DIPLOMARBEIT

Distributionen als Randwerte harmonischer und analytischer Funktionen

ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Harald WORACEK

durch

Christoph Gammer
Matr. Nr. 0126408
Gersthoferstraße 140/4/2
A-1180 Wien

Datum

Unterschrift

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Darstellung von harmonischen und analytischen Funktionen durch ihre Randwerte auf Distributionen zu verallgemeinern. Für harmonische und analytische Funktionen gibt es aufbauend auf die Poissonsche Integraldarstellung eine sehr fundierte Theorie, dafür sei etwa auf [Ros94] verwiesen. Zu diesem Thema lassen sich zwar verschiedenste Verallgemeinerungen klassischer Resultate finden, dennoch gibt es bisher keine einheitliche, leicht zugängliche Literatur zu diesem Gebiet. Daher werden in dieser Arbeit von der klassischen Theorie ausgehend analoge Resultate für Distributionen in einer vereinheitlichten Notation sowie ohne Bedarf von zusätzlichem speziellem Vorwissen entwickelt.

Die Arbeit besteht aus drei Abschnitten. In Kapitel 1 werden aufbauend auf der Theorie der lokalkonvexen Vektorräume die Distributionen rigoros eingeführt.

Eine Einführung in die Fouriertransformation und Laplacetransformation für Funktionen und Distributionen folgt in Kapitel 2. Kapitel 3 wendet sich dann der klassischen Theorie der harmonischen und analytischen Funktionen zu. Dabei werden die Darstellungen mittels Cauchytransformation, Poissonintegral sowie Cauchyintegral hergeleitet. Als Randwerte sind Funktionen sowie Borel-Maße zugelassen. Des weiteren werden die durch das Poissonintegral induzierten Zusammenhänge zwischen Hardyräumen und Funktionenräumen erläutert.

Beginnend mit Kapitel 4 werden als Randwerte Distributionen betrachtet. Zunächst wird hierbei die Darstellung von harmonischen Funktionen mittels Poissonintegral auf immer größere Distributionenräume erweitert, um dann einen Darstellungssatz für alle Distributionen zu beweisen. Analog zum klassischen Fall gibt es Zusammenhänge zwischen den Räumen der Randwerte und den Räumen der harmonischen Funktionen. Dieses Kapitel folgt hauptsächlich den beiden Arbeiten [LiB85] und [LiS84]. Die Anwendung dieses Kapitels beruht in erster Linie in Versuchen die Multiplikation mittels harmonischer Darstellung auf Distributionen zu erweitern, hier sei auf [Boi98] verwiesen. Kapitel 5 erweitert die Idee der Darstellung mittels Cauchytransformation auf Distributionen. Zu diesem Themengebiet gibt es am meisten Literatur. Dabei sei auf [Til53] und [Til61] sowie [Brem65] verwiesen. Die meisten Arbeiten beziehen sich aber auf höherdimensionale Verallgemeinerungen und speziell auf kegelförmige Bereiche, die in der Physik eine Rolle spielen (Lichtkegel). Distributionelle Randwerte sind insbesonders in der Quantenfeldtheorie von Bedeutung, wo die Vakuums-Erwartungswerte Distributionen sind. Hier sei auf [Con71], [Con71] sowie [Con68] verwiesen. Viele Resultate und Referenzen hierzu sind in [Car89] zu finden. Kapitel 6 verallgemeinert schließlich das Cauchyintegral auf eine spezielle Klasse von Distributionen und zeigt so, wie man die Hardyräume verallgemeinern kann. Wiederum sind Anwendungen hauptsächlich in der Physik zu finden. Ein Buch dazu, das zusätzlich noch auf einige Anwendungen eingeht, ist [Bel66].

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die Distributionen

1.1 Übersicht

Der Begriff „Distribution“ ist am engsten mit der „Delta-Distribution“ verknüpft. Sie tauchte implizit bereits sehr früh (1822) bei Fourier in Verbindung mit den Fourier Reihen auf. Explizit führte sie Paul Dirac für die Quantenmechanik als eine „uneigentliche Funktion“ mit folgenden Eigenschaften ein:

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\delta(x)dx = \phi(0) \text{ für } \phi(x) \text{ hinreichend glatt.}$$

Natürlich stehen die beiden Punkte dieser Definition in einem Widerspruch zueinander, da das Integral über eine Funktion, die fast überall verschwindet, 0 ergeben müsste.

$\delta(x)$ kann daher nicht einfach als normale Funktion aufgefasst werden, über die man im herkömmlichen Sinn integriert, sondern man muss eine Erweiterung des Funktionenbegriffs einführen, in der dieser Widerspruch gelöst wird. An eine solche Erweiterung werden auch andere Forderungen gestellt, da es speziell in der Differentialrechnung Probleme mit dem klassischen Funktionenbegriff gibt. Die Klasse der Distributionen sollte daher folgende Eigenschaften erfüllen:

- Jede Funktion ist auch eine Distribution.
- Rechenregeln, die für Funktionen gelten, sollen erhalten bleiben.
- Jede Distribution ist differenzierbar.
- Vertauschung von Grenzprozessen soll allgemein gelten.

Wie wir später sehen werden, erfüllen die Distributionen all diese Forderungen und sind daher für praktische Anwendungen oft viel einfacher und eleganter zu benützen als klassische Funktionen.

Es gibt mehrere Zugänge, um Distributionen zu definieren, die wir kurz skizzieren wollen. Wichtig ist, dass eine Distribution, wie wir es bei der Delta-Distribution gesehen haben, auf eine hinreichend glatte Funktion „angewendet wird“. Hinreichend glatt wird so formuliert, dass $f(x)$ einem bestimmten Funktionenraum, dem so genannten „Testfunktionenraum“, entstammen muss. Wir müssen daher klären, wie diese Anwendung zu erfolgen hat, da wir gesehen haben, dass das Integral in diesem Zusammenhang die geforderten Eigenschaften nicht erfüllt.

- **Stetige lineare Funktionale auf Testfunktionenräumen**

  Um den Funktionenbegriff zu erweitern, gehen wir zuerst von einer integrierbaren Funktion f aus. Diese fassen wir als eine Abbildung T_f auf, die jeder Testfunktion ϕ die Zahl $\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$ zuordnet.

  Wollen wir nun den Funktionenbegriff auf Distributionen erweitern, lassen wir neben den Abbildungen T_f auch andere lineare Abbildungen vom Testfunktionenraum auf $\mathbb{R}$ zu. Für die Delta-Distribution ersetzen wir das nicht sinnvoll definierbare Integral $\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\delta(x)dx = \phi(0)$ durch die lineare Abbildung:

$$\delta : \phi \mapsto \phi(0).$$

Wir werden im folgenden diesen Zugang wählen, da er der Eleganteste ist und auch von Schwarz bei der Einführung der Distributionen gewählt wurde. Speziell für Physiker und Ingenieure wurden noch andere Zugänge entwickelt, die auf den ersten Blick etwas anschaulicher wirken und keiner funktionalanalytischen Grundlagen bedürfen.

- **Spezielle Äquivalenzklassen geeigneter Cauchy-Folgen**

  Bei diesem Zugang ersetzten wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$ nicht durch eine lineare Abbildung, sondern durch eine Grenzwertfolge, womit wir wieder einen erweiterten Funktionenbegriff erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx$$

  Damit dieser Ausdruck sinnvoll ist, fordern wir außerdem, dass $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle geeigneten Testfunktionen ϕ eine Cauchyfolge bildet.

  Als Darstellung der Delta-Distribution kann man z.B.

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{nx^2}$$

wählen, denn sie erfüllt die Eigenschaften der Delta-Distribution

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{nx^2}\phi(x)dx=\phi(0),$$

wobei $\phi(x)$ hinreichend glatt, also eine Testfunktion, sein muss.

Da es auch andere Folgen gibt, die die gleiche Eigenschaft haben, definiert man, dass zwei Folgen g_n und h_n äquivalent heißen, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\phi(x)dx.$$

Damit lässt sich die Delta-Distribution mit einer Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen von Funktionen identifizieren.

- **Lokal als schwache Ableitung stetiger Funktionen**

  Dieser letzte und am seltensten verwendete Zugang zur Distributionentheorie geht von der Idee der partiellen Integration aus:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx = f(x)\phi(x)|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx =$$

$$=-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx,$$

falls $\phi(x)$ im Unendlichen hinreichend stark abfällt, was wir von Testfunktionen immer fordern werden.

Falls man $f(x)$ nicht ableiten kann, kann man trotzdem den Ausdruck $\int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx$ bilden, indem man $-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx$ berechnet. Wenn man $f(x)$ mit der Distribution und $\phi(x)$ mit der Testfunktion identifiziert, bedeutet daher die schwache Ableitung, die Ableitung im Sinne der Distributionen, dass man die negative Ableitung der Testfunktion bilden muss.

Wir wollen nun zeigen, wie man durch die Ableitung in diesem Sinne auf die Delta-Distribution kommt. Die Heaviside Sprungfunktion erhalten wir durch Ableitung einer stetigen Funktion ($f(x)=0$ für $x\le 0$ und x für $x>0$).

$$\theta(x)=\begin{cases}0: & x\le 0\\ 1: & x>0\end{cases},\ \text{Heaviside Sprungfunktion}$$

Leiten wir im Sinne der Distributionen $\theta(x)$ ab, erhalten wir $\delta(x)$, weil die Ableitung im Sinne der Distributionen von $\theta(x)$ die Eigenschaft Delta-Distribution erfüllt:

$$-\int_{\mathbb{R}}\theta(x)\phi'(x)dx=-\int_0^\infty 1\cdot\phi'(x)dx=-\phi(\infty)+\phi(0)=\phi(0).$$

1.2 Funktionalanalytische Grundlagen

Für die Definition der Distributionen über Testfunktionenräume benötigen wir gewisse Grundlagen der linearen Algebra und der Funktionalanalysis.

