

Analytische Fortsetzung

von Thomas Hawel

19. Juli 2005

Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Begriff der analytischen Fortsetzung, insbesondere mit deren Unmöglichkeit. Die Arbeit gliedert sich grob in vier Teile, wobei jedes Mal ein anderer Aspekt des Themas herausgearbeitet wird. So werden Verfahren und Beispiele aufgezeigt, die demonstrieren, wie man analytische Fortsetzung betreiben kann, andererseits wird sich herausstellen, dass die Unmöglichkeit einer analytischen Fortsetzung keine Seltenheit ist, sondern sehr häufig auftritt.

Zu unterscheiden sind auch zwei verschiedene Arten der analytischen Fortsetzung. Kapitel zwei beschäftigt sich mit der Frage, wie man ein größeres Gebiet finden kann, auf dem eine gegebene Funktion analytisch bleibt. Anders verhält es sich in Kapitel vier, wo analytische Fortsetzung längs Kurven betrieben wird.

Natürlich möchte ich an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen, um einen Blick zurück zu werfen und ein kurzes Resümee zu ziehen. Diese Diplomarbeit bildet den Abschluss eines fünf Jahre langen Abschnittes meines Lebens, der mir viele Eindrücke, Erfahrungen, Kenntnisse und Bekanntschaften bereitet hat. Viele Personen, die ich während meiner universitären Tätigkeit kennen gelernt habe, prägten mich nachhaltig und gaben mir wichtige Hinweise und Ratschläge für meinen weiteren, bislang erfolgreichen, Lebensweg. Die nachfolgende Aufstellung folgt keinem hierarchischen Muster, sondern der Reihenfolge, wie sie mir spontan in den Sinn gekommen ist.

Dank möchte ich meinen Eltern aussprechen, die es mir überhaupt erst ermöglicht haben, ein Studium zu beginnen und deren Unterstützung ich über weite Teile des Studiums genossen habe. Ebenfalls zu Dank verpflichtet bin ich meiner Schwester Alexandra, die trotz zweier bezaubernder, zeitintensiver Kinder, immer Zeit für mich hatte und auch in mühevoller Kleinarbeit dieses Werk Korrektur las. Die nächsten Personen, denen ich zu Dank verpflichtet bin, sind Frau HR Dr. Margarete Zelfel, Herr OStR. Mag. Karl Zeitlhofer und Herr Mag. Michael Pauerl. Diese drei Personen haben mich in besonderem Maße unterstützt, indem sie mich sehr hilfsbereit in meiner Lehrtätigkeit gefördert und administrative Mühen auf sich genommen haben, um meinem Studium einen erfolgreichen und schnellen Ausgang zu ermöglichen.

Nicht zu vergessen sei noch Frau Mag. Karin Lehner, die mich mein ganzes Studium lang begleitet und mir durch ihre wertvollen Mitschriften und Unterlagen das Studienleben stark vereinfacht hat. Auch für die vielen Gespräche, anregenden Unterhaltungen und ihre selbstlose Aufopferung anderen Menschen gegenüber möchte ich ihr an dieser Stelle besonderen Dank und meine Hochachtung aussprechen.

Der größte Dank gebührt jedoch Herrn Prof. Dr. Harald Woracek, unter dessen Leitung auch diese Diplomarbeit verfasst wurde. Quasi von Stunde Null an hatte ich die Ehre und das Vergnügen, meine mathematische Laufbahn unter seinem Einfluss zu bestreiten. Niemand anderer hat mich als Mathematiker so stark beeinflusst und geprägt, wobei auch die menschliche Note nie zu kurz kam. Besonders herausstreichen möchte ich die regelmäßigen Treffen, Dialoge, Diskussionen und Plaudereien, die aus meiner Diplomarbeit erst das gemacht haben, was sie heute darstellt. Für die ins Unendliche strebende Geduld, die mit Sicherheit notwendig war, und den enormen Zeitaufwand, den Herr Prof. Woracek auf sich genommen hat, um meine mathematischen Fähigkeiten zu fördern, sei ihm hier ausdrücklich und im allerhöchsten Maße gedankt.

Thomas Hawel

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung und Rückblick	2
1.1	Der Begriff der Analytizität	2
1.2	Diskussion der Stammfunktion	9
1.3	Wichtige Resultate der Funktionentheorie	10
2	Das Prinzip der Analytischen Fortsetzung	14
2.1	Analytische Fortsetzung auf größere Gebiete	14
2.2	Randpunkte und Kreisscheiben	16
2.3	Lückenreihen	18
2.4	Stetige Fortsetzung und freie Randbögen	24
3	Generelle Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung	28
3.1	Holomorphiegebiete	28
3.2	Beispiele von Holomorphiegebieten	35
4	Kreiskettenverfahren und Monodromiesatz	37
4.1	Kreisketten	37
4.2	Monodromiesatz	45
A		49
A.1	Die Sätze von Bers und Iss'sa	49
B		53
B.1	Literaturverzeichnis	53

Kapitel 1

Wiederholung und Rückblick

1.1 Der Begriff der Analytizität

Für die Eigenschaft einer Funktion, analytisch zu sein, haben sich auch einige andere Begriffe herausgebildet, wie z.B. holomorph oder regulär. Diese Begriffe sind hier als äquivalent zu betrachten. Wir werden hauptsächlich den Begriff *analytisch* verwenden.

Im folgenden Abschnitt werden wir kurz die notwendigen Grundlagen zusammenfassen, die aus der Grundvorlesung *Funktionentheorie* bekannt sein sollten. Eine genaue Beweisführung wird nur in manchen Fällen angegeben, weil einige Sätze zu tiefliiegend sein werden, um sie hier detailliert argumentieren zu können. Es werden aber zumindest qualitative Beweisideen angegeben.

Definition 1.1.1 Ein **Gebiet** G ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Definition 1.1.2 Unter einem **Weg** in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ verstehen wir eine stetige Abbildung γ mit

$$\gamma : [a, b] \rightarrow G, \quad a < b \text{ reelle Zahlen.}$$

Weiters verlangen wir im Folgenden, dass unsere Wege immer (stückweise) stetig differenzierbar sind!

Definition 1.1.3 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet. Seien γ_0, γ_1 stetige Funktionen mit

$$\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow G$$

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow G$$

Man sagt γ_0 ist **homotop** zu γ_1 in G ($\gamma_0 \sim \gamma_1$), falls eine stetige Funktion H existiert

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G \text{ mit}$$

$$H(0, t) = \gamma_0(t), \quad H(1, t) = \gamma_1(t)$$

Die beiden Funktionen γ_0 und γ_1 werden uns hauptsächlich in Form von *Wegen* in *Gebieten* des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ begegnen. Anschaulich kann man sagen, dass die beiden Wege γ_0 und γ_1 homotop sind, wenn sie stetig ineinander deformiert werden können.

Definition 1.1.4 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ wieder ein Gebiet. Ein stetiger Weg γ in G , für den gilt

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad \gamma(0) = \gamma(1)$$

heißt **nullhomotop** wenn $\gamma \sim \delta$, wobei

$$\delta : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow G \\ t & \mapsto \gamma(0) \end{cases}$$

Anschaulich bedeutet die Eigenschaft der Nullhomotopie, dass sich ein geschlossener Weg in einem Gebiet G auf einen Punkt in G zusammenziehen lässt.

Definition 1.1.5 Unter einem **einfach zusammenhängenden Gebiet** verstehen wir ein Gebiet, in dem alle geschlossenen Wege nullhomotop sind. Anschaulich sind das die Gebiete ohne „Löcher“.

Definition 1.1.6 Wir sagen, eine Folge von Funktionen f_n konvergiert **kompakt** gegen eine Funktion f , wenn

$$\forall K \subseteq G \text{ kompakt gilt: } f_n \rightarrow f \text{ auf } K \text{ gleichmäßig.}$$

Gebräuchlich ist auch der Begriff **lokal gleichmäßig**, da um jeden Punkt eine Umgebung existiert, sodass die Folge auf dieser Umgebung gleichmäßig konvergiert.

Grundlage für die Definition der Analytizität ist der folgende, wichtige Satz.

Satz 1.1.7 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Folgende Aussagen sind für eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ äquivalent:

- a) f ist in jedem Punkt $a \in G$ komplex differenzierbar, das heißt der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert.

- b) f ist total differenzierbar im Sinne der reellen Analysis $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und für $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad z = x + iy \in G$$

- c) f ist total differenzierbar im Sinne der reellen Analysis $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und es gilt:

$$\frac{df}{d\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- d) Für jeden nullhomotopen Weg γ in G gilt:

$$\oint_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

e) f ist in jeder offenen Kreisscheibe $U_r(a) \subseteq G$ durch eine konvergente Potenzreihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

darstellbar. ($U_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$)

e₁) Für jeden Punkt $a \in G$ existiert eine offene Kreisscheibe $U_r(a) \subseteq G$ mit $r > 0$, sodass gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n \text{ in } U_r(a)$$

f) Für jede Kreisscheibe $U_r(a)$ mit $\bar{U}_r(a) \subset G$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \text{ für } |z - a| < r$$

Definition 1.1.8 Sei G ein Gebiet. Erfüllt eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine der oben angeführten Eigenschaften (und somit auch alle anderen), so bezeichnet man sie als **analytisch**. Wir bezeichnen die Menge aller auf G analytischer Funktionen mit $H(G)$.

Wie schon erwähnt werden auch die Begriffe holomorph oder regulär verwendet.

Bemerkung 1.1.9 In den angegebenen Potenzreihen von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$ haben die Koeffizienten a_n die Gestalt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Es handelt sich also um eine komplexe Taylorreihe.

Wir wollen die Äquivalenzen nun (teilweise zumindest qualitativ) beweisen. Wir werden dazu die folgende Implikationskette zeigen. Damit ist dann die Äquivalenz aller Aussagen bewiesen:

$$a) \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c)$$

$$a) \Rightarrow d) \Rightarrow f) \Rightarrow e) \Rightarrow e_1) \Rightarrow a)$$

Der größte Schritt in dieser Kette liegt in der Implikation $a) \Rightarrow d)$. Wir werden diese Aussage später als Cauchy'schen Integralsatz kennen lernen.

Beweis:

$a) \Rightarrow b)$:

Falls der Grenzwert existiert, so muss er für alle Wege, auf denen ich mich dem Punkt nähere, gleich sein. Betrachten wir dazu den Weg entlang der reellen Achse und den entlang der imaginären Achse.

Es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} = f'(a) \quad \text{für } a \in \mathbb{C}; h \in \mathbb{R}.$$

Wir substituieren nun im Sinne der reellen Analysis ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) für die Funktion

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

wobei $u(x, y) = \operatorname{Re}(z)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im}(z)$ mit $a = c + id$.

Damit erhalten wir für den ersten Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0; h \in \mathbb{R}} \frac{f(c+id+h) - f(c+id)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0; h \in \mathbb{R}} \frac{u(c+h, d) + iv(c+h, d) - [u(c, d) + iv(c, d)]}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0; h \in \mathbb{R}} \frac{u(c+h, d) - u(c, d)}{h} + i \cdot \lim_{h \rightarrow 0; h \in \mathbb{R}} \frac{v(c+h, d) - v(c, d)}{h} &= \\ \frac{\partial u}{\partial x}(c, d) + i \frac{\partial v}{\partial x}(c, d) & \end{aligned}$$

Analog bringt man den zweiten Grenzwert auf die Form

$$\frac{\partial v}{\partial y}(c, d) - i \frac{\partial u}{\partial y}(c, d)$$

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil führt sofort auf die gewünschten Gleichungen. \square

Bemerkung 1.1.10 Eine Funktion f ist total differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, für die gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0 \tag{1.1}$$

$b) \Rightarrow a)$:

Aus der totalen Differenzierbarkeit folgt die Existenz der linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$L := \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \quad \text{mit Gleichung 1.1.}$$

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt jetzt, dass L geschrieben werden kann als $L = \begin{pmatrix} C & D \\ -D & C \end{pmatrix}$.

Daher ist $L(w) = (C + iD)w$, $w \in \mathbb{C}$. Es folgt nun die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = C + iD.$$

Damit wäre die Implikation bewiesen. \square

$b) \Rightarrow c)$:

Durch Umschreiben der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen kommt man auf

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit i und addiert danach beide Gleichungen, so erhält man direkt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

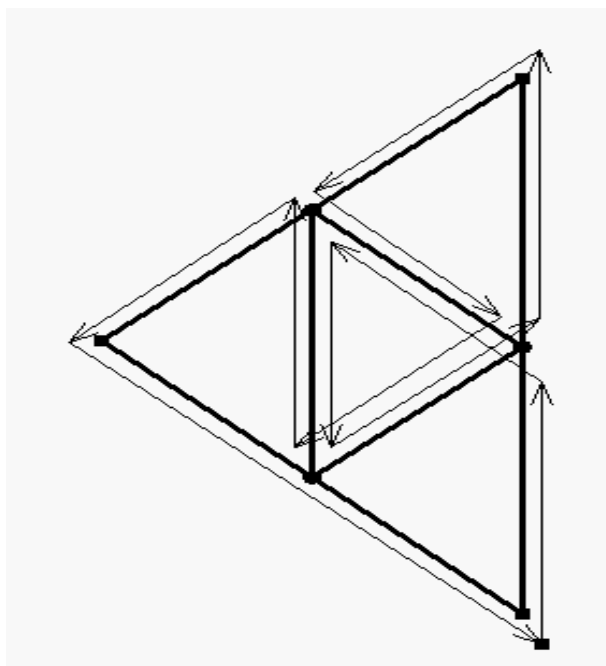
Diese Darstellung entspricht genau der Form, wie sie in Punkt c) auftritt. \square

c) \Rightarrow b):

Wieder folgt der Beweis einfach durch Umschreiben der Gleichung. Der Weg läuft genau in die andere Richtung, so wie es bei b) \Rightarrow c) gezeigt wurde. \square

a) \Rightarrow d):

Dieser Satz ist sehr tieflegend und sein Beweis wird hier nur skizziert. Grundsätzlich gliedert sich der Beweis in mehrere Schritte, die die Bedingungen immer mehr verschärfen. Zuerst beweist man die Aussage für Dreieckswege.

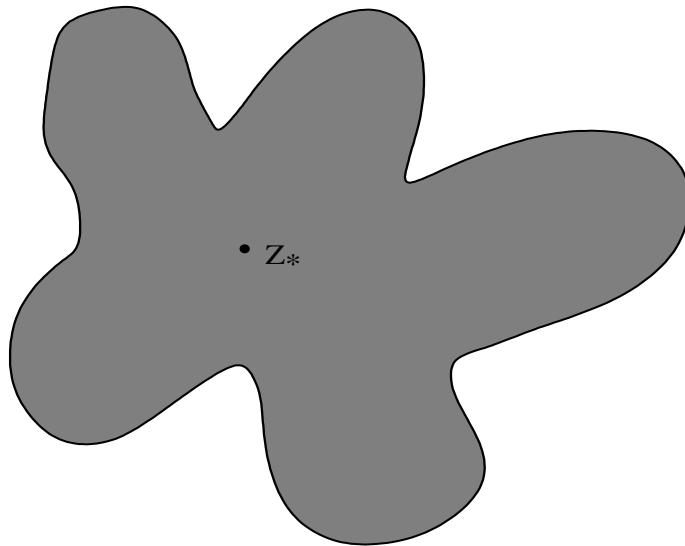


Skizze zum Dreiecksweg

Induktiv werden immer weitere Dreiecke eingeschrieben und man kann zur nächsten, allgemeineren Fassung übergehen. Diese bezieht sich auf so genannte Sterngebiete.

Definition 1.1.11 Ein **Sterngebiet** ist eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass ein Punkt $z_* \in D$ existiert, sodass mit jedem Punkt $z \in D$ die ganze Verbindungsstrecke zwischen z_* und z in D enthalten ist:

$$\{z_* + t(z - z_*) : t \in [0, 1]\} \subset D.$$



Skizze zu Sterngebieten

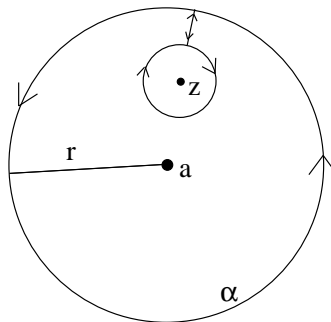
Wenn der Satz für Sterngebiete bewiesen ist, so kann man zur allgemeinsten Fassung übergehen, wie wir sie in Punkt d) dargelegt haben und sich auf ein allgemeines Gebiet beziehen. Es sei jedoch erwähnt, dass die Beschränkung auf nullhomotope Wege auf keinen Fall weggelassen werden darf! \square

d) \Rightarrow f):

Für diese Implikation betrachte man das Integral

$$\oint \frac{d\zeta}{\zeta - a} \quad \text{für } |z - a| < r.$$

Um es zu bestimmen, betrachten wir das Integral über das folgende Gebiet:



Der Weg α beschreibt ein einfach zusammenhängendes Gebiet

Hier können wir nun unsere Voraussetzung von Punkt d) anwenden, da offensichtlich jeder geschlossene Weg nullhomotop ist. Bezeichnen wir den äußeren Kreis mit α_1 und den inneren, kleineren Kreis mit α_2 . Das kleine gerade Stück fällt bei der Integration über α heraus und es gilt:

$$\int_{\alpha_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\alpha_2} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (1.2)$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\int_{\alpha_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

gilt.

Betrachtet man jetzt noch den Differenzenquotienten als Funktion von z , so erhalten wir, weil dieser analytisch im Inneren von α ist,

$$\oint_{\alpha} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

Die Behauptung folgt nun mit Gleichung 1.2.

$$\oint_{\alpha} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \underbrace{\oint_{\alpha} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta}_{=2\pi i} = 0$$

worauf folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \square$$

$f) \Rightarrow e)$:

Den im Integranden auftretenden „Cauchy-Kern“ $\frac{1}{\zeta - z}$ kann man leicht mittels der geometrischen Reihe in eine Potenzreihe entwickeln.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - a)^{n+1}} (z - a)^n$$

Man beachte $q := \left| \frac{z-a}{\zeta-a} \right| < 1$.

