc bezüglich der $\mathcal{R}$-Topolgie sagen wir einfach $\mathcal{R}$-stetig, $\mathcal{R}$-kompakt, etc. Wir nennen $\mathcal{R}$ punktetrennend, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in X$ ein $A \in \mathcal{R}$ existiert, mit $x \in A, y \notin A$.*

Anmerkung:
Die $\mathcal{R}$-Topologie ist offensichtlich dann und nur dann Hausdorff'sch, wenn $\mathcal{R}$ punktetrennend ist.

Definition 4.2 *Ein Teilsystem $\mathcal{A}$ von $\mathcal{R}$ heißt schrumpfend, falls der Durchschnitt von je zwei Elementen von $\mathcal{A}$ ein Element von $\mathcal{A}$ enthält. Ist $\mathcal{A}$ schrumpfend mit leerem Durchschnitt und f eine Abbildung $\mathcal{R} \to K$, dann sagen wir $\lim_{A \in \mathcal{A}} f(A) = 0$ genau dann, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists A_0 \in \mathcal{A} \quad |f(A)| \leq \epsilon \qquad \forall (A \in \mathcal{A}, A \subset A_0).$$

Definition 4.3 *Ein Maß auf $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) μ ist additiv.

(b) Für alle $A \in \mathcal{R}$ ist die Menge $\{\mu(B) : B \in \mathcal{R}, B \subset A\}$ beschränkt.

(c) Sei $\mathcal{A}$ ein schrumpfendes Teilsystem und $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ leer, dann gilt $\lim_{A\in\mathcal{A}} \mu(A) = 0$.

Die dritte Bedingung ersetz σ-Additivität. In der Tat folgt die σ-Additivität aus (c). Falls die $\mathcal{R}$-Topologie Lindelöf'sch ist, dann ist (c) äquivalent zur σ-Additiviät.

Definition 4.4 *Für ein beliebiges $\mu : \mathcal{R} \to K$ sei nun definiert:*

$$\|A\|_\mu := \sup\{|\mu(B)| : B \in \mathcal{R}, B \subset A\} \qquad (A \in \mathcal{R}).$$

Lemma 4.5 *Es folgt unmittelbar*

$$\|A\|_\mu \leq \|B\|_\mu \Leftarrow A \subset B.$$

Damit ist $3.(b)$ *offensichtlich äquivalent zu:*

$$\|A\|_\mu < \infty \qquad (\forall A \in \mathcal{R}).$$

Beweis:
Trivial. □

Satz 4.6 *Für ein additives μ ist* $3.(c)$ *äquivalent zu:*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{R} \quad \textit{ist schrumpfend und } \cap\mathcal{A} = \emptyset \Rightarrow \lim_{A\in\mathcal{A}} \|A\|_\mu = 0.$$

Beweis:
Offensichtlich folgt $3.(c)$ aus dieser Bedingung. Zur Umkehrung:
Sei $\mu : \mathcal{R} \to K$ additiv und $3.(c)$ gilt. Sei $\mathcal{A}$ schrumpfend mit leerem Schnitt und $\epsilon > 0$. Der Beweis ist fertig, wenn wir nun stets ein $A \in \mathcal{A}$ finden können mit $\|A\|_\mu \leq 2\epsilon$.
Es gibt nun eine Menge A_0 mit $|\mu(A)| \leq \epsilon$ für alle $A \in \mathcal{A}, A \subset A_0$. Für jedes A wählen wir $R_A \in \mathcal{R}, R_A \subset A$, sodaß $|\mu(R_A)| > \min\{\epsilon, 2^{-1}\|A\|_\mu\}$. Für jedes A gilt:
$\{R_A \cap B : B \in \mathcal{A}, B \subset A\}$ ist ein schrumpfendes Teilsystem von $\mathcal{R}$ mit leerem Schnitt. Also kann man für jedes $A \in \mathcal{A}$ ein $A' \in \mathcal{A}, A' \subset A$ wählen, sodaß $|\mu(R_A \cap A')| \leq \epsilon$.
Betrachten wir das System $\mathcal{B} := \{R_A \cup A' : A \in \mathcal{A}, A \subset A_0\}$. Falls $A, B \in \mathcal{A}$, dann existiert ein $C \in \mathcal{A}$ mit $C \subset A' \cap B'$. Dafür gilt dann,

$$R_C \cup C' \subset C \subset A' \subset R_A \cup A' \text{ und ebenso}$$

$$R_C \cup C' \subset C \subset B' \subset R_B \cup B'.$$

Daher ist $\mathcal{B}$ schrumpfend und der Schnitt von $\mathcal{B}$ ist leer. Es existiert nun sicher ein $A \in \mathcal{A}$, $A \subset A_0$, $|\mu(R_A \cup A')| \leq \epsilon$. Für dieses A gilt $|\mu(R_A \cup A')| \leq \epsilon$, $|\mu(R_A \cap A'| \leq \epsilon$ und $|\mu(A')| \leq \epsilon$(da ja $A' \in \mathcal{A}$ und $A' \subset A \subset A_0$).
Daher gilt $|\mu(R_A)| = |\mu(R_A \cup A') + \mu(R_A \cap A') - \mu(A')| \leq \epsilon$. Aus der Ungleichung:

$$|\mu(R_A)| > \min\{\epsilon, 2^{-1}\|A\|_\mu\}$$

folgt, dass $\|A\|_\mu \leq 2\epsilon$. $\square$
Anmerkung:
Für jedes Maß μ auf $\mathcal{R}$ gelten noch die folgenden zwei Eigenschaften:
3.(d):

$$\|A \cup B\|_\mu \leq \max\{\|A\|_\mu, \|B\|_\mu\}$$

3.(e):
Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}, A \in \mathcal{R}$ und $A \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$, dann gilt:

$$\|A\|_\mu \leq \sup_{S \in \mathcal{S}} \|S\|_\mu.$$

Definition 4.7 *Für $f : X \to K$ und $\phi : X \to [0, \infty)$, sei definiert:*

$$\|f\|_\phi := \sup_{x \in X} |f(x)|\phi(x).$$

Daraus folgt eine andere, wichtige Funktion:

Satz 4.8 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Dann existiert eine eindeutige Funktion N_μ : $X \to [0\infty)$ für die gilt:*

(a)

$$\|\xi_U\|_{N_\mu} = \|U\|_\mu$$

(b) Falls $\phi : X \to [0, \infty)$ und $\|\xi_U\|_\phi \leq \|U\|_\mu$ gilt, für alle $U \in \mathcal{R}$, dann gilt $\phi \leq N_\mu$.
N_μ ist gegeben durch:

$$N_\mu(x) = \inf_{U \in \mathcal{R}, x \in U} \|U\|_\mu$$

Beweis:
Sei ein N_μ definiert wie oben. Dann gilt (b) offensichtlich und ebenso die Ungleichung:

$$\|\xi_U\|_{N_\mu} \leq \|U\|_\mu$$

Für die umgekehrte Ungleichung sei $U \in \mathcal{R}, \epsilon > 0$. Es sei $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{R} : A \subset U, \|U/A\|_\mu \leq \|\xi_U\|_{N_\mu} + \epsilon\}$. Nach Eigenschaft 3.($d$) nicht-archimedischer

Maße ist $\mathcal{A}$ schrumpfend. Für jedes $x \in U$ existiert ein $A \in R, x \in A$ mit $\|A\|_\mu \leq N_\mu + \epsilon \leq \|\xi_U\|_{N_\mu} + \epsilon$, also $U/A \in \mathcal{A}$. Es folgt, dass der Schnitt über $\mathcal{A}$ leer ist. Aufgrund der zu 3.(c) äquivalenten Aussage, existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\|A\|_\mu \leq \epsilon$. Also:

$$\|U\|_\mu \leq \max\{\|A\|_\mu, \|U/A\|_\mu\} \leq \|\xi_U\|_{N_\mu} + \epsilon. \qquad \square$$

Im Folgenden wird oft N statt N_μ geschrieben, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist.

4.2 Fortsetzung von Maßen

Definition 4.9 *Eine Treppenfunktion($\mathcal{R}$-Treppenfunktion) ist eine Abbildung von X nach K, die eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen von Elementen aus $\mathcal{R}$ ist.*

Die Treppenfunktionen bilden einen Vektorraum über K.

Satz 4.10 *Es existiert eine eindeutige lineare und skalarwertige Funktion $\int$ auf dem Vektorraum der Treppenfunktionen, sodaß $\int \xi_A = \mu(A)$, für jedes $A \in \mathcal{R}$.*

Beweis:
Die Abbildung ist wohldefiniert und durch ihre Werte auf den charakteristischen Funktionen eindeutig bestimmt. $\square$
Bemerkung:
Sei f eine Treppenfunktion($f = \sum \alpha_i \xi_{A_i}$), dann gilt:

$$|\int f| \leq \|f\|_N < \infty.$$

Definition 4.11 *Eine Funktion $f : X \to K$ heißt μ-integrierbar, falls es eine Folge von Treppenfunktionen (f_i) gibt, mit* $\lim \|f - f_i\|_{N_\mu} = 0$.

Offensichtlich gilt:

Satz 4.12 *1) Die μ-integrierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum $\mathcal{L}(\mu)$.*
2) Die Treppenfunktionen bilden einen dichten Teilraum von $\mathcal{L}(\mu)$.

Beweis:
Klar, nach Definition. $\square$
Da $|\int f d\mu| \leq \|f\|_{N_\mu}$ für alle Treppenfunktionen gilt, existiert ein eindeutiges lineares Funktional $\int : f \to \int f$ auf $\mathcal{L}(\mu)$. Für dieses gilt:

Satz 4.13

$$|\int f d\mu| \leq \|f\|_{N_\mu} \qquad (f \in \mathcal{L}(\mu)).$$

$$\int \xi_A d\mu = \mu(A) \qquad (A \in \mathcal{R}).$$

Beweis:
Folgt aus der Dichtheit der Treppenfunktionen in $\mathcal{L}(\mu)$. $\square$

Definition 4.14 *Sei $\mathcal{R}_\mu := \{A : A \subset X, \xi_A \in \mathcal{L}(\mu)\}$ das System der Teilmengen von X mit μ-integrierbarer charakteristischer Funktion. Für $A \in \mathcal{R}_\mu$ definere $\mu'(A) := \int \xi_A d\mu$.*

So konstruieren wir eine Fortsetzung des gegebenen Maßes μ.

Satz 4.15 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Eine Menge $A \subset X$ ist ein Element von $\mathcal{R}_\mu$ dann und nur dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $B \in \mathcal{R}$ existiert, sodaß $N_\mu < \epsilon$ auf $A \triangle B$.*

Beweis:
Zu zeigen ist, dass $A \in \mathcal{R}$ dann und nur dann, wenn $\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathcal{R}$ mit $\|\xi_A - \xi_B\|_N \leq \epsilon$. Das daraus $A \in \mathcal{R}_\mu$ folgt ist klar.
Umgekehrt, sei $A \in \mathcal{R}_\mu$,$\epsilon > 0$. Dann gibt es eine Treppenfunktion f mit $\|\xi_A - f\|_{N_\mu} \leq \epsilon$.
Setze $B := \{x : |f(x) - 1| < 1\}$. Dann ist $B \in \mathcal{R}$. Für alle x gilt:

$$|f(x) - \xi_B(x)| \leq \min\{|f(x)|, |f(x) - 1|\} \leq |f(x) - \xi_A(x)|.$$

Daher gilt

$$\|\xi_A - \xi_B\|_N \leq \max\{\|f - \xi_A\|_N, \|f - \xi_B\|_N\} = \|f - \xi_A\|_N \leq \epsilon. \quad \square$$

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{R}_\mu$ ein überdeckender Mengenring über X ist. Als nächstes zeigt sich die Fortsetzbarkeit von μ auf $\mathcal{R}_\mu$.

Satz 4.16 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Dann ist μ' ein Maß auf $\mathcal{R}_\mu$, dass auf $\mathcal{R}$ mit μ übereinstimmt.*

Beweis:
μ' ist additiv und dies ist Eigenschaft 3.(a) eines Maßes. Falls $A \in \mathcal{R}$, dann gilt für alle $B \subset A$:

$$|\mu'(B)| \leq \|\xi_B\|_N \leq \|\xi_A\|_N < \infty.$$

Damit erfüllt μ die Bedingung 3.(b) für nicht-archimedische Maße.
Also fehlt nur noch Eigenschaft 3.(c), dann ist man fertig:
Sei nun $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}_\mu$ schrumpfend und mit leerem Schnitt. Sei $\epsilon > 0$ und $X_\epsilon := \{x \in X : N(x) \geq \epsilon\}$. Weiters sei $\mathcal{B} := \{B \in R : \exists A \in \mathcal{A}, A \cap X_\epsilon = B \cap X_\epsilon\}$. $\mathcal{B}$ ist schrumpfend. Falls $x \notin X_\epsilon$, dann $\exists C \in \mathcal{R}, x \in C$ mit $\epsilon > \|C\|_\mu = \|C\|_N$. Dann ist $B \backslash C \in \mathcal{B}\ \forall B \in \mathcal{B}$, also $C \cap (\cap \mathcal{B}) = \emptyset$. Es ist daher $\cap \mathcal{B} \subset X_\epsilon$.
Nach dem vorhergehenden Satz, gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \cap X_\epsilon = B \cap X_\epsilon$. Damit gilt:

$$\cap \mathcal{B} = \cap_{B \in \mathcal{B}} B \cap X_\epsilon = \cap_{A \in \mathcal{A}} A \cap X_\epsilon = \emptyset.$$

Wendet man die zu 3.(c) äquivalente Bedingung auf $\mathcal{B}$ an, dann gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\|B\|_\mu < \epsilon$. Also $B \cap X_\epsilon = \emptyset$. Damit existiert ein $A \in \mathcal{A}, A \cap X_\epsilon = \emptyset$, sodaß $\|A\|_\mu \leq \epsilon$. $\square$
Damit wurde das Maß also auf einen größeren Ring ausgedehnt. Nun wäre denkbar, dass man immer wieder das Maß so erweitern könnte. Diese Frage klärt der folgende

Satz 4.17 *Ist μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Dann ist $N_\mu = N_{\mu'}$ und in der Folge $\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(\mu')$.*

Beweis:
Sei $x \in X$. Wir zeigen $N(x) = \inf\{\|A\|_{\mu'} : A \in \mathcal{R}_\mu, x \in A\}$. Sei $s > N(x)$. $\exists A \in \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_\mu, x \in A, \|A\|_N \leq s$. Für jedes $B \in \mathcal{R}_\mu, B \subset A$ gilt:

$$|\mu'(B)| \leq \|B\|_N \leq \|A\|_N \leq s.$$

Daher auch $\|A\|_{\mu'} \leq s$. Folglich gilt:

$$N(x) \geq \inf\{\|A\|_{\mu'} : A \in \mathcal{R}_\mu, x \in A\}.$$

Für die andere Richtung sei $t > 0, t < N(x)$ und $A \in \mathcal{R}_\mu, x \in A$. Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass $\|A\|_{\mu'} \geq t$. Es gibt nun ein $B \in \mathcal{R}$ mit $N \leq t$ auf $A \triangle B$. Für dieses B gilt, $\|B\|_N \geq N(x) > t$, also $|\mu(c)| > t$ für ein $C \in \mathcal{R}, C \subset B$. Da gilt:

$$|\mu(C) - \mu'(C \cap A)| = |\mu'(C \backslash A)| =\leq |C \backslash A|_N \leq \|B \backslash A\|_N \leq t < |\mu(C)|$$

sieht man, dass $|\mu(C \cap A)| = |\mu(C)|$ weswegen

$$\|A\|_{\mu'} \geq |\mu'(C \cap A)| = |\mu(C)| > t. \quad \square$$

$\mathcal{R}_\mu$ definiert natürlich wieder eine Topologie auf X. Diese ist feiner als die $\mathcal{R}$-Topologie.

Satz 4.18 *(a) Ist μ ein Maß auf $\mathcal{R}$, dann ist N_μ $\mathcal{R}$-halbstetig von oben und für jedes $A \in \mathcal{R}_\mu$ und $\epsilon > 0$ ist die Menge $\{x \in A : N(x) \geq \epsilon\}\mathcal{R}_\mu$-kompakt.*

(b) Sei $\mu : \mathcal{R} \to K$ additiv. Angenommen es existiert eine von oben $\mathcal{R}$-halbstetige Funktion $\phi : X \to [0, \infty)$, sodaß $|\mu(A)| \leq \sup_{x \in A} \phi(x) \quad (A \in \mathcal{R})$ und die Menge $\{x \in A : \phi(x) \geq \epsilon\}$ ist $\mathcal{R}$-kompakt. Dann ist μ ein Maß und $N_\mu \leq \phi$.

Beweis:
(a)
Sei $X_\epsilon := \{x : N(x) \geq \epsilon\}$. Für jedes $a \in X \backslash X_\epsilon$ existiert ein $A \in \mathcal{R}, a \in A, \|A\|_\mu < \epsilon$. Dann ist $A \in X \backslash X_\epsilon$. Daher ist X_ϵ $\mathcal{R}$-abgeschlossen und N ist $\mathcal{R}$-halbstetig von oben.
Wähle $A \in \mathcal{R}_\mu$ und sei Υ eine Überdeckung von $A \cap X_\epsilon$ durch Elemente von $\mathcal{R}_\mu$. Dann bilden die Mengen $A \backslash (U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup U)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $U_1, \ldots U_n \in \Upsilon, U \in \mathcal{R}_{mu}$ und $U \subset X \backslash X_\epsilon$ ein schrumpfendes Teilsystem von $\mathcal{R}_\mu$ dessen Schnitt leer ist. Nach Eigenschaft 3.(c) eines Maßes gibt es $U_1, \ldots, U_n \in \Upsilon$ und $U \subset X \backslash X_\epsilon$ mit $\|A \backslash (U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup U)\|_\mu < \epsilon$, also $A \backslash (U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup U) \subset X \backslash X_\epsilon$. Da $U \subset X \backslash X_\epsilon$, folgt $A \cap X_\epsilon \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Damit ist $A \cap X_\epsilon$ kompakt und diese Menge ist gerade $\{x \in A : N_\mu(x) \geq \epsilon\}$.
(b)
Es gilt sicher $\|A\|_\mu \leq \|\xi_A\|_\phi \quad (\forall A \in \mathcal{R})$.