1.2.1 Vektorraum

Definition 1.1 ($\mathbb{K}$-Vektorraum) *Ein Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$, kurz $\mathbb{K}$-Vektorraum, ist eine Abelsche Gruppe $(V, +)$, auf der zusätzlich eine Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathbb{K}$ erklärt ist:*
$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$
Die Skalarmultiplikation muss dabei für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ folgende Eigenschaften erfüllen:

- *Assoziativität:* $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$.
- *Distributivität:* $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
- *Kommutativität:* $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.
- *Neutralität der 1:* $1 \cdot v = v$.

Definition 1.2 (Eigenschaften linearer Räume) *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $E \subset V$, dann heißt E*

- *Konvex, falls für alle $x, y \in E, 0 \leq \lambda \leq 1$ gilt, dass $\lambda x + (1 - \lambda) y \in E$.*
- *Kreisförmig, falls für alle $x \in E, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$ gilt, dass $\lambda x \in E$.*
- *Absorbierend, falls für alle $x \in V$ ein $t > 0$ existiert, mit $tx \in E$.*

Definition 1.3 (Lineare Abbildung zwischen Vektorräumen) *Seien V_1, V_2 zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann heißt eine Abbildung $T : V_1 \to V_2$ linear, falls für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:*

$$T(\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$$

Eine lineare Abbildung erfüllt folgende Eigenschaften:

- $T(0) = 0$
- Das Bild eines Untervektorraums $U \leq V_1$ ist ein Unterraum von V_2, also $T(U) \leq V_2$. Speziell nennt man $T(V_1)$ den Bildraum.
- Das Urbild eines Untervektorraums $U \leq V_2$ ist ein Unterraum von V_1, das heißt $T^{-1}(U) \leq V_1$. Speziell nennt man $T^{-1}(\{0\})$ den Kern.

1.2.2 Topologischer Raum

Definition 1.4 (Topologischer Raum) *Sei X eine Menge, und $\mathcal{T}$ ein System von Mengen: $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$.*
$(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, wenn $\mathcal{T}$ folgende Eigenschaften erfüllt.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(O2) $U_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

(O3) $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ nennt man offene Mengen im topologischen Raum, ihre Komplemente abgeschlossene Mengen. Der Abschluss einer Menge $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge die A enthält.

Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}$ zum Beispiel wählt als offene Mengen jene Mengen, die sich als Vereinigung von offenen Intervallen darstellen lassen. Eine kurze Rechnung zeigt, dass dieses Mengensystem die geforderten Eigenschaften erfüllt.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann bezeichnen wir $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ als Basis der Topologie $\mathcal{T}$, falls sich jede Menge aus $\mathcal{T}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$ schreiben lässt.

Als Subbasis bezeichnen wir eine Menge $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ dann, wenn
$X \cup \{\bigcap_{i=1}^{n} V_i : \ V_i \in \mathcal{V}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist. Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$, dann existiert genau eine Topologie für welche $\mathcal{V}$ eine Subbasis ist.

Seien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X, so nennt man $\mathcal{T}_1$ feiner als $\mathcal{T}_2$, falls $\mathcal{T}_1$ mehr offene Mengen als $\mathcal{T}_2$ enthält, und gröber, falls $\mathcal{T}_2$ mehr offene Mengen als $\mathcal{T}_1$ enthält.

Als offene Umgebung U von einem Punkt x bezeichnet man eine offene Menge, die x enthält. Eine Umgebung von x ist eine Menge, die eine offene Umgebung von x als Teilmenge besitzt.

Wir definieren weiter den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ als die Menge aller Umgebungen von x. Man kann über die Umgebungsfilter offene Mengen charakterisieren.

Satz 1.5 *Eine Menge $O \subset X$ ist offen (d.h. $O \in \mathcal{T}$) $\Leftrightarrow \forall x \in O : O \in \mathfrak{U}(x)$*

Beweis: „$\Rightarrow$“: Ist O offen und $x \in O$, dann gilt per Definition $x \in \mathfrak{U}(x)$.
„$\Leftarrow$“: Für alle $x \in O$ gibt es, wegen $O \in \mathfrak{U}(x)$, nach Definition eine offene Menge $V_x \subset O$, die x enthält.
Konstruieren wir die Menge $V := \bigcup_{x \in O} V_x$, so ist diese als Vereinigung von offenen Mengen offen, weiters gilt:
$O \subset V$ da jedes V_x in O liegt.
$O \supset V$ da jedes $x \in O$ in V_x und damit in V liegt.
Insgesamt erhalten wir also $O = V$, also ist O offen. $\square$

Satz 1.6 *Wenn für zwei Topologien auf X, $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$, gilt, dass für jedes $x \in X$, $\mathfrak{U}_1(x) = \mathfrak{U}_2(x)$, folgt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Beweis: Eine Menge $O \subset X$ ist offen bezüglich $\mathcal{T}_1$, falls $O \in \mathfrak{U}_1(x)$ für alle $x \in X$. Dies ist äquivalent zu $O \in \mathfrak{U}_2(x)$ für alle $x \in X$ und damit zu $O \in \mathcal{T}_2$. □

Umgebungsfilter werden wir durch folgende Eigenschaften charakterisieren:

Satz 1.7 *Die Umgebungsfilter $\{\mathfrak{U}(x) : x \in X\}$ erfüllen:*

(U1) *$\mathfrak{U}(x)$ ist nichtleer; $x \in U$ für alle $U \in \mathfrak{U}(x)$.*

(U2) *$U \in \mathfrak{U}(x)$, $V \subset X$ und $U \subset V \Rightarrow V \in \mathfrak{U}(x)$.*

(U3) *$U_1, ..., U_n \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow U_1 \cap ... \cap U_n \in \mathfrak{U}(x)$.*

(U4) *$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists V \in \mathfrak{U}(x), V \subset U$ sodass $U \in \mathfrak{U}(y)$ für alle $y \in V$.*

Beweis: **(U1/2):** Aus der Definition offensichtlich.
(U3): Per Definition gibt es offene Mengen $O_i, ...O_n$ mit $x \in O_i \subset U_i$. Weiters ist $O := O_1 \cap ... \cap O_n$ offen und nach Konstruktion gilt $x \in O \subset U_1 \cap ... \cap U_n$.
(U4): Per Definition gibt es eine offene Menge $V \in \mathfrak{U}(x)$ mit $x \in V \subset U$ und nach Satz 1.5 gilt für alle $y \in V$ $V \in \mathfrak{U}(y)$, womit nach (U3) die geforderte Eigenschaft folgt. □

Man kann aus einer Familie von Umgebungsfiltern eine Topologie zurückgewinnen, die Idee kommt dabei aus Satz 1.5.

Satz 1.8 *Einer Menge X kann mittels einer Familie von Mengen $\{\mathfrak{U}(x) : x \in X\}$, die die Eigenschaften **(U1)-(U4)** erfüllt, eine Topologie $\mathcal{T}$ zugeordnet werden:*

$$\mathcal{T} := \{U \subset X : \forall x \in U : U \in \mathfrak{U}(x)\}$$

$\mathfrak{U}(x)$ ist ein Umgebungsfilter dieser Topologie $\mathcal{T}$

Beweis:
(O1): Nach (U2) folgt $X \in \mathfrak{U}(x)\ \forall x \in X$ und per Definition gilt $\emptyset \in \mathcal{T}$.
(O2): Sei $\{U_i : i \in I\}$ eine Familie von Mengen aus $\mathcal{T}$. Für beliebiges $x \in U := \bigcup_{i \in I} U_i$ gibt es einen Index $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Nach Definition gilt $U_{i_0} \in \mathfrak{U}(x)$ und nach (U2) $U \in \mathfrak{U}(x)$, also $U \in \mathcal{T}$.
(O3): Für $U_1, ...U_n \in \mathcal{T}$ und beliebiges $x \in U := U_1 \cap ... \cap U_n$ gilt nach (U3) $U \in \mathfrak{U}(x)$ und damit wieder $U \in \mathcal{T}$. □

In der Folge werden wir zur Beschreibung einer Topologie nicht den Begriff des Umgebungsfilters, sondern den der Umgebungsbasis verwenden:

Definition 1.9 (Umgebungsbasis) *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$, $\mathfrak{W}(x) \subset \mathfrak{U}(x)$, dann heißt $\mathfrak{W}(x)$ Umgebungsbasis :⇔*

$$\forall V \in \mathfrak{U}(x)\ \exists U \in \mathfrak{W}(x) : U \subset V$$

Den Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ erhalten wir dann als die Menge aller Teilmengen von X, die eine Menge aus $\mathfrak{W}(x)$ enthalten:

$$\mathfrak{U}(x) = \{V \subset X : \exists U \in \mathfrak{W}(x) : U \subset V\}$$

Definition 1.10 (Hausdorff-Raum) *$(X,\mathcal{T})$ heißt Hausdorff-Raum, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X, x \neq y$ Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(y)$ gibt, sodass gilt:*

$$U \cap V = \emptyset.$$

Definition 1.11 (Konvergenz) *Wir sagen, die Folge $(x_i)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ konvergiert gegen $x \in X$, in Zeichen $x_i \to x$, falls in jeder Umgebung von x fast alle (d.h.: alle bis auf endlich viele) Folgenglieder liegen.*

Wie aus der Definition ersichtlich, besitzt jede Folge in einem Hausdorff-Raum höchstens einen Grenzwert.