Multipliziert man jetzt mit $f(\zeta)$ und vertauscht Summation mit Integration, was hier erlaubt ist, da eine Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises gleichmäßig konvergiert, so erhält man die Behauptung, wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.3)$$

gilt. \square

$e) \Rightarrow e_1)$:

Da G offen ist, existiert eine offene Kreisscheibe um den Punkt a . Nun folgt die Behauptung unmittelbar. \square

$e_1) \Rightarrow a)$:

Da jedes Polynom differenzierbar ist und jede Potenzreihe sowie ihre formale Ableitung im Inneren des Konvergenzkreises gleichmäßig konvergieren, folgt die Existenz des Grenzwertes in Punkt a). \square

Bemerkung 1.1.12 Betrachten wir eine kurze Zusammenfassung der vorgestellten Eigenschaften.

- Ist eine Funktion *einmal* differenzierbar, so ist sie auch *unendlich* oft differenzierbar. Dies lässt sich leicht erkennen, da man eine analytische Funktion in eine Potenzreihe entwickeln kann (siehe Punkt e)), welche offensichtlich unendlich oft differenzierbar ist.
- Punkt f) spiegelt die *Mittelwertseigenschaft* analytischer Funktionen wider. Man kann den Wert einer Funktion errechnen, wenn man *nur* die Werte am Rand einer Kreisscheibe kennt! Die Gleichung wird auch als CAUCHY'SCHE INTEGRALFORMEL bezeichnet.
- Die im Punkt d) dargestellte Eigenschaft ist der CAUCHY'SCHE INTEGRALSATZ.

Für den weiteren Weg, den wir in Richtung Analytische Fortsetzung gehen werden, ist Punkt e) für uns von besonderer Bedeutung. Die sehr starke Eigenschaft der Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe wird beim *Kreiskettenverfahren* von enormer Bedeutung sein.

1.2 Diskussion der Stammfunktion

Die Existenz einer Stammfunktion hängt sehr stark mit der Topologie des betrachteten Gebiets zusammen. Wir haben schon gesehen, dass die Differenzierbarkeit einer Funktion f wesentlich tiefgreifendere Folgen hat, als wir es aus der reellen Analysis gewohnt sind.

Ebenso verhält es sich mit dem Integral. Man kann zwar ohne weiteres Integrale über viele geschlossene Wege ausrechnen (durch Parametrisierung des Weges), doch das bedeutet noch nicht die Existenz einer Stammfunktion.

Beginnen wir mit einer naheliegenden Definition.

Definition 1.2.1 (Stammfunktion) Sei f analytisch im Gebiet G . F ist eine **Stammfunktion** von f , wenn F analytisch in G ist und $F' = f$ gilt.

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Stammfunktion und dem Integral über geschlossene Wege.

Satz 1.2.2 Sei G ein Gebiet und f eine analytische Funktion auf G . Für f existiert eine Stammfunktion F genau dann, wenn $\oint_{\alpha} f(\zeta)d\zeta = 0$ für alle geschlossenen Wege α in G .

Beweisidee:

\Rightarrow)

Sei α ein geschlossener Weg in G , so folgt

$$\oint_{\alpha} f(\zeta)d\zeta = F(\alpha(1)) - F(\alpha(0)).$$

Da es sich um einen geschlossenen Weg handelt, gilt $\alpha(0) = \alpha(1)$.

\Leftarrow)

Wir definieren

$$F(z) := \int_{\alpha} f(\zeta) d\zeta$$

längs irgendeines Weges α mit

$$\alpha(0) = z_0 \text{ und } \alpha(1) = z.$$

Dieses Integral hängt nicht von der Wahl von α ab. Die so konstruierte Funktion F ist eine Stammfunktion von f in G . \square

Bemerkung 1.2.3 Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und besitzt keine Stammfunktion.

Beweis:

Wir berechnen das Integral längs eines Kreises α mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r .

$$\oint_{\alpha} \zeta^{-1} d\zeta = \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} rie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Das Integral verschwindet nicht, also besitzt f keine Stammfunktion. \square

Bemerkung 1.2.4 Man beachte den Unterschied: f ist analytisch im Gebiet G genau dann, wenn für jeden geschlossenen nullhomotopen Weg $\oint_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = 0$ ist.

Die Funktion f besitzt eine Stammfunktion genau dann, wenn für jeden geschlossenen Weg $\oint_{\alpha} f(\zeta) d\zeta = 0$.

Diese beiden Begriffe fallen genau für einfach zusammenhängende Gebiete zusammen.

1.3 Wichtige Resultate der Funktionentheorie

Zusammenfassend werden jetzt alle für uns notwendigen Sätze aus der Funktionentheorie dargestellt. Zunächst einige grundlegende Folgerungen aus Satz 1.1.7.

Satz 1.3.1 (Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel) Sei f analytisch in der Kreisscheibe $U_r(z_0)$ und stetig auf $\overline{U_r(z_0)}$, dann gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in U_r(z_0), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

D.h. man kann die Ableitungen einer Funktion $f^{(n)}$ durch Integration berechnen. Diese Tatsache ist auch deshalb interessant, weil der Integrationsvorgang ein stetiger Prozess ist, wohingegen Differenzieren nicht „stetig“ sein muss!

Beweisskizze:

Wir benutzen die Potenzreihendarstellung $f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\zeta-z)^k$ und die Tatsache, dass

$$\oint_{|\zeta-z|=\rho} \frac{1}{(\zeta-z)^l} = \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ 2\pi i, & l = 1 \end{cases}$$

gilt. Durch Einsetzen in die Cauchy'sche Integralformel und vollständiger Induktion nach n folgt die Behauptung. \square

Satz 1.3.2 (Identitätssatz) Sei G ein Gebiet in \mathbb{C} und f, g analytische Funktionen, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $f = g$
- b) Die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in G .
- c) Es gibt einen Punkt $c \in G$ mit $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweisskizze:

Zur Beweisführung a) \Leftrightarrow b) zeigt man den Spezialfall, dass die Menge der Nullstellen, einer von der Nullfunktion verschiedenen Funktion f , welche analytisch auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ ist, diskret in G liegt. Wendet man diesen Satz nun nicht auf f , sondern $f - g$ an, so folgt die Behauptung.

Der Beweis a) \Leftrightarrow c) erfolgt mit Potenzreihenentwicklung und der Formel 1.3, sowie der Cauchy'schen Integralformel. \square

Satz 1.3.3 (Maximumsprinzip) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit Rand ∂G , f stetig auf \bar{G} und analytisch in G , so gilt:

$$|f(z)| \leq \max_{c \in \partial G} |f(c)| \quad z \in G$$

Vereinfacht ausgedrückt kann man sagen, dass eine analytische Funktion ihr Maximum nur am Rand annehmen kann.

Beweisskizze:

Dieser Satz folgt direkt aus der Mittelwertseigenschaft analytischer Funktionen. Er gilt tatsächlich für allgemeine subharmonische Funktionen. \square

Satz 1.3.4 (Logarithmisches Residuum) Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, α ein geschlossener Weg in G , $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch auf G und $f(z) \neq 0$, $z \in \alpha$.

Sei N definiert als die Anzahl der Nullstellen im Inneren von α und $N(a)$ die Anzahl der a -Stellen. Dann gilt

$$N(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\alpha} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - a} d\zeta.$$

Beweisskizze:

Der Beweis folgt durch Einsetzen der Potenzreihe oder alternativ mit Hilfe des Residuensatzes. \square

Satz 1.3.5 (Satz von der Gebietstreue) Sei G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, dann ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet.

Beweisskizze:

Man verwendet Satz 1.3.4 und argumentiert, dass $N(a)$ stetig von a abhängt und daher lokal konstant ist. \square

Definition 1.3.6 Eine auf ganz \mathbb{C} analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **ganze Funktion**.

Satz 1.3.7 (Satz von Liouville) Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweisskizze:

Dieser, eigentlich recht elementare Satz, folgt aus der Cauchy'schen Integralformel mit der Grenzwertbildung $r \rightarrow \infty$. \square

Definition 1.3.8 Seien G_1, G_2 Gebiete und $f : G_1 \rightarrow G_2$ eine bijektive Funktion. Wenn gilt:

$$f \text{ und } f^{-1} \text{ sind analytisch,}$$

so bezeichnet man f als **konform**.

Satz 1.3.9 (Riemannscher Abbildungssatz) Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} mit $G \neq \mathbb{C}$ und bezeichne $U_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe. Dann gibt es eine konforme Abbildung $f : G \rightarrow U_1(0)$.

Man sagt, dass G auf $U_1(0)$ konform abbildbar ist.

Beweisskizze:

Hierbei handelt es sich um einen sehr tiefliegenden Satz der Funktionentheorie. Es sollen hier nur die einzelnen Beweisschritte angegeben werden, die zum Beweis des Satzes führen.

1. Es existiert eine konforme Abbildung h auf dem Gebiet G in den Einheitskreis, mit $G \neq \mathbb{C}$.
2. Man wählt „Dehnungsabbildungen“ φ_n , welche das, in den Einheitskreis abgebildete Gebiet, in Richtung des Randes der Einheitskreisscheibe „dehnen“. Danach betrachtet man die Funktionen $\varphi_n \circ h$.
3. Unter Verwendung des Satzes von Montel zeigt man, dass der Grenzwert für eine Teilfolge $\varphi_{n(k)} \circ h$ existiert. Man definiert nun f als diesen Grenzwert.

Nach Beweis dieser drei Punkte folgt die Aussage. \square

Definition 1.3.10 Sei G ein Gebiet und $c \in G$. Es gelte

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0 \text{ und } f^{(k)}(c) \neq 0 \text{ mit } k \in \mathbb{N}.$$

Die natürliche Zahl k heißt **Nullstellenordnung** (=Vielfachheit der Nullstelle) der Funktion f im Punkt c und wir schreiben $\text{ord}_c(f) = k$.

Satz 1.3.11 (Der Weierstraßsche Produktsatz) Sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und N eine Teilmenge von U ohne Häufungspunkt in U . Jedem Punkt $c \in N$ sei eine natürliche Zahl k_c zugeordnet.

Dann existiert eine analytische Funktion $f \in H(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Nullstellenmenge von f ist N .
2. Für jede Nullstelle $c \in N$ ist die Nullstellenordnung k_c .

Bemerkung 1.3.12 *Satz 1.3.11 garantiert die Existenz von „genügend vielen“ analytischen Funktionen.*

Beweisskizze(von 1.3.11):

Man beweist zuerst den Fall $U = \mathbb{C}$ durch explizite Konstruktion einer analytischen Funktion mit den verlangten Eigenschaften (Weierstraß-Produkt). Daraus leitet man mit Hilfe topologischer Aussagen den allgemeinen Satz her. \square

Kapitel 2

Das Prinzip der Analytischen Fortsetzung

In diesem großen Kapitel wollen wir uns jetzt mit der Problematik beschäftigen, wie und wann man analytische Funktionen auf größere Gebiete fortsetzen kann. Weiters werden wir Beispiele kennen lernen, bei denen eine analytische Fortsetzung nicht mehr möglich ist. Diese Fälle werden im Abschnitt über Lückenreihen genauer betrachtet und behandelt.

2.1 Analytische Fortsetzung auf größere Gebiete

Definition 2.1.1 Seien ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $f \in H(G)$ gegeben. Für ein Gebiet $G_1 \subseteq \mathbb{C}$ mit $G \subset G_1$ und eine Funktion $f_1 \in H(G_1)$ mit $f \equiv f_1$ auf G sagt man, f_1 ist **analytische Fortsetzung** von f auf G_1 .

Lemma 2.1.2 Seien G_1, G_2 Gebiete mit $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, und $f_1 \in H(G_1), f_2 \in H(G_2)$ mit

$$f_1|_{G_1 \cap G_2} = f_2|_{G_1 \cap G_2}.$$

Die Funktion g sei definiert durch

$$g(z) := \begin{cases} f_1(z), & \text{falls } z \in G_1 \\ f_2(z), & \text{falls } z \in G_2 \end{cases}$$

So folgt, dass g analytisch auf $G_1 \cup G_2$ ist, und $g|_{G_i} = f_i$ erfüllt.

Beweis:

Auf der Menge $G' := G_1 \cap G_2$ stimmen die beiden Funktionen in jedem Punkt überein, daher ist g wohldefiniert. Als Durchschnitt offener Mengen ist auch G' offen. Sei $\zeta \in G_1 \cup G_2$, dann existiert eine Umgebung $U(\zeta)$ mit $U(\zeta) \subseteq G_1$ oder $U(\zeta) \subseteq G_2$.

Sei $U(\zeta) \subseteq G_1$. Dann ist $\lim_{z \rightarrow \zeta} g(z) = \lim_{z \rightarrow \zeta} f_1(z)$ und existiert daher. Wegen Satz 1.1.7

a) folgt die Analytizität von g .

Im Falle $U(\zeta) \subseteq G_2$ folgt der Beweisschluss analog. \square

Bemerkung 2.1.3 Seien $G, G_1 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete mit $G \subset G_1$ und sei $F \in H(G)$. Hat f eine analytische Fortsetzung auf G_1 , so ist diese aufgrund des Identitätssatzes eindeutig bestimmt. Nicht trivial ist jedoch die Frage nach der Existenz einer analytischen Fortsetzung.

Beispiel 2.1.4 Betrachten wir einmal die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Sie hat Konvergenzradius 1 und stellt daher eine analytische Funktion f auf $U_1(0)$ dar. Die bekannte Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

liefert sofort, dass die Funktion $g(z) := \frac{1}{1-z}$ eine analytische Fortsetzung von f auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ist.

Beispiel 2.1.5 Wir betrachten jetzt eine ähnliche Funktion, die sich jedoch völlig anders verhält, als die gerade eben beschriebene. Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \quad |z| < 1.$$

hat Konvergenzradius 1 und stellt daher ebenfalls eine auf $U_1(0)$ analytische Funktion dar. Der Unterschied zur Funktion in Beispiel 2.1.4 liegt darin, dass f auf kein Gebiet $G_1 \supset U_1(0)$ eine analytische Fortsetzung besitzt, d.h. der Rand $\partial U_1(0)$ ist eine Grenze, über die sich f nicht fortsetzen lässt.

Beweis:

Wir unterteilen den Beweis in zwei Schritte.

Schritt 1: Sei α ein rationales Vielfaches von 2π , etwa $2\pi \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} |f(\rho e^{i\alpha})| = \infty.$$

Beweis dieser Behauptung:

$$\begin{aligned} f(\rho e^{2\pi i \frac{p}{q}}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n!} e^{2\pi n! \frac{p}{q} i} \\ &= \sum_{n=1}^{q-1} \rho^{n!} e^{2\pi n! \frac{p}{q} i} + \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist deshalb korrekt, da $n \geq q \Rightarrow n! \frac{p}{q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{2\pi n! \frac{p}{q} i} = 1$ (Eulersche Formel).

Aber:

$$\left| \underbrace{\sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!}}_{\rightarrow 1} \right| = \sum_{n=q}^{\infty} \rho^{n!} \longrightarrow \infty \quad \text{bei } \rho \rightarrow 1-,$$

während

$$\left| \sum_{n=1}^{q-1} \rho^{n!} e^{2\pi n! \frac{p}{q} i} \right| \leq \sum_{n=1}^{q-1} \underbrace{\rho^{n!}}_{\leq 1} \underbrace{|e^{2\pi n! \frac{p}{q} i}|}_{=1} \leq q-1 \quad \forall \rho \in [0, 1),$$

woraus die Behauptung folgt.

Schritt 2: Angenommen f hat eine analytische Fortsetzung f_1 auf $G_1 \supset U_1(0)$.

Dann existiert ein offener Bogen γ des Einheitskreises, $\gamma \subset G_1$. Für jeden Punkt $e^{i\alpha} \in \gamma$ gilt:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\alpha} \\ z \in U_1(0)}} f(z) = f_1(e^{i\alpha}).$$

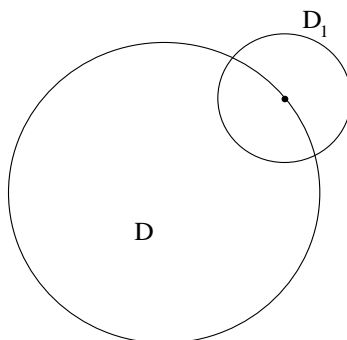
Da $\{e^{i\alpha} : \alpha \in 2\pi\mathbb{Q}\}$ dicht am Einheitskreis, so existiert ein $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q}$ mit $e^{i\alpha} \in \gamma$. Widerspruch zu Schritt 1! \square

Wir sehen an den beiden Beispielen, dass die Möglichkeit einer analytischen Fortsetzung sehr davon abhängig ist, wie sich die Funktion am „Rand“ des Gebietes verhält. Wir wollen diese Tatsache jetzt formalisieren und Randpunkte von Gebieten betrachten.

2.2 Randpunkte und Kreisscheiben

Definition 2.2.1 Sei D eine offene Kreisscheibe, $\zeta \in \partial D$ und f analytisch auf D .

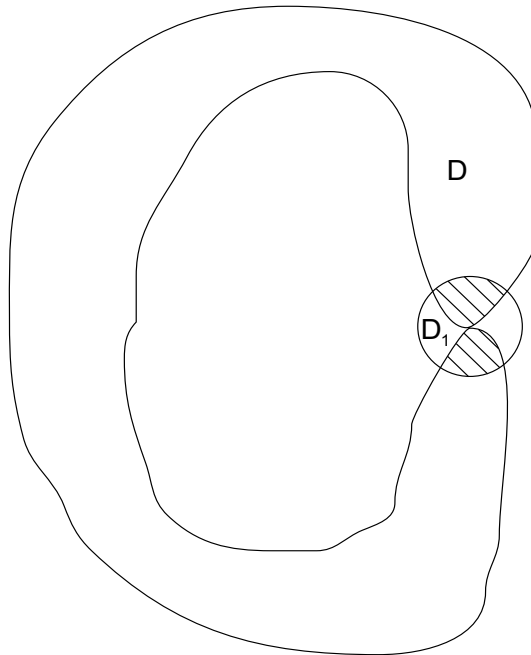
- ζ heißt **regulärer Randpunkt** von D für f , falls es eine offene Kreisscheibe D_1 um ζ gibt, sowie eine Funktion $g \in H(D_1)$ mit $g \equiv f$ auf $D \cap D_1$.
- Jeder nicht reguläre Randpunkt $\zeta \in \partial D$ für f heißt **singulär** (für f).



Bemerkung 2.2.2 Eine Funktion $f \in H(D)$ hat eine analytische Fortsetzung auf ein größeres Gebiet $\Omega \subset D$ genau dann, wenn es einen für f regulären Randpunkt $\zeta \in \partial D$ gibt.

Bemerkung 2.2.3 Man könnte auch für allgemeine Gebiete D reguläre Punkte betrachten, doch ist Vorsicht geboten, da der Durchschnitt von D mit einem Kreis D_1 um ζ in mehrere Komponenten zerfallen könnte. Die nachfolgende Skizze zeigt ein anschauliches Beispiel für so einen Fall.