ϕ ist $\mathcal{R}$-halbstetig von oben, daher ist ϕ nach oben beschränkt auf jeder $\mathcal{R}$-kompakten Menge. Daher ist $\|A\|_\mu < \infty, \forall A \in \mathcal{R}$ und μ hat Eigenschaft 3.(b) eines Maßes.
Sei nun $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}, \cap\mathcal{A} = \emptyset$ und $\epsilon > 0$. Die Mengen $\{x \in A : \phi(x) \geq \epsilon\} \quad (A \in \mathcal{A})$ bilden eine Familie $\mathcal{R}$-kompakter Mengen die unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen und deren Schnitt leer ist. Es muß also ein $A \in \mathcal{A}$ geben, sodaß $\{x \in A : \phi(x) \geq \epsilon\} = \emptyset$. Es folgt, dass $A \subset \{x : \phi(x) < \epsilon\}$ und $|A|_\mu \leq \epsilon$. $\square$
Damit hat man unmittelbar:

Korollar 4.19 *Falls μ ein Maß auf $\mathcal{R}$ ist, dann ist für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $\{x : N_\mu(x) \geq \epsilon\}$ $\mathcal{R}$-lokalkompakt.*

Ohne Beweis sei noch erwähnt:

Satz 4.20 (ohne Beweis) *Sind ν, μ Maße auf $\mathcal{R}$, dann sind auch $\mu + \nu$ und $\mu - \nu$ Maße und es gilt:*

$$N_{\mu+\nu}(a) \leq \max\{N_\mu(a), N_\nu(a)\} \qquad (a \in X),$$

$$|N_\mu(a) - N_\nu(a)| \leq N_{\mu-\nu}(a) \qquad (a \in X).$$

Die Eindeutigkeit dieser Fortsetzungsmethode wird mit dem folgenden Satz noch unterstrichen:

Satz 4.21 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ ein punktetrennender und überdeckender unter-Mengenring von $\mathcal{R}_\mu$. Sei nun ν die Einschränkung von μ' auf $\mathcal{S}$. Dann gilt $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{R}_\mu$ und $\nu' = \mu'$*

Beweis:
Wir führen den Beweis in vier Schritten:
A.)
Wir zeigen $N_\mu \geq N_\nu$:
Angenommen es gibt ein $a \in X$ mit $N_\mu(a) < N_\nu(a)$. Nach Definition von $N_\mu(a)$ gibt es ein $W \in \mathcal{R}$ mit $\|W\|_\mu < N_\nu(a)$, während $\|W\|_\mu = \|W\|_{\mu'}$. Nun überdeckt $\mathcal{S}$ X und ist punktetrennend. Wir wählen nun ein $U \in \mathcal{S}$ mit $a \in U$ aber $x \notin U$. Daher ist $\{U \backslash W : U \in \mathcal{S}, a \in U\}$ eine schrumpfende Teilfamilie in $\mathcal{R}_\mu$ mit leerem Schnitt.
Nach Eigenschaft 3.(c) für nicht-archimedische Maße existiert nun ein $U \in \mathcal{S}$ mit $a \in U$ für das $\|U \backslash W\|_{\mu'} < N_\nu(a)$. Aber gleichzeitig gilt $\|W\|_{\mu'} < N_\nu(a)$, womit aus Eigenschaft 3.(d) eines nicht-archimedischen Maßes folgt $\|U\|_{\mu'} \leq \|U \cup W\|_{\mu'} < N_\nu(a)$. Da ν die Einschränkung von μ' auf $\mathcal{S}$ und $U \in \mathcal{S}$ ist, gilt $\|U\|_\nu \leq \|U\|_{\mu'} < N_\nu(a)$. Das ist aber nicht möglich, da $a \in U$.
B.)
Wir zeigen $\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{S}_\nu$:
Sei $A \in \mathcal{R}_\mu$ und $\epsilon > 0$. Gesucht ist ein $B \in \mathcal{S}$, sodaß $N_\nu < \epsilon$ auf $A \triangle B$. Wir setzen $T := \{x \in A : N_\mu(x) \geq \epsilon\}$. T ist $\mathcal{R}_\mu$-kompakt, wie wir schon in einem früheren Beweis gesehen haben. Aus $\mathcal{R}_\mu$-kompakt folgt $\mathcal{S}$-kompakt. Es gibt also für jedes $x \in X \backslash T$ ein $B \in \mathcal{S}$ mit $T \subset B$ aber $x \notin B$. Die schrumpfende

Mengenfamilie $\{B\backslash A : B \in \mathcal{S}, B \supset T\}$ in $\mathcal{R}_\mu$ hat daher einen leeren Schnitt. Es gibt also ein $B \in \mathcal{S}, B \supset T$ mit $\|B\backslash A\|_{\mu'} < \epsilon$.
Dann ist $N_\mu = N_{\mu'} < \epsilon$ auf $B\backslash A$. Nach Definition von T haben wir $N_\mu < \epsilon$ auf $A\backslash T$. Da diese Menge $A\backslash B$ enthält, folgt $N_\mu < \epsilon$ auf $A \triangle B$.
C.)
Wir zeigen, dass μ eine Einschränkung von ν' ist:
Seien A, B, ϵ wie in Teil B) dieses Beweises. Dann gilt:

$$|\nu'(A)-\mu'(A)| = |\nu'(A)-\nu(B)+\mu'(B)-\mu'(A)| = |\nu'(A\backslash A\cap B)-\nu'(B\backslash A\cap B)+$$

$$\mu'(B\backslash A\cap B)-\mu'(A\backslash A\cap B)| \leq \max\{\|A\triangle B\|_{\nu'}, \|A\triangle B\|_{\mu'}\} = \|A\triangle B\|_{\mu'} = \sup N_{\mu'} \leq \epsilon.$$

Folglich gilt $\nu' = \mu'$ auf $\mathcal{R}_\mu$.
D.)
Insbesondere ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}_\nu$ und μ ist eine Einschränkung von ν'. Vertauscht man die Rollen von μ und ν, dann erhält man $\mathcal{S}_\nu = \mathcal{R}_\mu$ und $\nu' = \mu'$. $\Box$.

Beispiel:
Ist X ein lokal-kompakter null-dimensionaler Hausdorff-Raum, dann sind die Maße ausgehend von dem Ring der kompakten clopen Mengen $\mathcal{B}_c(X)$, genau die beschränkten additiven Funktionen $\mathcal{B}_c(X) \to K$. Diese Maße lassen sich als lineare stetige Funktionale auf einem geeigneten Raum stetiger Funktionen auffassen.

Beispiel: Sei X eine beliebige nichtleere Menge und $h : X \to K$ eine beliebige Funktion. Dann erhalten wir ein Maß auf dem Ring aller endlichen Teilmengen von X durch:

$$\mu(A) := \sum_{x\in A} h(x).$$

Für dieses μ gilt $N_\mu = |h|$, $\mathcal{L}(\mu) = \{f : X \to K : fh \in c_0(X)\}$ und:

$$\int f d\mu = \sum_{x\in X} f(x)h(x).$$

Ein endliches reelles oder komplexes Radonmaß auf einem lokal-kompakten Raum hat einen σ-kompakten Träger. Im nicht-archimedischen kann man Maße finden, für die $\{x : N(x) > 0\}$ nicht σ-kompakt ist.

Satz 4.22 *Sei X irgendein beliebiger lokal-kompakter null-dimensionaler Hausdorff-Raum. Dann gibt es ein Maß μ auf $B_c(X)$ mit $N_\mu(x) = 1$ für alle $x \in X$.*

Beweis:
Sei k_0 der Primkörper des Restklassenkörpers von K. Für $A \subset X$ sei ξ_A* die k_0-wertige charakteristische Funktion von A. Wenn $A \subset X$ clopen ist, dann ist ein $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_c(A)$ voll bezüglich A, wenn $\{\xi_B* : B \in \mathcal{U}\}$ linear unabhängig ist über k_0 während jedes nichtleere $B \in \mathcal{B}_c(A)$ ein Element von $\mathcal{U}$ enthält. Wenn $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}_c(X)$ voll bezüglich X ist, dann ist es nach Satz 3.57 von van der Put

möglich, $\{\xi_B : B \in \mathcal{U}\}$ zu einer orthogonal Basis von $C_\infty(X)$ fortzusetzen:
Es gibt dann nämlich ein $\phi \in C'_\infty, \|\phi\| = 1$, sodaß $\phi(\xi_B) = 1, \forall B \in \mathcal{U}$. So ein ϕ bestimmt ein Maß $\mu : A \mapsto \phi(\xi_A)$ auf $\mathcal{B}_c(X)$. Dann ist $\|A\|_\mu = 1$ falls $A \in \mathcal{B}_c(X), A \neq 0$ und $N_\mu = 1$. Das ist aber die Aussage des Satzes. Es genügt also, wenn man beweisen kann, dass es ein $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ gibt das voll bezüglich X ist.
Für clopen $A \subset X$ sei $\mathcal{B}^0_c(A) := \mathcal{B}_c(A)\backslash\{\emptyset\}$ und sei c_A die Mächtigkeit von $\mathcal{B}^0_c(A)$. Wir nennen A speziell, falls $c_B = c_A$ für alle $B \in \mathcal{B}^0_c(A)$. Angenommen X ist speziell. Wir können annehmen, dass X unendlich ist. Sei nun γ die erste Ordinalzahl, deren Kardinalität c_X ist. Die Elemente von $\mathcal{B}^0_c(X)$ werden wohlgeordnet als $(A_\alpha)_{\alpha<\gamma}$. Für jedes α ist c_{A_α} unendlich und strikt größer als die Mächtigkeit von α. Nun ist k_0 abzählbar und daher existiert eine Teilfolge $(B_\alpha)_{\alpha<\gamma})$, sodaß für jedes $\alpha, B_\alpha \in \mathcal{B}^0_c(A_\alpha)$ und $\xi_{B_\alpha}*$ k_0-linear unabhängig sind von $\{\xi_{B_\beta}* : \beta < \alpha\}$. Dann ist $\{B_\alpha : \alpha < \gamma\}$ voll bezüglich X.
Es gibt also ein volles System bezüglich X, wenn X speziell ist. Für den allgemeinen Fall sei $\mathcal{A}$ eine maximale Menge von wechselseitig disjunkten speziellen Elementen von $\mathcal{B}^0_c(X)$. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist $\mathcal{U}_A \subset \mathcal{B}^0_c(A) \subset \mathcal{B}^0_c(X)$ voll bezüglich A. Wir beweisen das $\mathcal{U} := \cup\{\mathcal{U}_A : A \in \mathcal{A}\}$ voll bezüglich X ist.
Natürlich ist $\{\xi_B* : B \in \mathcal{U}\}$ linear unabhängig über k_0. Wähle nun $B \in \mathcal{B}^0_c(X)$. $\mathcal{B}^0_c(B)$ enthält ein $B*$ für das $c_{B*} = \inf\{c_C : C \in \mathcal{B}^0_c(B)\}$. Dann ist $B*$ speziell. Gemäß der Maximalität von $\mathcal{A}$ muß es ein $A \in \mathcal{A}$ geben, mit $A \cap B* \neq \emptyset$. Dann enthält $A \cap B*$ ein Element von $\mathcal{U}_A$ und weiters B ein Element von $\mathcal{U}$. $\square$

4.3 Integrationstheorie

Wir können nun zu den integrierbaren Funktionen fortschreiten. Das nächste Ziel wird sein, eine Beschreibung von $\mathcal{L}(\mu)$ durch die $\mathcal{R}_\mu$-Topologie und die Funktion N_μ zu erhalten. Wir brauchen etwas zusätzliche Information über die $\mathcal{R}_\mu$-Topologie.

Satz 4.23 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Für $\epsilon > 0$ setze $X_\epsilon := \{x : N_\mu(x) \geq \epsilon\}$. Die Einschränkungen der $\mathcal{R}$- und der $\mathcal{R}_\mu$-Topologien auf X_ϵ stimmen überein. Eine Funktion $f : X \mapsto K$ ist $\mathcal{R}_\mu$- stetig dann und nur dann ,wenn für jedes ϵ die Einschränkung von f auf X_ϵ $\mathcal{R}$-stetig ist.*

Beweis:
Auf X_ϵ stimmen die von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}_\mu$ induzierten Topologien überein. Ein $\mathcal{R}_\mu$-stetiges f ist natürlich $\mathcal{R}$-stetig.
Angenommen es sei f nun für jedes X_ϵ $\mathcal{R}$-stetig. Sei $U \subset K$ eine clopen Menge: Wir zeigen, dass dann $f^{-1}(U)$ $\mathcal{R}_\mu$-clopen ist. Es genügt dafür zu zeigen, dass $f^{-1}(U) \cap A \in \mathcal{R}_\mu$ für alle $A \in \mathcal{R}$. Oben wurde bewiesen, dass dafür genügt, dass es für jedes $A \in \mathcal{R}$ und $\epsilon > 0$ ein $B \in \mathcal{R}$ gibt, sodaß $f^{-1}(U) \cap A \cap X_\epsilon = B \cap X_\epsilon$. Es gilt $A \cap X_\epsilon$ ist $\mathcal{R}$-kompakt und $f^{-1}(U) \cap A \cap X_\epsilon$ ist $\mathcal{R}$-clopen als Teilmenge von X_ϵ. Für jedes $x \in f^{-1}(U) \cap A \cap X_\epsilon$ wähle $B_X \in \mathcal{R}, x \in B_X$, sodaß $B_X \cap X_\epsilon \subset f^{-1}(U) \cap A \cap X_\epsilon$. Da diese Menge kompakt ist, gibt es $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sodaß

$f^{-1}(U) \cap A \cap X_\epsilon \subset \cup B_{x_i}$. Setzt man $B := \cup B_{x_i}$, dann gilt $f^{-1}(U) \cap A \cap X_\epsilon = B \cap X_\epsilon$. □

Korollar 4.24 *Falls $f : X \to K$ $\mathcal{R}_\mu$-stetig ist, auf jeder $\mathcal{R}_\mu$-kompakten Menge, dann ist f $\mathcal{R}_\mu$-stetig auf X. Falls $C \subset X$ $\mathcal{R}_\mu$-kompakt, dann ist $F := \{x \in C : N_\mu(x) = 0\}$ endlich und es gibt ein $\delta > 0$, sodaß $N_\mu > \delta$ auf $C \backslash F$.*

Beweis:
Jede $\mathcal{R}$-kompalte Teilmenge von X_ϵ ist $\mathcal{R}_\mu$-kompakt(folgt aus dem vorigen Lemma). Daher ist f $\mathcal{R}_\mu$-stetig auf jeder $\mathcal{R}$-kompakten Teilmenge von X_ϵ. f ist also auch $\mathcal{R}$-stetig auf jeder $\mathcal{R}$-kompakten Teilmenge von X_ϵ. Aber X_ϵ ist lokal-kompakt, also ist f $\mathcal{R}$-stetig auf X_ϵ und $\mathcal{R}_\mu$-stetig auf X.
Sei $C \subset X$ $\mathcal{R}_\mu$-kompakt. Jede Teilmenge von $\{x \in X : N_\mu(x) = 0\}$ ist $\mathcal{R}_\mu$-clopen, also muß F endlich sein. Sei $\pi \in K, 0 < |\pi| < 1$. Falls $\inf\{N_\mu(x) : x \in C \backslash F\} = 0$ gilt, dann gibt es $a_1, a_2, \ldots, \in C$, sodaß für jedes n, $N_\mu(a_n) < |\pi|^n$ und $N_\mu(a_n) < N_\mu(a_{n-1})$. Für jedes n wähle $A_n \in \mathcal{R}, A_n \supset a_n$, sodaß $N_\mu < |\pi|^n$ auf A_n gilt. Aus dem vorigen Lemma folgt, dass $g := \sum \pi^{-n} \xi_{A_n \cap \{x : N_\mu(x) > 0\}}\}$ $\mathcal{R}_\mu$- stetig ist. Aber g ist nicht beschränkt auf der $\mathcal{R}_\mu$ kompakten Menge C. □

Satz 4.25 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Eine Funktion $f : X \to K$ ist μ-integrierbar, genau dann, wenn sie die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:*

(a) f ist $\mathcal{R}_\mu$-stetig.

(b) Für jedes $\epsilon > 0$ ist die Menge $\{x : |f(x)| N_\mu(x) \geq \epsilon\}$ $\mathcal{R}_\mu$-kompakt und damit enthalten in mindestens einer der Mengen $\{x : N_\mu(x) \geq \delta\}$ für $\delta > 0$.