Definition 1.12 (Stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen) *Seien $(X_1,\mathcal{T}_1),(X_2,\mathcal{T}_2)$ zwei topologische Räume, dann heißt eine Abbildung $T : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ stetig in x, falls für alle Umgebungen U von $T(x)$ folgt, dass $T^{-1}(U)$ eine Umgebung von x ist. Diese heißt stetig, wenn sie für alle $x \in X_1$ stetig ist.*

1.2.3 Initiale und finale Topologie

Satz 1.13 *Sei X eine Menge, $(Y_i,\mathcal{T}_i)$ topologische Räume und $f_i : X \to Y_i, i \in I$ Abbildungen, dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass alle Abbildungen $f_i : (X,\mathcal{T}) \to (Y_i,\mathcal{T}_i)$ stetig sind.*
*Diese Topologie τ, genannt **initiale Topologie** hat folgende universelle Eigenschaft: Sei $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum und $g : Y \to X$ eine Abbildung, dann ist $g : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X,\mathcal{T})$ genau dann stetig wenn alle Abbildungen $f_i \circ g : (Y,\mathcal{T}_Y) \to (Y_i,\mathcal{T}_i)$ stetig sind.*
Eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist gegeben durch $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$.

Beweis: Ohne Beweis. □

Spurtopologie
Sei (Y,τ) ein topologischer Raum, sei $X \subset Y$ eine Teilmenge und bezeichne $\iota : X \to Y,\ \iota(x) = x$ die kanonische Einbettung, dann ist die Spurtopologie die initiale Topologie bezüglich der Abbildung ι.

Produkttopologie
Seien $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ topologische Räume, sei $X := \Pi_{i \in T}$ und seien $\pi_i : X \to x_i,\ \pi_i((x_i)_{i\in I}) = x_i$ die kanonischen Projektionen, dann ist die Produkttopologie die initiale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen $\pi_i,\ i \in I$.

Satz 1.14 *Sei X eine Menge, $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räumen und $f_i : Y_i \to X, i \in I$ Abbildungen, dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass alle Abbildungen $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (X, \mathcal{T})$ stetig sind.*
Diese Topologie τ, genannt ***finale Topologie****, hat folgende universelle Eigenschaft: Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum und $g : X \to Y$ eine Abbildung, dann ist $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T})$ genau dann stetig, wenn alle Abbildungen $g \circ f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ stetig sind.*
Die Topologie $\mathcal{T}$ ist gegeben durch $\mathcal{T} = \{O \subset X : f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i\ \forall i \in I\}$.

Beweis: Ohne Beweis. □

Strikt induktiver Limes
Seien $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ topologische Räume mit $X_i \subset X_j$ für $i < j$, sei $X := \bigcup_{i \in I} X_i$ und seien $\iota_i : X_i \to X,\ \iota_i(x) = x$ die Einbettungen, dann ist der strikt induktive Limes $(X, \mathcal{T})$ der Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$, die finale Topologie bezüglich der Familie von Abbildungen $\iota_i,\ i \in I$.

1.2.4 Topologischer Vektorraum

Wenn wir nun einen Vektorraum zusätzlich mit einer Topologie versehen, müssen die linearen Operationen des Vektorraums nicht notwendigerweise stetig sein. Wir fordern daher von einem topologischen Vektorraum:

Definition 1.15 (Topologischer Vektorraum) *Ein topologischer Vektorraum ist ein Vektorraum X, der zusätzlich mit einer Topologie $\mathcal{T}$ ausgestattet ist, sodass die folgenden Abbildungen stetig sind:*
$+ : X \times X \to X \quad (x_1, x_2) \to x_1 + x_2.$
$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X \quad (\lambda, x) \to \lambda \cdot x.$

Die Stetigkeit der Addition bezüglich der Produkttopologie bedeutet, dass zu jedem $x_1, x_2 \in X$ und zu jeder Umgebung $V \in \mathfrak{U}(x_1 + x_2)$ Umgebungen $U_1 \in \mathfrak{U}(x_1), U_2 \in \mathfrak{U}(x_2)$ mit $U_1 + U_2 \in V$ existieren. [1]

Die Stetigkeit der Skalarmultiplikation bedeutet, dass für alle $\lambda_0 \in \mathbb{K}, x \in X$ und jeder Umgebung $V \in \mathfrak{U}(\lambda_0 x)$, eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ und ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $\lambda U \subset V$ für alle $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ gilt.

Da die Translation und Skalarmultiplikation mit fixen λ stetig ist, folgt die folgende Charakterisierung der Umgebungsbasen:

[1] Wir verwenden folgende Notation: $x + U := \{x + U : u \in U\}$, $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ und $\lambda U := \{\lambda u : u \in U\}$

Satz 1.16 *Sei X ein topologischer Vektorraum mit Umgebungsfiltern $\mathfrak{U}(x)$ und Umgebungsbasen $\mathfrak{W}(x)$, dann gilt:*

1. $\mathfrak{U}(x) = \{x + U : U \in \mathfrak{U}(0)\}$
   (Sowie analog $\mathfrak{W}(0)$ ist eine Nullumgebungsbasis $\Leftrightarrow$ $\{x + U : U \in \mathfrak{W}(0)\}$ ist eine Umgebungsbasis von x.)

2. *Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $U \in \mathfrak{U}(0) \Leftrightarrow \lambda U \in \mathfrak{U}(0)$.*

Sind umgekehrt diese Eigenschaften erfüllt, so ist die Skalarmultiplikation stetig. Aus den beiden Eigenschaften folgt $U \in \mathfrak{U}(x) \Leftrightarrow \lambda U \in \mathfrak{U}(\lambda x)$, damit ist eine Umgebung von $\lambda_0 x$ von der Form $\lambda_0 U$ mit $U \in \mathfrak{U}(x)$. Wegen $\lambda(\frac{\lambda_0}{\lambda}U) \subset \lambda_0 U$ und da $(\frac{\lambda_0}{\lambda}U) \in \mathfrak{U}(x)$ gilt, ist die Stetigkeit gezeigt.

Die Addition ist ebenfalls stetig, weil eine Umgebung von $x_1 + x_2$ die Form $x_1 + x_2 + U$ mit $U \in \mathfrak{U}(0)$ hat.
Es gilt $x_1 + \frac{1}{2}U + x_2 + \frac{1}{2}U \subset x_1 + U + x_2 + U$. Wir haben daher für eine gegebene Umgebung von $x_1 + x_2$ Umgebungen von x_1 und x_2 gefunden, die die für die Stetigkeit geforderte Bedingung erfüllen.

In einem topologischen Vektorraum reicht damit die Nullumgebungsbasis zur Beschreibung der Topologie aus. Eigenschaften der Nullumgebungsbasis sind:

Satz 1.17 *In einem topologischen Vektorraum $(X,\mathcal{T})$ ist jede Nullumgebungsbasis absorbierend.*

Beweis: Da für alle $x \in X$ die Abbildung $\mathbb{K} \to X, \lambda \mapsto \lambda x$ an der Stelle $\lambda = 0$ stetig ist, gilt für alle Umgebungen W von $0 = 0x$: Es existiert ein $t > 0$ mit $tx \in W$. □

Satz 1.18 *In jedem topologischen Vektorraum $(X,\mathcal{T})$ existiert eine kreisförmige Nullumgebungsbasis. Besitzt der topologische Vektorraum eine konvexe Nullumgebungsbasis, so ist die kreisförmige Nullumgebungsbasis ebenfalls konvex.*

Beweis: Wegen der Stetigkeit von $(\lambda, x) \to \lambda x$ an der Stelle $(0, 0)$ gibt es für jede Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(0)$ ein $r > 0$ und eine Nullumgebung V mit $W := \{tx : |t| \leq r, x \in V\} \subset U$. W ist nach Konstruktion kreisförmig.

Sei $w := \lambda(tx) + (1 - \lambda)(sy), |t|, |s| < r$ eine konvexe Kombination von Elementen aus W. Es gilt $v := \frac{\lambda t}{\lambda t+(1-\lambda)s}x + \frac{(1-\lambda)s}{\lambda t+(1-\lambda)s}y \in V$ für V konvex. Es gilt $w = (\lambda t + (1 - \lambda)s)v \in W$, da $|\lambda t + (1 - \lambda)s| < r$. Damit ist gezeigt, dass W konvex ist. □

1.2.5 Lokal konvexe Vektorräume

Definition 1.19 *Ein lokal konvexer Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum, der eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt.*

Jede Menge einer Nullumgebungsbasis ist nach Satz 1.17 absorbierend, was wir daher in Folge nicht immer explizit anführen werden. Wir werden außerdem immer mit einer Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen Mengen arbeiten, was nach Satz 1.18 stets möglich ist. Lokal konvexe Vektorräume sind eng mit Seminormen verknüpft. Wie wir zeigen werden, kann man jede Topologie eines lokal konvexen Vektorraums durch eine Familie von Seminormen erzeugen.