Wir werden uns in diesem Kapitel nur mit dem Fall befassen, bei dem der Durchschnitt wieder eine zusammenhängende Menge ist.



Bemerkung 2.2.4 Ist ζ regulärer Randpunkt, so folgt die Existenz des Limes $\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in D}} f(z)$.
 Dass die Umkehrung nicht gilt, wird in Beispiel 2.3.4, bei den Hadamard'schen Lückenreihen, gezeigt.

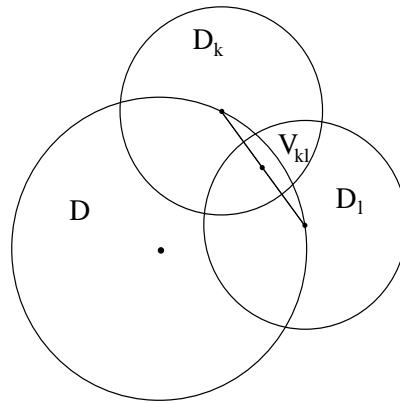
Satz 2.2.5 Sei $D = U_1(0)$, $f \in H(D)$ und habe die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von f um 0 den Konvergenzradius 1. Dann gibt es auf ∂D zumindest einen singulären Randpunkt für f .

Beweis:

Angenommen jeder Punkt $\zeta \in \partial D$ wäre regulärer Randpunkt für f .
 Daraus folgt: Es existieren endlich viele offene Kreisscheiben D_1, \dots, D_n um Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \partial D$, sowie Funktionen $g_k \in H(D_k)$ ($k = 1, \dots, n$) derart, dass gilt:

$$\partial D \subset \bigcup_{k=1}^n D_k \text{ und } g_k \equiv f \text{ auf } D \cap D_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Sei $D_k \cap D_l \neq \emptyset$ für gewisse $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Dann folgt $V_{kl} := D \cap D_k \cap D_l \neq \emptyset$, wie geometrisch sofort aus nachstehender Skizze ersichtlich ist.



Ein Punkt auf der Strecke der Mittelpunkte von D_k und D_l liegt in V_{kl} !

Aber: $g_k \equiv f \equiv g_l$ auf $V_{kl} \implies g_k \equiv g_l$ auf $D_k \cap D_l$, sodass

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ g_k(z), & z \in D_k \ (k = 1, \dots, n) \end{cases}$$

eine Funktion $F \in H(\Omega)$ definiert, wobei $\Omega := D \cup \bigcup_{k=1}^n D_k$. (siehe hierzu Lemma 2.1.2)

Jetzt ist Ω eine offene Obermenge von $\bar{D} = D \cup \partial D$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $D(0, 1 + \varepsilon) \subset \Omega$.

Andererseits ist ja F analytisch auf $\Omega \implies$ die Taylorreihe von F um 0 hat Konvergenzradius $\geq 1 + \varepsilon > 1$. Da aber $F \equiv f$ auf D , stimmt die Taylorreihe von F um 0 mit der Talorentwicklung von f um 0 überein und wir haben einen Widerspruch zu: „Taylorreihe von f um 0 hat Konvergenzradius genau 1!“ \square

2.3 Lückenreihen

Beispiel 2.1.5 ist ein Sonderfall des so genannten „*Hadamard'schen Lückensatzes*“, den wir noch beweisen werden. Grob gesprochen kann man sagen, dass bei der Talorentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ der Funktion f aus Beispiel 2.1.5 „sehr viele“ Koeffizienten a_n gleich 0 sind. Zunächst brauchen wir jedoch einmal einen Hilfssatz, das *Ostrowskische „Überkonvergenzlemma“*.

Voraussetzungen:

Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ und seien $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}, (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folgen natürlicher Zahlen mit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend und

$$(*) \quad \lambda q_k > (\lambda + 1)p_k$$

was gleichbedeutend ist mit

$$q_k > \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$, wobei die Reihe den Konvergenzradius 1 habe und

$$(**) \quad a_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } p_k < n < q_k, \ k = 1, 2, \dots$$

gelte.

Mit $s_N(z)$ bezeichnen wir im Folgenden die N-te Partialsumme der Reihe von f , also

$$s_N(z) := \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

Lemma 2.3.1 (Ostrowski) Sei $\zeta \in \partial D$ regulärer Randpunkt von f , so konvergiert die Folge $(s_{p_k}(z))_{k \in \mathbb{N}}$ in einer ganzen Umgebung von ζ .

Bemerkung 2.3.2 Man beachte, dass wegen Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau 1 die Reihe, d.h. die Folge $(s_p(z))_{p \in \mathbb{N}}$, für kein $z \notin \bar{D}$ konvergieren kann! Dagegen besagt die Behauptung, dass „für gewisse $z \notin \bar{D}$ die Teilfolge $(s_{p_k}(z))_{k \in \mathbb{N}}$ sehr wohl konvergiert, wenn die *Lückenbedingung* (**) (in Verbindung mit (*)) erfüllt ist. Dieses Phänomen bezeichnet man mit „Überkonvergenz“.

Die Bedeutungen von (**) und (*) können wie folgt beschrieben werden.

(**) besagt, dass gewisse Koeffizienten a_n , nämlich genau jene in den Lücken $n \in (p_k, q_k)$, null sind.

(*) drückt aus, dass diese Lücken schnell genug größer werden.

Beweis (von Lemma 2.3.1):

1. Wenn $g(z) := f(\zeta z)$, $z \in D$, so ist $g \in H(D)$ mit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Das bedeutet, dass g derselben Lückenbedingung (*), (**) wie f genügt und nach Voraussetzung ist $\zeta_0 = 1$ regulärer Randpunkt von g .

Wird der Satz für g bewiesen, so folgt aus der Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{p_k} a_n \zeta^k z^k \quad (\text{bei } k \rightarrow \infty)$$

für alle z in einer Umgebung von 1 auch die Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{p_k} a_n z^k \quad (\text{bei } k \rightarrow \infty)$$

in einer Umgebung von ζ , d.h. wir haben gezeigt: o.B.d.A. darf man im Satz $\zeta=1$ annehmen!

2. Nach der obigen Annahme hat jetzt f eine analytische Fortsetzung (die wir auch f nennen wollen) auf ein Gebiet $\Omega \supset D \cup \{1\}$. Wir definieren auf \mathbb{C}

$$\varphi(w) := \frac{1}{2}(w^\lambda + w^{\lambda+1})$$

und $\forall w \in \varphi^{-1}(\Omega)$

$$F(w) := f(\varphi(w)).$$

φ ist eine ganze Funktion mit $\varphi(\overline{D} \setminus \{1\}) \subset D$, weil:

$$|w| \leq 1, \quad w \neq 1 \quad \implies \quad |\varphi(w)| = \frac{1}{2} \underbrace{|w^\lambda|}_{\leq 1} \underbrace{|1+w|}_{< 2} < 1,$$

während $\varphi(1) = 1$ noch $\in \Omega$, sodass insgesamt $\varphi(\overline{D}) \subset \Omega$. Da φ stetig und $\varphi(\overline{D})$ kompakt ist, folgt:

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \varphi(U_{1+\varepsilon}(0)) \subset \Omega, \quad (2.1)$$

und nach Satz 1.3.5 ist $\varphi(U_{1+\varepsilon}(0))$ ein Gebiet, welches 1 enthält! Wegen 2.1 gilt $U_{1+\varepsilon}(0) \subseteq \varphi^{-1}(\Omega)$, also ist $F \in H(U_{1+\varepsilon}(0))$. Die Taylorreihe

$$F(w) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m w^m$$

um 0 konvergiert für alle $|w| < 1 + \varepsilon$.

$[\varphi(w)]^n$ ist Polynom in w , sagen wir $[\varphi(w)]^n = \sum_{k=\lambda n}^{(\lambda+1)n} c_k w^k$, denn alle Koeffizienten c_k dieses Polynoms mit $k < \lambda n$ oder $k > (\lambda+1)n$ müssen ja gleich 0 sein!

Also ist der höchste (wirklich) vorkommende Exponent von $[\varphi(w)]^{p_k}$ gerade $(\lambda+1)p_k$, während der niedrigste (wirklich) vorkommende Exponent von $[\varphi(w)]^{q_k}$ genau λq_k ist. Die Voraussetzungen (*) $(\lambda+1)p_k < \lambda q_k$ und $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $p_k < n < q_k$ bedeuten also nichts anderes, als dass bei Umrechnung der Reihe

$$F(w) = f(\varphi(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{[\varphi(w)]^n}_{(|\cdot| < 1 \text{ für } w \in \overline{D} \setminus \{1\})}$$

in Potenzen von w sich die Terme mit $n \leq p_k$ mit denen für $n > p_k$ nicht überlagern!

Wegen absoluter Konvergenz bei $|w| < 1$ darf man aber umordnen und erhält somit, dass aus Entwicklung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi(w)]^n$ in Potenzen von w die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_m w^m = F(w)$ berechnet werden kann. Vergleich der Partialsummen liefert nun:

$$\sum_{n=0}^{p_k} a_n [\varphi(w)]^n = \sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k} b_m w^m, \quad |w| < 1. \quad (2.2)$$

Hier sieht man aber, weil bei $k \rightarrow \infty$ als Teilfolge von

$$\left(\sum_{m=0}^M b_m w^m \right)_{M \in \mathbb{N}}$$

die Reihe $\sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k} b_m w^m$ ebenfalls auf $D(0, 1 + \varepsilon)$ gegen $F(w)$ konvergieren muss, dass

$$s_{p_k}(\varphi(w)) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n [\varphi(w)]^n$$

konvergent für $|w| < 1 + \varepsilon$ ist.

Somit konvergiert bei $k \rightarrow \infty$

$$s_{p_k}(z) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n z^n \quad \forall z \in \varphi(U_{1+\varepsilon}(0)),$$

also auf einer ganzen offenen Umgebung von $1 = \varphi(1)$, wie wir behauptet hatten. \square

Wir haben jetzt schon die meiste Arbeit auf dem Weg zum *Hadamard'schen Lückensatz* geleistet. Dieser ist jetzt mit den Ergebnissen des gerade bewiesenen Lemmas nicht mehr schwer zu zeigen.

Satz 2.3.3 (Hadamard'scher Lückensatz) Sei $\lambda \in \mathbb{N}$ fest und $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit

$$p_{k+1} > \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)p_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

Wenn $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{p_k}$ Konvergenzradius 1 hat, dann kann man f nicht über den Rand ∂D des Einheitskreises hinweg analytisch fortsetzen.

Beweis:

Angenommen f ließe sich auf ein größeres Gebiet $\Omega \supset D$ analytisch fortsetzen. Dann existiert aufgrund der Bemerkung 2.2.2 ein regulärer Randpunkt $\zeta \in \partial D$.

Wenn $q_k := p_{k+1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ gesetzt wird, sind alle Voraussetzungen von Lemma 2.3.1 erfüllt.

Die Folge $(s_{p_k}(z))_{k \in \mathbb{N}}$ aus Lemma 2.3.1 ist aber, bis auf gewisse (jeweils endlich viele) Wiederholungen, nichts anderes als die Teilsummenfolge von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{p_k}$. Wir

erhalten dann, dass $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{p_k}$ auch für gewisse z mit $|z| > 1$ konvergiert, ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{p_k}$ genau 1 ist! \square

Um unsere neu gewonnenen Erkenntnisse besser verstehen zu können, werden wir uns jetzt einigen Beispielen widmen, die demonstrieren sollen, wie sich Satz 2.3.3 in der Praxis anwenden lässt.

Beispiel 2.3.4

1. Bei der Reihe

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$$

gilt $(k+1)! = (k+1)k! \geq 2k!$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), sodass 2.3 aus Satz 2.3.3 für $p_k = k!$ und $\lambda = 2$ erfüllt ist. Mit Satz 2.3.3 erhält man daher einen neuen Beweis von Beispiel 2.1.5.

2. Bei

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$$

hat man $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), d.h. 2.3 aus Satz 2.3.3 für $p_k = 2^k$, $\lambda =$

2. Deshalb ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$ nicht über ∂D hinaus fortsetzbar.

3. Wir betrachten $f(z) = \sum_{n=a}^{\infty} a_n \eta_n z^n$ für $|z| < 1$, wobei

$$a_n := \begin{cases} 1, & n = 2^k, k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\eta_n := \exp(-\sqrt{n})$. Wegen

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n \eta_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\exp(-\sqrt{2^k}))^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(-\frac{1}{\sqrt{2^k}}) = 1$$

hat die Reihe genau Konvergenzradius 1. Andererseits sind die Lücken dieser Reihe dieselben wie bei der Reihe aus Punkt 2). Also ist Voraussetzung 2.3 aus Satz 2.3.3 erfüllt, und man kann somit f nicht über ∂D analytisch fortsetzen.

In Punkt 2) von Beispiel 2.3.4 gilt

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |f(re^{i\alpha})| = \infty \quad (2.4)$$

für alle $\alpha = 2\pi \frac{p}{2^m}$, $p \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Man könnte also auch dieses Beispiel wie in Beispiel 2.1.5 herleiten.

Im Allgemeinen besteht jedoch kein Zusammenhang zwischen der Existenz des Limes 2.4 und der analytischen Fortsetzbarkeit von f . Betrachten wir die Funktion f aus Beispiel 2.3.4 Punkt 3).

Für beliebiges $k = 0, 1, 2, \dots$ berechnet sich bei $|z| < 1$ mittels gliedweiser Differentiation:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n \eta_n z^{n-k},$$

und wegen

$$\begin{aligned} & \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \underbrace{a_n}_{\leq 1} \eta_n \underbrace{|z|^{n-k}}_{\leq 1} \\ & \leq \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{(k+l)(k+l-1)\dots(l+1)}_{(1)} \underbrace{\exp(-\sqrt{k+l})}_{(2)} < +\infty \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{(3)} \end{aligned}$$

(1) Polynom mit höchstem Grad $(k-1)$ in $l \in \mathbb{N}$. (Koeffizienten fest mit $k \in \mathbb{N}_0$).

(2) geht bei $l \rightarrow \infty$ schneller gegen 0, als ein beliebiges Polynom in l wächst.

(3) bei $l \geq L$ genügend groß: etwa $\leq C \frac{1}{l^2}$,

erhält man (sogar) bei $|z| \leq 1$ absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe.

Zusammenfassend kann man sagen, dass sich $f^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) jeweils (mittels der obigen Reihe) zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Einheitskreis \overline{D} fortsetzen lässt.

Dies gilt, obwohl ∂D eine Grenze ist, über die man nicht analytisch fortsetzen kann! Nur, weil eine Funktion nicht über einen bestimmten Rand (Grenze) analytisch hinweg fortgesetzt werden kann, bedeutet das nicht, dass f (oder eine Ableitung von f) bei Annäherung von D an den Rand eine Unstetigkeitsstelle haben müsste, geschweige denn, betragsmäßig $\rightarrow \infty$ zu gehen habe!

Abschließend wird noch der schärfste Nichtfortsetzbarkeitssatz angegeben, der das Konzept der Lückenreihe verwendet und auch den Hadamard'schen Lückensatz umfasst. Auf den Beweis soll hier verzichtet werden, da es sich um einen sehr tiefliegenden Satz handelt und die Beweisführung sehr technisch ist. Ein ausführlicher Beweis findet sich zum Beispiel bei [D], 127-133.

Satz 2.3.5 Sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{m_{\nu}}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und es gelte $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{m_{\nu}}{\nu} = \infty$.
Es folgt, dass f nicht über die Scheibe $U_R(0)$ hinweg fortgesetzt werden kann.

2.4 Stetige Fortsetzung und freie Randbögen

Wir haben gesehen, dass für eine Funktion f , die analytisch in D und stetig in \bar{D} ist, durchaus jeder Randpunkt singulär sein kann. Hier wollen wir zeigen, dass es Situationen gibt, bei denen Stetigkeit die Existenz von singulären Punkten am Rand ausschließt.

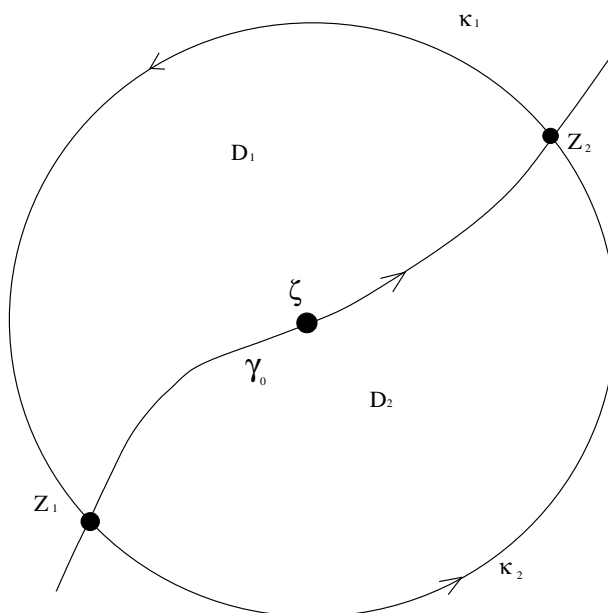
Definition 2.4.1 Seien G_1 und G_2 Gebiete in \mathbb{C} mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Weiters sei γ ein offener oder geschlossener Weg mit $\gamma \subseteq \partial G_1 \cap \partial G_2$, d.h.

$$\begin{aligned} \gamma &: (0, 1) \rightarrow \partial G_1 \cap \partial G_2 \\ &\text{oder} \\ \gamma &: [0, 1] \rightarrow \partial G_1 \cap \partial G_2, \gamma(0) = \gamma(1), \end{aligned}$$

stetig und stückweise differenzierbar.

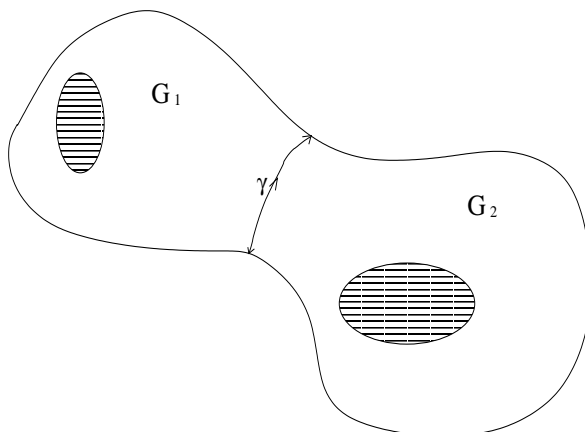
Dann heißt γ ein freier Randbogen von G_1 und G_2 , wenn es zu jedem $\zeta \in \gamma$ einen (in der Orientierung von γ) vor ζ gelegenen Punkt z_1 und einen hinter ζ gelegenen Punkt z_2 gibt, sowie für $j=1,2$ Wege κ_j in G_j , die z_1 und z_2 verbinden, sodass gilt: Gemeinsam mit dem (offenen) Teilstück γ_0 von γ zwischen z_1 und z_2 berandet κ_j ein Teilgebiet G_j^* von G_j positiv und $G^* := G_1^* \cup G_2^* \cup \gamma_0$ ist wieder ein Gebiet.