Beweis:
Für $\epsilon > 0$ setze wieder $X_\epsilon := \{x : N(x) \geq \epsilon\}$. Wähle $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Dann gibt es Treppenfunktionen $f_1, f_2, \ldots,$ sodaß $\lim \|f - f_n\|_N = 0$. Jedes f_n ist $\mathcal{R}$- stetig und $\lim f_n = f$ gleichmäßig auf jedem X_ϵ. Also ist f $\mathcal{R}$-stetig auf jedem X_ϵ. Daher ist f auch $\mathcal{R}_\mu$-stetig.
Für die zweite Aussage sei wieder $\epsilon > 0$. Es gibt eine Treppenfunktion g mit $\|f - g\|_N < \epsilon$. Dann gilt $\{x : |f(x)| N(x) \geq \epsilon\} = \{x : |g(x)| N(x) \geq \epsilon\}$. Diese Menge ist aber $\mathcal{R}_\mu$-kompakt.
Erfülle f nun umgekehrt (a) und (b). Setze $\delta > 0$. Wir konstruieren eine $\mathcal{R}_\mu$-Treppenfunktion g mit $\|f - g\|_N \leq \delta$.
Sei $C := \{x : |f(x)| N(X) \geq \delta\}$. Da N $\mathcal{R}_\mu$-halbstetig von oben ist, ist $s := \sup_{x \in C} N(x)$ endlich.
C ist eine Vereinigung von endlich vielen nicht-leeren, disjunkten relativ $\mathcal{R}_\mu$-clopen Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$, sodaß $|f(x) - f(y)| s < \delta$ falls $x, y \in C$ im selben A_i liegen. Wähle $a_i \in A_i$. Für jedes i ist die Menge $\{x \in X : |f(x) - f(a_i)| N(x) < \delta\}$ $\mathcal{R}_\mu$-offen und enthält A_i. Es gibt nun(wir betrachten nur endlich viele i) disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{R}_\mu$, sodaß $A_i = B_i \cap C$ und $B_i \subset \{x \in X : |f(x) - f(a_i)| N(x) < \delta\}$.

Man definiert nun $g := \sum f(a_i)\xi_{B_i}$. g ist offensichtlich eine $\mathcal{R}_\mu$-Treppenfunktion. Für $x \in B_i$, gilt

$$|f(x) - g(x)|N(x) = |f(x) - f(a_i)|N(x) < \delta$$

während für $x \notin \cup B_i$ gilt:

$$|f(x) - g(x)|N(x) = |f(x)|N(x) < \delta.$$

Daher gilt auch $\|f - g\|_N \leq \delta$. □

Damit erhalten wir Analoga zum Satz von der majorisierten Konvergenz:

Korollar 4.26 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}, g \in \mathcal{L}(\mu)$. Falls $f : X \to K$ $\mathcal{R}_\mu$-stetig ist und $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in X$, dann ist $f \in \mathcal{L}(\mu)$.*

Korollar 4.27 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$, $g \in \mathcal{L}\mu$ und sei $(f_i)_{i\in I}$ eine Moore-Smith-Folge von μ-integrierbaren Funktionen $X \to K$, die gegen eine Funktion f gleichmäßig auf $\mathcal{R}_\mu$-kompakten Teilmengen konvergieren, wobei $|f_i| \leq |g|$ überall ist, für alle i. Dann ist $f \in \mathcal{L}(\mu), \lim \|f_i - f\|_\mu = 0$ und $\lim \int f_i d\mu = \int f d\mu$.*

Definition 4.28 *Die Mengen A für die nun $\|A\|_\mu = 0$ gilt heißen μ-Nullmengen.*

Ist nun P(x) eine Aussage, sodaß die Menge $\{x \in X : \not P(x)\}$ eine μ-Nullmenge ist, dann sagen wir P gilt μ-fast überall(f.ü.).
Ist $f \in \mathcal{L}(\mu)$ und gilt $f = g$ μ-f.ü., so ist $\int f d\mu = \int g d\mu$ und $g \in \mathcal{L}(\mu)$. Alle f.ü. übereinstimmenden Funktionen werden nun zu Klassen zusammengefaßt. Die entsprechende Relation $' =' $ f.ü. ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse von f heißt nun μ-intgrierbar, wenn f f.ü. mit einer integrierbaren Funktion übereinstimmt.
Wir schränken jetzt von X auf die Menge $\{x \in X : N(x) > 0\}$ ein. Und erhalten dort wieder einen Vektorraum den wir als $L(\mu)$ bezeichnen. Dieser Vektorraum ist ein Banachraum unter der Norm:

$$\|f\| := \|g\|_{N_\mu} \text{ für alle } g \in \mathcal{L}(\mu) \quad f = g \text{ f.ü.}$$

Zum Dual von $L(\mu)$:
Sei $\phi \in L(\mu)'$ und $\nu_\phi : R \to K$ definiert als:

$$\nu_\phi(A) := \phi(\xi_A) \qquad (A \in \mathcal{R}).$$

Dann ist $\nu\phi$ ein Maß und $N_{\nu_\phi} \leq \|\phi\| N_\mu$. So erhält man eine eins-zu-eins Entsprechung der Elemente aus $L(\mu)'$ und den Maßen auf $\mathcal{R}$ für die es ein $c > 0$ gibt, mit:

$$N_\nu \leq c N_\mu.$$

Die Räume $L(\mu)$ haben eine zum Zweck der nicht-archimedischen Funktionalanalysis sehr erfreuliche Eigenschaft:

Satz 4.29 *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{R}$. Dann existiert für jedes $t \in (0,1)$ eine t-orthogonale Basis zu $L(\mu)$. Damit ist die kanonische Abbildung in den Bidualraum eine Isometrie.*

Beweis:
o.B.d.A sei die Bewertung von K dicht und $N(x) > 0$ für alle $x \in X$(damit $\mathcal{L}(\mu) = L(\mu)$). Sei nun $t \in (0,1)$. Es gibt ein $\pi \in K$ mit $t < |\pi| < 1$. Sei $g : X \mapsto K$ definiert durch:

$$g(x) := \pi^n \text{ falls } n \in \mathbb{Z}, x \in X, |\pi|^{n+1} \leq N(x) \leq |\pi|^n.$$

Dann ist $|\pi| \leq N \leq |g|$.
Bezeichne X_d den diskreten topologischen Raum auf X. Die Abbildung $G : f \mapsto fg$ ist eine lineare Abbildung $L(\mu) \mapsto \mathcal{BC}(X_d)$. Bezeichne $\|\|_\infty$ die Norm auf $\mathcal{BC}(X_d$, dann gilt $|\pi|\|Gf\|_\infty \leq \|f\|_\mu \leq \|Gf\|_\infty$ für alle $f \in L(\mu)$.
Für jedes $A \in \mathcal{R}$ ist $\{\xi_A(x)g(x) : x \in X\} \subset \{\pi^n : n \in \mathbb{Z}, |\pi^{n+1}| \leq \|\xi_A\|_N\}$. Daher ist $G\xi_A \in PC(X_d)$ für alle $A \in \mathcal{R}$. Gemäß Linearität und Stetigkeit von G, muß das Bild ein abgeschlossener linearer Teilraum von $PC(X_d)$ sein. Nach den Sätzen von Gruson und Van der Put hat das Bild eine orthogonal Basis. Das inverse Bild dieser Basis ist eine t-orthogonale Basis in $L(\mu)$. $\square$

Anmerkung:
Ist die Bewertung von K diskret, dann hat $L(\mu)$ sogar eine Orthogonalbasis.

Als nächstes kann man, weitgehend wie im archimedischen Fall, Produktmaße konstruieren.

Satz 4.30 *Sei μ ein Maß auf einem punktetrennenden überdeckenden Mengenring $\mathcal{R}$ von X und ν ein ebensolches Maß auf dem Ring $\mathcal{S}$ von Y. Die endlichen Vereinigungen der Mengen $A \times B$ ($A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S}$) bilden einen überdeckenden Mengenring $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ von $X \times Y$. Es gilt:*

1. *Es gibt ein eindeutiges Maß $\mu \times \nu$ auf $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$, sodaß:*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \qquad (A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S})$$

   Weiters:

$$N_{\mu \times \nu} = N_\mu \otimes N_\nu.$$

2. *Falls $f \in L(\mu), g \in L(\nu)$, dann ist $f \otimes g \in L(\mu \times \nu)$ und*

$$\int f \otimes g d(\mu \times \nu) = \int f d\mu \cdot \int g d\nu.$$

3. *Falls $f \in L(\mu \times \nu)$, dann ist $y \to \int f(x,y)d\mu(x)$ eine ν-f.ü. definierte ν-integrierbare Funktion und*

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).$$

Genauso
$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f(x,y) d\nu(y) d\mu(x).$$

Beweis:
Zu (a):
Definiere $\mu \times \nu : \mathcal{R} \times \mathcal{S} \to K$ durch

$$(\mu \times \nu)(C) := \int \int \xi_C(x,y) d\mu(x) d\nu(y)$$

Es folgt direkt
$$(\mu \times \nu)(C) = \int \int \xi_C(x,y) d\nu(y) d\mu(x)$$

$\mu \times \nu$ ist additiv. Setze $N := N_\mu \times N_\nu$. Falls $A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S}$ dann gilt

$$|(\mu \times \nu)(A \times B)| \leq \|\xi_{A \times B}\|_N$$

Daher ist $\|C\|_{\mu \times \nu} \leq \|\xi_C\|_N$ $(C \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$.
Es seien X und Y mit den $\mathcal{R}$- und $\mathcal{S}$-Topologien ausgestattet und $X \times Y$ mit der Produkttopologie. Für alle $A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S}$ und $\epsilon > 0$ ist

$$\{(x,y) \in A \times B : N(x,y) \geq \epsilon\} \subset \{x \in A : N_\mu(x)\|B\|_\nu \geq \epsilon\} \times \{y \in B : N_\nu(y)\|A\|_\mu \geq \epsilon\}.$$

Daher ist $\{(x,y) \in A \times B : N(x,y) \geq \epsilon\}$ enthalten in einer kompakten Teilmenge von $X \times Y$ und(da N halbstetig von oben ist) muß selbst kompakt sein.
Für jedes $C \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ ist $\{z \in C : N(z) \geq \epsilon\}$ $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$-kompakt. Damit ist $\mu \times \nu$ ein Maß und $N_{\mu \times \nu} \leq N$. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus $\|A \times B\|_{\mu \times \nu} \geq \|A\|_\mu \|B\|_\nu$. Die Eindeutigkeit ist klar nach Konstruktion.
(b) ist eine Anwendung von (a)
(c) gilt offensichtlich für $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$-Treppenfunktionen. Sei nun $f \in L\mu \times \nu$. Es gibt also eine Folge von Treppenfunktionen (f_n) sodaß $\|f - f_n\|_N \leq \frac{1}{n}$. Für $x \in X, y \in Y, n \in \mathbb{N}$, setze man $f^y(x) := f(x,y), f_n^y(x) := f_n(x,y)$. Jedes f_n^y ist eine $\mathcal{R}$- Treppenfunktion und

$$\|f^y - f_n^y\|_{N_\mu} N_\nu(y) \leq \frac{1}{n}.$$

Daher gilt für ν-fast alle $y \in Y$ $f^y \in L(\mu)$ und $|\int f^y d\mu - \int f_n^y d\mu| N_\nu(y) \leq \frac{1}{n}$.
Daher ist die ν-fast überall definierte Abbildung $y \mapsto \int f^y d\mu$ ν-integrierbar und

$$\int (\int f^y d\mu) d\nu(y) = \lim \int (\int f_n^y d\mu) d\nu(y) = \lim \int \int f_n(x,y) d\mu(x) d\nu(y) =$$

$$= \lim \int f_n d(\mu \times \nu) = \int f d(\mu \times \nu).$$

Damit ist die erste hälfte von (c) bewiesen. Die zweite geht analog. $\square$

Satz 4.31 *Seien X, Y, R, S, μ, ν wie oben. Dann gilt:*

$$L(\mu \times \nu) \cong L(\mu) \otimes L(\nu).$$

Beweis:
o.B.d.A nehmen wir an $N_\mu(x) > 0$ und $N_\nu(y) > 0$ für alle x, y: dann ist $\mathcal{L}(\mu) = L(\mu), \mathcal{L}(\nu) = L(\nu), \mathcal{L}(\mu \times \nu) = L(\mu \times \nu)$. Wir haben eine bilineare Abbildung $\otimes : L(\mu) \times L(\nu) \mapsto L(\mu \times \nu)$ mit Norm 1. Sei F ein Banachraum und $S : L(\mu) \times L(\nu) \mapsto F$ bilinear und stetig. Dann gibt es eine eindeutige lineare F-wertige Abbildung $S_\otimes$ auf dem Raum aller $\mathcal{R}\otimes\mathcal{S}$- Treppenfunktionen sodaß

$$S_\otimes(\xi_A \otimes \xi_B) = S_\otimes(\xi_{A\times B}) = S(\xi_A, \xi_B)$$

für alle $A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S}$. Sei f eine $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$-Treppenfunktion. f ist eine endliche Summe $\sum \alpha_i \xi_{A_i \times B_i}$ mit $\alpha_i \in K, \alpha_i \neq 0, A_i \in \mathcal{R}, A_i \neq \emptyset, B_i \in \mathcal{S}, B_i \neq \emptyset, (A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \emptyset$ für $i \neq j$. Wähle nun j, sodaß $\|S_\otimes(\alpha_j \xi_{A_j \times B_j})\| = \max_i \|S_\otimes(\alpha_i \xi_{A_i \times B_i})\|$.
Dann ist

$$\begin{aligned}\|S_\otimes f\| &\leq \|S_\otimes(\alpha_j \xi_{A_j \times B_j})\| = |\alpha_j| \|S(\xi_{A_j}, \xi_{B_j})\| \\ &\leq |\alpha_j| \|S\| \|\xi_{A_j}\|_{N_\mu} \|\xi_{B_j}\|_{N_\nu} \\ &= \|S\| \|\alpha_j \xi_{A_j \times B_j}\|_{N_{\mu\times\nu}} \leq \|S\| \|f\|_{N_{\mu\times\nu}}\end{aligned}$$

Daher kann $S_\otimes$ fortgesetzt werden, zu einer stetigen linearen Abbildung $L(\mu \times \nu) \mapsto F$. Diese Erweiterung werde ebenfalls mit $S_\otimes$ bezeichnet. Aus Stetigkeitsgründen gilt $S_\otimes(f \otimes g) = S(f, g)$ für alle $f \in L(\mu), g \in L(\nu)$ und $S_\otimes$ ist die einzige lineare Abbildung die jedes $f \otimes g$ auf sein $S(f, g)$ abbildet. Damit ist $L(\mu \times \nu)$ ein Tensorprodukt von $L(\mu)$ und $L(\nu)$. $\square$

Was leider nicht zu erhalten ist, ist ein Analogon des Satzes von Radon-Nikodym. Es gibt hier explizite Gegenbeispiele.

4.4 Straffe Maße

Wir kommen nun zu jenen Maßen, die ungefähr den Borelmaßen in der archimedischen Theorie entsprechen.
Im folgenden ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}(X)$ der Ring aller clopen Teilmengen von X erzeugt wird. Diesen bezeichnen wir manchmal auch als Borelmengen oder Borel-(Mengen)-Algebra. $\mathcal{B}(X)$ ist ein punktetrennender überdeckender Mengenring auf X. Die $\mathcal{B}(X)$ Topologie ist genau die vorgegebene Topologie auf X.

Definition 4.32 *Die Maße auf $\mathcal{B}(X)$ nennt man die straffen Maße auf X. Sie bilden den Vektorraum $M(X)$. Dieser ist ein Banachraum unter der Norm:*

$$\|\mu\| := \sup_{A\in\mathcal{B}(X)} |(A)| = \|X\|_\mu = \sup_{x\in X} N_\mu(x).$$

Definition 4.33 *Jedes $a \in X$ bestimmt eine Punktmasse $\delta_a \in M(X)$ durch*

$$\delta_a(A) := \xi_A(a) \qquad (A \in \mathcal{B}(X)).$$

Der Träger eines Maßes $\mu \in M(X)$ ist der Abschluß der Menge $\{x \in X : N_\mu(x) > 0\}$.

Bemerkung:
Falls die Topologie von X diskret ist, dann existiert eine natürliche lineare Isometrie T von $M(X)$ auf $c_0(X)$:

$$(T\mu)(x) := \mu(\{x\}) \qquad (x \in X).$$

Interessanter ist allerdings der Zusammenhang zwischen straffen Maßen und Linearformen auf den stetigen Funktionen.

Satz 4.34 *Sei $\mathcal{R}$ ein überdeckender Ring, der eine Basis für die Topologie auf X bildet. μ sei ein Maß auf $\mathcal{R}$. Ist nun $j \in L(\mu)$, dann definiert die Gleichung:*

$$(j\mu)(A) = \int \xi_A j d\mu \qquad (A \in \mathcal{B}(X))$$

ein Element $j\mu$ von $M(X)$. Die Abbildung $j \to j\mu$ ist eine lineare Isometrie von $L(\mu)$ nach $M(X)$.

Beweis:
Folgt direkt aus der Definition. □
Der folgende Satz ist ein Analogon des klassischen Satzes von Riesz.