Definition 1.20 (Seminorm) *Sei X ein Vektorraum und $p : X \to [0, \infty)$. p heißt Seminorm, wenn für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:*

(S1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(S2) $p(\alpha \cdot x) = |\alpha|\, p(x)$

Elementare Eigenschaften einer Seminorm sind:

- $p(0) = 0$
- $p(x) \geq 0$
- Dreiecksungleichung nach unten: $\forall x, y \in X : |p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$

Zum Vergleich zweier Seminormen p_1 und p_2 auf einem Vektorraum X definiert man:

$$p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow p_1(x) \leq p_2(x)\ \forall x \in X$$

Definition 1.21 (filtrierend) *Ein System von Seminormen $\mathcal{P}$ auf einem Vektorraum heißt filtrierend, falls es zu zwei beliebigen Seminormen $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ eine Seminorm $q \in \mathcal{P}$ gibt, sodass gilt:*

$$p_1 \leq q \text{ und } p_2 \leq q$$

Eine einfache Methode, um aus einem beliebigen System von Seminormen $\mathcal{P}_0$ ein filtrierendes System von Seminormen $\mathcal{P}$ zu bilden, ist einfach, die Maxima endlich vieler Seminormen aus $\mathcal{P}_0$ zu bilden.

$$p \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists p_1, ...p_n \in \mathcal{P}_0 : p = \max_{1,...n} p_i$$

Wir werden daher in Folge immer mit filtrierenden Systemen von Seminormen arbeiten, was keine Einschränkung ist.

Mit einer Seminorm p kann man auf einem Vektorraum X den Begriff der offenen p-Kugel vom Radius ϵ definieren:

$$V(p, \epsilon) := \{x \in X : p(x) < \epsilon\}.$$

Satz 1.22 *Sei X ein Vektorraum und p eine Seminorm auf X, dann gilt für alle $\epsilon > 0$, dass $V(p, \epsilon)$ konvex, kreisförmig und absorbierend ist.*

Beweis: **konvex:** Seien $x, y \in V(p,\epsilon), 0 \leq \lambda \leq 1$.
$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) =$
$\lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) < \lambda\epsilon + (1-\lambda)\epsilon = \epsilon \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in V(p,\epsilon)$.
kreisförmig: Seien $x \in V(p,\epsilon), |\lambda| \leq 1$.
$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leq p(x) < \epsilon \Rightarrow \lambda x \in V(p,\epsilon)$.
absorbierend: Sei $x \in X, t := \frac{\epsilon}{p(x)+1}$.
Es gilt: $p(x) = \frac{\epsilon}{t} - 1 < \frac{\epsilon}{t} \leq \frac{\epsilon}{t}$. Also $p(tx) = tp(x) < \epsilon \Rightarrow tx \in V(p,\epsilon)$. □

Satz 1.23 *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ eine filtrierende Familie von Seminormen auf X. Dann erzeugt $\mathcal{P}$ Umgebungsbasen einer Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$,*

$$\mathfrak{W}(x) := x + \mathfrak{W}(0) \text{ mit } \mathfrak{W}(0) := \{V(p,\epsilon) : p \in \mathcal{P}, \epsilon > 0\},$$

diese erzeugen Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$, die $(X,\mathcal{T}_\mathcal{P})$ zu einem lokal konvexen Vektorraum machen.

Beweis: Um zu zeigen, dass $\mathfrak{U}(x)$ Umgebungsfilter dieser Topologie sind, reicht es wegen Satz 1.7, die Eigenschaften **(U1)**-**(U4)** zu überprüfen.
(U1) Wegen $0 \in V(p,\epsilon)$ gilt $x \in x + V(p,\epsilon) \subset U$.
(U2) Sei $U \in \mathfrak{U}(x), U \subset V$, dann gilt nach Definition $V \in \mathfrak{U}(x)$.
(U3) Seien $U_1, ..., U_n \in \mathfrak{U}(x)$, dann gilt für gewisse P_i, ϵ_I: $x + V(p_1,\epsilon_1) \subset U_1, ..., x + V(p_n,\epsilon_n) \subset U_n$. Definieren wir $\epsilon := \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$ und wählen wir eine Seminorm $p \geq p_1, ..., p \geq p_n$, dann gilt: $x + V(p,\epsilon) \subset (x + V(p_1,\epsilon_1)) \cap ... \cap (x + V(p_n,\epsilon_n)) \subset U_1 \cap ... \cap U_n$ und damit $U_1 \cap ... \cap U_n \in \mathfrak{U}(x)$.
(U4) Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$ und definieren wir $V := x + V(p, \frac{\epsilon}{2}) \subset U$. Dann gilt für alle $y \in V$: $\mathfrak{U}(y) \ni y + V(p,\frac{\epsilon}{2}) \subset x + V(p,\frac{\epsilon}{2}) + V(p,\frac{\epsilon}{2}) = x + V(p,\epsilon)$. Damit gilt für alle $y \in V : U \in \mathfrak{U}(y)$.
Die Stetigkeit der Addition und Skalarmultiplikation folgt direkt aus der Form der Umgebungsfilter. □

Bezüglich dieser Topologie sind die Seminormen $p_i : X \to \mathbb{K}$ stetig. Es reicht, die Stetigkeit bei 0 zu zeigen. Sei p stetig in 0, da $p(0) = 0$, gibt es eine Nullumgebung U mit $p(u) < \epsilon$ für alle $u \in U$. Wegen der Dreiecksungleichung nach unten gilt ebenfalls $|p(x+u) - p(x)| \leq p(u) < \epsilon$, womit klar ist, dass p überall stetig ist. Es reicht daher, die Nullumgebungen zu betrachten, in $[0,\infty)$ sind die Umgebungsbasen $[0,\epsilon)$ und es gilt: $p^{-1}([0,\epsilon)) = V(p,\epsilon)$ ist eine Umgebung in X. Daraus folgt die Stetigkeit.

Diese Topologie ist sogar die Gröbste, bezüglich der alle Seminormen stetig sind. Es ist die initiale Topologie bezüglich der $p \in \mathcal{P}$.

Satz 1.24 *Sei $\mathcal{P}$ ein filtrierendes System von Seminormen auf X, dann gilt: Eine Seminorm $q : X \to [0,\infty)$ auf X ist stetig bezüglich $\mathcal{T}_\mathcal{P} \Leftrightarrow$ Es gibt ein $\lambda > 0$ und ein $p \in \mathcal{P}$ mit $q \leq \lambda p$.*

Beweis: Wegen der Stetigkeit der Addition reicht es wieder, Nullumgebungen zu betrachten.

„⇒“: Aus der Stetigkeit von q folgt, dass $V(q,1)$ eine Nullumgebung ist, damit folgt, dass es ein $p \in \mathcal{P}, \epsilon > 0$ gibt mit $V(q,1) \supset V(p,\epsilon)$, woraus $q \leq \frac{1}{\epsilon} p$ folgt.
„⇐“: Aus $q \leq \lambda p$ folgt $V(q,\epsilon) \supset V(p, \frac{\epsilon}{\lambda})$, was eine Nullumgebung ist, womit auch $V(q,\epsilon)$ eine Nullumgebung ist, woraus die Stetigkeit folgt. □

Umgekehrt kann man sogar zeigen, dass jeder lokal konvexe Vektorraum durch eine filtrierende Familie von Seminormen entsteht, dafür brauchen wir gewisse Vorbereitungen.

Definition 1.25 (Minkowski-Funktional) *Sei X ein Vektorraum und $E \subset X$ absorbierend. Dann definieren wir das Minkowski-Funktional $\mu_E : X \to [0,\infty)$:*

$$\mu_E(x) := \inf \left\{ t > 0 : t^{-1}x \in E \right\}$$

Satz 1.26 *Sei $E \in X$ konvex, kreisförmig und absorbierend. Dann ist μ_E eine Seminorm auf X.*

Beweis: **(S1)**: $\mu_E(x+y) \leq \mu_E(x) + \mu_E(y)$: Seien $x, y \in X, \epsilon > 0$. Dann gibt es $t \leq \mu_E(x) + \epsilon, s \leq \mu_E(y) + \epsilon$ mit $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in E$. Da E konvex ist, folgt: $\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t}\frac{x}{t} + \frac{s}{s+t}\frac{y}{s} \in E \Rightarrow \mu_E(x+y) \leq s + t = \mu_E(x) + \mu_E(y) + 2\epsilon$.
(S2): $\mu_E(\lambda x) = |\lambda| \mu_E(x)$: $\mu_E(\lambda x) = \inf \left\{ t > 0 : t^{-1} \lambda x \in A \right\} =$
$\inf \left\{ t > 0 : t^{-1} \frac{\lambda}{|\lambda|} x \in \frac{1}{|\lambda|} A \right\} =$ da kreisförmig $= \left\{ t > 0 : t^{-1} x \in \frac{1}{|\lambda|} A \right\} =$
$= |\lambda| \inf \left\{ t > 0 : t^{-1} x \in A \right\} = |\lambda| \mu_E(x)$. □

Satz 1.27 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal konvexer Vektorraum und $\mathfrak{W}(0)$ eine Nullumgebungsbasis aus konvexen, kreisförmigen, absorbierenden Mengen. Dann bildet $\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = (\mu_E)_{E \in \mathfrak{W}(0)}$ eine Familie von filtrierenden Seminormen.*
$\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ induziert wieder die Topologie $\mathcal{T}$ (dh.: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$).

Beweis: Wegen Satz 1.26 sind die μ_E Seminormen.