Skizze zur Definition 2.4.1 und Lemma 2.4.2.



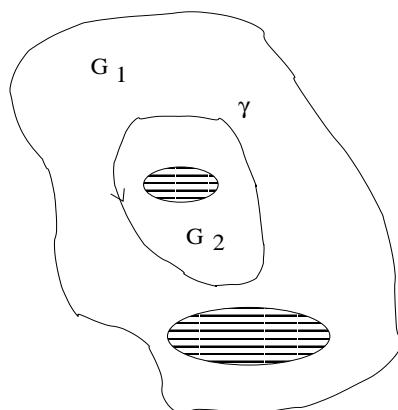
Beispiel für einen offenen Randbogen

γ offen



Beispiel für einen geschlossenen Randbogen ($\gamma = \partial G_1$)

γ geschlossen



Lemma 2.4.2 *Wichtige Eigenschaften:*

- Für einen freien Randbogen γ von G_1 und G_2 ist $G := G_1 \cup G_2 \cup \gamma$ ein Gebiet!
- Ein Weg γ ist ein freier Randbogen, falls es für jedes $\zeta \in \gamma$ eine offene Kreisscheibe D gibt, in der γ von Rand zu Rand läuft und es gilt (siehe Skizze unten):

$$D_j \cup (\kappa_j \setminus \{z_1, z_2\}) \subset G_j, \quad j = 1, 2$$

und

D_1 wird von $\gamma_0 + \kappa_1$ und D_2 von $\kappa_2 - \gamma_0$ positiv berandet.

Definition 2.4.3 Die Menge der stetigen Funktionen auf einer Menge G bezeichnen wir mit $C(G)$.

Satz 2.4.4 Seien $G_j, j=1,2$ Gebiete mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ und sei γ ein freier Randbogen von G_1 und G_2 . Setze $G := G_1 \cup G_2 \cup \gamma$.

Ist $f_j \in H(G_j) \cap C(G_j \cup \gamma), j=1,2$ gegeben und gilt $f_1(z) = f_2(z), z \in \gamma$, so existiert eine analytische Funktion $F \in H(G)$ mit $F|_{G_j} = f_j$ für $j=1,2$.

Beweis:

Wir setzen

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1 \cup \gamma \\ f_2(z), & z \in G_2 \cup \gamma \end{cases}$$

Wegen $f_1 \equiv f_2$ auf γ definiert dies eine Funktion auf dem Gebiet $G = G_1 \cup G_2 \cup \gamma$. Wir wollen zeigen, dass F analytisch auf G ist. Da aber F sicher (per definitionem) analytisch für alle Punkte aus $G_1 \cup G_2$ ist, bleibt nur noch die Analytizität in einem beliebigen, fest vorgegebenen Punkt $\zeta \in \gamma$ zu zeigen.

Die Definition 2.4.1 liefert uns Punkte $z_1, z_2 \in \gamma$ vor bzw. hinter ζ (in der Orientierung von γ), sowie Integrationswege κ_1 bzw. κ_2 , die z_1 und z_2 (bis auf die Endpunkte) in G_1 bzw. G_2 verbinden, derart, dass (geeignet orientiert) $\gamma_0 + \kappa_1$ bzw. $\kappa_2 - \gamma_0$ Teilgebiete $G_1^* \subset G_1$ bzw. $G_2^* \subset G_2$ positiv berandet werden.

Aufgrund der Tatsache, dass $G^* := G_1^* \cup G_2^* \cup \gamma_0$ ein Gebiet ist und $\zeta \in G^*$ gilt, reicht es aus, $F \in H(G^*)$ zu beweisen.

Wir betrachten für beliebiges $z \in G_1^* \cup G_2^*$

$$F_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0 + \kappa_1} \frac{f_1(w)}{w-z} dw \quad \text{und} \quad F_2(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\kappa_2 - \gamma_0} \frac{f_2(w)}{w-z} dw.$$

Wir erhalten aus der Cauchy'schen Integralformel für f_1

$$F_1 \equiv f_1 \text{ auf } G_1^*, \quad F_2 \equiv f_2 \text{ auf } G_2^*,$$

und der Cauchy'sche Integralsatz (für $\frac{f_j(w)}{w-z}$) liefert

$$F_2 \equiv 0 \text{ auf } G_1^*, \quad F_1 \equiv 0 \text{ auf } G_2^*.$$

Es ergibt sich aufgrund von $f_1 \equiv f_2$ auf γ_0

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\gamma_0} \frac{f_1(w)}{w-z} dw + \oint_{-\gamma_0} \frac{f_2(w)}{w-z} dw \right) = 0.$$

Wir definieren für $z \in G_1^* \cup G_2^* \cup \gamma_0$

$$\tilde{F}(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\kappa_1} \frac{f_1(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\kappa_2} \frac{f_2(w)}{w-z} dw.$$

\implies

- \tilde{F} ist analytisch auf G^* ,
- $\tilde{F} = F, z \in G^*$,

denn $\tilde{F}(z) = F_1(z) + F_2(z)$, für $z \in G_1^* \cup G_2^*$ und F, \tilde{F} stetig.

Hiermit wäre die Existenz der gesuchten Funktion bewiesen.
Die Eindeutigkeit der Funktion F auf G mit $F|_{G_1} \equiv f_1$ sowie $F|_{G_2} \equiv f_2$ wird schon aufgrund ihrer Stetigkeit gewährleistet. \square

Bemerkung 2.4.5 *Hier sei angemerkt, dass in Lemma 2.1.2 der Schnitt beider Gebiete nicht leer sein durfte. Hier ist jetzt der Durchschnitt leer, doch existiert immerhin noch ein Randbogen, der eine analytische Fortsetzung möglich macht.*

Wir erhalten jetzt eine interessante Variante des Identitätssatzes:

Korollar 2.4.6 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, γ freier Randbogen von G in dem Sinne, dass es ein (geeignetes) Gebiet \tilde{G} gibt mit γ freier Randbogen von G und \tilde{G} gemäß Definition 2.4.1.*

Wenn jetzt $f \in H(G) \cap C(G \cup \gamma)$ mit $f \equiv 0$ auf γ , so muss $f \equiv 0$ auf G gelten.

Beweis:

Wegen des Satzes 2.4.4 erhält man zu f auf $G \cup \gamma$ und der Funktion $\equiv 0$ auf $\tilde{G} \cup \gamma$ eine analytische Fortsetzung F auf das Gebiet $G \cup \tilde{G} \cup \gamma$. Nach dem Identitätssatz muss $F \equiv 0$ gelten. \square

Satz 2.4.7 (Kleiner Schwarz'scher Spiegelungssatz)

Sei G ein in der (offenen) oberen Halbebene liegendes Gebiet, welches ein (offenes) Intervall I der reellen Achse als freien Randbogen enthält, in dem Sinne, dass I ein freier Randbogen von G und $\tilde{G} := \{\bar{z}; z \in G\} \subset I$ ist.

Falls $f \in H(G) \cap C(G \cup I)$ reellwertig auf I , so gilt:

f ist über I hinaus mittels $\overline{f(\bar{z})}$ für $z \in \tilde{G}$ auf $G \cup \tilde{G} \cup I$ analytisch fortsetzbar.

Beweis:

Die Funktion g auf $\tilde{G} \cup I$, $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$, ist (wie man leicht durch Potenzreihenentwicklung zeigen kann) analytisch auf \tilde{G} und stetig auf $\tilde{G} \cup I$, mit $g \equiv f$ auf I (aufgrund von $f|_I$ reellwertig). Aus 2.4.4 folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.4.8

- Statt eines Gebietes in der Halbebene und eines Intervalls auf der reellen Achse kann man auch Gebiete an einem Kreis und Kreisbögen als Randstücke zulassen und dabei „Inversion am Kreis“ anstelle der „Spiegelung an der reellen Achse“ benutzen.
- Es gibt auch einen allgemeineren „großen Spiegelungssatz von H.A. Schwarz“, wobei dieser jedoch eine Folgerung des kleinen Satzes durch *konforme Abbildung* ist.

Kapitel 3

Generelle Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung

Das vorangegangene Kapitel hat uns gezeigt, dass es oft sehr schön möglich ist, analytische Fortsetzung zu betreiben, es andererseits aber Fälle gibt, bei denen man an „Grenzen“ stößt.

Wir wollen uns jetzt mit einem Satz der Funktionentheorie beschäftigen, der uns zeigt, dass man zu *jedem* Gebiet G in \mathbb{C} eine analytische Funktion $f \in H(G)$ finden kann, die *nicht* über den Rand von G hinaus analytisch fortgesetzt werden kann!

3.1 Holomorphiegebiete

Definition 3.1.1 (Holomorphiegebiet) Ein Gebiet G in \mathbb{C} heißt das **Holomorphiegebiet** einer in G analytischen Funktion f , wenn für jeden Punkt $c \in G$ die Konvergenzkreisscheibe der Taylorreihe von f um c in G liegt.

Definition 3.1.2 (Maximales Existenzgebiet) Sei f eine analytische Funktion auf dem Gebiet G . Man sagt G ist das **maximale Existenzgebiet** von f , falls gilt:

Jedes Gebiet $\tilde{G} \supseteq G$, in dem es eine Funktion $\tilde{f} \in H(\tilde{G})$ mit $\tilde{f}|_G = f$ gibt, stimmt mit G überein.

Es folgt sofort: Ist G das Holomorphiegebiet von f , so ist G das maximale Existenzgebiet von f .

Beweis:

Sei G das Holomorphiegebiet von f und angenommen es gäbe ein Gebiet $\tilde{G} \supset G$ von f . Wir wählen einen Punkt $p \in \tilde{G} \cap \partial G$. Die Funktion f lässt sich um p in eine Potenzreihe mit Radius r entwickeln.

Jetzt wählen wir einen Punkt $q \in G$, mit $|p - q| < \frac{r}{2}$. Entwickeln wir \tilde{f} um q in eine Potenzreihe, so konvergiert diese bis zum Rand des Konvergenzkreises von \tilde{f} um p . Da $\tilde{f}|_G = f$, stimmen die Potenzreihen von f und \tilde{f} mit Entwicklungspunkt q überein, und f überein. Der Konvergenzradius von f um q würde aber über den Rand von G hinausragen. Ein Widerspruch zur Annahme, G sei Holomorphiegebiet von f . \square

Um die beiden Begriffe etwas besser unterscheiden zu können, wollen wir uns anhand einiger Beispiele klar machen, dass im Allgemeinen der Begriff des Holomorphiegebiets stärker ist als der des maximalen Existenzgebiets.

Beispiel 3.1.3 Die geschlitzte Ebene \mathbb{C}^- ist z.B. das maximale Existenzgebiet der Funktionen \sqrt{z} , $\log(z) \in H(\mathbb{C}^-)$, jedoch nicht deren Holomorphiegebiet. Die Taylorreihe von \sqrt{z} und $\log(z)$ um $c \in \mathbb{C}^-$ hat $B_{|c|}(c)$ als Konvergenzkreis, und es gilt $B_{|c|}(c) \not\subset \mathbb{C}^-$, falls $\operatorname{Re}(c) < 0$.

Bemerkung 3.1.4 Die Funktionen \sqrt{z} und $\log(z)$ sind zwar „von oben und unten“ in jedem Punkt auf der negativen reellen Achse analytisch fortsetzbar, alle Randpunkte von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ sind aber singular für \sqrt{z} und $\log(z)$ in dem Sinne, dass keiner eine Umgebung U mit einer Funktion $g \in H(U)$ hat, die in $U \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$ mit \sqrt{z} bzw. $\log(z)$ übereinstimmen.

Dieses Phänomen kann z.B. bei Kreisscheiben nicht auftreten: Sei $G = U_1(0)$. Ist G das maximale Existenzgebiet von $f \in H(G)$, so ist G auch das Holomorphiegebiet von f .

Beweis:

Sei U eine Kreisscheibe mit $f \in H(U)$ und U das maximale Existenzgebiet von f . Angenommen U ist nicht das Holomorphiegebiet von f .

Wir können daher f um einen Punkt p in eine Potenzreihe \tilde{f} entwickeln, deren Konvergenzkreisscheibe K nicht ganz in U liegt. Die Menge $W := K \cap U$ ist wieder ein Gebiet, da U und K beide konvex sind. Auf ganz W stimmen \tilde{f} und f überein, denn sie haben am Entwicklungspunkt die gleichen Ableitungen und W ist Gebiet. Hieraus folgt aber nach Lemma 2.1.2, dass wir ein Gebiet $V := U \cup K \supset U$ und eine analytische Funktion $g \in H(V)$ gefunden haben. Ein Widerspruch zur Annahme U sei maximales Existenzgebiet. \square

Als Beispiel sei hier an Kapitel 2 erinnert, wo $G = U_1(0)$ das Holomorphiegebiet von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ ist.

Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts wird der folgende Satz bilden:

Satz 3.1.5 (Existenzsatz) Zu jedem Gebiet G in \mathbb{C} gibt es eine in G analytische Funktion f , sodass G das Holomorphiegebiet von f ist.

Bemerkung 3.1.6 Die folgende schwache Form des Existenzsatzes ist sehr leicht zu gewinnen:

Jedes Gebiet G ist das maximale Existenzgebiet einer Funktion $f \in H(G)$.

Beweis:

Man wähle eine diskrete abgeschlossene Menge A in G , die sich gegen jeden Randpunkt von G häuft. Nach dem Produktsatz 1.3.11 existiert eine Funktion $f \in H(G)$ mit Nullstellenmenge $N(f) = A$. Wegen des Identitätssatzes gibt es keine analytische Fortsetzung von f auf ein Gebiet $\hat{G} \supset G$. \square

Für unseren ersten Beweis des Existenzsatzes 3.1.5 verwenden wir „GOURSATSche Reihen“.

Lemma 3.1.7 Wir fixieren eine Folge a_1, a_2, \dots in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| < \infty$ und eine Folge b_1, b_2, \dots von paarweise verschiedenen Punkten in \mathbb{C} . Wir bezeichnen mit A den Abschluss der Menge $\{b_1, b_2, \dots\}$ in \mathbb{C} .

$$\text{Die Reihe } f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l}{z - b_l} \text{ konvergiert kompakt in } \mathbb{C} \setminus A. \quad (3.1)$$

Beweis:

Ist $K \subseteq \mathbb{C} \setminus A$ kompakt, so ist der Abstand d zwischen K und A positiv. Da $|z - b_l| \geq d$ für $z \in K$, so folgt $\sum_{l=m}^M \left\| \frac{a_l}{z - b_l} \right\|_K \leq d^{-1} \sum_{l=m}^M |a_l|$. Wegen des Cauchy'schen Konvergenzkriteriums ist der Beweis geführt. \square

Die durch Gleichung 3.1 definierte Funktion $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ wird bei radialer Annäherung an die Punkte von A beliebig groß. Folgendes Lemma präzisiert diese Aussage:

Lemma 3.1.8 Es sei B eine Kreisscheibe in $\mathbb{C} \setminus A$, sodass ein Folgenglied b_n auf ∂B liegt. Dann gilt $\lim_{w \rightarrow b_n} f(w) = \infty$, wenn w längs des Radius von B nach b_n gegen b_n strebt.

Beweis:

Liegt w auf dem Radius von B nach b_n , so gilt:

$$|w - b_n| < |w - b_l| \quad \text{für alle } l \neq n. \quad (3.2)$$

Sei $p > n$ so gewählt, dass $\sum_{l=p+1}^{\infty} |a_l| \leq \frac{1}{2}|a_n|$. Schreibt man Gleichung 3.1 in der Form

$$f(z) := \frac{a_n}{z - b_n} + g(z) + \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{a_l}{z - b_l} \quad \text{mit} \quad g(z) := \left(\sum_{l=1}^p \frac{a_l}{z - b_l} \right) - \frac{a_n}{z - b_n},$$

so folgt wegen Gleichung 3.2 für alle w auf dem Radius von B nach b_n :

$$\frac{|a_l|}{|w - b_l|} \leq \frac{|a_l|}{|w - b_n|} \quad \text{und daher}$$

$$\sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{|a_l|}{|w - b_l|} \leq \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{|a_l|}{|w - b_n|} = \frac{1}{|w - b_n|} \sum_{l=p+1}^{\infty} |a_l| \leq \frac{1}{2} \frac{|a_n|}{|w - b_n|}.$$

Es folgt weiter (Dreiecksungleichung nach unten)

$$|f(w)| \geq \frac{|a_n|}{|w - b_n|} - |g(w)| - \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{|a_l|}{|w - b_l|} \geq \frac{1}{2} \frac{|a_n|}{|w - b_n|} - |g(w)|.$$

Da $|g(w)|$ bei Annäherung an b_n endlich bleibt, folgt die Behauptung. \square

Definition 3.1.9 Ist b ein Randpunkt von G , so heißt eine Scheibe $V \subset G$ ein **Sichtkreis** zu b , wenn $b \in \partial V$. Weiters heißt b ein (aus G) **sichtbarer Randpunkt** von G , wenn es einen Sichtkreis zu b gibt.

Gebiete haben i.a. nicht sichtbare Randpunkte. So sind z.B. in Quadraten die Eckpunkte nicht sichtbar.

Definition 3.1.10 Sei U eine offene Menge. Unter einer **Komponente** von U verstehen wir ein nichtleeres maximales Teilgebiet von U .

Definition 3.1.11 (Gut verteilte Randmengen) Eine Menge M von sichtbaren Randpunkten von G heißt **gut verteilt**, wenn gilt:

Ist B eine Scheibe um einen Punkt $c \in G$, die ∂G trifft, so liegt in der Komponente von $B \cap G$, die c enthält, ein Sichtkreis V zu einem Punkt $b \in M \cap B$.

Mit diesen Definitionen gewinnen wir ein erstes Kriterium für Holomorphiegebiete.