Satz 4.35 *Ist $\mu \in M(X)$, dann ist $\mathcal{BC}(X) \subset L(\mu)$. Die Formel*

$$J_\mu(f) := \int f d\mu \qquad (f \in \mathcal{BC}(X))$$

definiert eine linear Isometrie $J : M(X) \to \mathcal{BC}(X)'$. Für kompaktes X gilt sogar:

$$M(X) \cong C(X)'.$$

Beweis:
J_μ ist wohldefiniert. J ist linear und $\|J\| \leq 1$. Ist $\mu \in M(X)$, dann gilt

$$\|\mu\| = \sup_{A \in \mathcal{B}(X)} |J_\mu(\xi_A)| \leq \|J_\mu\|.$$

J ist also eine Isometrie.
Die Aussage über kompakte X ist klar. □

Wie weit dieser Satz verschärft werden kann, hängt auch davon ab, in welchen Körper die betrachteten Maße abbilden. Für sphärisch vollständige Körper sind nicht ganz so starke Verschärfungen zu erreichen.
Weitere Ergebnisse hängen auch davon ab, ob die Bewertung von K dicht ist oder nicht. Schön klassifizieren kann man alle Maße auf jenen Räumen in denen alle kompakten Teilmengen diskret sind:

Satz 4.36 *Ist K dicht bewertet, dann sind die folgenden Bedingungnen an X äquivalent.*

(a) $M(X)$ hat eine Orthonormalbasis.

(b) $M(X)$ hat eine Basis

(c) Alle kompakten Teilmengen von X sind endlich

(d) Für jedes $\mu \in M(X)$ existieren $a_1, a_2, \dots \in X$ und $(\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in c_0$, sodaß

$$\mu = \sum_i \lambda_i \delta_{a_i}.$$

Beweis:
Für $x \in X$ sei δ_x die Punktmasse in x. $\{\delta_x : x \in X\}$ ist ein Orthonormalsystem in $M(X)$. Sei D seine abgeschlossene lineare Hülle. Dann ist (d) äquivalent zu $D = M(X)$. Damit impliziert (d) schon (a).
Die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ ist klar.
$(b) \Rightarrow (c)$:
Sei $Y \subset X$ kompakt. Nach dem Satz 3.57 von van der Put gibt es ein I mit $C(Y) \cong c_0(I)$. Dann ist $M(Y) \cong C(Y)' \cong c_0(I)' \cong l^\infty(I)$, womit $M(X)$ einen Unterraum hat der isomorph ist zu $l^\infty(I)$. Angenommen I ist unendlich, dann existiert ein Teilraum in $M(X)$, der isomorph ist zu l^∞. Der Satz von Gruson 3.49 besagt nun, dass l^∞ eine Basis hat, was der Dichtheit der Bewertung auf K wiederspricht.
$(c) \Rightarrow (d)$:
Bewiesen wird die äquivalente Aussage $D = M(X)$ Sei $\mu \in M(X), \epsilon > 0$: wir bilden ein $\nu \in D$ mit $\|\mu - \nu\| \le \epsilon$.
Die Menge $\{x : N_\mu(x) \ge \epsilon\}$ enthält nur endlich viele Punkte $a_1, a_2, \dots, a_n$ mit $a_i \ne a_j, i \ne j$. Sei $\{U_1, \dots, U_n\}$ eine clopen Partition von X, sodaß $a_i \in U_i$ für jedes i.
Setze nun $\nu := \sum \mu(U_i)\delta_{a_i}$; dann ist $\nu \in D$. Für jedes $A \in \mathcal{B}(X)$ gilt:

$$\begin{aligned}(\mu - \nu)(A) &= \sum [\mu(A \cap U_i) - \mu(U_i)\xi_A(a_i)] \\ &= \sum \int \xi_{U_i}(x)[\xi_A(x) - \xi_A(a_i)]d\mu(x)\end{aligned}$$

,sodaß:

$$\begin{aligned}|(\mu - \nu)(A)| &\le \max_i \sup_{x \in U_i} |\xi_A(x) - \xi_A(a_i)| N_\mu(x) \\ &\le \max_i \sup_{x \in U_i, x \ne a_i} N_\mu(x) \le \epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Ein Kriterium für Integrierbarkeit bezüglich straffer Maße gibt der folgende Satz:

Satz 4.37 *Für eine Funktion $f : X \to K$ sind äquivalent:*

(a) Für jedes $\mu \in M(X)$ ist f μ-integrierbar.

(b) f ist beschränkt und für jedes Kompaktum $C \subset X$ ist die Einschränkung von f auf C stetig.

Beweis:
$(a) \Rightarrow (b)$:
Sei $\pi \in K, 0 < |\pi| < 1$. Ist f nicht beschränkt, dann gibt es eine Folge $(a_i)_i$ von paarweise verschiedenen Punkten in X, sodaß der $\lim |\pi^n f(a_n)| = \infty$. Sei $\nu := \sum \pi^n \delta_{a_n}$. Dann ist $\nu \in M(X)$ und $N_\nu(a_n) = |\pi^n|$ für jedes n. Es folgt, dass $\|f\|_{N_\nu} = \infty$, weswegen $f \notin L(\nu)$.
Sei weiters $C \subset X$ kompakt. Dann gibt es ein $\mu \in M(X)$, sodaß N_μ die $\mathbb{R}$-wertige charakteristische Funktion von C ist. Ist f μ-integrierbar, damm muß f auf C stetig sein.
$(b) \Rightarrow (a)$:
Sei $\mu \in M(X)$. Dann ist f $\mathcal{B}(X)$ μ-stetig. Daher ist $f \in L(\mu)$. □

Wir benötigen für die folgenden Sätze einige zusätzliche Begriffe:

Definition 4.38 *X heißt ein k_0-Raum, wenn gilt:*
Ist $U \subset X$ eine Teilmenge, sodaß für jedes Kompaktum $C \subset X$ der Schnitt $U \cap C$ clopen ist in C, dann ist U ebenfalls clopen in X.
Äquivalent dazu:
Ist $f : X \to K$ und für jedes Kompaktum $C \subset X$ die Einschränkung von f auf C stetig, dann ist f stetig auf X.

Ist X lokal-kompakt oder metrisierbar, dann ist es auch k_0.
Es ergibt sich nun ein interessanter Satz über die beschränkten stetigen Funktionen auf X.

Korollar 4.39 *Ist X ein k_0-Raum, dann ist $\mathcal{BC}(X) = \bigcap_{\mu \in M(X)} L(\mu)$.*

Beweis:
Folgt direkt aus der Definition. □
Um nun weiters jene Elemente von $\mathcal{BC}(X)'$ zu charakterisieren, die straffen Maßen entsprechen, benötigen wir noch einige zusätzliche Begriffe.

Definition 4.40 *Ein $\phi \in \mathcal{BC}(X)'$ hat kompakten Träger, falls ein Kompaktum $Y \subset X$ existiert, sodaß ϕ verschwindet auf $\{f \in \mathcal{BC}(X) : f(x) = 0, \forall x \in Y\}$.*

Satz 4.41 *Für so ein Y gilt:*

$$|\phi(f)| \leq \|\phi\| \sup_{y\in Y} |f(y)| \qquad (f \in \mathcal{BC}(X))$$

Beweis:
Nach Ellis Satz 3.59 gibt es ein $g \in PC(X)$ mit $g = f$ auf Y und $\|g\| = \sup_{x\in Y} |f(x)|$. Dann ist $|\phi(f)| = |\phi(g)| \leq \|\phi\| \|g\|$.

Definition 4.42 *Eine Haube sei eine Funktion $\phi : X \to [0, \infty)$, sodaß für alle $\epsilon > 0$ die Menge $\{x : \phi(x) \geq \epsilon\}$ kompakt ist.*
Eine Teilmenge $U \subset \mathcal{BC}(X)$ heißt strikt(oder straff) offen, falls für jedes $f \in U$ eine Haube ϕ existiert, sodaß U die Menge $\{g \in \mathcal{BC}(X) : \|f - g\|_\phi \leq 1\}$ enthält.

Defintion und Satz 4.43 *Die strikt offenen Mengen bilden eine Topologie auf $\mathcal{BC}(X)$, die sogenannte strikte(oder straffe) Topologie.*

Beweis:
Klar. □

Satz 4.44 *Addition und skalare Multiplikation sind strikt stetig und die strikte Topologie ist schwächer als die Norm-Topologie.*

Beweis:
Leicht nachzurechnen. □

Definition 4.45 *Für ein $f \in \mathcal{BC}(X)$ und $Y \subset X$ setzen wir*

$$\|f\|_Y := \sup_{x\in Y} |f(x)|.$$

Jetzt kann man die strikten Maße unter den Funktionalen charakterisieren:

Satz 4.46 *Die Folgenden Bedingungen an $\phi \in \mathcal{BC}(X)'$ sind äquivalent:*

(a) Es gibt ein $\mu \in M(X)$ mit $\Phi = J_\mu$.

(b) Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein Kompaktum $Y \subset X$, sodaß:

$$|\phi(f)| \leq \max\{\|\phi\| \cdot \|f\|_Y, \epsilon\|f\|\}$$

(c) ϕ ist Limes(in der Norm) von Elementen aus $\mathcal{BC}(X)'$ mit kompakten Trägern.

(d) ϕ ist strikt stetig.

Beweis:
Für kompaktes $Y \subset X$ sei S_Y die Einschränkung $\mathcal{BC}(X) \mapsto C(Y)$. Nach Ellis Satz gibt es eine lineare Isometrie $T_Y : C(Y) \mapsto PC(X)$, sodaß $S_Y \circ T_Y = Id$. Sei im folgenden $\Phi_Y := \Phi \circ T_Y \circ S_Y$.
$(a) \Rightarrow (d)$:
Sei $\Phi = J_\mu, \mu \in M(X)$. Dann ist N_μ eine Haube und $|\Phi(f)| \leq \|f\|_{N_\mu}$ für alle $f \in \mathcal{BC}(X)$. Es folgt, dass ϕ strikt stetig ist.
$(d) \Rightarrow (b)$:
Wähle $\pi \in K, 0 < |\pi| < 1$. Dann gibt es eine Haube, sodaß $\{f : \|f\|_\Phi < 1\} \subset \{f : |\Phi(f)| \leq |\pi|\}$ und es ist $|\Phi(f)| \leq \|f\|_\Phi$ für alle f. Sei $\epsilon > 0, Y := \{x : \Phi(x) \geq \epsilon\}$. Für $f \in \mathcal{BC}(X)$ setze $g := T_Y S_Y f$; dann ist

$$\Phi(f) = \Phi(f-g) + \Phi(g),$$

$$|\Phi(f-g)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \Phi(x) \leq \sup_{x \notin Y} |f(x) - g(x)| \epsilon \leq \|f\| \epsilon,$$

und $|\Phi(g)| \leq \|\Phi\| \|g\| \leq \|\Phi\| \|f\|_Y$.
$(b) \Rightarrow (c)$:
Φ hat einen kompakten Träger. Für jedes $f \in \mathcal{BC}(X)$ gilt:

$$|\Phi(f) - \Phi_Y(f)| = |\Phi(f - T_Y S_Y f)| \leq \epsilon \|f - T_Y S_Y f\| < \epsilon \|f\|.$$

Daher ist $\|\Phi - \Phi_Y\| < \epsilon$.
$(c) \Rightarrow (a)$:
$M(X)$ ist vollständig und J eine Isometrie, also ist das Bild von J abgeschlossen. Wir können nun annehmen, dass Φ selbst einen komapkten Träger hat. Sei $Y \subset X$, sodaß $\Phi(f) = 0$ falls f auf Y identisch verschwindet. Definiere ein additives $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto K$ durch $\mu(A) := \Phi(\xi_A)$. Dann ist $N_\mu = 0$ auf Y und N_μ ist beschränkt. Daher ist μ ein Maß auf $\mathcal{B}(X)$. Sei $f \in \mathcal{BC}(X)$. Da $C(Y)$ eine Orthogonalbasis aus charakteristischen Funktionen besitzt, gibt es $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{B}(X)$ und $a_1, a_2, \cdots \in K$, sodaß $\lim \alpha_i = 0$ und $f = \sum \alpha_i \mu(A_i)$, gleichmäßig auf Y. Dann ist $\Phi(f) = \Phi(\sum \alpha_i \xi_{A_i}) = \sum \alpha_i \Phi(\xi_{A_i}) = \sum \alpha_i \mu(A_i) = \int \sum \alpha_i \xi_{A_i} d\mu = \int f d\mu$. $\square$

Etwas allgemeiner noch, kann man die beschränkten σ-additiven Funktionen $\mathcal{B}(X) \to K$ betrachten. Diese bilden einen Banachraum $M^\sigma(X)$ unter der Supremumsnorm.
Falls K nicht sphärisch vollständig ist, dann haben wir schon ein erstes Resultat.

Satz 4.47 *Sei K nicht sphärisch vollständig. Dann bestimmt jedes $\mu \in M^\sigma(X)$ ein eindeutiges $J_\mu \in \mathcal{BC}(X)$, durch:*

$$J_\mu(\xi_A) = \mu(A) \qquad (A \in \mathcal{B}(X)).$$

Die Abbildung $\mu \to J_\mu$ ist ein Isomorphismus

$$M^\sigma(X) \cong \mathcal{BC}(X)'$$

Beweis:
Sei Φ das System aller clopen Partitionen von X. Für $\mathcal{U} \in \Phi$ sei $L_{\mathcal{U}}$ der Raum aller beschränkten Funktionen $X \mapsto K$ die auf jedem Element von $\mathcal{U}$ konstant sind. Jedes $L_{\mathcal{U}}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{BC}_s(X)$, isomorph zu $l^\infty(\mathcal{U})$. $\mathcal{BC}_s(X)$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $\sum\{L_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \Phi\}$.
Wir zeigen zuerst, dass zu einer gegebenen Funktion $\mu \in M^\sigma(X)$ höchstens ein passendes $J_\mu \in \mathcal{BC}_s(X)'$ existiert.
Sei $J \in \mathcal{BC}_s(X)'$ mit $J(\xi_A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{B}(X)$: es genügt zu zeigen, dass die Einschränkung von J auf jedes $L_{\mathcal{U}}$ identisch verschwinden muß. Es ist aber $L_{\mathcal{U}} \cong l^\infty(\mathcal{U})$ und aus dem Satz 3.57 von van der Put folgt das identische Verschwinden.
Als nächstes wähle man ein $\mu \in M^\sigma(X)$ und konstruiere ein $J_\mu \in \mathcal{BC}_s(X)'$ das die Bedingung an J erfüllt und $\|J_\mu\| \leq \|\mu\|$ gilt.
Sei $\mathcal{U} \in \Phi$. Dann ist

$$I \mapsto \mu(\cup_{U\in I} U) \qquad (I \in \mathcal{P}(\mathcal{U}))$$

eine beschränkte σ-additive Mengenfunktion auf $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Wir haben daher

$$\mu(\cup_{U\in I} U) = \sum_{U\in I} \mu(U) \qquad (I \in \mathcal{P}(\mathcal{U}))$$

und da $L_{\mathcal{U}} \cong l^\infty(\mathcal{U})$, können wir $J_{\mathcal{U}} \in (L_{\mathcal{U}})'$ definieren durch

$$J_{\mathcal{U}}(\sum_{U\in\mathcal{U}} a_U \xi_U) := \sum_{U\in\mathcal{U}} a_U \mu(U) \qquad (a \in l^\infty(\mathcal{U})).$$

Damit gilt offensichtlich

$$\|J_{\mathcal{U}}\| \leq \|\mu\|$$

Falls $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ aus Φ und $\mathcal{V}$ eine Verfeinerung ist, dann ist $L_{\mathcal{U}} \subset L_{\mathcal{V}}$. Jedes $V \in \mathcal{V}$ ist enthalten in einem eindeutigen $V* \in \mathcal{U}$. Jedes $f \in L_{\mathcal{U}}$ kann als $\sum_{U\in\mathcal{U}} a_U \xi_U$ dargestellt werden für ein $a \in l^\infty(\mathcal{U})$. Dann ist $f = \sum_{v\in\mathcal{V}} a_{V*}\xi_V$ und man erhält

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{U}}(f) &= \sum_{U\in\mathcal{U}} a_U \mu(U) = \sum_{U\in\mathcal{U}} a_U \mu(\cup_{V\in\mathcal{V}, V\subset U} V) \\ &= \sum_{U\in\mathcal{U}} a_U \sum_{V\in\mathcal{V}, V*=U} \mu(V) = \sum_{V\in\mathcal{V}} a_{V*}\mu(V) = J_{\mathcal{V}}(f). \end{aligned}$$

Je zwei Elemente von Φ haben eine gemeinsame Verfeinerung in Φ. Daher konnen wir eine K wertige Funktion auf $\sum\{L_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \Phi\}$ konstruieren, für welche jedes $J_{\mathcal{U}}$ die entsprechende Einschränkung von J ist.
Damit ist $\|J\| \leq \|\mu\|$. Da $\sum\{L_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \Phi\}$ dicht ist in $\mathcal{BC}_s(X)$, setzt J die $J_\mu \in \mathcal{BC}_s(X)'$ fort. Die geforderte Eigenschaft und $\|J_\mu\| \leq \|\mu\|$ sind damit klar.
Mit $\mu \mapsto J_\mu$ ist nun eine lineare Isometrie gegeben von $M^\sigma(X)$ nach $\mathcal{BC}_s(X)'$. Es fehlt nur mehr die Surjektivität.
Sei $J \in \mathcal{BC}_s(X)'$ und $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto K$ durch $\mu(A) = J(\xi_A)$ definiert($A \in \mathcal{B}(X)$). Dieses μ ist beschränkt und additiv. Es fehlt noch die σ-Additivität.