Es reicht, um $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ zu zeigen, die Gleichheit der Nullumgebungsbasen zu zeigen. Das machen wir, indem wir zeigen, dass für $E \in \mathfrak{W}(0)$ und jedes $0 < \epsilon < 1$, $(1-\epsilon)E \subset V(\mu_E, 1) \subset E$ gilt.
Aus $x \in (1-\epsilon)E$ folgt $\mu_E(x) \leq 1 - \epsilon$ also $x \in V(\mu_E, 1)$. Ist $x \in V(\mu_E, 1)$, also $\mu_E(x) < 1$, so folgt $t^{-1}x \in E$ für ein $t < 1$. Wegen der Kreisförmigkeit folgt $x = tt^{-1}x \in E$. □

Mit Satz 1.23 und Satz 1.27 können wir jetzt folgenden Satz formulieren:

Satz 1.28 *Sei X ein Vektorraum. Dann ist $(X,\mathcal{T})$ ein lokal konvexer Vektorraum ⇔ Es existiert eine Familie von filtrierenden Seminormen $\mathcal{P}$ auf X, die die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt.*

Definition 1.29 (separierend) *Ein System von filtrierenden Seminormen $\mathcal{P}$ auf einem Vektorraum heißt separierend, falls es zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$ ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p(x) > 0$ gibt.*

Satz 1.30 *Ein lokal konvexer topologischer Vektorraum ist Hausdorff $\Leftrightarrow$ Das System von filtrierenden Seminormen $\mathcal{P}$, das die Topologie erzeugt, ist separierend.*

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $(X,\mathcal{T}_\mathcal{P})$ Hausdorff, dann gibt es nach Definition zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$ Mengen $U, V \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$ mit $x \in U, 0 \in V$ und $U \cap V \neq \emptyset$. Nach Definition von $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ gibt es $p, q \in \mathcal{P}$ mit $(x + V(p, \epsilon_1)) \in U, V(q, \epsilon_1) \in V$ und damit $(x + V(p, \epsilon_1)) \cap V(q, \epsilon_1) = \emptyset$, also $q(x) \geq \epsilon_2 > 0$.
„$\Leftarrow$": Sei $x_1, x_2 \in X$, $x = x_2 - x_1 \neq 0$ gegeben, so gibt es nach Definition ein $p \in \mathcal{P}$ mit $\epsilon := p(x) > 0$. Daraus folgt $\left(x_1 + V(p, \frac{\epsilon}{2})\right) \cap \left(x_2 + V(p, \frac{\epsilon}{2})\right) = \emptyset$. Denn sei y ein Punkt aus diesem Durchschnitt, dann gibt es $z_1, z_2 \in V(p, \frac{\epsilon}{2}))$ mit $y = x_1 + z_1 = x_2 + z_2$, also $x = x_2 - x_1 = z_1 - z_2$ und somit gilt $\epsilon = p(x) = p(z_1 - z_1) \leq p(x_1) + p(x_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, was zu einem Widerspruch führt. $\square$

1.2.6 Konvergenz in einem lokal konvexen Vektorraum

In diesem Abschnitt wollen wir Konvergenz, Cauchy-Folge und Stetigkeit auf einen lokal konvexen Vektorraum $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ übertragen, indem wir mit offenen p-Kugeln arbeiten.

Satz 1.31 *Eine Folge (x_i) konvergiert bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ gegen x $\Leftrightarrow$ für alle $p \in \mathcal{P}$ gilt $p(x_i - x) \to 0$ (also $\forall \epsilon > 0\ \exists I(p, \epsilon) : \forall i \geq I(p, \epsilon) : p(x_i - x) < \epsilon$).*

Beweis: „$\Rightarrow$": Da für jedes $x \in X$ die Translation stetig ist, konvergiert $x_i - x \to x - x = 0$, und damit gilt $p(x_i - x) \to p(0) = 0$ für jede stetige Seminorm.
„$\Leftarrow$": Sei U eine Umgebung von x, dann existiert eine Seminorm $p \in \mathcal{P}$ und ein $\epsilon > 0$ mit $(x + V(p, \epsilon)) \subset U$. Wegen $p(x_i - x) \to 0$, also $p(x_i - x) < \epsilon$ für $i > I(p, \epsilon)$, gilt daher $x_i \in U$ für $i > I(p, \epsilon)$, also $x_i \to x$. $\square$

Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert, falls X ein Hausdorff-Raum ist, d.h. falls $\mathcal{P}$ separierend ist. Weiters definieren wir: (x_i) ist eine Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ Für alle $p \in \mathcal{P}$ und $\epsilon > 0\ \exists I(p, \epsilon)$, sodass für alle $i, j \geq I(p, \epsilon)$ $p(x_i - x_j) < \epsilon$ gilt.

Definition 1.32 (vollständig) *Ein lokal konvexer Vektorraum $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ heißt folgen-vollständig, falls jede Cauchyfolge gegen einen Punkt in X konvergiert.*

1.2.7 Stetigkeit in einem lokal konvexen Vektorraum

Auf lokal konvexen Vektorräumen lässt sich Stetigkeit linearer Funktionen auf mehrere äquivalente Arten klassifizieren.

Satz 1.33 *Seien $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{P}_X})$ und $(Y,\mathcal{T}_{\mathcal{P}_Y})$ lokal konvexe Vektorräume, die Hausdorff sind und sei $f : X \to Y$ eine lineare Funktion, dann ist äquivalent:*

1. *f stetig.*
2. *f stetig bei 0.*
3. *Für jede stetige Seminorm q in Y ist $q \circ f$ eine stetige Seminorm in X.*
4. *Zu jeder Seminorm $q \in \mathcal{P}_Y$ existiert eine Seminorm $p \in \mathcal{P}_X$ und ein $\lambda > 0$ mit $q(f(x)) \leq \lambda p(x)\ \forall x \in X$.*

Beweis: ($1 \Leftrightarrow 2$) Gilt für lineare Funktionen in beliebigen Räumen.
($1 \Rightarrow 3$) q ist eine stetige Seminorm, f ist stetig und linear $\Rightarrow q \circ f$ ist eine stetige Seminorm.
($3 \Rightarrow 2$) Sei $U = V(q, \epsilon)$ eine Umgebung von $f(0) = 0$ in Y, dann ist $f^{-1}(U) = V(q \circ f, \epsilon)$ eine 0-Umgebung in X, womit die Stetigkeit bei 0 gezeigt ist.
($3 \Leftrightarrow 4$) Folgt aus Satz 1.24. □

1.2.8 Initiale Topologie auf lokal konvexen Vektorräumen

Wir wollen nun analog zur in Satz 1.13 eingeführten initialen Topologie, für lokal konvexe Vektorräume und lineare Abbildungen eine initiale Topologie konstruieren.

Satz 1.34 *Seien $(Y_i, \mathcal{T}_{\mathcal{P}_i}), i \in I$, lokal konvexe Vektorräume, X ein Vektorraum und $f_i : X \to Y_i, i \in I$, eine Familie von linearen Abbildungen. Dann wird durch die Familie von Seminormen*

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i \in I} \{q \circ f_i : q \in \mathcal{P}_i\}$$

eine Topologie auf X induziert. Sie ist die gröbste Struktur (dh die mit den wenigsten Seminormen), bezüglich der alle f_k stetig sind. Wir nennen diese Topologie die ***initiale Topologie****.*

Sie hat folgende universelle Eigenschaft: Sei $(Y, \mathcal{T}_{\mathcal{P}_Y})$ ein lokal konvexer Vektorraum und $g : Y \to X$ eine lineare Abbildung, dann ist $g : (Y, \mathcal{T}_{\mathcal{P}_Y}) \to (X, \mathcal{T})$ genau dann stetig, wenn alle Abbildungen $f_i \circ g : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind.

Beweis: Die f_i sind genau dann stetig, wenn für alle stetigen Seminormen q auf Y_i $q \circ f_i$ eine stetige Seminorm auf X bildet. Folglich ist $\mathcal{P}$ die kleinste Familie von Seminormen, bezüglich der alle f_i stetig sind.

Für die lineare Abbildung $g : Y \to X$, gilt:

$$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \forall q \in \mathcal{P} : g(x_i - x) \to 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \forall p \in \mathcal{P}_Y : p \circ f_k \circ f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \forall k : f_k \circ f \text{ ist stetig,}$$

womit die universelle Eigenschaft gezeigt wäre. □

Der so erzeugte Raum ist wegen Satz 1.27 ein lokal konvexer Vektorraum. Für die Spurtopologie auf einem linearen Teilraum Y eines lokal konvexen Vektorraums X folgt, dass die Seminormen auf Y genau die Seminormen auf X, eingeschränkt auf Y, sind.

1.2.9 Finale Topologie auf lokal konvexen Vektorräumen

Wir wollen jetzt die in Satz 1.14 eingeführte finale Topologie ebenfalls für lokal konvexe Vektorräume betrachten.

Satz 1.35 *Seien $(X_i, \mathcal{T}_{\mathcal{P}_i}), i \in I$ lokal konvexe Vektorräume, Y ein Vektorraum und $f_i : X_i \to Y, i \in I$ eine Familie von linearen Abbildungen. Dann wird die finale Topologie durch die Familie von Seminormen*

$$\mathcal{P} = \{p \text{ Seminorm auf } Y : p \circ f_i \in \mathcal{P}_i\}$$

erzeugt.

Beweis: Die f_i sind genau dann stetig, wenn für alle stetigen Seminormen $p \circ f_i$ auf Y, p eine stetige Seminorm auf X_i ist. Erfüllt p diese Voraussetzungen, so ist p nach Definition in $\mathcal{P}$ und damit ist die so erzeugte Topologie die Finale. □

Der so erzeugte Raum ist wegen Satz 1.27 ein lokal konvexer Vektorraum. Genau wie für topologische Räume lässt sich der strikt induktive Limes $(X, \mathcal{T})$ der lokal konvexen Vektorräumen $(X_i, \mathcal{T}_i)$ bilden. Der strikt induktive Limes ist wieder ein lokal konvexer Vektorraum.