Satz 3.1.12 (Kriterium für Holomorphiegebiete) Sei G ein Gebiet. Ist $\{b_1, b_2, \dots\} \subset \partial G$ eine abzählbare, gut verteilte Randmenge, so ist G das Holomorphiegebiet jeder Funktion

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_v}{z - b_v}, \quad z \in G, \quad \text{wobei } a_v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \sum_{v=1}^{\infty} |a_v| < \infty.$$

Beweis:

Wegen $\{b_1, b_2, \dots\} \subseteq \partial G$ gilt $f \in H(G)$ nach Satz 3.1.7. Sei $c \in G$ und B die Konvergenzkreisscheibe der Taylorreihe h von f um c . Angenommen $B \cap \partial G \neq \emptyset$, so liegt wegen Definition 3.1.11 in der Komponente W von $B \cap G$, die c enthält, ein Sichtkreis V zu einem Punkt $b_n \in B$. Da $h|_W = f|_W$, strebt h nach Hilfssatz 3.1.8 gegen ∞ , wenn man sich b_n längs des nach b_n führenden Radius von V nähert. Es ist aber h bei b_n stetig, was zu einem Widerspruch führt. Es folgt $B \subseteq G$. \square

Zu guter Letzt brauchen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 3.1.13 Ist $G \neq \mathbb{C}$, so gibt es gut verteilte abzählbare Randmengen M zu G .

Beweis:

Sei R abzählbar und dicht in G , z.B. $R = (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap G$. Zu jedem $\zeta \in R$ wähle man $b \in \partial G$ auf dem Rand des *größten* Kreises $V \subseteq G$ um ζ . Die Menge M aller dieser sichtbaren Randpunkte b ist abzählbar.

Sei nun B eine Scheibe um $c \in G$, die ∂G trifft. Wählt man $\zeta \in R$ nahe genug bei c , so liegt die größte Scheibe $V \subseteq G$ um ζ einschließlich ∂V in B und es gilt $c \in V$. Nach Konstruktion von M ist V der Sichtkreis zu einem Punkt $b \in M$. Da $b \in \partial V \subset B$ und da $V \subseteq B \cap G$ wegen $c \in V$ in der Komponente von $B \cap G$ durch c liegt, so ist der Beweis geführt. \square

Beweis (von Satz 3.1.5):

Mit Satz 3.1.12 und Lemma 3.1.13 folgt der von uns angestrebte Beweis des Existenzsatzes unmittelbar. \square

Zum Schluss wollen wir unsere Vorstellung über Holomorphiegebiete etwas präzisieren und einen Satz zeigen, der die Eigenschaften eines Holomorphiegebiets deutlich herausstreicht. Zuerst brauchen wir aber das folgende Lemma.

Lemma 3.1.14 *Seien G, G' Gebiete in \mathbb{C} und W eine Komponente von $G \cap G'$. Dann gilt:*

1. $G' \cap \partial W \subseteq \partial G$
2. Falls $G' \not\subseteq G$, so ist $G' \cap \partial W$ nicht leer.

Beweis:

ad 1) Sei $q \in G' \cap \partial W$. Wegen $\partial W \subset \overline{W} \subset \overline{G}$ folgt $q \in \overline{G}$. Da $q \in G'$ wegen $q \in G'$ zu $q \in W$ führt, was $q \in \partial W$ widerspricht, so folgt $q \in \overline{G} \setminus G = \partial G$.

ad 2) Sei $G' \not\subseteq G$. Dann ist $G' \setminus W$ nicht leer, denn sonst müsste wegen $W \subseteq G'$ gelten $W = G'$, was wegen $W \subset G$ zum Widerspruch $G' \subset G$ führen würde. Da $G' = W \cup (G' \setminus W)$ und da W offen und G' zusammenhängend ist, ist $G' \setminus W$ nicht offen in \mathbb{C} . Sei $p \in G' \setminus W$ kein innerer Punkt von $G' \setminus W$. Dann ist $U \cap W \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von p , d.h. $p \in \partial W$. Es folgt $p \in G' \cap \partial W$. \square

Satz 3.1.15 *Sei G ein Gebiet. Folgende Aussagen über eine Funktion $f \in H(G)$ sind äquivalent:*

- i) Das Gebiet G ist das Holomorphiegebiet von f .
- ii) Es gibt kein Gebiet $\tilde{G} \not\subseteq G$ mit einer Funktion $\tilde{f} \in H(\tilde{G})$, sodass die Menge $\{z \in G \cap \tilde{G} : f(z) = \tilde{f}(z)\}$ innere Punkte hat.
- iii) Es existiert kein Randpunkt von G für den man eine Umgebung U mit $g \in H(U)$ finden kann, und es stimmen f und g auf einer Komponente $U \cap G$ überein.

Beweis:

Wir beweisen die Äquivalenzen des Satzes in der Form $\neg i) \Rightarrow \neg ii) \Rightarrow \neg iii) \Rightarrow \neg i)$.

$\neg i) \Rightarrow \neg ii)$. Es gibt ein $c \in G$, sodass die Konvergenzkreisscheibe \tilde{G} der Taylorreihe \tilde{f} von f um c nicht in G liegt. Da $\tilde{f} \in H(\tilde{G})$ und $f|_W = \tilde{f}|_W$ auf der Komponente W von $G \cap \tilde{G}$ durch c , so folgt $\neg ii)$.

$\neg ii) \Rightarrow \neg iii)$. Es sei $\tilde{G} \not\subseteq G$, $\tilde{f} \in H(\tilde{G})$ und W eine Komponente von $G \cap \tilde{G}$ mit einem inneren Punkt p . Aus dem Identitätssatz folgt nun, dass $f|_W = \tilde{f}|_W$. Nach dem vorangegangenen Lemma gibt es einen Punkt $p \in \tilde{G} \cap \partial W \subseteq \partial G$. Man kann zeigen, dass gut verteilte Randmengen dicht am Rand von G liegen, daher dürfen wir annehmen, dass unser Punkt p ein sichtbarer Randpunkt ist. Wir wählen eine Scheibe $U \subset \tilde{G}$ um p und einen Sichtkreis $V \subseteq W$ zu $p \in \partial W$. Für $g := \tilde{f}|_U$ folgt $g|_V = f|_V$ (da $V \cap U \subset W$), womit der Beweis geführt ist.

$\neg iii) \Rightarrow \neg i)$. Es sei $p \in \partial G$ nicht singular für f und sei die Scheibe U und die Funktion g entsprechend gewählt. Weiters definieren wir $W := U \cap G$. Sei r der Konvergenzradius der Taylorreihe von g um p . Wir wählen ein $c \in W$ mit $|c - p| < \frac{r}{2}$. Die Konvergenzkreisscheibe der Taylorreihe von g um c enthält dann den Punkt $p \in \partial G$. Da f und g um $c \in W$ dieselbe Taylorreihe haben, ist G nicht

das Holomorphiegebiet von f . \square

Es soll hier noch ein zweiter Beweis von Satz 3.1.5 dargelegt werden. Er verwendet den Begriff der randnahen Mengen und kann relativ schnell aus Satz 3.1.15 gewonnen werden.

Definition 3.1.16 (Randnahe Mengen) Eine abgeschlossene und diskrete Menge A in einem Gebiet G heißt **randnahe**, wenn gilt:

Sei $\tilde{G} \subset \mathbb{C}$ irgendein Gebiet und W eine Komponente von $G \cap \tilde{G}$, so ist jeder Punkt von $\tilde{G} \cap \partial W$ Häufungspunkt von $A \cap W$.

Wir erhalten mit diesem Begriff ein zweites Kriterium für Holomorphiegebiete:

Satz 3.1.17 Ist die Nullstellenmenge $N(f)$ der Funktion $f \in H(G)$ randnahe in G , so ist G das Holomorphiegebiet von f .

Beweis:

Wir werden zeigen, dass Aussage iii) von Satz 3.1.15 zutrifft.

Angenommen es gäbe einen Punkt $p \in \partial G$, eine Kreisscheibe U um p und eine Funktion $g \in H(U)$, sodass $f|_W = g|_W$ auf einer Komponente W von $G \cap U$ mit $p \in \partial W$.

Da $N(f)$ randnahe in G ist, so ist p ein Häufungspunkt von $N(f) \cap W$. Da weiters $N(f) \cap W = N(g) \cap W$, so folgt $g \equiv 0$ wegen des Identitätssatzes. Hieraus würde $f \equiv 0$ folgen, was nicht möglich ist, da $N(f)$ als randnahe Menge diskret in G ist. \square

Es ist nicht immer selbstverständlich, dass randnahe Mengen existieren. Wir werden aber im folgenden Satz sehen, dass in den meisten Fällen die Existenz gewährleistet ist.

Lemma 3.1.18 Sei $G \neq \mathbb{C}$, so gibt es randnahe Mengen A in G .

Beweis:

Die Menge $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap G$ wird zu einer Folge ζ_1, ζ_1, \dots angeordnet. In der größten Scheibe $U_\nu \subset G$ um ζ_ν wähle man einen Punkt a_ν mit $d(a_\nu, \partial G) < \frac{1}{\nu}$. Sei $A := \{a_1, a_2, \dots\}$. Da jedes Kompaktum $K \subset G$ einen positiven Randabstand $d(K, \partial G)$ hat, so ist $A \cap K$ stets endlich. D.h. A ist diskret und abgeschlossen in G .

Seien nun \tilde{G}, W wie in Definition 3.1.16 und sei $p \in \tilde{G} \cap \partial W$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subset G$ einen rationalen Punkt $\zeta_k \in U_\varepsilon(p) \cap W$ mit $|p - \zeta_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Die größte in G enthaltene Kreisscheibe U_k um ζ_k liegt nun, da $p \in \partial G$ nach Lemma 3.1.14, in $U_\varepsilon(p)$. Da $U_k \cap W \neq \emptyset$, so folgt $U_k \subset W$, denn W ist ein maximales Teilgebiet von $G \cap \tilde{G}$. Für den zu ζ_k gehörenden Punkt $a_k \in U_k$ folgt nun $a_k \in U_\varepsilon(p) \cap A \cap W$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, so ist Definition 3.1.16 erfüllt. \square

Aus Lemma 3.1.18 und Satz 3.1.17 folgt nun erneut der Existenzsatz 3.1.5, da es nach Satz 1.3.11 ein $f \in H(G)$ mit $N(f) = A$ gibt. \square

Als abschließendes Resultat wird noch ein überraschendes Ergebnis der Funktionentheorie diskutiert, das aufzeigen wird, dass es eigentlich gar keiner Hadamard'schen Lückenreihen bedarf, um "unzählige" Funktionen mit Kreisscheiben als Holomorphiegebiet anzugeben. Der folgende Satz liefert das gewünschte Ergebnis.

Satz 3.1.19 (Fatou-Hurwitz-Pòlya) Sei B der Konvergenzkreis der Potenzreihe $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$. Dann hat die Menge aller Funktionen der Gestalt $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} a_{\nu} z^{\nu}$, $\varepsilon_{\nu} \in \{-1, +1\}$, deren Holomorphiegebiet B ist, die Mächtigkeit des Kontinuums.

Bemerkung 3.1.20 Die Menge der Folgen $\varepsilon : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, +1\}$ hat die Mächtigkeit des Kontinuums (Dualzahlssystem). Daher existieren jedenfalls „kontinuierlich viele“ Funktionen der Gestalt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} a_{\nu} z^{\nu}$, $\varepsilon_{\nu} = \pm 1$.

Beweis(nach Hurwitz):

Man kann o.B.d.A annehmen, dass $B = U(0, 1)$ (= der Einheitskreis) gilt. Dann folgt $\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_{\nu}|} = 1$, und es existiert eine Teilreihe $h = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_{\nu}} z^{m_{\nu}}$ von f , sodass $m_{\nu+1} > 2m_{\nu}$, und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[m_{\nu}]{|a_{m_{\nu}}|} = 1$.

Aus dieser Hadamard'schen Lückenreihe $h \in H(U(0, 1))$ bilden wir unendlich viele Reihen $h_n \in H(U(0, 1))$, $n \in \mathbb{N}$, derart, dass keine von ihnen endlich ist und dass jeder Term $a_{m_{\nu}} z^{m_{\nu}}$ in genau einer dieser Reihen vorkommt. Es gilt

$$h = h_0 + h_1 + h_2 + \dots \text{ in } U(0, 1) \text{ (kompakte Konvergenz von Potenzreihen).}$$

Wir setzen $g := f - h$ und ordnen jeder Folge $\eta : \mathbb{N} \rightarrow \{+1, -1\}$, $\nu \mapsto \eta_{\nu}$, die Reihe

$$f_{\eta} := g + \eta_0 h_0 + \eta_1 h_1 + \dots + \eta_n h_n + \dots \in H(U(0, 1))$$

zu. Aufgrund der normalen Konvergenz hat die Taylorreihe jeder Funktion f_{η} um 0 die Gestalt $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_{\nu} a_{\nu} z^{\nu}$, $\varepsilon_{\nu} = \pm 1$. Es genügt also zu zeigen, dass höchstens abzählbar unendlich viele Funktionen f_{η} den Einheitskreis $U(0, 1)$ nicht zum Holomorphiegebiet haben. Träfe das nicht zu, so gäbe es eine überabzählbare Menge von Folgen δ , sodass jede Funktion f_{δ} analytisch in eine Einheitswurzel fortsetzbar wäre. Da die Menge aller Einheitswurzeln abzählbar ist, gäbe es also zwei verschiedene Folgen δ , δ' , sodass f_{δ} und $f_{\delta'}$ in dieselbe Einheitswurzel analytisch fortsetzbar wären. Dann hätte

$$f_{\delta} - f_{\delta'} = \alpha_0 h_0 + \alpha_1 h_1 + \dots, \text{ wobei } \alpha_{\nu} = \delta_{\nu} - \delta'_{\nu} \in \{-2, 0, +2\},$$

den Einheitskreis nicht zum Holomorphiegebiet. Da wegen $\delta \neq \delta'$ nicht alle α_{ν} verschwinden, und weil nach Konstruktion alle h_n unendliche Reihen sind, so ist aber die Taylorreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} z^{\nu}$ von $f_{\delta} - f_{\delta'} \in H(U(0, 1))$ um 0 eine Hadamard'sche Lückenreihe (als Teilreihe einer solchen Reihe), und wegen $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[m_{\nu}]{|a_{m_{\nu}}|} = 1$ gilt $\lim \sqrt[\nu]{|b_{\nu}|} = 1$. Nach Voraussetzung ist $U(0, 1)$ das Holomorphiegebiet von $f_{\delta} - f_{\delta'}$. Widerspruch! \square

3.2 Beispiele von Holomorphiegebieten

Für Gebiete G mit kompliziertem Rand ist es nur sehr selten möglich, *explizit* analytische Funktionen anzugeben, die G zum Holomorphiegebiet haben. Für Kreisscheiben und allgemeinere Gebiete der Form $\{z \in \mathbb{C} : |q(z)| < R\}$, wobei q eine nichtkonstante ganze Funktion ist, gibt es jedoch einfache Konstruktionen, wie wir gleich sehen werden.

Beispiel 3.2.1 Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| > 1$ und $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\pi$. Dann hat die GOURSAT-Reihe

$$f(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^{-\nu}}{z - e^{i\nu\omega}} \in H(U_1(0))$$

die Scheibe $U_1(0)$ zum Holomorphiegebiet. Es gilt $ae^{i\omega}f(e^{i\omega}z) = (z-1)^{-1} + f(z)$.

Beweis:

Wegen $\omega \notin \mathbb{Q}\pi$ ist $\{e^{i\nu\omega}, \nu \geq 1\}$ eine gut verteilte Randmenge (da die Punkte dicht liegen und keine Periode auftritt). Daher folgt die Behauptung mit Satz 3.1.12. \square

Beispiel 3.2.2 Die Potenzreihe $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{z^\lambda}{e^{1+i\lambda-1}}$ hat $U_1(0)$ zum Holomorphiegebiet.

Beweis:

Im Falle $G = U_1(0)$ hat die GOURSAT-Reihe $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{z-b_\nu}$ folgende Taylorreihe in $U_1(0)$ um 0:

$$f(z) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{b_\nu}} = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b_\nu}\right)^\lambda = - \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{b_\nu^{\lambda+1}}\right) z^\lambda, \quad z \in U_1(0).$$

Mit $b_\nu := e^{i\nu}$ und $a_\nu := -e^{-\nu}b_\nu$ ergibt sich die Aussage direkt. \square

Beispiel 3.2.3 Das Produkt $f(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1 - z^{2^\nu}) \in H(U_1(0))$ hat $U_1(0)$ zum Holomorphiegebiet.

Beweis:

In der Nähe jeder 2^n -ten Einheitswurzel ζ nimmt f beliebig kleine Werte an. Das ist richtig für $\zeta=1$ da für alle t , $0 < t < 1$ gilt $f(t) = (1-t)(1-t^2)(1-t^4)\dots < 1-t$ und folgt allgemein wegen

$$f(z) = f(z^{2^n}) \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 - z^{2^\nu}), \quad \text{also } |f(z)| < 2^n |f(z^{2^n})|.$$

Hieraus folgt, dass für alle ζ , 2^n -ten Einheitswurzeln gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t\zeta) = 0.$$

Angenommen es existiert ein Gebiet $\tilde{G} \supset U_1(0)$ mit einer analytischen Fortsetzung \tilde{f} von f . So gibt es einen Bogen $\gamma = \{e^{i\varphi} : \alpha < \varphi < \beta\} \subseteq \tilde{G}$.

Ist ζ 2^n -te Einheitswurzel und $\zeta \in \gamma$, so folgt $\tilde{f}(\zeta) = 0$. Da die 2^n -ten Einheitswurzeln dicht liegen, folgt weiters, dass $\tilde{f} = 0$ auf einer dichten Menge von γ gilt. Der Identitätssatz liefert uns jetzt, dass dies überall gelten muss. \square

Abschließend werden wir noch einen Satz beweisen, der uns zeigt, wie man aus einer gegebenen Funktion f mit Holomorphiegebiet G eine neue Funktion \tilde{f} mit Holomorphiegebiet G' gewinnt.

Satz 3.2.4 (Liftungssatz) *Es sei G' ein Gebiet, $q \in H(\mathbb{C})$ nicht konstant und G eine Komponente von $q^{-1}(G')$. Ist G' das Holomorphiegebiet von \hat{f} , so ist G das Holomorphiegebiet von $f := \hat{f} \circ q|_G$.*

Beweis:

Angenommen f wäre analytisch fortsetzbar in einem Punkt $p \in \partial G$. Es gibt dann eine Scheibe U um p und ein $g \in H(U)$, sodass auf einer Komponente W von $U \cap G$ mit $p \in \partial W$ die Gleichung $g|_W = f|_W$ erfüllt wäre.