Sei $\{U_1, U_2, \dots\}$ eine clopen Partition von X: es genügt zu zeigen, dass $\mu(X) = \sum \mu(U_n)$. Es ist dann

$$a \mapsto J(\sum_n a_n \xi_{U_n}) \qquad (a \in l^\infty)$$

ein Element im Dual von l^∞. Nach Satz 3.57 von van der Put ist die Funktion $A \mapsto J(\sum_{n\in A} \xi_{U_n})$ σ- additiv. Insbesondere gilt

$$\mu(X) = J(\sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_{U_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} J(\xi_{U_n}) = \sum \mu(U_n). \quad \Box$$

Definition 4.48 *Mit $\mathcal{BC}_c(X)$ bezeichnen wir den Raum aller beschränkten Funktionen, sodaß für jede Einschränkung auf ein Kompaktum die Funktionen stetig sind.*

Diese Funktionen sind offenbar genau die bezüglich allen straffen Maßen integrierbaren Funktionen.

Satz 4.49 *$\mathcal{BC}_c(X)$ ist ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm. $\mathcal{BC}_c(X) = \mathcal{BC}(X)$ dann und nur dann wenn X ein k_0-Raum ist.*

Beweis:
Gilt offensichtlich. $\Box$

Satz 4.50 *Sei K nicht sphärisch vollständig. Jedes $f \in \mathcal{BC}_c(X)$ induziert ein $H_f \in M(X)'$ durch*

$$H_f := \int f d\mu \qquad [\mu \in M(X)].$$

Diese Abbildung $f \to H_f$ ist ein Banachraumisomorphismus

$$\mathcal{BC}_c(X) \cong M(X)'.$$

Die inverse Abbildung $M(X)' \to \mathcal{BC}_c(X)$ ordnet jedem $\phi \in M(X)'$ die Funktion $x \mapsto \phi(\delta_x)$ zu.

Beweis:
Es ist $\mathcal{BC}_c(X) \subset L_(\mu)$ für jedes $\mu \in M(X)$. Von jedem $f \in \mathcal{BC}_c(X)$ erhalten wir ein $H_f \in M(X)'$. Offensichtlich ist $f \mapsto H_f$ linear und $\|H_f\| \leq \|f\|$ für jedes $f \in \mathcal{BC}_c(X)$. Für jedes f gilt

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| = \sup_{x\in X} |H_f(\delta_x)| \leq \|H_f\|.$$

Also ist $f \mapsto H_f$ eine lineare Isometrie und zu zeigen ist noch Surjektivität und die Aussage über die Inverse.
Sei $\Phi \in M(X)'$. $f \in l^\infty(X)$ werde definiert als

$$f(x) := \Phi(\delta_x) \qquad (x \in X).$$

Wir sind fertig falls $f \in \mathcal{BC}_c(X)$ und $\Phi(\mu) = \int f d\mu$ für jedes $\mu \in M(X)$ mit kompaktem Träger.
Sei $Y \subset X$ kompakt. $C(Y)$ hat eine Orthonormalbasis I aus charakteristischen Funktionen von clopen Mengen. Da nun $C(Y) \cong c_0(I)$ ist, ist $C(Y)$ reflexiv.
Jedes $\nu \in M(Y)$ bestimmt ein $\nu_X \in M(X)$ und $\nu \mapsto \Phi(\nu_X)$ ist ein Element von $M(Y)'$. Wegen des natürlichen Isomorphismuses $C(Y) \cong M(X)'$ und der Reflexivität von $C(Y)$,, gibt es ein $g \in C(Y)$ mit

$$\Phi(\nu_X) = \int g d\nu \qquad [\nu \in M(Y)].$$

Wir wählen nun $\nu = \delta_y$ $(y \in Y)$ und erkennen, dass g die Einschränkung von f nach Y ist, womit $f \in \mathcal{BC}_c(X)$. Weiters ist, falls $\mu \in M(X)$ und $Tr(\mu) \subset Y$, dann gibt es ein $\nu \in M(Y)$, sodaß $\mu = \nu_X$. Schließlich gilt dann

$$\Phi(\mu) = \Phi(\nu_X) = \int_Y (f) d\nu = \int f d\mu.$$

□

Korollar 4.51 *Insbesondere für k_0-Räume ist $f \mapsto H_f$ ein Banachraumisomorphismus:*

$$\mathcal{BC}(X) \cong M(X)'$$

Kapitel 5

Der nichtarchimedische Spektralsatz

5.1 Banachalgebren

5.1.1 Definition und Spektrum

Das Spektrum eines beschränkten linearen Operators in der nichtarchimedischen Theorie, wird mit Hilfe von Banachalgebren definiert.

Definition 5.1 *Eine Algebra $\mathcal{A}$ über einem nichtarchimedischen Körper K ist ein Vektorraum und ein Ring mit einer assoziativen Ringmultiplikation, sodaß $a \mapsto xa$ stetig ist für alle $x, a \in \mathcal{A}$. Gilt $xy = yx$, dann heißt $\mathcal{A}$ eine kommutative Algebra.*
Gibt es eine Element 1 mit $1x = x$ für alle $x \in \mathcal{A}$, so spricht man von einer Algebra mit 1.
Eine lineare Abbildung T zwischen Algebren heißt multiplikativ, falls $T(xy) = T(x)T(y)$ gilt.
Eine normierte Algebra ist eine Algebra mit einer nichtarchimedischen Vektorraumsnorm $\|.\|$, sodaß für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Eine Banachalgebra ist eine vollständige normierte Algebra. Ein Banachalgebrenhomomorphismus ist ein Algebrenhomomorphismus T für den $\|T\| \leq 1$ gilt. Ist T isometrisch, so heißt er Banachalgebrenisomorphismus und die Banachalgebren isomorph.
Ideale in der Banachalgebra müssen stets auch Untervektorräume sein. Für eine Banachalgebra mit 1 sind dies genau die Ringideale von $\mathcal{A}$ als Ring aufgefaßt.

Ein typisches Beispiel einer Banachalgebra ist der Raum $L(F)$ der beschränkten Endomorphismen eines Banachraums F.
Auch die Räume $PC(X)$, $C_\infty(X)$ und $\mathcal{BC}(X)$ sind Banachalgebren.

Für ein weiteres Beispiel seien X, Y Banachräume mit $X \cong c_0(\alpha, K)$ und $Y \cong c_0(\beta, K)$, K ein vollständiger nichtarchimedischer Körper. Die beiden enthalten die Standartnormalbasen $\{e_j : j \in \alpha\}$ von X und $\{q_j : j \in \beta\}$ von Y. Jeder Operator $E \in L(X, Y)$ hat eine Matrixdarstellung $E_{j,k} := q_k^* E e_j$, wobei die $q_k^* \in Y'$ stetige Linearformen seien mit $q_k^*(q_j) = \delta_j^k$. Es gibt zu E also eine duale Abbildung. Die Transponierte Abbildung E^t wird nun erklärt, durch die Einschränkung $E^*_{|_Y}$, wobei Y in Y^* eingebettet ist.
Seien A, E aus $L(X)$ und $E^t = A$, dann gehören A und E zu dem Unterraum $L_0(X) := \{E \in L(X) : \forall \epsilon > 0, k \in \alpha$ sind $\{j : |e_k^* E e_j| > \epsilon\}$ und $\{j : |e_j^* E e_k| > \epsilon\}$ beide endlich $\}$ und $L_0(X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L(X)$.

Aus einer gegebenen normierten Algebra ohne 1, kann eine mit 1 konstruiert werden.

Definition 5.2 *Sei $\mathcal{A}$ eine normierte Algebra, dann wird der normierte Raum $K \oplus \mathcal{A}$ zu einer normierten Algebra $\mathcal{A}^+$ mit $1 := (1, 0)$, durch:*

$$(\alpha, a)(\beta, b) := (\alpha\beta, \beta a + \alpha b + ab) \qquad (\alpha, \beta \in K, a, b \in \mathcal{A}).$$

Die Abbildung $a \mapsto (0, a)$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf ein maximales beidseitiges Ringideal von $\mathcal{A}^+$.

Kommutativität und Vollständigkeit übertragen sich offenbar bei dieser Konstruktion.

Definition 5.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra. Das Spektrum von $\mathcal{A}$ $Sp(\mathcal{A})$ ist die Menge aller nichttrivialen Algebrenhomomorphismen $\mathcal{A} \to K$, mit der Teilraumtopologie bezüglich $K^{\mathcal{A}}$. Jedes $x \in \mathcal{A}$ induziert eine Abbildung $Gx : Sp(\mathcal{A}) \to K$ durch*

$$(Gx)(\phi) := \phi(x) \qquad (\phi \in Sp(\mathcal{A})).$$

Das Spektrum $Sp(x)$ eines Elementes $x \in \mathcal{A}$ ist der Abschluß vom Bild von Gx. In Analogie zum archimedischen Fall heißt $G : x \mapsto Gx$ Gelfand-Transformation.

$Eigenschaften$:
Gx ist eine beschränkte stetige Abbildung auf $Sp(\mathcal{A})$. Ihrem sup-Norm heißt Spektralnorm von x und wird bezeichnet mit $\|x\|_{sp}$.
Es ist $Sp(\mathcal{A})$ stets ein nulldimensionaler Hausdorffraum. $Sp(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $K^{\mathcal{A}}$. Hat $\mathcal{A}$ ein 1-Element, dann ist $Sp(A)$ bereits selbst ein abgeschlossener Teilraum von $K^{\mathcal{A}}$.
Jedes $x \in \mathcal{A}$ hat ein kompaktes Spektrum, wenn $Sp(\mathcal{A})$ kompakt ist. Hat jedes $x \in \mathcal{A}$ kompaktes Spektrum, dann ist $Sp(\mathcal{A})$ lokal-kompakt.
Die Topologie von $Sp(\mathcal{A})$ ist die gröbste, sodaß alle Gx stetig sind.
Für jedes $x \in \mathcal{A}$ ist

$$\sup\{|\alpha| : \alpha \in Sp(x)\} =: \|x\|_{sp} \leq \|x\|.$$

Es ist $\|.\|_{sp}$ eine Halbnorm und es gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für die Multiplikation.
Die Gleichung

$$(F\phi)(\alpha, a) := \alpha + \phi(a) \qquad (\phi \in Sp(\mathcal{A})) \cup \{0\}, \alpha \in K, a \in \mathcal{A})$$

definiert einen Homöomorphismus F von $Sp(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ auf $Sp(\mathcal{A}^+)$.
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ kommutative Banachalgebren und sei $T : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{C}$ ein Algebrenhomomorphismus, dessen Bild nicht in einem maximalen Ideal von $\mathcal{C}$ enthalten ist. Dann gibt es ein stetiges $GT : Sp(\mathcal{C}) \to Sp(\mathcal{A})$, sodaß gilt:

$$(GT)(\phi) = \phi \circ T \qquad (\phi \in Sp(\mathcal{C})).$$

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ kommutative Banachalgebren und $T : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{C}$ linear und multiplikativ, dann ist

$$\|Tx\|_{sp} \leq \|x\|_{sp} \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Satz 5.4 *Sei X ein lokal-kompakter null-dimensionaler Hausdorffraum. Dann gelten*

(a) Jedes $a \in X$ induziert $\hat{a} \in Sp(C_\infty(X))$ durch

$$\hat{a}(f) := f(a) \qquad [f \in C_\infty(X)].$$

(b) Zu jedem abgeschlossenen Ringideal I in $C_\infty(X)$ gibt es ein abgeschlossenes $Z \subset X$, sodaß $I = \{f \in C_\infty(X) : f \equiv 0 \text{ auf } Z\}$. Es ist insbesondere jedes abgeschlossene Ringideal ein Algebrenideal.

(c) Zu jedem maximalen Ringideal $M \subset C_\infty(X)$ gibt es ein eindeutiges $a \in X$, mit

$$M = \{f \in C_\infty(X) : f(a) = 0\}.$$

Jedes maximale Ringideal von $C_\infty(X)$ ist der Kern eines eindeutig bestimmten Homomorphismuses $C_\infty \mapsto K$.

(d) Die Abbildung $a \mapsto \hat{a}$ ist ein Homöomorphismus von X auf $Sp(C_\infty(X))$.

(e) Sei $f \in C_\infty(X)$. Ist X kompakt, dann ist $Sp(f) = f(X)$, andernfalls ist $Sp(f) = f(X) \cup \{0\}$. In jedem Fall ist $Sp(f) = \overline{f(X)}$ und $\|f\| = \|f\|_{sp}$.

Beweis:
(a) ist trivial.
Für (b) sei $\mathcal{U} := \{U : U \subset X, \xi_U \in I\}$. Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, dann ist $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$, da $\xi_{U_1 \cup U_2} = \xi_{U_1} + \xi_{U_2} - \xi_{U_1}\xi_{U_2}$. Also ist $\mathcal{U}$ abgeschlossen unter der Bildung endlicher Vereinigungen und $Z := \cap\{X \backslash U : U \in \mathcal{U}\}$ ist eine abgeschlossene Menge.

Um zu zeigen, dass $I \subset \{f : f = 0 \text{ auf } Z\}$ genügt es zu zeigen, dass $|f| \leq \epsilon$ auf Z gilt, für alle $f \in I, \epsilon > 0$. Für jedes solche f sei U die offene kompakte Menge $\{x : |f(x)| > \epsilon\}$. Wir definieren $g : X \mapsto K$ durch:

$$g := \begin{cases} \frac{1}{f} & \text{auf } U, \\ 0 & \text{auf } X \backslash U . \end{cases}$$

Damit ist $g \in C_\infty(X)$ und $\xi_U = fg \in I$. Daher ist $Z \subset X\backslash U$ und $|f| \leq \epsilon$ auf Z. Sei umgekehrt $f \in C_\infty(X), f = 0$ auf Z. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $U_n := \{x : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Dann ist $U_n \subset X\backslash Z = \cup\mathcal{U}$. Da die U_n kompakt sind, gibt es eine endliche Teilüberdeckung und U_n wird schon durch ein einziges $U \in \mathcal{U}$ überdeckt. Damit ist $\xi_{U_n} = \xi_{U_n}\xi_U \in I$. Damit ist $f = \lim f\xi_{U_n} \in I$.
Für (c) sei M ein maximales Ringideal. Es genügt zu zeigen, dass es ein $a \in X$ gibt, für das $M \subset \{f : f(a) = 0\}$ gilt. Angenommen es gäbe kein solches a. Dann gibt es für jedes a ein $f_a \in M$ mit $f_a(a) = 1$. Die Mengen $U_a := \{x : |f(x)| = 1\}$ sind offen und kompakt und $\xi_V \in f_a C_\infty(X) \subset M$ gilt für jede offene und kompakte Menge $V \subset U_a$. Da jede offene und kompakte Menge enthalten ist in der Vereinigung von endlich vielen U_a, ist auch $g\xi_V \in M$ für jedes $g \in C_\infty(X)$ und jedes offene und kompakte V.
Sei $g \in C_\infty(X), g \notin M$. Dann gibt es $g_1, g_2 \in C_\infty(X)$, sodaß $g = g_1 g_2$ und $\{x : g(x) \neq 0\} = \{x : g_1(x) \neq 0\} = \{x : g_2(x) \neq 0\}$. Da M maximal ist, gibt es $f \in M$ und $h \in C_\infty(X)$ mit $g_1 = f + hg$. Sei $V := \{x : |h(x)g_2(x)| \geq 1\}$. Dann ist $g\xi_V \in M$. Für $x \notin V$ ist entweder $g_1(x) = 0$ oder $|h(x)g(x)| < |g_1(x)|$. In jedem Fall ist $|f(x)| = |g_1(x)|$. Wir definieren nun $j : X \to K$ durch

$$j(x) := \begin{cases} \frac{g(x)}{f(x)}\xi_{X\backslash V}(x) & \text{falls } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{falls } g(x) = 0. \end{cases}$$

Die Einschränkung von j auf $\{x : g(x) \neq 0\}$ ist stetig und $|j| \leq |g_2|$, daher ist $j \in C_\infty(X)$. Nun ist $g\xi_{X\backslash V} = fj \in M$. Wir folgern, dass $g = g\xi_V + g\xi_{X\backslash V} \in M$. Dies ist aber ein Widerspruch.
(d) und (e) folgen leicht aus den obigen. □

Korollar 5.5 *Sei X ein lokalkompakter nulldimensionaler Hausdorffraum. $Sp(PC(X))$ ist homöomorph zu X^ζ.*

Beweis:
$PC(X) \cong C(X^\zeta)$. □

Korollar 5.6 *Sei X ein lokal-kompakter nulldimensionaler Hausdorffraum. Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller maximalen Ringideale von $C_\infty(X)$. Für $f \in C_\infty(X)$ setze $f^0 := \{M \in \mathcal{M} : f \notin M\}$. Durch die Subbasis gebildet durch Mengen der Form $\{f^0 : f \in C_\infty(X)\}$ wird eine Topologie auf $\mathcal{M}$ gegeben. Mit dieser Topologie auf $\mathcal{M}$ ist $a \mapsto \hat{a}^{-1}(0)$ ein Homöomorphismus von X nach $\mathcal{M}$.*

Beweis:
Die Abbildung $a \mapsto \hat{a}^{-1}(0)$ ist injektiv und surjektiv. Sie ist ein Homöomorphismus weil $\{a : \hat{a}^{-1}(0) \in f^0\} = \{a : f(a) = 0\}$. □

Daraus folgt unmittelbar, dass solche X eindeutig durch ihre $C_\infty(X)$-Algebren bestimmt sind. Eine ähnliche Aussage wird in der archimedischen Topologie durch die Stone-Cech-Kompaktifizierung gewonnen.

5.1.2 C-Algebren

Definition 5.7 *Eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ heißt eine C-Algebra, wenn es einen lokal-kompakten Hausdorffraum X gibt, mit $\mathcal{A} \cong C_\infty(X)$.*

X ist kompakt, dann und nur dann wenn $\mathcal{A}$ ein 1-Element hat.