1.2.10 Dualraum eines topologischen Vektorraums

Definition 1.36 (Dualraum) *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer $\mathbb{K}-$Vektorraum, dann heißt*

- *der Raum aller linearen Abbildungen $T : X \to \mathbb{K}$ algebraischer Dualraum (X^*).*

- *der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $T : X \to \mathbb{K}$ topologischer Dualraum (X').*

Von größerem Interesse ist der topologische Dualraum. Sowohl X^* als auch X' sind wieder $\mathbb{K}$-Vektorräume, denn für (stetige) lineare Abbildungen S, T gilt: $S + T$ und λS sind ebenfalls (stetige) lineare Abbildungen.

Sei $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ ein lokal konvexer Vektorraum, dann können wir auf dem Dualraum X' eine Topologie konstruieren, indem wir auf X' eine Familie von Seminormen $(p_\phi)_{\phi \in X}$ erklären.

$$p_\phi : X' \to [0, \infty), \;\; p_\phi(T) := |T(\phi)|$$

Diese Topologie ist die Gröbste, bezüglich der alle Auswertungen $T \mapsto T(\phi)$ stetig sind, also die initiale Topologie bezüglich der Abbildungen. Diese Topologie heißt **schwach* Topologie**.
Wir werden für die Auswertung in Folge $\langle T, \phi \rangle$ schreiben, denn

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \;\; X' \times X \to \mathbb{K}$$

ist eine bilineare Abbildung. Dies folgt aus dem Umstand, dass X und X' Vektorräume sind und T linear ist.

1.3 Distributionen

1.3.1 Der Raum $\mathcal{D}_K$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, was wir in Folge immer annehmen werden, und $k = 0, 1, 2, ...$ Dann bezeichnet man $C^k(\Omega)$ den Vektorraum aller Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$, die stetige Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen. Die beliebig oft differenzierbaren Funktionen definieren wir als $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$.

Als Träger einer Funktion bezeichnet man supp $f := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$. Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge (d.h. jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, besitzt eine endliche Teilüberdeckung), dann können wir durch $C^k_K(\Omega) := \left\{ f \in C^k(\Omega) : \text{supp } f \subset K \right\}$ den Untervektorraum aller Funktionen mit Träger in K definieren. Analog zu den unendlich oft differenzierbaren Funktionen werden auch die beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit Träger in K definiert.

Sei $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir

$$\partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Dieser Differentialoperator hat die Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Auf dem Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit Träger in K, $C^\infty_K(\Omega)$, können wir das System von Seminormen

$\mathcal{P}_K := \{p_{K,l} : l = 0, 1, 2....\}$ mit $p_{K,l}(\phi) := \sup_{x \in K, |\alpha| \leq l} |\partial^\alpha \phi(x)|$ einführen. Aus der Definition der Seminorm ist ersichtlich, dass $\mathcal{P}_K$ wirklich ein System von Seminormen ist. $\mathcal{P}_K$ induziert daher eine Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ und wir können definieren:

Definition 1.37 $\mathcal{D}_K(\Omega) := (C_K^\infty(\Omega), \mathcal{T}_{\mathcal{P}_K})$

$\mathcal{D}_K(\Omega)$ ist ein lokal konvexer topologischer Vektorraum, der, wie man anhand Satz 1.30 sieht, überdies Hausdorff ist. Für zwei kompakte Mengen K_1, K_2 mit $K_1 \subset K_2$ gilt, dass $\mathcal{D}_{K_1}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{K_2}(\Omega)$.

1.3.2 Der Raum $\mathcal{D}$

Als $C_0^k(\Omega)$ bezeichnen wir die Funktionen mit kompaktem Träger, die stetige Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen. Wir definieren daher:

$$C_0^k(\Omega) := \bigcup_{K \subset \Omega,\text{ kompakt}} C_K^k(\Omega).$$

Die beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger nennen wir $C_0^\infty(\Omega)$.

Es ist nicht möglich eine abzählbare Familie von Seminormen anzugeben, die $C_0^\infty(\Omega)$ zu einem lokal konvexen Vektorraum $\mathcal{D}(\Omega)$ macht. Wir werden daher den strikt induktiven Limes der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$ bilden, auf denen wir bereits eine Familie von Seminormen gefunden haben.

Definition 1.38 *Durchlaufe (K_i) eine Basis von kompakten Mengen in Ω. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ z.B.$(\{x : |x| < i\})_{i \in \mathbb{N}}$.*
Dann definieren wir $\mathcal{D}(\Omega)$ als den strikt induktiven Limes der Räume $\mathcal{D}_{K_i}(\Omega)$.

Nach Abschnitt 1.2.9 ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein lokal konvexer topologischer Vektorraum und eine lineare Funktion $T : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ (Y sei ein lokal konvexer Vektorraum) ist genau dann stetig, wenn für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$, $T \circ \iota_K : \mathcal{D}_K(\Omega) \to Y$ stetig ist.

1.3.3 Distributionen $\mathcal{D}'$

Wir sind mit den gemachten Vorbereitungen nun in der Lage, Distributionen als lineare, stetige Funktionale auf dem Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\Omega)$ zu definieren. Es sei in Folge immer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als offen und nichtleer angenommen.

Definition 1.39 (Distribution) *$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ist genau dann eine Distribution auf Ω, wenn T ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Die Menge der Distributionen entspricht daher genau dem topologischen Dualraum $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ wird, wie wir in Abschnitt 1.2.10 gesehen haben, mit der schwach* Topologie zu einem lokal konvexen Vektorraum. Die entsprechende Familie von Seminormen ist

$$(p_\phi)_{\phi\in\mathcal{D}(\Omega)} \text{ mit } p_\phi(T) := |\langle T, \phi\rangle| \,.$$

Wir werden in Folge immer diese Topologie auf dem Raum der Distributionen verwenden.

Nach Satz 1.33 und der Konstruktion von $\mathcal{D}(\Omega)$ als strikt induktiver Limes der Räume $\mathcal{D}_K(\Omega)$ können wir zur Entscheidung, ob ein lineares Funktional T stetig, also tatsächlich eine Distribution ist, folgende Charakterisierung verwenden:

Satz 1.40 *$T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ ist genau dann eine Distribution, wenn gilt:*
Sei $K \in \Omega$, kompakt und $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, dann existiert ein $l_{K,T} \in \mathbb{N}$ und ein $C_K \geq 0$:

$$|T(\phi)| \leq C_K p_{K,l_{K,T}}(\phi).$$

Wir definieren, dass zwei Distributionen $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gleich sind, wenn für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T, \phi\rangle = \langle S, \phi\rangle$ gilt. Die Nulldistribution $T = 0$ muss für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle 0, \phi\rangle = 0$ erfüllen. Wir sagen eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verschwindet auf einer offenen Menge $G \subset \Omega$, $T = 0$ auf G, wenn $\langle 0, \phi\rangle = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(G)$ gilt.

Definition 1.41 *Als lokale Ordnung $O(T, K)$ einer Distribution T bezüglich einer kompakten Menge K, bezeichnet man das Infimum aller $l_{K,T}$, für welche die Abschätzung aus Satz 1.40 gilt.*
Als Ordnung $O(T)$ einer Distribution, bezeichnet man das Supremum über alle kompakten Mengen K, also $\sup_K O(T, K)$.

Stetige Funktionen
Sei $f \in C(\Omega)$. Dann lässt sich f als Distribution auffassen, indem man definiert: $I_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}, \langle I_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$. Es gilt für alle $\phi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subset \Omega$, kompakt:

$$|\langle I_f, \phi\rangle| = \left|\int_K f(x)\phi(x)dx\right| \leq \int_K |f(x)\phi(x)|\, dx \leq \sup_{x\in K} |\phi(x)| \int_K |f(x)|\, dx$$

Da f stetig ist, gilt für jedes kompakte K, $C_K = \int_K |f(x)|\, dx < \infty$ und wir können daher weiter abschätzen

$$|\langle I_f, \phi\rangle| \leq C_K p_{K,0}(\phi).$$

Aus dieser Abschätzung folgt direkt, dass I_f eine Distribution ist. Die Linearität folgt aus den Rechenregeln für Riemannintegrale, die Stetigkeit aus Satz 1.40.

Reguläre Distributionen
Der Vektorraum aller messbaren Funktionen, die lokal integrierbar sind, also für die $\|f\|_K := \int_K |f(x)|\,dx < \infty$ gilt, wird mit $L^1_{loc}(\Omega)$ bezeichnet. Man kann eine lokal integrierbare Funktion f in gleicher Weise wie eine stetige Funktionen als Distribution I_f auffassen. Wir nennen Distributionen T, für die es eine Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $T = I_f$ gibt, reguläre Distributionen.

1.3.4 Elementare Operationen

Es gilt, da $\mathcal{D}'(\Omega)$ ein Vektorraum ist, $\langle T_1 + T_2, \phi\rangle = \langle T_1, \phi\rangle + \langle T_2, \phi\rangle$ und $\langle \lambda T, \phi\rangle = \lambda\langle T, \phi\rangle$.