Sei zunächst $q'(p) \neq 0$. Dann ist q lokal konform um p . Wir wählen U so klein, dass U durch q konform auf ein Gebiet \hat{G} abgebildet wird. Wegen $q(p) \in \partial G'$ gilt $\hat{G} \not\subset G'$. Für $\hat{f} := g \circ (q|_U)^{-1} \in H(\hat{G})$ folgt $\{z \in G' \cap \hat{G} : \hat{f}(z) = f(z)\} \supset q(W)$. Nach Satz 3.1.15 wäre G' nicht das Holomorphiegebiet von \hat{f} .

Sei nun $q'(p) = 0$. Da $U \cap \partial W \subset \partial G$ nach Lemma 3.1.14, so wird f vermöge g auch in alle Randpunkte \bar{p} von G , die zu $U \cap \partial W$ gehören, fortgesetzt. Da p eine isolierte Nullstelle von q' ist, gibt es nach dem schon Bewiesenen solche Punkte \bar{p} nicht beliebig nahe bei p . Daher ist p ein isolierter Randpunkt von ∂W . Dann ist p auch ein isolierter Randpunkt von G und $\tilde{p} := q(p)$ folglich ein isolierter Randpunkt von G' . Es wäre nun f um p und also \tilde{f} um \tilde{p} beschränkt, was nicht geht, weil G' das Holomorphiegebiet von \tilde{f} ist. \square

Kapitel 4

Kreiskettenverfahren und Monodromiesatz

4.1 Kreisketten

Als nächstes wenden wir uns einigen Aussagen über analytische Fortsetzung längs Kurven zu. Wir werden zuerst die notwendige Terminologie einführen und die grundlegenden Definitionen betrachten, bevor die ersten Sätze folgen.

Definition 4.1.1 Ein **Funktionselement** (einer analytischen Funktion) ist ein Paar (f, G) , wo $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet und $f \in H(G)$.

Zwei Funktionselemente (f_1, G_1) und (f_2, G_2) heißen **direkte analytische Fortsetzung** voneinander, wenn gilt:

$$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad f_1 \equiv f_2 \quad \text{auf} \quad G_1 \cap G_2.$$

Wir notieren dann $(f_1, G_1) \sim (f_2, G_2)$.

Direkte analytische Fortsetzung entspricht der analytischen Fortsetzung, wie wir sie in Definition 2.1.1 eingeführt haben.

Es gilt bei $(f_1, G_1) \sim (f_2, G_2)$:

$$F := \left\{ \begin{array}{l} f_1 \text{ auf } G_1 \\ f_2 \text{ auf } G_2 \end{array} \right\} \in H(G_1 \cup G_2).$$

sodass $(F, G_1 \cup G_2)$ Funktionselement ist.

Gehen wir einen Schritt weiter, so tritt ein neues Phänomen auf:

Seien $(f_1, G_1) \sim (f_2, G_2)$ und $(f_2, G_2) \sim (f_3, G_3)$, dann kann es passieren, dass $G_1 \cap G_3 \neq \emptyset$, während $f_1 \not\equiv f_3$ auf $G_1 \cap G_3$, sodass also $(f_1, G_1) \not\sim (f_3, G_3)$!

Das heißt die (f_j, G_j) , $j=1,2,3$ definieren i. a. kein Funktionselement

$$(F, G_1 \cup G_2 \cup G_3).$$

Wir benötigen für die weiteren Ausführungen und das nachfolgende Beispiel, welches dieses Phänomen illustriert, zwei Hilfssätze, die wir jetzt zeigen wollen.

Satz 4.1.2 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(G)$ mit $f(z) \neq 0$ für jedes $z \in G$. Dann existiert $g \in H(G)$ mit

$$f(z) = \exp(g(z)) \quad \forall z \in G.$$

Zusatz: Wenn $z_0 \in G$ und $f(z_0) = e^{w_0}$, kann man $g \in H(G)$ so wählen, dass $g(z_0) = w_0$.

Beweis:

f hat keine Nullstellen auf $G \Rightarrow \frac{f'}{f} \in H(G)$. Hieraus folgt, dass $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion h auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G hat.

Aber:

$$(f(z)e^{-h(z)})' = e^{-h(z)}(f'(z) - f(z)h'(z)) \equiv 0 \text{ auf } G$$

$\Rightarrow f(z) = \exp(h(z) + c) \quad \forall z \in G$ mit einer geeigneten Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

Zum Beweis des Zusatzes beachte man, dass bereits $h(z_0) + c = w_0 - 2k\pi i$, für ein gewisses $k \in \mathbb{Z}$ geeignet ist. Man braucht also nur $h(z) + c$ durch $h(z) + c + 2k\pi i$ zu ersetzen, um das Gewünschte zu erhalten. \square

Satz 4.1.3 Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(G)$ ohne Nullstellen auf G . Für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ existiert dann $g \in H(G)$ mit

$$(f(z))^a = g(z) \quad \forall z \in G.$$

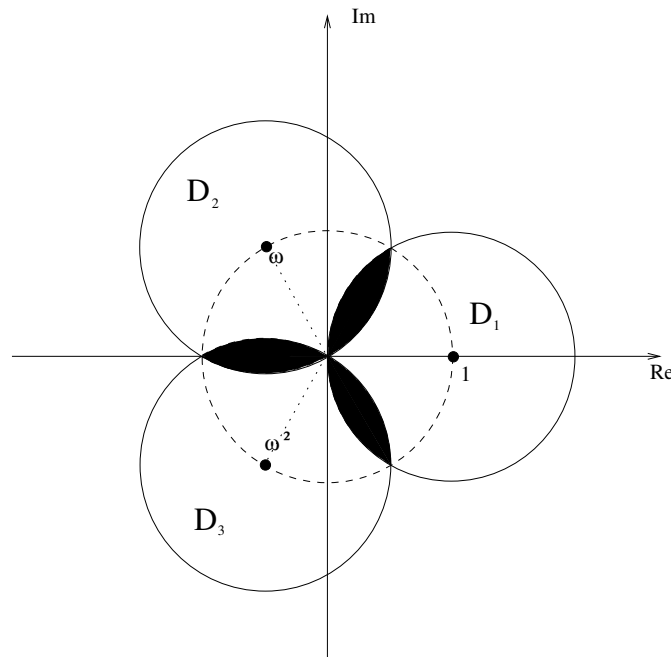
Die Funktion f hat also eine analytische a -te Potenz. Insbesondere trifft dies für $a = \frac{1}{n}, n = 2, 3, 4, \dots$ zu, d.h. f hat auch beliebige analytische n -te Wurzeln: $(g(z))^n = f(z)$ auf G .

Beweis:

Nach Satz 4.1.2 findet man $h \in H(G)$ mit $f(z) = \exp(h(z))$ auf G . Man braucht also nur $g(z) = \exp(ah(z))$ (oder $= \exp(a[h(z) + 2k\pi i]), k \in \mathbb{Z}$), zu setzen, um

$$(f(z))^a = \exp(ah(z)) = g(z) \quad \forall z \in G \quad \text{zu erhalten. } \square$$

Beispiel 4.1.4 Sei ω die „elementare“ dritte Einheitswurzel, also $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, und bezeichnen D_1, D_3, D_3 die offenen Kreise vom Radius 1 um die Punkte $1, \omega, \omega^2$.



Skizze zu Beispiel 4.1.4

Nach Satz 4.1.3 gibt es $f_j \in H(D_j)$, mit $f_j^2(z) = z$ sowie $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$ und $(f_2, D_2) \sim (f_3, D_3)$, denn bei der Wahl von f_2 und f_3 braucht nur der Wert in einem Punkt (gemäß Vorgabe mittels f_1 bzw. f_2) festgelegt zu werden. (Es gibt ja jeweils exakt die einzige Alternative zwischen zwei Zweigen der Wurzel).

Auf $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$ ergibt sich aber $f_3 \equiv -f_1$, wie man (zum Beispiel) so verifizieren kann:

$f_1(1) = +1$ (Alternativ wäre -1 möglich, wobei die Argumentation analog geführt wird).

Seien (α_1, β_1) , (α_2, β_2) , (α_3, β_3) sodass $\frac{1}{2}e^{i\varphi} \in D_j$ genau für $\varphi \in (\alpha_j, \beta_j)$ und seien α_j, β_j so gewählt, dass $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$, $\alpha_3 < \beta_2 < \beta_3$.

Es gilt $f_j(\frac{1}{2}e^{i\varphi}) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, wobei das Vorzeichen wegen der Stetigkeit von f_j nicht von $\varphi \in (\alpha_j, \beta_j)$ abhängt. Wegen $f_1(1) = +1$ muss $f_1(\frac{1}{2}e^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, $\varphi \in (\alpha_1, \beta_1)$ gelten. Da f_2 auf $D_1 \cap D_2$ mit f_1 übereinstimmt, muss auch bei f_2 das Vorzeichen “+“ gelten. Da f_3 auf $D_2 \cap D_3$ gleich f_2 ist, muss auch bei f_3 das “+“ gelten. Es folgt für $z \in D_3 \cap D_1$, $|z| = \frac{1}{2}$, dass $f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varphi_1}{2}}$ wobei $\varphi_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, $z = \frac{1}{2}e^{i\varphi_1}$.

Weiters ist $f_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varphi_3}{2}}$ mit $\varphi_3 \in (\alpha_3, \beta_3)$, $z = \frac{1}{2}e^{i\varphi_3}$. Wir sehen $\varphi_3 = \varphi_1 + 2\pi$ und daher $f_1(z) = -f_3(z) \neq f_3(z)$.

Woraus die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 4.1.5 Folgende Punkte seien noch herausgestrichen:

- Für $x \in (0, 1)$ gilt bei $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$, $f_2(-x) = +\sqrt{x}i$, während bei $(f_1, D_1) \sim (f_3, D_3)$: $f_3(-x) = \sqrt{x}i$
- Aus dem obigen Beispiel ist auch abzulesen, dass “ \sim “ nicht transitiv ist und daher keine Äquivalenzrelation definiert!
- Es gilt jedoch Folgendes:
Sind G_1, G_2, G_3 Gebiete mit $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \neq \emptyset$ und ist $(f_1, D_1) \sim (f_2, D_2)$ sowie $(f_2, D_2) \sim (f_3, D_3)$, so folgt auch $(f_1, D_1) \sim (f_3, D_3)$.

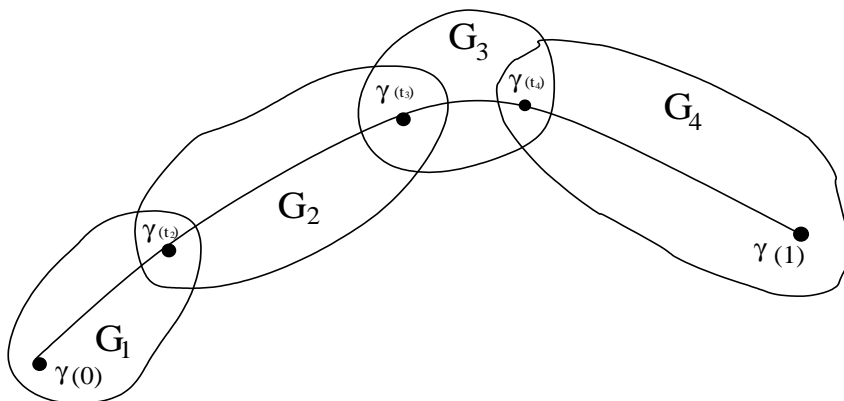
Definition 4.1.6 Eine **Kette \mathcal{C} von Gebieten** sei eine endliche Folge von Gebieten G_j ($j = 1, \dots, n$) mit $G_{j-1} \cap G_j \neq \emptyset$ ($j = 2, \dots, n$). Im Falle, dass alle G_j Kreise (Kreisscheiben) sind, sprechen wir von einer **“Kreiskette“**.

Ist ein Funktionselement (f_1, G_1) gegeben, so heißt ein Funktionselement (f_n, G_n) **analytische Fortsetzung von (f_1, G_1) längs der Kette \mathcal{C}** , falls es $f_j \in H(G_j)$ ($j = 2, \dots, n-1$) gibt mit $(f_{j-1}, G_{j-1}) \sim (f_j, G_j)$ ($j = 2, \dots, n$).

Bemerkung 4.1.7 Durch vollständige Induktion kann man zeigen, dass analytische Fortsetzung längs fester Ketten eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert.

Da „normalerweise“ längs Kurven fortgesetzt wird, brauchen wir noch die folgende Definition.

Definition 4.1.8 Sei γ Kurve mit Parameterintervall $= [0, 1]$. Eine Kette $\mathcal{C} = G_1, \dots, G_n$ **überdeckt** γ , wenn es Zahlen $0 = t_1 < \dots < t_{n+1} = 1$ gibt mit $\gamma(0) \in G_1$, $\gamma(1) \in G_n$ und $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset G_j$ ($j = 1, \dots, n$).



Skizze für $n = 4$.

- Bei Kreisketten verlangen wir zusätzlich noch: $\gamma(0) =$ Mittelpunkt von G_1 und $\gamma(1) =$ Mittelpunkt von G_n . Ein bedeutender Sonderfall wird es sein, wenn alle Mittelpunkte der Kreise G_j auf γ liegen.
- Wenn das Funktionselement (f_1, G_1) längs der Kette \mathcal{C} , welche γ überdeckt, analytisch zu (f_n, G_n) fortgesetzt werden kann, nennen wir (f_n, G_n) auch analytische Fortsetzung von (f_1, G_1) längs γ .
Man sagt dann: (f_1, G_1) lässt sich längs γ analytisch fortsetzen. (zu (f_n, G_n)).

Satz 4.1.9 Analytische Fortsetzung längs Kurven ist eindeutig bestimmt.

Ist (f, G) ein Funktionselement und γ eine Kurve, die in G beginnt, so erlaubt (f, G) höchstens eine analytische Fortsetzung längs γ .

Bemerkung 4.1.10 Wir haben also zu zeigen: Die Kurve γ werde von den Ketten $\mathcal{C}_1 = \{A_1 \dots A_m\}$ und $\mathcal{C}_2 = \{B_1 \dots B_n\}$ überdeckt, wobei $A_1 = B_1 = G$. (f, G) lasse sich längs \mathcal{C}_1 bzw. \mathcal{C}_2 zu (g_m, A_m) bzw. (h_n, B_n) analytisch fortsetzen. Dann gilt $g_m = h_n$ auf $A_m \cap B_n$. Letzteres ist nach Definition $\neq \emptyset$, sodass dann also $(g_m, A_m) \sim (h_n, B_n)$.

Beweis von Satz 4.1.9:

Nach Definition gibt es Zahlen

$$0 = t_1 < \dots < t_{m+1} = 1 \quad \text{und} \quad 0 = \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} = 1 \quad \text{mit :}$$

$$\begin{aligned}\gamma([t_j, t_{j+1}]) &\subset A_j (j = 1, \dots, m), \\ \gamma([\tau_j, \tau_{j+1}]) &\subset B_k (k = 1, \dots, n).\end{aligned}$$

Dazu existieren noch Funktionselemente mit

$$\begin{aligned}(g_j, A_j) &\sim (g_{j+1}, A_{j+1}) \quad (j = 1, \dots, m-1) \\ (h_k, B_j) &\sim (h_{k+1}, B_{k+1}) \quad (k = 1, \dots, n-1)\end{aligned}$$

Dabei sind $A_1 = B_1 = G$ und $g_1 = h_1 = f$.

Behauptung: Für $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$[t_j, t_{j+1}] \cap [\tau_k, \tau_{k+1}] \neq \emptyset \implies (g_j, A_j) \sim (h_k, B_k).$$

Da aus dieser Behauptung für $j = m$ und $k = n$ genau das Gewünschte folgt, bleibt nur noch, die Behauptung zu zeigen!

Angenommen es existiert ein Paar (j, k) , für welches die Behauptung falsch wird: Dann gibt es ein solches Paar mit $j + k$ minimal, wobei natürlich $j + k > 2$ sein muss.

Durch eventuelles Vertauschen von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 können wir o.B.d.A. $t_j \geq \tau_k$ annehmen. Da $t_j \geq \tau_k$ mit $j = 1$ zum Widerspruch führt, folgt $j \geq 2$. Aber:

$$\begin{aligned}[t_j, t_{j+1}] \cap [\tau_k, \tau_{k+1}] \neq \emptyset &\implies t_j \in [t_j, t_{j+1}] \cap [\tau_k, \tau_{k+1}] \\ &\implies \gamma(t_j) \in A_{j-1} \cap A_j \cap B_k\end{aligned}$$

sowie $[t_{j-1}, t_j] \cap [\tau_k, \tau_{k+1}] \neq \emptyset$, und für das Paar $(j-1, k)$ erhält man wegen Minimalität von $i + j$ die Relation $(g_{j-1}, A_{j-1}) \sim (h_k, B_k)$.

Aus

$$(g_j, A_j) \sim (g_{j-1}, A_{j-1}), \quad (g_{j-1}, A_{j-1}) \sim (h_k, B_k)$$

und $A_{j-1} \cap A_j \cap B_k \neq \emptyset$ lässt sich aber $(g_j, A_j) \sim (h_k, B_k)$ folgern. Widerspruch zur Annahme. \square

Wir wollen im nächsten Satz beweisen, dass man mittels *Kreisketten* längs einer Kurve direkte analytische Fortsetzungen berechnen kann. Diese Methode nennt man **Kreiskettenverfahren**.

Dann kann man natürlich auch analytische Fortsetzung längs Ketten, d.h. erst recht längs Kurven, stets über das „Kreiskettenverfahren“ berechnen. Wir werden also sehen, dass sich alles ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Kreisketten reduziert!

Satz 4.1.11 *Seien G_1, G_2 Gebiete in \mathbb{C} mit $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Die analytische Funktion g_1 habe die direkte analytische Fortsetzung $g_2 \in H(G_2)$ und seien $a \in G_1$, $b \in G_2$ beliebig gegeben.*

Dann gibt es eine Kurve γ von a nach b innerhalb $G_1 \cup G_2$ und eine Kreiskette $\mathcal{C} = \{D_1 \dots D_n\}$ mit $D_1 \subseteq G_1$, $D_n \subseteq G_2$, $\bigcup_{j=1}^n D_j \subseteq G_1 \cup G_2$ und Mittelpunkt jedes D_j auf γ , derart, dass \mathcal{C} ganz γ überdeckt und $(g_2|_{D_n}, D_n)$ analytische Fortsetzung von $(g_1|_{D_1}, D_1)$ längs \mathcal{C} (und somit auch längs γ) ist.