Korollar 5.8 *Ist $\mathcal{A}$ eine C-Algebra, dann ist $\mathcal{A} \cong C_\infty(Sp(\mathcal{A}))$.*

Korollar 5.9 *Jede multiplikative lineare Abbildung einer Banachalgebra in eine C-Algebra ist ein Banachalgebrenhomomorphismus.*

Satz 5.10 *Sei $a \in \mathcal{A}$, dann ist $Sp(a)$ kompakt und es gibt einen Isomorphismus*

$$T : \overline{K[a]} \cong C_\infty(Sp(a)\backslash\{0\}),$$

für welchen Ta die identische Abbildung auf $Sp(a)\backslash\{0\}$ ist.
Insbesondere ist $\overline{K[a]}$ eine C-Algebra. Hat $\mathcal{A}$ ein 1-Element und a ist invertierbar in $\mathcal{A}$, dann ist auch $a^{-1} \in \overline{K[a]}$.

Beweis:
Wir dürfen annehmen, dass $\mathcal{A} = C_\infty(X)$ für einen lokalkompakten Hausdorffraum X. Sei nun $A := (Sp(a)) \cup \{0\} = a(X) \cup \{0\}$. $C_0(A)$ bezeichne $\{g \in C(A) : g(0) = 0\}$. Dann ist $C_0(A) \cong C_\infty(Sp(a))\backslash\{0\})$. Ist $g \in C_0(A)$, dann ist $g \circ a \in C_\infty(X)$ und $g(A) = g \circ a(X) \cup \{0\}$. Daher ist $\|g\| = \|g \circ a\|$ und die Abbildung $g \mapsto g \circ a$ ist ein isometrischer Algebrenhomomorphismus von $C_0(A)$ auf eine abgeschlossene Unteralgebra $\mathcal{C}$ von $C_\infty(X)$. Das inverse Bild von $\overline{K[a]}$ unter dieser Abbildung ist der Abschluß der Menge aller Polynomfunktionen ohne konstanten Term in $C_0(A)$.
Wir sind fertig, wenn die Polynome dicht in $C_0(A)$ liegen. Sei also $g \in C_0(A), \epsilon > 0$. Da A kompakt ist, gibt es nach dem Satz über die Dichtheit der Polynome in $C(X)$ von Kaplansky eine Polynomfunktion P auf A mit $\|g - P\| \leq \epsilon$. Es gilt also $|P(0)| = |g(0) - P(0)| \leq \epsilon$. Nun ist $P - P(0)$ ein Polynom ohne konstanten Term und $\|g - (P - P(0))\| \leq \epsilon$. Damit folgt die Behauptung. $\Box$

Satz 5.11 *Eine C-Algebra ist vom abzählbaren Typ, dann und nur dann wenn es ein $a \in \mathcal{A}$ gibt, mit $\mathcal{A} = \overline{K[a]}$.*

Beweis:
Es ist $\overline{K[a]}$ vom abzählbaren Typ. Sei X ein lokalkompakter nulldimensionaler Hausdorffraum. und sei $C_\infty(X)$ vom abzählbaren Typ. Dann gibt es $f_1, f_2, \cdots \in C_\infty(X)$, sodass die lineare Hülle von $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht liegt in $C_\infty(X)$. Für jedes n sei X_n die kompakte Menge $f_n(X) \cup \{0\}$ und p_n die kannonische Surjektion $\prod X_m \mapsto X_n$. Dann gibt es ein eindeutiges stetiges

$f : X \mapsto \prod X_m$ mit $f_n = p_n \circ f$ für jedes n. Die Menge $\prod X_m$ ist kompakt und ultrametrisierbar und somit existiert ein Homöomorphismus g von $\prod X_m$ auf eine kompakte Teilmenge von K. Wir wählen g so, dass $g(0, 0, \dots) = 0$. Dann ist $g \circ f \in C_\infty(X)$. Für jedes n gilt $p_n \circ g^{-1} \in C(g(\prod X_m))$ und $p_n \circ g^{-1}(0) = 0$. Wendet man den obigen Satz auf die C-Algebra $C(\prod X_m)$ sieht man, dass $p_n \in \overline{K[g]} \subset C(\prod X_m)$, sodass $f_n = p_n \circ f \in \overline{K[g \circ f]} \subset C_\infty(X)$ und damit $C_\infty(X) = \overline{K[g \circ f]}$. $\square$

Satz 5.12 (van der Put) *Die folgenden Bedingungen an eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ sind äquivalent:*

(a) $\mathcal{A}$ ist eine C-Algebra.

(b) $\mathcal{A}^+$ ist eine C-Algebra.

(c) Die lineare Hülle von $\{e \in \mathcal{A} : e = e^2, \|e\| \leq 1\}$ ist dicht in $\mathcal{A}$.

(d) Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist $\overline{K[a]}$ eine C-Algebra.

(e) $\mathcal{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die die $\{a \in \mathcal{A} : \overline{K[a]}$ ist eine C-Algebra $\}$ enthält.

Beweis:
Aus (d) folgt sicher (e) und aus (a) folgt (d) ist eine Konsequenz von des vorletzten Satzes.
$(b) \Rightarrow (a)$:
$\mathcal{A}$ ist isomorph zu einem maximalen Ideal in $\mathcal{A}^+$. Es gibt ein Kompaktum X mit $\mathcal{A}^+ \cong C_\infty(X)$. Es gibt nun ein $a \in X$ mit $\mathcal{A} \cong \{f \in C(X) : f(a) = 0\} \cong C_\infty(X \backslash \{a\})$.
$(e) \Rightarrow (c)$:
Für jeden $C_\infty(X)$ bilden, nach den Bemerkungen im Kapitel über Topologie, die charakteristischen Funktionen offener kompakter Mengen einen dichten linearen Teilraum. Daher enthält die abgeschlossene lineare Hülle von $\{e \in \mathcal{A} : e = e^2, \|e\| \leq 1\}$ die Menge $\{a \in \mathcal{A} :\ K[a]$ ist eine C-Algebra $\}$. Das Produkt von zwei idempotenten Elementen mit Norm ≤ 1 ist wieder ein ebensolches idempotentes Element. Daher ist diese abgeschlossene lineare Hülle eine abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{A}$. Damit kann sie aber nur $\mathcal{A}$ selbst sein.
$(c) \Rightarrow (b)$:
Sei R die Menge aller idempotenten Elemente von $\mathcal{A}^+$ mit Norm ≤ 1. Sei $e \in R$ und $e \neq 0$, dann ist $\|e\| = 1$, denn $\|e\| = \|e^2\| \leq \|e\|^2$. Die lineare Hülle von R ist dicht in $\mathcal{A}^+$. R ist ein boolescher Ring unter der Addition $\triangle$ und der Multiplikation $\cdot$, welche man folgendermaßen definiert:

$$e_1 \triangle e_2 := e_1 + e_2 - e_1 e_2 \qquad (e_1, e_2 \in R)$$

$$e_1 \cdot e_2 := e_1 e_2 \qquad (e_1, e_2 \in R).$$

Nach den Aussagen des Topologiekapitels gibt es einen kompakten nulldimensionalen Hausdorffraum X und einen injektiven Homomorphismus T von R auf die Menge der charakteristischen Funktionen von clopen-Mengen. Es ist insbesondere $T(e_1+e_2) = Te_1+Te_2$ falls $e_1e_2 = 0$. Induktiv läßt sich diese Gleichheit auf n-Summanden aus dehnen, wenn paarweise $e_ie_j = 0$ für $i \neq j$ gilt.
Seien nun $e_1 + \ldots e_n \in R$ und $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$, dann wollen wir zeigen

$$\| \sum_i \alpha_i e_i \| = \| \sum_i \alpha_i T e_i \|.$$

Für alle $I \subset \{1, \ldots, n\}$ setzen wir

$$e_I := \prod_{i \in I} e_i \prod_{j \in I} (e - e_j,$$

wobei e das Einselement von $\mathcal{A}^+$ bezeichne. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $I \subset \{1, \ldots, n\}$ sei nun $\delta_I^i := 1$ für $i \in I$ und $\delta_I^i = 0$ für $i \notin I$. Für alle i und I gilt $e_ie_I = \delta_I^i e_I$. Für jedes i ist $e_i = \sum_I \delta_I^i e_I$ und daher $Te_i = \sum_I \delta_I^i Te_I$. Daher ist

$$\| \sum_i \alpha_i T e_i \| = \| \sum_{i,I} \alpha_i \delta_I^i T e_I \| \leq \max_I \| (\sum_i \alpha_i \delta_I^i) T e_i \| =$$

$$\max_I \| (\sum_i \alpha_i \delta_I^i) e_I \| = \max_I \| (\sum_i \alpha_i e_i) e_I \| \leq \max_I \| \sum_i \alpha_i e_i \| \| e_i \| \leq \| \sum_i \alpha_i e_i \|.$$

Analog beweist man $\| \sum \alpha_i e_i \| \leq \| \sum_i \alpha_i T e_i \|$. Damit ist die Isometrie gezeigt. Es definiert also $\sum \alpha_i e_i \mapsto \sum \alpha_i T e_i$ eine lineare multiplikative Isometrie von einem dichten Teilraum von $\mathcal{A}^+$ auf einen dichten Teilraum von $C(X)$. Also ist $\mathcal{A}^+ \cong C(X)$. $\square$

Korollar 5.13 *Jede abgeschlossene Unteralgebra einer C-Algebra ist eine C-Algebra. Jeder Quotient einer C-Algebra nach einem abgeschlossenen Ideal ist eine C-Algebra.*

Beweis:
Abgeschlossene Unteralgebren haben Eigenschaft (d) des vorigen Satzes, Quotienten die Eigenschaft (c). $\square$

Korollar 5.14 *Jede abgeschlossene Unteralgebra einer C-Algebra hat ein Orthokomplement.*

Beweis:
Sei $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_\infty(X)$. Da $\mathcal{A}$ eine C-Algebra ist hat sie eine OGB $\mathcal{W}$ bestehend aus idempotenten Elementen. Diese Basis kann nach dem Korollar aus dem Satz (3.57) von van der Put zu einer OGB $\mathcal{W}_0$ von $C_\infty(X)$ fortgesetzt werden. Die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathcal{W}_0 \backslash \mathcal{W}$ ist ein orthogonales Komplement von $\mathcal{A}$. $\square$
Der folgende sehr wichtige Satz ist ein Analogon zum Satz von Stone-Weierstraß.

Satz 5.15 (Kaplansky) *Sei X ein lokal-kompakter nulldimensionaler Hausdorffraum und $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_\infty(X)$, sodaß es für je zwei verschiedene Punkte x und y von X ein $f \in \mathcal{A}$ gibt, mit $f(x) = 0, f(y) = 1$. Dann ist $\mathcal{A} \cong C_\infty(X)$.*

Beweis:
Sei $\mathcal{R} := \{U \in \mathcal{B}_c(X) : \xi_U \in \mathcal{A}\}$. $\mathcal{A}$ ist die abgeschlossene lineare Hülle von $\{\xi_U : U \in \mathcal{R}\}$. Dann überdeckt $\mathcal{R}$ X und trennt die Punkte von X. Damit ist $\mathcal{R} = \mathcal{B}_c(X)$ und $\mathcal{A} = C_\infty(X)$. □

5.2 Spektralsatz

5.2.1 Vorbereitungen

Im Folgenden bezeichne K stets einen lokalkompakten nichtarchimedischen Körper, wenn nichts Anderes gesagt wird.

Definition 5.16 *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra über einem vollständigen Körper K. Eine Abbildung $a \mapsto a^t \quad a, a^t \in \mathcal{A}$ heißt Transposition, falls für $a, b \in \mathcal{A}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $(a + b)^t = a^t + b^t$.

(b) $(\lambda a)^t = \lambda a^t$.

(c) $(ab)^t = b^t a^t$.

(d) $(a^t)^t = a^{tt} = a$.

Definition 5.17 *Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über K, welche für $a \in \mathcal{A}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) $\mathcal{A}$ ist eine Banachalgebra.

(b) Auf $\mathcal{A}$ gibt es eine Transposition.

(c) $\|a^t a\| = \|a\|^2$.
Dann nennt man $\mathcal{A}$ eine E-Algebra.
Ist die letzte Bedingung nicht erfüllt, dann nennt man $\mathcal{A}$ eine T-Algebra.
Gilt statt der letzten Bedingung:

(d) $\|a^t a\| = \|a^2\|$.
Dann nennt man $\mathcal{A}$ eine S-Algebra.

Anmerkung:
In einer E-Algebra gilt stets $\|a^t\| = \|a\|$.
Anmerkung:
Für jeden Banachraum H ist $L(H)$ eine T-Algebra. Jede C-Algebra ist eine E-Algebra.

Definition 5.18 *Es bezeichne für eine Menge J im folgenden $sp_K\{a_1 \cdot \ldots, a_n : a_1 \cdot \ldots, a_n \in J, n \in \mathbb{N}\}$ die frei von der Menge J erzeugte Algebra.*

Lemma 5.19 *Auf der frei von J erzeugten Algebra $\mathcal{A}$ gibt es eine Norm, mit $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$.*

Beweis:
Sei $w := a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$ ein Wort in $\mathcal{A}$. Sei nun für jedes Wort $\|w\| = 1$ und für Summen von Wörtern $v := c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m$ mit $c_i \in K$, sei $\|v\| := \max_{1 \leq j \leq m} |c_j|$. $\square$

Definition 5.20 *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ zwei E-Algebren über demselben Körper K. Ein Algebrenhomomorphismus $T : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{C}$ heißt t-Darstellung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}$, falls $T_{a^t} = (T_a)^t$ für alle $a \in \mathcal{A}$.*

Definition 5.21 *Der Schnitt über die Kerne aller t-Darstellungen von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}$ heißt reduzierendes Ideal von $\mathcal{A}$ und wird mit Υ bezeichnet.*

Definition 5.22 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banach-T-algebra und $\mathcal{A}^+$ ihr Gelfand-Raum. Es bezeichne $\hat{\mathcal{A}}$ den abgeschlossenen Teilraum von $\mathcal{A}^+$ der aus jenen $\phi \in \mathcal{A}^+$ besteht, für die $\phi(a^t) = \phi(a)$ gilt, für alle $a \in \mathcal{A}$. Diese ϕ nennt man symmetrisch.*

Satz 5.23 *Das reduzierende Ideal Υ von $\mathcal{A}$ besteht aus jenen $a \in \mathcal{A}$, sodaß $\hat{a}(\phi) = 0$ für alle $\phi \in \hat{\mathcal{A}}$. Die Gleichung $F(\pi(a)) = \hat{a}_{|_{\hat{\mathcal{A}}}}$ bestimmt einen isometrischen t-Isomorphismus $F : \mathcal{A}_t \mapsto C_\infty(\hat{\mathcal{A}}, K)$, falls K ein lokalkompakter Körper ist.*

Beweis:
Es gilt $\sup_{\phi \in \hat{\mathcal{A}}} |\hat{a}(\phi)| \leq \|\pi(a)\|_t$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Wir wählen eine t-Darstellung T von $\mathcal{A}$ und setzen $B := \overline{im(T)}$, wobei der Abschlß in der Norm zu bilden ist. Daher ist B eine kommutative E-Algebra.
Um den Beweis zu beenden benötigen wir noch den

Satz 5.24 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative E-Algebra:*

$$\mathcal{A} = \overline{(sp_k\{\prod_{i=1}^{m} a_i^{n_i} : n_i \in \mathbb{N}, a_i \in J, a^t = a, m \in \mathbb{N}\})}.$$

Dann ist $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^+$. Weiters ist die Gelfand- Transformation $a \mapsto \hat{a}$ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $C_\infty(\hat{\mathcal{A}}, K)$, wobei K ein lokal-kompakter Körper ist.