Auch die Ableitung lässt sich auf Distributionen übertragen. Damit die Rechenregeln erhalten bleiben, fordern wir, dass Rechenregeln, die für Funktionen f gelten, auch für die Distributionen I_f gelten. Für alle $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt (partielle Integration):

$$\langle I_{f'}, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)dx = -\langle I_f, \phi'\rangle.$$

Das lässt sich direkt auf $\mathbb{R}^n$ ausdehnen:

$$\langle I_{\partial^\alpha f}, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle I_f, \partial^\alpha \phi\rangle.$$

Wir definieren daher:

Definition 1.42 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und α ein Multiindex, dann definieren wir die Ableitung einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\partial^\alpha T$ durch*

$$\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \phi\rangle.$$

Mit dieser Definition ist jede Distribution beliebig oft differenzierbar, denn ∂^α ist eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$. Dies können wir daran erkennen, dass für jedes $K \in \Omega, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Abschätzung $p_{K,m}(\partial^\alpha \phi) \leq p_{K,m+|\alpha|}(\phi)$ erfüllt ist. Weiters erkennen wir an dieser Abschätzung, dass die lokale Ordnung $O(T, K)$ einer Distribution durch die Ableitung um $|\alpha|$ erhöht.

Die Ableitung ∂^α definiert bezüglich der schwach* Topologie eine lineare stetige Abbildung $\mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$. Sei $\phi \in \mathcal{D}$, dann gilt $p_\phi(\partial^\alpha T) = |\langle \partial^\alpha T, \phi\rangle|$ $= |\langle T, \partial^\alpha \phi\rangle| = p_{\partial^\alpha \phi}(T)$. Die Linearität ist klar und nach Satz 1.40 folgt auch die Stetigkeit.

Wir wollen nun die Konvergenz von Distributionenfolgen erklären. Mit der schwach* Topologie und Satz 1.31 folgt direkt:

Satz 1.43 *Sei $T_k \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Folge von Distributionen, dann gilt*

$$T_k \to 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \langle T_k, \phi\rangle \to 0 \text{ für alle } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Der Grenzwert einer Distributionenfolge ist wieder eine Distribution, denn

Satz 1.44 *$\mathcal{D}'(\Omega)$ gemeinsam mit der schwach* Topologie ist vollständig.*

Beweis: Sei T_i eine Cauchyfolge, dann ist auch $(\langle T_i, \phi\rangle)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ folgt, dass die Abbildung $T : \phi \mapsto \lim\langle T_i, \phi\rangle$ wohldefiniert und ein lineares Funktional ist.
$\{\langle T_i, \phi\rangle, i \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt weil $(\langle T_i, \phi\rangle)$ konvergiert, und mit Satz 1.40 damit stetig.
$\langle T_i, \phi\rangle \to \langle T, \phi\rangle$ bedeutet $T_i \to T$. □

Wie wir gesehen haben, ist jede Distribution differenzierbar. Wegen der Stetigkeit der Ableitung ermöglicht $\mathcal{D}'$ gemeinsam mit der schwach* Topologie außerdem, Limesbildung und Ableitungen zu vertauschen. $\mathcal{D}'$ erfüllt daher die Forderungen, die wir an die Distributionen gestellt haben.

Das einzige Manko besteht darin, dass man die Multiplikation von Distributionen miteinander nicht allgemein definieren kann. Damit die Multiplikation sinnvoll ist, müsste $I_f \cdot I_f = I_{f^2}$ gelten. Es lässt sich aber eine lokalintegrierbare Funktion f finden, für die f^2 nicht lokalintegrierbar ist ($f = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$).

Wir können aber die Multiplikation einer Distribution mit einer Funktion definieren. Sei $g \in C^\infty(\Omega)$, dann definieren wir die Multiplikation durch die Abbildung $g\, \cdot : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ mit

$$\langle g \cdot T, \phi\rangle = \langle T, g\phi\rangle.$$

1.3.5 Faltung von Distributionen

Analog zum Träger von Funktionen definieren wir den Träger einer Distribution:

Definition 1.45 *Der Träger einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} T$, ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von Ω, außerhalb welcher T verschwindet, also*

$$\operatorname{supp} T := \bigcap_{A \in C_T} A$$

mit $C_T = \{A \subset \Omega,$ abgeschlossen $: T(\phi) = 0\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus A)\}$.

Um die Faltung für Distributionen zu definieren, betrachten wir zuerst die Faltung von stetigen Funktionen.

Definition 1.46 *Seien $f, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ stetige Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$, dann definieren wir die Faltung von f mit g durch*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Definition ist sinnvoll, denn für festes x ist $y \rightarrow f(x-y)g(y)$ ebenfalls eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und damit integrierbar.

Eigenschaften der Faltung von stetigen Funktionen sind:

- $f * g = g * f$ (Direkt mittels einer Variablentransformation nachrechenbar.)
- $f * g$ ist stetig. (Klar als Integration einer stetiger Funktion über eine kompakte Menge.)
- $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ ($(f * g)(x) \neq 0$, falls $y \in \operatorname{supp} f$ und $x - y \in \operatorname{supp} g$, also $x \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.)

Die Faltung einer Distribution mit einer Funktion, genannt Regularisierte, erklären wir in Analogie dazu durch:

Definition 1.47 *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, dann gilt:*

$$(T * f)(x) := \langle T(y), f(x-y) \rangle$$

Eigenschaften der Faltung einer Funktion mit einer Distribution sind:

- $(T * f)(x)$, liegt in $C^\infty(\Omega)$ und es gilt $\partial^\alpha(T * f) = \partial^\alpha T * f = T * \partial^\alpha f$ (Die Stetigkeit folgt sofort, da die Komposition zweier stetiger Abbildungen stetig ist. Wegen $\partial^\alpha \langle T(y), f(x-y) \rangle(x) = \langle T(y), \partial^\alpha f(x-y) \rangle(x)$ überträgt sich die Stetigkeit der Ableitungen von f sofort auf $T * f$.)
- $\operatorname{supp} T * f \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} f$ (Analog zur Faltung von 2 Funktionen.)

Wir wollen nun ganz allgemein die Faltung für Distributionen erklären, daher betrachten wir:

$$\langle I_{f*g}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right) \phi(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tilde{x})g(y)\phi(\tilde{x}+y)d\tilde{x}dy = \langle I_f(x), \langle I_g(y), \phi(x+y) \rangle \rangle$$

Aus diesem Grund definieren wir die Faltung von zwei Distributionen wie folgt:

Definition 1.48 *Seien $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dann gilt:*

$$\langle T * S, \phi \rangle = \langle T(x), \langle S(y), \phi(x+y) \rangle \rangle = \langle S(y), \langle T(x), \phi(x+y) \rangle \rangle$$

Sei $\phi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega)$, dann ist $x \to \langle S(y), \phi(x+y)\rangle$ ein Element von $\mathcal{D}(\Omega)$.

Die Funktion $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ hat zwar einen kompakten Träger in $\mathbb{R}^n$, aber $\phi(x+y)$ muss nicht unbedingt einen kompakten Träger in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ haben. Damit das erfüllt ist, fordern wir zusätzlich für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und den Träger der Distributionen, dass die Menge

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \text{supp } T, y \in \text{supp } S, x+y \in K\big\}$$

eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^{2n}$ ist. Diese Einschränkung nennen wir Trägerbedingung.

Eigenschaften der Faltung von Distributionen, die die Trägerbedingung erfüllen, sind:

- $T * S = S * T$ (Geht aus der Definition hervor.)
- $T * S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (Da $\langle S(y), \phi(x+y)\rangle \in \mathcal{D}'(\Omega)$.)
- supp $T*S \subset$ supp $T+$supp S (Analog zur Faltung von 2 Funktionen.)
- $\partial^\alpha(T * S) = \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S$.
  (Es gilt $\langle \partial^\alpha(T*S), \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T*S, \partial_y^\alpha \phi(x+y)\rangle =$
  $= (-1)^{|\alpha|}\langle T(x), \langle S(y), \partial_y^\alpha \phi(x+y)\rangle\rangle$, was genau der Anwendung der Ableitung auf S entspricht.)
  Durch die Vertauschbarkeit gilt Analoges auch für T.

Ein wichtiges Beispiel ist die Faltung von Funktionen aus
$\mathcal{D}_+(\mathbb{R}) := \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \text{supp } T \subset [0,\infty)\}$. Diese Distributionen erfüllen die Trägereigenschaft und $(\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}), *)$ bildet daher eine Abelsche Gruppe mit δ als Eins.

1.4 Andere Testfunktionenräume

Definition 1.49 *Der Raum X_1 lässt sich in den Raum $X_2 \supset X_1$ einbetten, $X_1 \hookrightarrow X_2$, falls die identische Abbildung ι_{X_2} stetig ist. Für die Fortsetzung eines Elements $x_1 \in X_1$ auf X_2 schreiben wir ebenfalls x_1.*

Wir werden in Folge größere Testfunktionenräume betrachten, in die sich der Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\Omega)$ einbetten lässt. Wie wir zeigen werden, lässt sich hierdurch der neu erhaltene Distributionenraum in $\mathcal{D}'(\Omega)$ einbetten.

Seien $X_1 \subset X_2$ lokal konvexe Vektorräume und sei außerdem die identische Einbettung ι stetig. Das ist nach Satz 1.33 erfüllt wenn es für jede Seminorm q auf X_2 eine Seminorm p auf X_1mit $q(\iota(x_1)) \leq p(x_1)$ gibt. Dann gilt nach Definition $X_1 \hookrightarrow X_2$.

Den Dualraum X'_2 können wir in X'_1 einbetten. Als Topologie verwenden wir wie immer die schwach* Topologie. Die dazugehörige Restriktion ist

$X_2' \to X_1' : T \mapsto T|_{X_1} = T \circ \iota$. Es gilt dann $|\langle T|_{X_1}, \phi\rangle| \leq |\langle T, \phi\rangle|$ und damit $X_2' \hookrightarrow X_1'$.