Beweis:

Da aufgrund von $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ die Menge $G_1 \cup G_2$ wieder Gebiet ist und damit wegzusammenhängend, existiert eine Kurve $\gamma \subset G_1 \cup G_2$ von a nach b .

Für beliebiges $t \in [0, 1]$ findet man stets eine offene Kreisscheibe $D(\gamma(t))$ um $\gamma(t)$, die ganz in G_1 oder ganz in G_2 enthalten ist, wobei o.B.d.A. $D(a) = D(\gamma(0)) \subseteq G_1$ und $D(b) = D(\gamma(1)) \subseteq G_2$.

$D(\gamma(t))$ offen \Rightarrow es existiert ein in $[0, 1]$ offenes Intervall I_t mit Mittelpunkt t .

Also ist I_t Durchschnitt eines offenen Intervalls mit Mittelpunkt t mit $[0, 1]$ und

$$\gamma(s) \in D(\gamma(t)) \quad \forall s \in I_t.$$

$\bigcup_{t \in [0, 1]} I_t$ ist eine offene Überdeckung von $[0, 1] \Rightarrow$ es gibt eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{j=1}^n I_{t_j}$, wobei o.B.d.A. angenommen werden kann, dass 0 und 1 unter den t_j vorkommen und alle Intervalle $I_{t_j}, t_j \neq 0, 1$ mit $I_{t_j} \subset I_{t_k}$ für geeignetes k bereits gestrichen sind.

Wir nummerieren die t_j jetzt so um, dass $t_1 = 0, t_j < t_{j+1} (j = 1, \dots, n-1), t_n = 1$. Dann muss offenbar für jedes $j \in \{1, \dots, n-1\}$ $I_{t_j} \cap I_{t_{j+1}} \neq \emptyset$ gelten. Der rechte Eckpunkt τ von $I_{t_j}, j \neq 1, n-1$ gehört zu einem I_{t_k} , aber $k < j$ oder $k > j+1$ führt wegen der Streichung „überflüssiger“ Intervalle zum Widerspruch(- und für $j = 1$, also $t_j = 0$, oder $j = n-1$, also $t_{j+1} = 1$, ist die Behauptung analog klar.) Nach Konstruktion ergibt sich auch:

$$D(\gamma(t_j)) \cap D(\gamma(t_{j+1})) \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

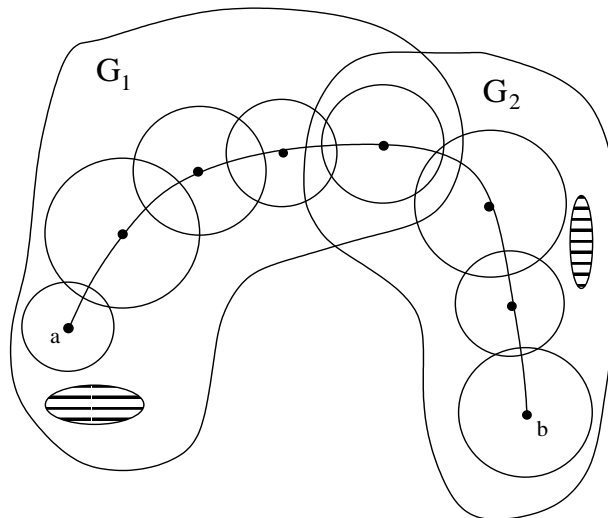
Mit $D_j := D(\gamma(t_j)), j = 1, \dots, n$ bildet $\mathcal{C} := \{D_1, \dots, D_n\}$ eine Kreiskette die den Bedingungen

$$D_1 = D(a) \subseteq G_1, \quad D_n = D(b) \subseteq G_2, \quad \bigcup_{j=1}^n D_j \subseteq G_1 \cup G_2$$

genügt, wobei auch jeder Mittelpunkt der D_j auf γ liegt. \mathcal{C} überdeckt γ (jeder Punkt $t_j, j = 2, \dots, n$ in Definition 4.1.8 sei einfach in $I_{t_{j-1}} \cap I_{t_j}$ gewählt), und schließlich bleibt übrig,

$$f_j := \begin{cases} g_1 \text{ auf } D_j, & \text{falls } D_j \subset G_1 \\ g_2 \text{ auf } D_j, & \text{falls } D_j \subset G_2 \end{cases}$$

zu setzen, um $(g_2|_{D_n}, D_n) = (f_n, D_n)$ analytische Fortsetzung von $(f_1, D_1) = (g_1|_{D_1}, D_1)$ zu erhalten. \square



Skizze zur Kreiskette.

Wollen wir das Kreiskettenverfahren zu einer wirklichen Berechnungsmethode vollenden, so liefert das folgende Korollar die Anleitung.

Korollar 4.1.12 *Wir verwenden Satz 4.1.11 für die folgenden Aussagen:*

1. *Das Kreiskettenverfahren lässt sich längs der Kurve γ stets durch Entwicklung in Taylorreihen (um verschiedene Punkte von γ) durchführen.*
2. *Dabei ist jeder einzelne Schritt des in (1) genannten Verfahrens mittels Potenzreihenumwandlung zu bewerkstelligen.*

Beweis:

Induktiv wird das Kreiskettenverfahren wie folgt durchgeführt:

1. Entwickle $f_1 = g_1$ um $w_1 := a$ in eine Taylorreihe. Diese konvergiert im größten in $G_1 \cup G_2$ enthaltenen Kreis D_1 um a .
(Liegt b in D_1 , so bekommen wir bereits g_2 in einer Umgebung von b und sind fertig.)
2. Suche einen Punkt $w_2 \in \gamma$, der zwischen a und b liegt und noch Element des im 1. Schritt gewonnenen Kreises D_1 ist. Zweckmäßigerweise nimmt man dabei w_2 „weit“ von w_1 entfernt.

Entwickle die per Potenzreihe im 1. Schritt auf D_1 gegebene analytische Funktion f_1 um w_2 in eine Taylorreihe f_2 . Diese konvergiert im größten Kreis D_2 um w_2 , der in $G_1 \cup G_2$ enthalten ist.

Hierbei verwendet man Potenzreihenumwandlung, d.h. man geht wie folgt vor:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - w_1)^m \text{ auf } D_1 = D(w_1, r_1) \text{ (Taylorreihe)} \\ &\Rightarrow f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w_2)^n \text{ (Taylorreihe)} \end{aligned}$$

mit $f_2 \equiv f_1$ auf einer Umgebung von w_2 und Konvergenz mindestens für $|z - w_2| < r_1 - |w_2 - w_1|$, und die Koeffizienten $(b_n)_n$ errechnen sich aus den $(a_m)_m$ per:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(w_2) \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} a_m (w_2 - w_1)^{m-n} \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (w_2 - w_1)^{m-n}. \end{aligned}$$

Jetzt gilt wieder: Falls $b \in D_2$, so haben wir $g_2 = f_2$ in einer Umgebung von b und sind fertig. Im anderen Falle führt man das Verfahren wie schon gezeigt fort.

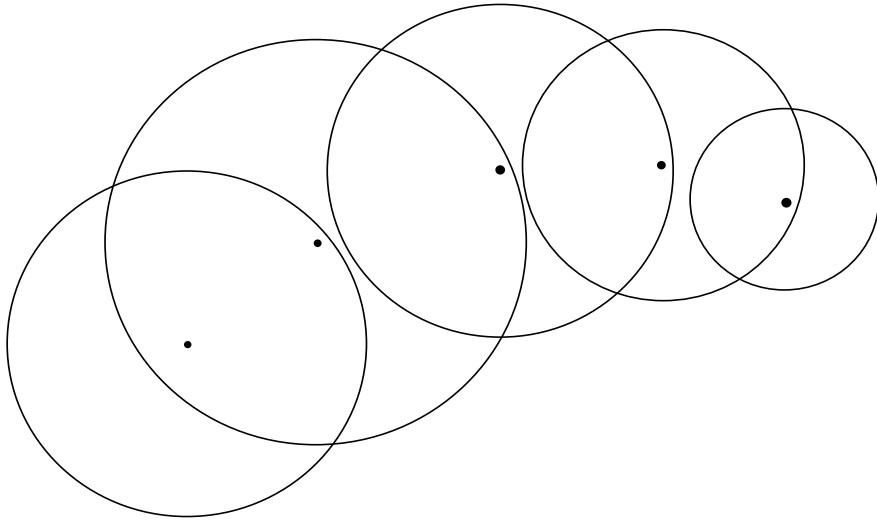
Es bleibt noch zu zeigen, dass bei geeigneter Wahl der Punkte w_j (und der Kurve γ) das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.

Dies trifft auch zu, da: $\gamma \subset G_1 \cup G_2$ kompakt $\Rightarrow r := d(\gamma, \mathbb{C} \setminus (G_1 \cup G_2)) > 0$. Damit hat bei unserer Wahl jedes D_j einen Radius $\geq r$.

Wir wollen dann stets w_{j+1} so wählen, dass $|w_{j+1} - w_j| \geq \frac{r}{2}$. Es folgt: Die Länge des Bogens von γ zwischen w_j und w_{j+1} ist erst recht $\geq \frac{r}{2}$.

Wenn also $|\gamma| < \infty$, so wird das Verfahren nach $(n+1)$ Schritten abgebrochen sein, falls $n \frac{r}{2} > |\gamma|$!

$|\gamma| < \infty$ lässt sich aber leicht erreichen, da man Punkte in einem Gebiet $\subset \mathbb{C}$ stets durch ein Polygon verbinden kann. \square



Skizze zum Kreiskettenverfahren.

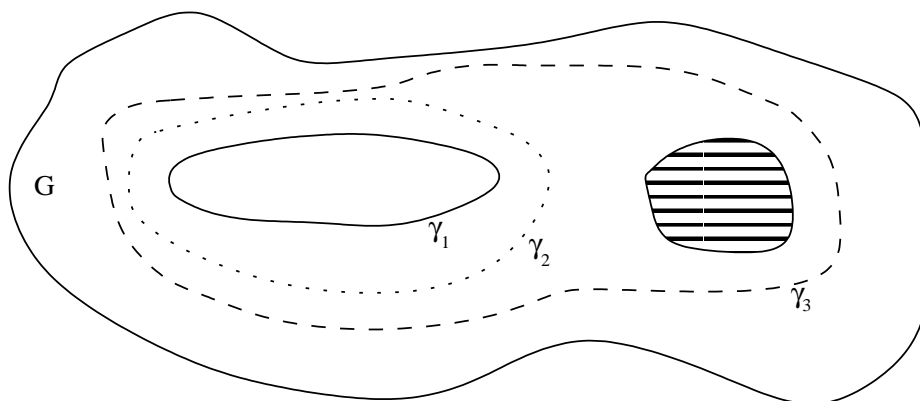
4.2 Monodromiesatz

Wir wollen uns jetzt schrittweise dem so genannten *Monodromiesatz* nähern. Dieser zeigt eine Situation auf, in der analytische Fortsetzungen längs verschiedener Kurven in denselben Endpunkt, dort den selben Wert liefern. Dies gilt im Allgemeinen natürlich nicht, man betrachte hierzu einfach die analytischen Fortsetzungen des komplexen Logarithmus in -1 längs des oberen bzw. unteren Halbreises vom Radius 1.

Definition 4.2.1 Seien $a, b \in \mathbb{C}$ fest und $\varphi : I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0, t) = a$ und $\varphi(1, t) = b$ für alle $t \in I$.

Für jedes $t \in I$ ist dann $\gamma_t := \varphi(\cdot, t)$ Kurve (mit Parameterintervall $[0, 1]$) von a nach b . $\{\gamma_t\}_{t \in [0, 1]}$ heißt (**stetige**) **einparametrische Kurvenschar** von a nach b .

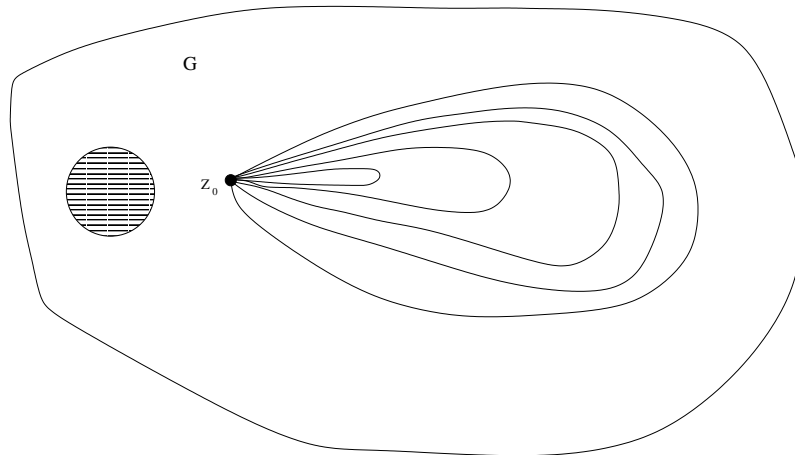
Ein weiterer, für uns jetzt sehr wichtiger Begriff, der bereits am Anfang definiert wurde (siehe Definition 1.1.3), ist die *Homotopie* zweier Kurven in einem Gebiet $\subset \mathbb{C}$. Die folgenden Skizzen sollen noch einmal genau veranschaulichen, was wir unter *homotop* und *null-homotop* anschaulich verstehen.



Skizze zum Begriff der Homotopie

In der oben angeführten Zeichnung sind im Gebiet G die Wege γ_1 und γ_2 homotop zueinander, γ_3 ist jedoch weder homotop zu γ_1 noch zu γ_2 .

Der Begriff der *Nullhomotopie* (siehe Definition 1.1.4) bezieht sich immer auf geschlossene Kurven. Die nachfolgende Skizze soll hierzu eine anschauliche Darstellung liefern.



Skizze zum Begriff der Nullhomotopie

Wie man aus der Abbildung entnimmt, hat die Kurve Anfangs- und Endpunkt in z_0 . Sie lässt sich auf diesen Punkt stetig zusammenziehen.

Bemerkung 4.2.2 Seien Γ_0 und Γ_1 Kurven im Gebiet G .

1. Die Relation „ $\Gamma_0 \sim_G \Gamma_1 \Leftrightarrow \Gamma_0$ und Γ_1 homotop in G “ definiert eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen von Kurven in G bzgl. \sim_G heißen **Homotopieklassen**.
2. Zwei verschiedene Parametrisierungen derselben Kurven sind stets homotop in G , d.h. Homotopie ist eine Eigenschaft der Kurve, nicht aber der speziellen Parameterdarstellung der Kurve.

Beweis:

Ad 1): Um $\Gamma_0 \sim_G \Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_1 \sim_G \Gamma_0$ zu zeigen, betrachte man $\varphi(s, 1-t)$ statt $\varphi(s, t)$, und bei $\Gamma_0 \sim_G \Gamma_1$ (per “ φ “) sowie $\Gamma_1 \sim_G \Gamma_2$ (per “ ψ “) folgt $\Gamma_0 \sim_G \Gamma_2$ mittels:

$$f : (s, t) \longrightarrow \begin{cases} \varphi(s, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \psi(s, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ad 2): Sei $\gamma_2(s) = \gamma_1(\tau(s))$, $s \in [0, 1]$, wobei $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Dann definiert $\varphi(s, t) = \gamma_1((1-t)s + t\tau(s))$ eine Funktion φ , wie sie laut Definition verlangt wird, woraus $\gamma_2 \sim_G \gamma_1$ folgt. \square

Wir sind nun in der Lage, den schon weiter oben angesprochenen *Monodromiesatz* zu formulieren und zu beweisen. Vereinfacht ausgedrückt besagt dieser Satz, dass analytische Fortsetzung längs Kurven Γ_0 und Γ_1 mit demselben Anfangspunkt a und dem gemeinsamen Endpunkt b dasselbe Ergebnis liefert, wenn sich Γ_0 mittels einer einparametrischen Kurvenschar $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}$ stetig in Γ_1 deformieren lässt und analytische Fortsetzung auch längs jedes $\gamma_t, t \in (0, 1)$ möglich ist.

Satz 4.2.3 (Monodromiesatz) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $a \in G$ und $b \in \mathbb{C}$ fest. Sei $f \in H(G)$ vorgegeben. $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}$ bezeichne eine einparametrische Kurvenschar von a

nach b .

Für jedes $t \in [0, 1]$ sei G_t ein Gebiet, welches b enthält, und g_t eine Funktion aus $H(G_t)$ derart, dass (f, G) längs γ_t analytische Fortsetzung zu (g_t, G_t) gestattet.

Dann gilt:

$$(g_0, G_0) \sim (g_1, G_1),$$

d.h. die analytischen Fortsetzungen g_0 und g_1 stimmen auf der Umgebung $G_0 \cap G_1$ von b überein.

Beweis:

Sei $t \in I = [0, 1]$ fest. Nach Voraussetzung existiert eine Kette

$$\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$$

welche γ_t überdeckt und $A_1 = G$, sowie $A_n = G_t$ genügt. Das heißt:

$$\exists 0 = s_1 < s_2 < \dots < s_{n+1} = 1 \text{ mit } E_j := \gamma_t([s_j, s_{j+1}]) \subset A_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Es sei $\varepsilon \in (0, \min_{j=1, \dots, n} d(E_j, \mathbb{C} \setminus A_j))$ gewählt. Da φ gleichmäßig stetig ist als stetige Funktion auf einer kompakten Menge, gibt es ein $\delta > 0$ mit:

$$t_1, t_2 \in I, |t_1 - t_2| < \delta \text{ und } s \in I \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow |\gamma_{t_1}(s) - \gamma_{t_2}(s)| = |\varphi(s, t_1) - \varphi(s, t_2)| < \varepsilon.$$

Das heißt: Falls $u \in I$ mit $|t - u| < \delta$, so gilt für $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ und $\forall s \in [s_j, s_{j+1}]$:

$$|\gamma_u(s) - \gamma_t(s)| < \varepsilon \Rightarrow \gamma_u(s) \in A_j,$$

womit für beliebiges $j = 1, \dots, n$ auch stets $\gamma_u([s_j, s_{j+1}]) \subset A_j$. Also überdeckt die Kette \mathcal{C} (neben γ_t) ebenso γ_u .