Beweis:
Es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$ ist, da $\mathcal{A}$ isomorph ist zu $C_\infty(Sp(\mathcal{A}), K)$, wobei $Sp(\mathcal{A}) = \hat{\mathcal{A}}$. Ist $a^t = a \in \mathcal{A}$ und $\phi \in \mathcal{A}^+$, dann ist $\phi(a^t) = \phi(a) \in K$. Ist $1 \notin \mathcal{A}$, dann setzt sich ϕ zu einem t-homomorphismus der S-Algebra $\mathcal{A}_1$ fort, die man durch hinzufügen der 1 zu $\mathcal{A}$ erhält, da man z.B. $\mathcal{A} \oplus K$ betrachten kann.
Da K lokal-kompakt ist, ist $\mathcal{A}_1$ isomorph zu $C(\alpha Y, K)$ wobei $\alpha Y = Sp(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von $Sp(\mathcal{A})$ bedeutet. Dann ist $\|a\| = \sup_{\chi \in \mathcal{A}^+} |\chi(a)|$. Sei $\phi(a) = r \in K, b := a + z1$, wobei $z \in K$. Aus $\|\phi\| \leq 1$ folgt $|\phi(b^t b)|_p = |(r+z)^2|_p \leq \|b^2\|$ und $\|b^2\| = \|a^t a + z a^t + z a + z^2 1\| \leq \max(\|a^2\|, |z|_p\|a\|, |z|_p^2)$. Dann gibt es ein $0 < \epsilon < (\|a^2\|)^{\frac{1}{2}}$, sodaß für jedes $|z| < \epsilon : |\phi(b^t b)|_p \leq \|a^2\|$ gilt und damit ϕ eine stetige Fortsetzung auf $\mathcal{A}_1$ hat.
Sei $\phi \in \mathcal{A}^+$ und $a0b+c \in \mathcal{A}$ mit $b^t = b$ und $c^t = -c$, dann ist $\phi(a^t) = \phi(b) - \phi(c)$. Ist $\phi(a^t = -\phi(a)$ für jedes $a \in \mathcal{A}$, dann ist $\phi(b) = 0$ für jedes $b = b^t \in \mathcal{A}$. Ist $\phi(a^t) = \phi(a)$ für jedes $a \in \mathcal{A}$, dann ist $\phi(c) = 0$ für jedes $c^t = -c \in \mathcal{A}$. Transponieren ist eine stetige Abbildung in $\mathcal{A}$.
Sei nun $\phi \in \mathcal{A}^+$ und $\phi \neq 0$. Dann gilt für jedes $\phi(a) \neq 0$, dass $\phi(a^t) \neq 0$, da $a^{tt} = a$. Daher ist $\phi(a^t) = \lambda_\phi \phi(a)$ für jedes $a \in \mathcal{A}$, für welches $\phi(a) \neq 0$, denn $coker_K \phi$ ist eindimensional für $\lambda_\phi \neq 0$. Es gilt $\phi((a^t a)^n) = \lambda_\phi^n \phi(a)^{2n}$. Da ja $\|a^t a\| = \|a^2\|, a^{tt} = a$ und ϕ ein multiplikatives stetiges Funktional ist, gilt $|\lambda_\phi|_p = 1$. Andrerseits ist

$$\lambda_\phi \phi(ab) = \phi(a^t b^t) = \phi(a^t)\phi(b^t) = \lambda_\phi^2 \phi(a)\phi(b) = \lambda_\phi \phi(ab),$$

daher ist $\lambda_\phi = 1$, da es $a, b \in \mathcal{A}$ gibt, mit $\phi(ab) \neq 0$.
Damit gilt mit $\phi^t(a) := \phi(a^t)$, dass $\phi^t = \phi$ und damit $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^+$. □
Beweis(Fortsetzung):
Es gibt ein $\psi \in \hat{B}$, sodaß $|\psi(T_a)| = \|T_a\|$, da $\psi' : a \mapsto \psi(T_a) \in \hat{\mathcal{A}}$ und weiters $\|T_a\| = |\psi'(a)| \leq \sup_{\phi \in \hat{\mathcal{A}}} |\hat{a}(\phi)|$, somit ist $\|\pi(a)\|_t \leq \sup_{\phi \in \hat{\mathcal{A}}} |\hat{a}(\phi)|$. Daher ist $\|\pi(a)\|_t = \sup_{\phi \in \hat{\mathcal{A}}} |\hat{a}(\phi)|$ und die Abbildung F definiert einen isometrischen t-Isomorphismus von $\mathcal{A}_t$ in $C_\infty(Sp(A), K)$. Das Bild von $\mathcal{A}^t$ ist eine punktetrennende T-Subalgebra, die die Punkte von $\hat{\mathcal{A}}$ trennt, da der Satz (3.60) von Kaplansky gilt $\overline{im(F)} = C_\infty(\hat{\mathcal{A}}, K)$. □

Definition 5.25 *Sei $H = c_0(\alpha, K)$ und K ein vollständiger Körper, Y ein Banachraum über K. Dann wird die starke Operatortopologie auf $L(H, Y)$ definiert, durch Angabe der Basis $V_{\epsilon; E; x_1, \ldots, x_n} := \{Z \in L(H, Y) : \sup_{1 \leq j \leq n} \|(E - Z)x_j\|_Y < \epsilon\}$ mit $\epsilon > 0, E \in L(H, Y), x_j \in H; j = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}$.*

5.2.2 Projektionswertige Maße

Definition 5.26 *Sei X ein topologischer Raum. Ein H-projektionswertiges Maß auf einem Mengenring U von Teilmengen von X ist eine Funktion P auf U, die jedem $A \in U$ eine Projektion $P(A)$ auf H zuordnet und dabei die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) $P(X) = 1_H$.

(b) Zu jeder Folge paarweise disjunkter Mengen $A_n \in U$ gibt es Projektionen $P(A_n)$ mit $P(A_i)P(A_j) = 0$ für $i \neq j$ und $P(\cup_{n=1}^k A_n) = \sum_{n=1}^k P(A_n)$.

(c) Ist $B \subset U$ schrumpfend und $\cap_{A \in B} A = \emptyset$ dann ist $\lim_{A \in B} P(A) = 0$, wobei die Konvergenz in der starken Operatortopologie gilt und unbedingt ist.

Definition 5.27 *Sei P ein H-projektionswertiges Maß auf X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt P-Nullmenge, falls es ein $B \in U$ gibt, sodaß $A \subset B$ und $P(B) = 0$. A heißt P-meßbar, falls $A \triangle B$ eine P-Nullmenge ist. Eine Funktion $f : X \mapsto K$ heißt P-meßbar, falls $f^{-1}(D)$ immer P-meßbar ist, für jedes $D \in \mathcal{B}f(K)$, wenn $\mathcal{B}fK$ die Algebra der borelschen Teilmengen auf $f(X) \subset K$ ist. Die Funktion heißt essentiell beschränkt, wenn es ein $k > 0$ gibt, sodaß $\{x \in X : |f(x)| > k\}$ eine P-Nullmenge ist. $\|f\|_\infty$ bezeichen die kleinste Zahl k, für die das gilt. Dann sei $F := sp_K\{\chi_B : B \in L\}$ der Raum der Treppenfunktionen und die Vervollständigung von F bezüglich $\|.\|_\infty$ heiße $L_\infty(P)$. Dieser Raum ist eine Banachalgebra unter punktweiser Multiplikation.*

Korollar 5.28 *Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $I : F \to L(H)$ für die gilt:*

(a) $I(\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{B_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(B_i)$ *wobei* $n \in \mathbb{N}, B_i \in L, \lambda_i \in K$.

(b) Wegen $\|I(f)\| = \|f\|_\infty$ setzt sich I zu einer linearen Isometrie(gleich bezeichnet) von $L_\infty(P)$ auf $L(H)$ fort.

(c) Sei $f \in L_\infty(P)$ dann heißt der durch $\int_X f(x)P(dx) := I(f)$ definierte Operator in $L(H)$ das spektrale Integral von f.

Beweis:
Man nehme Punkt (a) als Definition. Die Fortsetzbarkeit und Eindeutigkeit folgt sofort. □

Satz 5.29 *Die Eigenschaften des Spektralintegrals sind:*

(a) Es gilt $\int_X f(x)P(dx) = \int_X g(x)P(dx)$ *dann und nur dann, wenn* f *und* g *sich nur auf einer* P*-Nullmenge unterscheiden.*

(b) $\int_X f(x)P(dx)$ *ist linear in* f.

(c) $\int_X f(x)g(x)P(dx) = (\int_X f(x)P(dx))(\int_X g(x)P(dx))$ *für alle* $f, g \in L_\infty(P)$.

(d)

$$\| \int_X f(x)P(dx)| = \|f\|_\infty.$$

(e) Ist $A \in U$, *dann ist* $\int_X \chi_A(x)P(dx) = P(A)$ *und insbesondere* $\int_X P(dx) = P(X) = 1_H$.

(f) Für jedes Paar $\xi \in H$ *und* $\eta^* \in H^*$ *sei* $\mu_{\xi,\eta}(A) := \eta^*(P(A)\xi)$ *für* $A \in U$. *Ist* $E = \int_X f(x)P(dx)$, *dann ist* $\eta^*(E\xi) = \int_X f(x)\mu_{\xi,\eta}(dx)$.

(g) Ist $A \in U$, *dann kommutiert* $P(A)$ *mit* $\int_X f(x)P(dx)$, *falls* $P(A) \in L_0(H)$ *für jedes* $A \in U$, *wobei* $e^i := e_i^*$, *sodaß* $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

(h)

$$[e^i(\int_X f(x)P(dx)e_j]^t = e^j(\int_X f(x)P(dx)e_i).$$

Beweis:
$(a) - (g)$ folgen aus der Integraldefinition. (h) gilt wegen:

$$e^i(P(A)e_j) = pr_{Ke_i \cap imP(A)e_j} = \delta^i_j pr_{imP(A)e_i} = e^j(P(A)e_i)$$

wobei die Projektoren pr_Z auf bestimmte abgeschlossene Unterräume Z so gewählt werden, dass sie die obige Gleichung erfüllen. Dies ist zum Beispiel möglich indem man den Isomorphismus des Banachraums H zu einem $c_0(\alpha, K)$ und die orthogonalen Projektionen auf die Komponenten verwendet. Die Eigenschaften folgen nun aus der Integralkonstruktion. Da $P(A)^t = P(A)$ für alle $A \in U$ gilt, falls $P(A) \in L_0(H)$ für jedes $A \in U$, ist $[\int_X f(x)P(dx)]^t = \int_X f(x)P^t(dx)$ und daher $\int_X f(x)P(dx)$ ein symmetrischer Operator. □

Definition 5.30 *Sei* P *ein* H *Projektionswertiges Maß, dann heißt* P *regulär, falls* $P(A) = \sup\{P(C) : C \subset A, C \quad kompakt\}$ *für jedes* $A \in \mathcal{B}f(X)$, *wobei* sup *den kleinsten abgeschlossenen linearen Teilraum von* H *bezeichnet, der* $imP(C)$ *enthält(und auf diesen gibt es eine Projektion).*

Korollar 5.31 *Für ein reguläres H-projektionswertiges Maß gilt*

$P(A) = \inf\{P(U) : U$ *ist offen und* $U \supset A\} = I - \sup\{P(C) : C \subset X/A$ *und* C *ist kompakt*$\}$

und es entspricht das Infimum der Projektion auf $\cap_{U \subset A, U\, offen} P(U)H$.

Beweis:
Folgt direkt aus der Definition.□

Definition 5.32 *Ein Maß* $\mu : \mathcal{B}f(X) \mapsto K$ *heißt regulär, wenn für jedes* $\epsilon > 0$ *und jedes* $A \in \mathcal{B}f(X)$ *mit* $\|A\|_\mu < \infty$ *eine kompakte Teilmenge* $C \subset A$ *existiert, sodaß* $\|A \backslash C\|_\mu < \epsilon$. *Mit* $\|P(X)\| = 1$ *gilt* $\|\mu_{\xi,\eta} = \|\xi\|_H \|\eta\|_{H'}$.

Lemma 5.33 *Für den Raum H über K sind Maße der Form $\mu_{\xi,\eta}$ auf einem lokalkompakten Raum X straff, für alle ξ, η in einer punktetrennenden Teilmenge $J \subset H \hookrightarrow H'$ dann und nur dann, falls P definiert ist auf $\mathcal{B}f(X)$.*
P ist regulär, dann und nur dann, falls $\mu_{\xi,\eta}$ regulär ist für alle $\xi, \eta \in J$.

Beweis:
Die beiden Aussagen folgen aus dem Korollar zur Definition der H-Projektionswertigen Maße. □
Wir können uns nun auf Maße der Form $\mu_{\xi,\xi}$ einschränken, da $\binom{+}{-} 2\mu_{\xi,\eta} = \mu_{\xi\binom{+}{-}\eta, \xi\binom{+}{-}\eta} - \mu_{\xi,\xi} - \mu_{\eta,\eta}$.

Definition 5.34 *Wir bezeichen als TrP eines H-projektionswertigen Maßes P auf X die abgeschlossene Menge aller $x \in X$, sodass $P(U) \neq 0$ für jede offene Umgebung U von x.*

Satz 5.35 *Sei X ein lokalkompakter total-unzusammenhängender Hausdorffraum und H ein Banachraum über K. Ist $T : C_\infty(X, K) \to L_0(H)$ eine lineare stetige Abbildung mit:*

(a) $T_{fg} = T_f T_g$ *für* $f, g \in C_\infty(X, K)$,

(b) $T_1 = I$ *für kompaktes* X,

(c) $T_f^t = T_f = T_{f^t}$ *falls zwischen kommutativen E-Algebren abgebildet wird und* $X = Sp(A)$.
Dann ist $f \mapsto \eta^*(T_f \xi) := \mu_{\tilde{\xi,\eta}}(f)$ *für* $\xi \in H$ *und* $\eta^* \in H^*$ *ein stetiges K-lineares Fuktional auf* $C_\infty(X, K)$.

Beweis:
Aus der Definition folgt $\|T\| \leq 1$ und $T_{f^n} = T_f^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist X lokalkompakt aber nicht kompakt, dann bezeichne X_∞ die Alexandroff-Kompaktifizierung und $f \in C(X_\infty, K)$ kann eindeutig geschrieben werden als $f = \lambda 1_{X_\infty} + g$ mit $g \in C_\infty(X, K)$. Wir können also T zu einer stetigen linearen Abbildung $T' : C(X_\infty, K) \to L(H)$ fortsetzen, durch $T'f = Tg + \lambda I$. □

5.2.3 Darstellungssatz

Satz 5.36 *In der Situation des obigen Satzes gilt nach dem Satz über die Isomorphie von straffen Maßen auf Kompakta und stetigen linearen Funktionalen ein eindeutiges Maß $\mu_{\xi,\eta}$, sodass gilt:*

(a) $\eta^*(T_f\xi) = \int_X f(x)\mu_{\xi,\eta}(dx)$ *für jedes* $f \in C_\infty(X, K)$.

(b) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $P(A) \in L(H)$ *mit* $\|P(A)\| \leq 1$ *und* $\eta^*(P(A)\xi) = \mu_{\xi,\eta}(A)$, *wobei* $\xi, \eta \in H$.

(c) Es gibt ein projektionswertiges Maß P' *auf* X_∞ *mit* $P = P'_{|\mathcal{B}f(X)}$. *Im Fall* X *lokal-kompakt aber nicht kompakt, sei* $sp_K\{T_h\xi : f \in C_\infty(X, K), \xi \in H\}$ *dicht in* H.

Beweis:
(a)
Folgt direkt aus dem Analogon des Satzes von Riesz.
(b)
Für $T_f^t = T_f$ haben wir $\mu_{\xi,\eta} = \mu_{\eta,\xi}$. Da $T_1 = I$ gilt $\mu_{\xi,\eta}(X) = \eta^*(\xi) = \xi^*(\eta)$. Dann gilt für jedes $A \in \mathcal{B}f(X)$ $\|A\|_{\mu_{\xi,\eta}} \leq \|\xi\|\|\eta\| \sup_{f\neq 0} \|T_f\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$. Da H, aufgefaßt als Teilraum seines Dualraums, punktetrennend auf sich selbst operiert, gibt es zu jedem $A \in \mathcal{B}f(X)$ einen eindeutigen linearen Operator $P(A) \in L(H)$ der (b) erfüllt.
(c)
Ist die Bedingung aus Satz (5.36) erfüllt, so ist $P(A)^t = P(A)$, da ja $\mu_{\xi,\eta}(A) = \mu_{\eta,\xi}(A)$. Aus der Existenz eines H-projektionswertigen Maßes auf kompaktem X erhalten wir ein H-projektionswertiges Maß P' auf X_∞ mit $T'_f = \int_{X_\infty} f(x)P'(dx)$ für jedes $f \in C(X_\infty, K)$. Dann ist

$$P'(x_\infty)T_g = (\int_{X_\infty} \chi_{x_\infty} P'(dx))(\int_{X_\infty} g(x)P'(dx)) = \int_{X_\infty} \chi_{x_\infty} P'(dx) = 0$$

für jedes $g \in C_\infty(X, K)$, da $g(x_\infty) = 0$.
Ist X nur lokal-kompakt aber nicht kompakt, dann folgt aus der Zusatzbedingung $P'(x_\infty) = 0$ und damit $P'(X) = P'(X_\infty \backslash \{x_\infty\}) = 1_H$. $\Box$

Lemma 5.37 *Für alle* $A, B \in \mathcal{B}f(X)$ *gilt*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(B)P(A).$$

Beweis:
Für jedes $g \in C_\infty(X, K)$ und $\xi, \eta \in H$ sei $\nu_g(dx) := g(x)\mu_{\xi,\eta}(dx)$.
Für $f, g \in C_\infty(X, K)$ gilt dann

$$\int_X f(x)\mu_{T_g\xi,\eta}(dx) = \eta^*(T_f T_g \xi) = \int_X f(x)g(x)\mu_{\xi,\eta}(dx) = \int_X f(x)\nu_g(dx)$$

und folglich $\nu_g = \mu_{T_g\xi,\eta}$.
Für ein festes $A \in \mathcal{B}f(X)$ sei $\rho(B) := \mu_{\xi,\eta}(A \cap B)$ für $B \in \mathcal{B}f(X)$. Dann ist $\rho \in M(X)$. Für jedes $g \in C_\infty(X,K)$ gelten die Ungleichungen

$$\int_X g(x)\rho(dx) = \int_A g(x)\mu_{\xi,\eta}(dx) = \nu_g(A) = (P^t(A)\eta)^*(T_g\xi) = (P(A)\eta)^*(T_g\xi)$$

$$= \int_X g(x)\mu_{P(A)\xi,\eta}(dx),$$

da $P(A)^t = P(A)$. Daher ist $\rho = \mu_{\xi,P(A)\eta}$. Für jedes $B \in \mathcal{B}f(X)$ erhalten wir so:

$$\eta^*(P(A \cap B)\xi) = \mu_{\xi,\eta}(A \cap B) = \rho(B) = \mu_{\xi,P(A)\eta}(B) =$$
$$(P(A)\eta)^*(P(B)\xi) = \eta^*(P(A)P(B)\xi),$$

da wiederum $P(A)^t = P(A)$. Die Elemente $\xi, \eta \in H$ waren beliebig, daher ist $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Analoges Rechnen mit vertauschtem A und B führt zur Aussage des Lemmas. □

Korollar 5.38 *Für jedes $A \in \mathcal{B}f(X)$ haben wir $P^2(A) = P(A)$ und $P(A)$ ist ein Projektionsoperator, sodaß $P(X) = I$. Ist $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \in \mathcal{B}f(X)$, so gilt $P(A)P(B) = 0$.*

Beweis:
Folgt direkt aus dem Obigen. □

Satz 5.39 *Sind die Bedingungen von Satz* (5.30) *(a) − (f) erfüllt, dann ist P das eindeutig bestimmte reguläre H-projektionswertige Maß auf X für das $T_f = \int_X f(x)P(dx)$ für jedes $f \in C_\infty(X,K)$.*

Beweis:
Sei $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen in X. Da X lokal-kompakt ist, existiert das Spektralintegral. Nach obigem Korollar sind die $P(A_n)$ paarweise disjunkte orthogonale Projektoren. Setze nun $Q := \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$. Dann gilt für $\xi, \eta \in H$:

$$\eta^*(Q\xi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta^*(P(A_n)\xi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\xi,\eta}(A_n) = \mu_{\xi,\eta}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \eta^*(P(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n)\xi),$$

und damit $P(\cup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$ und P ist ein H-projektionswertiges Maß.
Da X lokal-kompakt ist, ist jedes Maß $\mu_{\xi,\eta}$ straff und regulär, also ist P regulär.
Sei nun $f \in C_\infty(X,K)$ und bilde das Spektralintegral $E = \int_X f(x)P(dx)$. Für alle $\xi, \eta \in H$ haben wir $\eta^*(E\xi) = \int_X f(x)\mu_{\xi,\eta}(dx) = \eta^*(T_f\xi)$, und damit $E = T_f$. In Hinblick auf 4.37) haben wir reguläre H-projektionswertige Maße im kompakten und lokal-kompakten Fall bez. X.
Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen:
Angenommen es gäbe noch ein anderes reguläres H-projektionswertiges Maß W auf X. Setze $\mu_{\xi,\eta}(A) = \eta^*(P(A)\xi)$, $\nu_{\xi,\eta}(A) = \eta^*(W(A)\xi)$ für alle $A \in \mathcal{B}f(X)$. Dann ist $\int_X f(x)\mu_{\xi,\eta}(dx) = \eta^*(T_f\xi) = \int_X f(x)\nu_{\xi,\eta}(dx)$ für alle $f \in C_\infty(X,K)$, also $\mu_{\xi,\eta} = \nu_{\xi,eta}$ und folglich $W(A) = P(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}f(X)$. □

Korollar 5.40 *Die Relation $T_f = \int_X f(x)P(dx)$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge aller regulären H-projektionswertigen Maßen P auf X und der Menge aller stetigen linearen Abbildungen $T : C_\infty(X,K) \mapsto L(H)$ und erfüllt die Bedingungen $30.(a) - (f)$.*

Beweis:
Folgt direkt aus dem vorigen Satz.□

Satz 5.41 (Das Stone-Theorem) *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banach-C-Algebra über einem lokalkompakten Körper K. Ist P ein reguläres H- projektionswertiges Maß auf $\hat{A}$, dann gilt: Für jedes $a \in \mathcal{A}$ definiert $T_a = \int_{\hat{A}} \hat{a}(\phi)P(d\phi)$ eine nicht-asgeartete Darstellung von $\mathcal{A}$ in H.*
Umgekehrt bestimmt jede nichtausgeartete Darstellung T von $\mathcal{A}$ in einem Banachraum H ein eindeutiges reguläres H-projektionswertiges Maß P auf $\hat{A}$, sodass $T_a = \int_{\hat{A}} \hat{a}(\phi)P(d\phi)$ gilt.

Beweis:
Die rechte Seite der Gleichung ist ein Spektralintegral. Sei P ein reguläres H-projektionswertiges Maß auf $\hat{A}$. Nach Korollar (5.41) ist $T' : f \mapsto \int_X f(x)P(dx)$ eine nichtausgeartete Darstellung von $C_\infty(\hat{A},K)$ in H. Nach Satz (5.24) ist die Abbildung $a \mapsto \hat{a}_{|_{\hat{A}}}$ ein Homöomorphismus von $\mathcal{A}$ auf eine dichte Teilmenge einer Unteralgebra von $C_\infty(\hat{A},K)$, sodass die Abbildung $T : a \mapsto T'_{|_{\hat{a}_{|_{\hat{A}}}}} = \int_{\hat{A}} \hat{a}P(d\hat{a})$ eine nichtausgeartete Darstellung von $\mathcal{A}$ ist.
Sei Umgekehrt T eine nichtausgeartete Darstellung von $\mathcal{A}$ in H. Dann folgt aus (4.24), dass es eine nichtausgeartete Darstellung von $C_\infty(\hat{A},K)$ gibt mit

$$T_a = T'_{\hat{a}_{|_{\hat{A}}}} \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Nach Satz (5.40) gibt es dann ein reguläres H-projektionswertiges Maß P auf $\hat{A}$ für das gilt

$$T_f = \int_{\hat{A}} f(x)P(dx) \qquad \forall f \in C_\infty(\hat{(A)},K).$$

Verbindet man diese beiden Eigenschaften, so erhällt man die gewünschte Gleichung.
Sei nun Q ein anderes reguläres H-projektionswertiges Maß auf $\hat{A}$, welches die geforderte Gleichung erfüllt, dann ist $\int_{\hat{A}} \hat{a}(x)Q(dx) = T_a = \int_{\hat{A}} \hat{a}(x)P(dx)$ für jedes $a \in \mathcal{A}$. Da aber nach Satz (5.24) $\{\hat{a}_{|_{\hat{A}}} : a \in \mathcal{A}\}$ dicht ist in $C_\infty(\hat{A},K)$ bezüglich der sup- Norm. Damit und mit (5.30) folgt $\int_{\hat{A}} f(x)P(dx) = \int_{\hat{A}} f(x)Q(dx)$ für jedes $f \in C_\infty(\hat{A},K)$ und nach Satz (5.40) folgt damit $Q = P$. □

5.2.4 Spektralsatz

Definition 5.42 *Das Maß P aus dem Stone-Theorem heißt Spektralmaß der nichtausgearteten Darstellung T von $\mathcal{A}$.*

Satz 5.43 *Sei P das Spektralmaß einer nichtausgearteten Darstellung T einer kommutativen Banach-C-Algebra über einem lokal- kompakten Körper K. Ist $\phi \in \hat{A}$, dann ist*

$$im(P(\{\phi\})) = \{\xi \in H(T) : T_a\xi = \phi(a)\xi, \quad \forall a \in \mathcal{A}\}.$$

Beweis:
Falls $\xi \in im(P(\{\phi\}))$ dann ist $T_a = \phi(a)\xi$ für jedes $a \in \mathcal{A}$.
Sei umgekehrt $T_a\xi = \phi(a)\xi$ für jedes $a \in \mathcal{A}$. Ist T' die isomorphe Darstellung in A_t von $C_\infty(\hat{A}, K)$ und T' ist dual zu T, dann ist

$$T'_f\xi = f(\phi)\xi \qquad \forall f \in C_\infty(\hat{A}, K).$$

Angenommen $\xi \notin im(P(\{\phi\}))$ und wir betrachten das Maß $\mu_{\xi,\eta}(W) := \eta * (P(W)\xi)$ für $\eta, \xi \in H$. dann gibt es $\eta, \xi \neq 0$, sodaß $\mu_{\xi,\xi}$ ist nicht in $im\phi$. Da $\mu_{\xi,\xi}$ regulär ist, gibt es ein Kompaktum $E \subset \hat{A}$, sodaß $\phi \notin E$ und $\|E\|_{\mu_{\xi,\xi}} > 0$. Wir wählen $f \in C_\infty(\hat{A}, K)$ wobei f nicht identisch 0 sei und $f(\phi) = 0$, da $\hat{A}$ ein vollständig regulärer Raum ist.
Dann folgt, dass $T'_f\xi = 0$. Es gilt für Maße nun die Ungleichung:

$$\|T'_f\xi\| \geq \|f\|_{N_{\xi,\xi}} \geq \sup_{x \in E} |f(x)| N_{\mu_{\xi,\xi}}(x) =: \|f_{|E}\|_{N_{\mu_{\xi,\xi}}}.$$

Ist $\|\xi\|_H = 1$, dann ist $\|T'_f\xi\| = \|f\|_{N_{\mu_{\xi,\xi}}}$. Wir erhalten eine Kontraktion und somit $\xi \in im(P(\{\phi\}))$. $\square$
Im Folgenden sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C-Algebra mit Einselement 1 über einem lokalkompakten Körper K und μ ein reguläres Maß auf $\hat{A}$. Sei $L(\hat{A}, \mu, K) = L(\mu)$ wie üblich.

Satz 5.44 *Die Gleichung $(T_a f)(\phi) = (\hat{a})(\phi)f(\phi)$ definiert eine nichtausgeartete Darstellung T von $\mathcal{A}$ auf $H = L(\mu)$ und das Spektralmaß P von T wird gegeben durch $P(W)f = \chi_W f$ für jedes $W \in \mathcal{B}(\overline{\hat{A}})$ und $f \in H$.*

Beweis:
Ist $a \in C(\hat{A})$, dann ist $\sup_{\phi \in \hat{A}} |\hat{a}(\phi)| < \infty$, sodaß

$$\sup_{\phi \in \hat{A}} |f(\phi)||\hat{a}(\phi)| N_\mu(\phi) \leq \|f\|_\mu \|\hat{a}\|_{C(\hat{A},K)}$$

und folglich $\hat{a}f \in H$ und $T_a f = \underline{\int_{\hat{A}}} \hat{a}(\phi)P(d\phi)f$ nach dem Stone Theorem. Es gilt also für $\hat{a} = \chi_W$ und $W \in \mathcal{B}(\overline{\hat{A}})$ $T_a f = P(W)f$. $\square$
Damit ist auch $Tr(P) \subset Sp(\mathcal{A})$.

Satz 5.45 *Der Kern einer nichtausgearteten Darstellung T von $\mathcal{A}$ besteht aus $a \in \mathcal{A}$, sodass $\hat{a}$ auf dem ganzen Spektrum von T verschwindet. Gilt weiters, dass $\mathcal{A}$ eine kommutative C-Algebra über einem lokalkompakten Körper K ist, dann ist T injektiv genau dann wenn, das Spektrum von T gleich dem Spektrum von A ist.*

Beweis:
Die Bedingung $T_a = 0$ ist äquivalent zu $\int_{\hat{A}} \hat{a}(\phi)P(d\phi) = 0$ und diese zu $\hat{a}(\phi)_{|\hat{A}} = 0$ nach dem Stone Theorem. Daher ist $kerT = \{0\}$ äquivalent zu $TrT = \hat{A}$. $\square$
Anmerkung :
Beim nun folgenden Spektralsatz gilt $Sp(b) = Sp_{L(H)}(b) := \overline{Sp(sp_F\{b^n : n \in \mathbb{N}\})}$.

Satz 5.46 (Der nichtarchimedische Spektralsatz) *Sei H ein nichtarchimedischer Banachraum über F und $b \in L(H)$. Dann gibt es ein eindeutiges H-projektionswertiges Maß P auf dem lokalkompakten Teilkörper $K \leq F$ mit Werten in $L(H)$ mit:*

(a) Der Träger D von P ist beschränkt in K.

(b)

$$b = \int_K xP(dx).$$

(c) Falls $K = F$, dann ist $D = Sp(b)$.

Beweis:
Der Körper F kann als Banachraum über K aufgefaßt werden, also wegen (2.54) $F \cong c_0(\beta, K)$ mit einer eindeutigen Ordinalzahl β, da K lokalkompakt und somit auch sphärisch vollständig ist. Der Isomorphismus $\chi : F \mapsto c_0(\beta, K)$ muß nicht isometrisch sein.
Der Isomorphismus χ induziert einen Isomorphismus von H(als Banachraum über K) $\chi_H : H \mapsto c_0(\alpha_K, K)$ mit einer eindeutigen Ordinalzahl α_K. Dieser Isomorphismus ist K-linear und induziert eine K-lineare Einbettung $\chi* : L(H) \mapsto L(c_0(\alpha_K, K))$ mit stetiger Inverser $\chi*^{-1}_{|\chi*(L(H))}$. Die Einbettung wird gegeben durch die Formel $\chi * (a)y := \chi a \chi^{-1} y$ für jedes $a \in L(H)$ und $y \in L(c_0(\alpha_K, K)$. Im endlichdimensionalen Fall entspricht diese Konstruktion der Zuordnung einer Matrix zu jeder linearen Abbildung.
Angenommen es gibt eine Darstellung einer C-Algebra $C_\infty(X, F)$ mit Hilfe eines $c_0(\alpha_K, K)$- projektionswertigen Maßes P mit Träger in einer lokalkompakten Teilmenge X in K^γ. Dann bildet $\chi*^{-1}$ aus P ein H-projektionswertiges Maß P_F durch

$$(\chi^{-1}P(V)\chi)(\chi^{-1}P(W)\chi) = \chi^{-1}P(V \cap W)\chi \qquad \forall V, W \in \mathcal{B}f(X).$$

Folglich gilt

$$\chi^{-1} \int_X g(x)P(dx)\chi z = \int_X (\chi^{-1}g(x)\chi)(\chi^{-1}P(dx)\chi)z \quad \forall z \in H, f \in C_\infty(X, K).$$

Falls $\chi * (a) = \int_X g_a(x)P(dx)$, dann ist $a = \int_X f_a(x)P_F(dx)$ wobei $g_a \in C_\infty(X,K)$ und daher $\chi * (g_a) := f_a \in C_\infty(X,F)$, sodaß $f_a = g_a$, da die Einschränkung von χ auf $K($ eingebettet in $F)$ die Identität auf K ist.
Daraus folgt, dass es genügt, statt b nur $\chi * (b)$ zu betrachten. Bezeichne daher im Folgenden b $\chi * (b)$. Der Operator b erzeugt eine kommutative Unteralgebra A von $L(H)$ durch $sp_K(b) = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$ wobei $b^0 = 1$ im Sinne der Banachalgebra. Diese Unteralgebra hat eine Vervollständigung $\mathcal{A}$ bezüglich der Spektalnorm $\|.\|_{sp}$. Diese Banachalgebra ist eine C-Algebra $C(Sp(A),K)$ da $1 \in \mathcal{A}$ und $Sp(A)$ ist kompakt, sodaß $C(E,K)$ isomorph ist zu $C_\infty(E,K)$ für ein kompaktes E.
Jedes $\phi \in A^+$ ist vollständig bestimmt durch $\phi(b)$. Die Abbildung $\phi \mapsto \phi(b)$ ist also stetig und bijektiv. Sie ist also ein Homöomorphismus vom kompakten $Sp(\mathcal{A})$ auf die kompakte Teilmenge $Sp(b)$ von K. Daher identifizieren wir $Sp(\mathcal{A})$ und $Sp(b)$. Die Gelfandtransformation wir dabei zur identischen Abbildung. Nach dem Stone-Theorem erzeugt die identische Darstellung von $\mathcal{A}$ ein H-projektionswertiges Maß P auf $Sp(b)$, sodaß $b = \int_{Sp(b)} xP(dx)$. Da die identische Darstellung injektiv ist, ist der Träger D von P gleich $Sp(b)$. Setzen wir P auf $\mathcal{B}f(K)$ fort, durch $P(W) = P((W) \cap Sp(b))$, so erhalten wir ein projektionswertiges Maß auf K, welches $(a) - (c)$ erfüllt.
(a) und (b) bestimmen das Maß eindeutig. Sei P' ein zweites H-projektionswertiges Maß auf K, welches (a) und (b) erfüllt und E eine kompakte Teilmenge von K die die Träger beider Maße umfaßt. Wir betrachten die beiden induzierten Darstellungen $T : f \mapsto \int_E f(x)P(dx)$ und $T' : f \mapsto \int_E f(x)P'(dx)$ von $C(E,K)$. Sei w die identische Abbildung auf E und e die konstante Abbildung $e(x) = 1$ auf E, dann folgt aus (b), dass $T_w = T'(w) = b$ und $T_e = T'_e = 1$. Nach dem Kaplansky-Theorem erzeugen w und e $C(E,K)$ als C-Algebra und daher ist $T = T'$ und nach der Eindeutigkeitsaussage im Stone-Theorem ist $P' = P$. □

Literaturverzeichnis

[1] R.Remmert, G.Schumacher: *Funktionentheorie* 1, Springer Verlag, 5.Auflage (2002)

[2] Alain M.Robert: *A Course in p-adic Analysis*, Springer Verlag (2000)

[3] A. C. M. van Rooij: *Nonarchimedean Functionalanalysis*, Marcel Dekker, inc (1978)

[4] S.Ludovsky, B.Diarra: *Spectral integration and spectral theory for non-archimedean Banachspaces*, Mathematics subject classifikation 47A10, (2000)

[5] Serge Lang: *Algebra*, Springer Verlag, 3.Auflage (2002)

[6] W.Rudin:*Functionalanalysis*, MacGraw Hill (1973)

[7] P.Schneider: *Nonarchemedean Functional Analysis*, Springer (2002)

[8] J.Elstrod: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, 2.Auflage (1999)

[9] B.von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie*, Springer Verlag, 3.Auflage (2001)

[10] K.Mahler: *Introduction to p-adic Numbers and their Functions*, Cambridge Unversity Press (1973)

[11] A.F.Monna: *Analyse Non-Archimédienne*, Springer Verlag (1970)

[12] C.E.Rickart: *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand (1960)