Nach Bemerkung 4.1.7 und Satz 4.1.9, welche die Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung längs Kurven und Ketten besagen, folgt, dass man bei analytischer Fortsetzung längs zweier Ketten, die die Kurve überdecken, Funktionen erhält, welche direkte analytische Fortsetzungen voneinander sind. Wir folgern nun insgesamt:

$$\text{Für } |t - u| < \delta \text{ ist } (g_t, G_t) \sim (g_u, G_u), \text{ also } g_t \equiv g_u \text{ auf } G_t \cap G_u.$$

Wir wählen $t \in I$ beliebig, allerdings hängt δ (über ε) durchaus von t ab. Mittels der endlichen Überdeckungseigenschaft des kompakten Intervalls I erhält man dennoch in endlich vielen Schritten das gewünschte Ergebnis, nämlich:

$$\text{Auf } G_0 \cap G_{t_1} \cap \dots \cap G_{t_m} \cap G_1 \text{ gilt } g_0 \equiv g_{t_1} \equiv \dots \equiv g_{t_m} \equiv g_1.$$

Wegen $b \in G_0 \cap G_{t_1} \cap \dots \cap G_{t_m} \cap G_1$ liefert der Identitätssatz $g_0 \equiv g_1$ auf $G_0 \cap G_1$.
□

In der Literatur findet man auch manchmal das folgende Korollar als Monodromiesatz.

Satz 4.2.4 (Monodromiesatz 2. Fassung) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f, G) ein Funktionselement mit $G \subset \mathbb{C}$.

Das Funktionselement (f, G) erlaube "unbeschränkte analytische Fortsetzung in Ω ", d.h. analytische Fortsetzung längs jeder Kurve $\gamma \subset \Omega$, welche in G beginnt.

Dann gilt:

1. Sind Γ_0 und Γ_1 in Ω zueinander homotope Kurven von $a \in G$ nach $b \in \Omega$, dann liefert analytische Fortsetzung längs Γ_0 und Γ_1 in einer Umgebung von b dieselbe Funktion.
2. Ist Ω einfach zusammenhängend, so gibt es sogar eine Funktion $g \in H(\Omega)$ mit $g \equiv f$ auf G , also $(g, \Omega) \sim (f, G)$.

Beweis:

Ad 1) ist wegen des Monodromiesatzes unmittelbar klar.

Wir erhalten aus 1):

Alle analytischen Fortsetzungen von (f, G) längs beliebiger Kurven mit Anfangspunkt $a \in G$ (fest) und gemeinsamen Endpunkt $b \in \Omega$ führen zu derselben analytischen Funktion um b . Dass der Anfangspunkt a ohne Bedeutung ist, zeigt die folgende Überlegung:

Seien $a_1, a_2 \in G$ beliebig und $b \in \Omega$ fest. Dann wissen wir bereits, dass analytische Fortsetzung von (f, G) längs beliebiger Kurven von a_1 nach b bzw. von a_2 nach b immer dasselbe Funktionselement (g_1, G_1) bzw. (g_2, G_2) liefert, wobei $b \in G_1$ Gebiet $\subset \Omega$ bzw. $b \in G_2$ Gebiet $\subset \Omega$ geeignet.

Durch Verbindung von a_1 mit a_2 innerhalb G verlängert sich aber jede Kurve von a_2 nach b in Ω zu einer Kurve von a_1 nach b in Ω und umgekehrt. Daher muss $(g_1, G_1) \sim (g_2, G_2)$ gelten. Das heißt analytische Fortsetzung von beliebigen Punkten $a \in G$ nach b sind um b eindeutig bestimmt.

Zum Endpunkt $b \in \Omega$ sei gesagt, dass er beliebig in Ω gewählt werden kann, d.h. es gibt stets Kurven von einem Punkt $a \in G$ nach einem beliebigen $b \in \Omega$. Längs jeder solchen Kurve lässt sich (f, G) jedoch analytisch fortsetzen.

Insgesamt haben wir an dieser Stelle gezeigt:

Die analytischen Fortsetzungen von (f, G) zusammen definieren eine Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, welche aus $H(G)$ ist und $f \in H(G)$ fortsetzt. Denn ist $b \in \Omega$, so wähle $a \in G$ und eine Kurve γ in Ω von a nach b . Sei g die analytische Fortsetzung von f längs γ , so setze $F(b) := g(b)$. \square

Ein Blick auf Beispiel 4.1.4 oder die verschiedenen Zweige des Logarithmus macht klar, dass Korollar 4.2.4 ohne die Voraussetzung Ω einfach zusammenhängend im Allgemeinen falsch wäre.

Anhang A

A.1 Die Sätze von Bers und Iss'sa

Definition A.1.1 (Meromorphe Funktion) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen.

Unter einer **meromorphen** Funktion auf G versteht man eine auf einer offenen Teilmenge $V \subset G$ definierte Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion: $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ ist analytisch
- Die Menge $G \setminus V$ ist diskret in G , besteht also nur aus isolierten Punkten.
- Die Funktion f besitzt in jedem Punkt aus $G \setminus V$ einen Pol.

Wir bezeichnen die Menge aller auf G meromorphen Funktionen mit $\mathcal{M}(G)$.

Bemerkung A.1.2 Wegen des Produktsatzes 1.3.11 gilt:

$$f \in \mathcal{M}(G) \iff \exists h, g \in H(G) \text{ mit } f = \frac{h}{g}.$$

Beweis:

\Leftarrow) Diese Richtung ist unmittelbar einzusehen. Interessant ist die andere Implikation.

\Rightarrow) Sei $f \in \mathcal{M}(G)$, so folgt, dass eine Funktion $g \in H(G)$ existiert, die ihre Nullstellen genau dort hat, wo bei f die Polstellen auftreten. Hieraus schließt man weiter mit $f \cdot g \in H(G)$. Setzt man jetzt $h := f \cdot g$, so folgt die Behauptung. \square

Definition A.1.3 Jeder \mathbb{C} -Algebra-Homomorphismus $H(G) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein **Charakter** von $H(G)$.

Lemma A.1.4 Sei G ein Gebiet. Jede Evaluierung $\mathcal{X}_c : H(G) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(c), c \in G$ ist ein Charakter. Dies sind alle Charaktere von $H(G)$.

Für jeden Charakter \mathcal{X} von $H(G)$ gilt $\mathcal{X} = \mathcal{X}_c$ mit $c := \mathcal{X}(id_G) \in G$.

Beweis:

Die Tatsache, dass jede Punktauswertung $\mathcal{X}_c, c \in G$, ein Charakter ist, ist unmittelbar klar. Sei also \mathcal{X} ein Charakter von $H(G)$ und setze $c := \mathcal{X}(id_G)$.

Für $e(z) := z - c$ gilt $\mathcal{X}(e) = \mathcal{X}(id_G) - c = 0$. Es folgt $c \in G$, denn sonst wäre e eine Einheit in $H(G)$, und man hätte $1 = \mathcal{X}(e \cdot e^{-1}) = \mathcal{X}(e)\mathcal{X}(e^{-1}) = 0$. Sei nun $f \in H(G)$ beliebig. Es gilt $f(z) = f(c) + e(z)f_1(z)$ mit $f_1 \in H(G)$. Es folgt

$$\mathcal{X}(f) = \mathcal{X}(f(c)) + \mathcal{X}(e)\mathcal{X}(f_1) = f(c) = \mathcal{X}_c(f),$$

also $\mathcal{X} = \mathcal{X}_c$. \square

Seien G, \hat{G} Gebiete, $h : \hat{G} \rightarrow G$ analytisch $\Rightarrow \varphi : f \mapsto f \circ h$ ist \mathbb{C} -Algebra Homomorphismus. Ist h konform, so folgt die Bijektivität von φ . Wir werden jetzt zeigen, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz A.1.5 (Satz von Bers) Seien G und \hat{G} Gebiete. Zu jedem \mathbb{C} -Algebra Homomorphismus $\varphi : H(G) \rightarrow H(\hat{G})$ gibt es genau eine Abbildung $h : \hat{G} \rightarrow G$, sodass $\varphi(f) = f \circ h$ für alle $f \in H(G)$. Es gilt $h = \varphi(id_G) \in H(\hat{G})$. Es ist φ genau dann bijektiv, wenn h konform ist.

Beweis:

Da stets $\varphi(f) = f \circ h$ sein soll, so muss $\varphi(id_G) = id_G \circ h = h$ gelten. Wir zeigen, dass der Satz in der Tat für $h := \varphi(id_G)$ gilt. Da $\mathcal{X}_a \circ \varphi$, $a \in \hat{G}$, stets ein Charakter von $H(G)$ ist, ergibt sich mit Lemma A.1.4

$$\mathcal{X}_a \circ \varphi = \mathcal{X}_c \quad \text{mit} \quad c = (\mathcal{X}_a \circ \varphi)(id_G) = \mathcal{X}_a(h) = h(a) \subseteq G.$$

Damit folgt $\varphi(f) = f \circ h$ für alle $f \in H(G)$, denn man hat nun

$$\varphi(f)(a) = \mathcal{X}_a(\varphi(f)) = (\mathcal{X}_a \circ \varphi)(f) = \mathcal{X}_{h(a)}(f) = f(h(a)) = (f \circ h)(a)$$

für alle $a \in \hat{G}$.

Die letzte Aussage des Satzes folgt unmittelbar, denn in diesem Fall existiert $\varphi^{-1} \dots$ etc \square

Der SATZ VON BERS liefert zwei wichtige Resultate:

- aus der *algebraischen Isomorphie* der Funktionenalgebren $H(G)$ und $H(\hat{G})$ folgt die *konforme Isomorphie* der Gebiete G und \hat{G} .
- jeder \mathbb{C} -Algebra Homomorphismus $\varphi : H(G) \rightarrow H(\hat{G})$ ist automatisch stetig (konvergiert eine Folge aus $H(G)$ in G kompakt gegen f , so konvergiert die Bildfolge in \hat{G} kompakt gegen $\varphi(f)$).

Die zum Satz von Beers analoge Aussage gilt auch für meromorphe Funktionen.

Satz A.1.6 (Satz von Iss'sa) Es sei $\varphi : \mathcal{M}(G) \rightarrow \mathcal{M}(\hat{G})$ irgendein \mathbb{C} -Algebra-Homomorphismus. Dann gibt es genau eine analytische Abbildung $h : \hat{G} \rightarrow G$, sodass $\varphi(f) = f \circ h$ für alle $f \in \mathcal{M}(G)$.

Aufgrund des SATZES VON BERS und Bemerkung A.1.2 genügt es, das folgende Lemma zu zeigen.

Lemma A.1.7 Für jeden Körperhomomorphismus $\varphi : \mathcal{M}(G) \rightarrow \mathcal{M}(\hat{G})$ gilt:

$$\varphi(H(G)) \subset H(\hat{G}).$$

Den Beweis dieses Lemmas werden wir erst etwas später führen, da zuerst noch einige algebraischen Vorbereitungen zu treffen sind.

Wir beweisen danach den Satz von Iss'sa mit Hilfe von Lemma A.1.7.

Definition A.1.8 Wir schreiben $\mathcal{M}(G)^\times$ für die multiplikative Gruppe $\mathcal{M}(G) \setminus \{0\}$. Eine Abbildung $v : \mathcal{M}(G)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ heißt eine Bewertung von $\mathcal{M}(G)$, wenn für alle $f, g \in \mathcal{M}(G)^\times$ gilt:

B1) $v(fg) = v(f) + v(g)$ (Produktregel)

B2) $v(f + g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$, falls $f \neq -g$.

Der Buchstabe v steht für „valuation“.

Bemerkung A.1.9 Sei o_c definiert als Nullstellenordnung bzw. Polstellenordnung einer Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(z-c)^n, \text{ mit } a_N \neq 0$$

so folgt, dass o_c eine Bewertung ist.

Man erhält sofort:

Lemma A.1.10 Wir zeigen die folgenden zwei Dinge:

1. Ist v eine Bewertung von $\mathcal{M}(G)$, so gilt $v(c) = 0$ für alle $c \in \mathbb{C}^\times$.
2. Die Bedingung **B2)** verschärfen wir zu

$$\mathbf{B2)'} \quad v(f+g) = \min\{v(f), v(g)\}, \text{ falls } f \neq -g \text{ und } v(f) \neq v(g).$$

Beweis:

ad 1) Zu jedem $n \geq 1$ gibt es ein $c_n \in \mathbb{C}^\times$, sodass $(c_n)^n = c$. Nach **B1)** folgt $v(c) = nv(c_n) \in n\mathbb{Z}$ für alle $n \geq 1$, was nur für $v(c) = 0$ möglich ist.

ad 2) Sei $v(f) \leq v(g)$. Wegen $v(-g) = v(g)$ folgt mittels **B2)**:

$$v(f) \geq \min\{v(f+g), v(g)\} \geq \min\{v(f), v(g)\} = v(f),$$

also $\min\{v(f+g), v(g)\} = v(f)$. Falls $v(f) < v(g)$, so folgt $v(f+g) = v(f)$. \square

In der Funktionentheorie wichtige Bewertungen sind die Ordnungsfunktionen o_c , $c \in G$ von $\mathcal{M}(G)$, die jeder Funktion $f \in \mathcal{M}(G)^\times$ ihre Ordnung im Punkt c zuweisen. Es folgt sofort:

Holomorphiekriterium. Eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(G)^\times$ ist genau dann analytisch in G , wenn für alle $c \in G$ gilt: $o_c(f) \geq 0$.

Um Lemma A.1.7 nun beweisen zu können, brauchen wir noch den folgenden Hilfssatz, der den Kern des Beweises bilden wird.

Satz A.1.11 Ist v eine Bewertung auf $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, so gilt $v(z) \geq 0$.

Beweis:

Angenommen, es wäre $v(z) = -m$ mit $m \geq 1$. Da $v(c) = 0$ für alle $c \in \mathbb{C}^\times$, so folgt nach **B2')**:

$$v(z-c) = -m \quad \text{für alle } c \in \mathbb{C}^\times. \quad (\text{A.1})$$

Sei nun $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Es existiert nach Satz 1.3.11 eine in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ nullstellenfreie Funktion $q \in H(\mathbb{C})$, die in $k \in \mathbb{N}$ von der Ordnung d^k verschwindet.

Sei $n \geq 1$ festgehalten.

Für $q_n(z) := \frac{q(z)}{\prod_{l=0}^{n-1} (z-l)^{d^l}} \in H(\mathbb{C})$ gilt wegen **B1)** und Gleichung A.1

$$v(q_n) = v(q) - v\left(\prod_{l=0}^{n-1} (z-l)^{d^l}\right) = v(q) - \sum_{l=0}^{n-1} d^l v(z-l) = \quad (\text{A.2})$$

$$= v(q) + m \sum_{l=0}^{n-1} d^l = v(q) + \frac{m}{d-1}(d^n - 1).$$

Nach Konstruktion von q_n teilt d^n jede Zahl $o_w(q_n)$, $w \in \mathbb{C}$. Unter Verwendung eines tiefer liegenden Resultats, dem Wurzelkriterium des Weierstrass'schen Produktsatzes, gibt es also ein $g_n \in H(\mathbb{C})$ mit $g_n^{d^n} = q_n$. Es gilt $d^n v(g_n) = v(q_n)$, daher impliziert Gleichung A.2:

$$v(q) + \frac{m}{d-1}(d^n - 1) \in d^n \mathbb{Z} \quad \text{für alle } n \geq 1. \quad (\text{A.3})$$

Hieraus folgt $(d-1)v(q) - m = (d-1)[v(q) + \frac{m}{d-1}(d^n - 1)] - md^n \in d^n \mathbb{Z}$. Da $n \geq 1$ beliebig war, ist dies nur für $v(q) = \frac{m}{d-1}$ möglich. Da $d \geq 2$ beliebig war und stets $v(q) \in \mathbb{Z}$ gelten muss, folgt $m = 0$, ein Widerspruch. \square

Aus Satz A.1.11 folgt sofort:

Korollar A.1.12 *Für jede Bewertung v von $\mathcal{M}(G)$ gilt: $v(f) \geq 0$ für alle $f \in H(G) \setminus \{0\}$.*

Beweis: Sei $f \in H(G)$. Dann ist

$$v_f : \begin{cases} \mathcal{M}(\mathbb{C})^\times & \rightarrow \mathbb{Z} \\ g & \mapsto v(g \circ f) \end{cases}$$

eine Bewertung. Dies lässt sich leicht durch einsetzen in die Definitionen nachprüfen. Es gilt die Bedingung B1), weil:

$$v_f(g_1 \cdot g_2) = v((g_1 \cdot g_2) \circ f) = v((g_1 \circ f) \cdot (g_2 \circ f)) = v(g_1 \circ f) + v(g_2 \circ f) = v_f(g_1) + v_f(g_2).$$

Bedingung B2) wird ebenso elementar gezeigt:

$$v_f(g_1 + g_2) = v((g_1 + g_2) \circ f) = v((g_1 \circ f) + (g_2 \circ f)) \geq \min\{v(g_1 \circ f), v(g_2 \circ f)\} = \min\{v_f(g_1), v_f(g_2)\}.$$

Da $v_f(z) = v(f)$, so folgt die Behauptung aus dem Hilfssatz. \square

Nach diesen Vorbereitungen ist der Beweis von Lemma A.1.7 (und damit auch der Beweis des SATZES VON ISS'SA) leicht geführt:

Beweis (von Lemma A.1.7):

Da φ als Körperhomomorphismus injektiv ist, gilt $\varphi(f) \neq 0$ für alle $f \in \mathcal{M}(G)^\times$. Daher wird für jedes $c \in \hat{G}$ durch

$$v_c(f) := o_c(\varphi(f)), \quad f \in \mathcal{M}(G)^\times,$$

eine Bewertung von $\mathcal{M}(G)$ definiert. Wegen Korollar A.1.12 folgt $o_c(\varphi(f)) \geq 0$ für alle $c \in \hat{G}$, falls $f \in H(G) \setminus \{0\}$. Aus dem Holomorphiekriterium ergibt sich dann $\varphi(f) \in H(\hat{G})$, also die Behauptung. \square

Anhang B

B.1 Literaturverzeichnis

- [B] KLAUS D. BIERSTEDT: *Skriptum zur Vorlesung Funktionentheorie*,
URL: <http://www-math.uni-paderborn.de/~klausd/>
- [D] A. DINGHAS: *Vorlesung über Funktionentheorie*,
Springer Verlag, Heidelberg 1961
- [FB] EBERHARD FREITAG, ROLF BUSAM: *Funktionentheorie I*,
Springer Verlag, Heidelberg 2000.
- [H] ANDREAS HERZ: *Repetitorium Funktionentheorie*,
Vieweg Verlag, Wiesbaden 2003
- [R] REINHOLD REMMERT: *Funktionentheorie II*,
Springer Verlag, Heidelberg 1991