Wir können die Restriktion des Raumes $X_2'|_{X_1}$ mit X_1' identifizieren, falls die Restriktion injektiv ist. Das ist genau der Fall, wenn X_1 dicht in X_2 liegt, also $\overline{X_1} = X_2$. Dann gilt $T|_{X_1} = 0 \Leftrightarrow < T, \phi >= 0 \ \forall \phi \in X_1 \Leftrightarrow < T, \phi >= 0 \ \forall \phi \in X_2 \Leftrightarrow L = 0$. Das entspricht genau der Injektivität.

1.4.1 Distributionen mit kompaktem Träger $\mathcal{E}'$

Definition 1.50 *Wir definieren als $\mathcal{E}$ den Raum $C^\infty(\Omega)$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen gemeinsam mit der Topologie, die durch die Familie von Seminormen $\mathcal{P} := \{p_{K,l} : l = 0, 1, 2..., K \subset \Omega, \text{ kompakt}\}$ induziert wird. ($p_{K,l}(\phi) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq l} |\partial^\alpha \phi(x)|$).*

Der Raum $\mathcal{E}(\Omega)$ ist ein lokal konvexer Vektorraum und es gilt $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Daher ist der topologische Dualraum $\mathcal{E}'(\Omega)$ gemeinsam mit der schwach* Topologie ein lokal konvexer Vektorraum und ein Teilraum der Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$. Direkt aus der Definition sehen wir, dass die Distributionen $\mathcal{E}'(\Omega)$ von endlicher Ordnung sind. Wir nennen $\mathcal{E}'(\Omega)$ den Raum der Distributionen mit kompaktem Träger. Das wird durch folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 1.51 *Ist $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, so hat $T|_{\mathcal{D}'} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ einen kompakten Träger. Umgekehrt lässt sich jedes $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, das einen kompakten Träger hat, eindeutig auf $\mathcal{E}'(\Omega)$ fortsetzen.*

Beweis: Da $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, gibt es für jedes $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ wegen des Satzes 1.33 eine Seminorm $p_{K,l}$ und ein λ mit $|\langle T, \phi\rangle| \leq \lambda p_{K,l}(\phi)$. Sei nun $\phi \in \mathcal{D}(\Omega \backslash K)$, dann gilt $p_{K,l}(\phi) = 0$ und daher auch $\langle T, \phi\rangle = 0$, woraus supp $T \subset K$ folgt. Sei nun $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger K, für die Fortsetzung auf $\mathcal{E}(\Omega)$ setzen wir $\langle T, \phi\rangle = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ ohne Träger in K. Es gibt eine Seminorm $p_{K,l}$ und ein λ mit $|\langle T, \phi\rangle| \leq \lambda p_{K,l}(\phi)$ und damit ist die Fortsetzung stetig und ein Element von $\mathcal{E}'(\Omega)$. $\square$

1.4.2 Temperierte Distributionen $\mathcal{S}'$

Definition 1.52 *Wir definieren als $\mathcal{S}(\Omega)$ den Raum der Funktionen $\phi \in C^\infty(\Omega)$, für die*

$$P_{\alpha,\beta}(\phi) := \sup_{x \in \Omega} \left| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right| < \infty$$

gilt. Der Raum $\mathcal{S}(\Omega)$ heißt Raum aller schnellfallenden Funktionen.
Auf dem Raum $\mathcal{S}(\Omega)$ wird durch die Familie von Seminormen
$\mathcal{P} := \{P_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta = 0, 1, 2...\}$ eine Topologie erklärt, die $\mathcal{S}(\Omega)$ zu einem lokal konvexen Vektorraum macht.

Der Raum $\mathcal{S}(\Omega)$ ist ein lokal konvexer Vektorraum und es gilt, da für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$, die Abschätzung

$$P_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x\in\Omega} \left| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right| \leq C_K p_{K,|\beta|}(\phi)$$

erfüllt ist $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$. Damit folgt wiederum, dass der topologische Dualraum $\mathcal{S}'(\Omega)$ gemeinsam mit der schwach* Topologie einen lokal konvexen Vektorraum und einen Teilraum der Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$ bildet. Wir nennen $\mathcal{S}'(\Omega)$ den Raum der temperierten Distributionen. Da für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ die genannte Abschätzung $P_{\alpha,\beta}(\phi) \leq C_K p_{|\beta|,K}(\phi)$ gilt, folgt direkt eine wichtige Eigenschaft der temperierten Distributionen.

Satz 1.53 *Die temperierten Distributionen sind von endlicher Ordnung.*

Es gelten folgende Einbettungen:

Satz 1.54 $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

Beweis: Wir wir gesehen haben, genügt es, $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{S}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ zu zeigen. Um $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{S}(\Omega)$ zu zeigen, reicht es wegen der Konstruktion von $\mathcal{D}(\Omega)$ als strikt induktiver Limes der $\mathcal{D}_K(\Omega)$, für jedes kompakte K die Stetigkeit der Einbettung $\mathcal{D}_K(\Omega) \to \mathcal{S}(\Omega)$ zu zeigen. Mit Satz 1.33, folgt das direkt daraus, dass

$$P_{\alpha,\beta}(\phi) = \sup_{x\in\Omega} \left| x^\alpha \partial^\beta \phi(x) \right| \leq C_K p_{|\beta|,K}(\phi)$$

mit $C_K = \max\{|x^\alpha| : x \in K\}$ gilt.
Die Stetigkeit der Einbettung $\mathcal{S}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$ ist wegen

$$p_{K,l}(\phi) = \sup_{x\in K, |\alpha|\leq l} |\partial^\alpha \phi(x)| \leq \sup_{x\in\Omega, |\alpha|\leq l} |\partial^\alpha \phi(x)| = P_{0,\beta}(\phi)$$

ebenfalls gegeben. □

Außerdem gilt:

Satz 1.55 *$\mathcal{S}(\Omega)$ liegt dicht in $\mathcal{E}(\Omega)$ und $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in $\mathcal{S}(\Omega)$.*

Beweis: Es reicht $\overline{\mathcal{E}(\Omega)} = \mathcal{D}(\Omega)$ zu zeigen. Wir müssen zeigen, dass es für jedes $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ und $\epsilon > 0$ ein $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $p_{K,l}(\phi - \psi) < \epsilon$. Das ist nach Satz 1.51 möglich. □

1.4.3 Die Bremermann-Räume $\mathcal{O}'_\alpha$

Definition 1.56 *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, dann definieren wir $\mathcal{O}_\alpha$ als den Raum aller C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, sodass $\phi(x) = O(\| x \|^\alpha)$ und $\partial^\beta \phi(x) = O(\| x \|^\alpha)$ für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$.*

Wir definieren, dass eine Folge $\{\phi_i\}$ im Raum $\mathcal{O}_\alpha$ gegen ϕ konvergiert, falls gilt

- $\phi_i \in \mathcal{O}_\alpha$ für alle i.
- Für jedes β konvergiert die Folge $\{\partial^\beta \phi_i\}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gegen $\partial^\beta \phi$.
- Für jedes β existiert eine Konstante M_β, für die gilt

$$|\partial^\beta \phi_i(x)| \leq M_\beta (1 + |x|)^\alpha.$$

Das heißt, eine $\{\phi_i\}$ konvergiert in $\mathcal{O}_\alpha$, falls sie in $\mathcal{E}$ konvergiert und zusätzlich

$$|\partial^\beta \phi_i(x)| \leq M_\beta (1 + |x|)^\alpha$$

erfüllt.

Als Bremermann-Räume $\mathcal{O}'_\alpha$ definieren wir dann die Menge der stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{O}_\alpha$.

Da $\mathcal{D} \subset \mathcal{O}_\alpha$ und die Konvergenz im Sinn von $\mathcal{D}$ die Konvergenz im Sinn von $\mathcal{O}_\alpha$ impliziert, folgt $\mathcal{O}'_\alpha \subset \mathcal{D}'$. Die Bremermann-Räume sind also Distributionenräume. Analog folgt, da $\mathcal{O}_\alpha \subset \mathcal{E}$ und die Konvergenz im Sinn von $\mathcal{O}_\alpha$ die Konvergenz im Sinn von $\mathcal{E}$ impliziert, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{O}'_\alpha$ und damit insgesamt

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{O}'_\alpha \subset \mathcal{D}'.$$

1.4.4 Die Sobolev-Räume $\mathcal{D}'_{L_p}$

Definition 1.57 *Sei $1 \leq p < \infty$, dann heißt der Raum der C^∞-Funktionen ϕ, die $\partial^\beta \phi(x) \in L^p$ für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ erfüllen, $\mathcal{D}_{L_p}$.*

Die Topologie auf dem Raum $\mathcal{D}_{L_p}$ definieren wir durch die Familie von Seminormen $\mathcal{P} := \{q_{p,m} : m = 0, 1, 2, ...\}$ mit

$$q_{p,m}(\phi) = \sup_{|\beta| \leq m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta \phi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Als $\mathcal{D}'_{L_p}, 1 \leq p < \infty$, definieren wir den Raum der stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}_{L_q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Da $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{L_p}$ und die Konvergenz im Sinn von $\mathcal{D}$ die Konvergenz im Sinn von $\mathcal{D}_{L_p}$ impliziert, folgt $\mathcal{D}'_{L_p} \subset \mathcal{D}'$. Die Sobolev-Räume sind also ebenfalls Distributionenräume.

Kapitel 2

Die Fouriertransformation

2.1 Die Fouriertransformation auf L^1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, dann ist der $L^p(\Omega)$ Raum $(1 \leq p < \infty)$ die Menge aller Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen f, die $||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ erfüllen. Die Äquivalenzrelation ist $f \sim g \Leftrightarrow \mu\left(\{x \in \Omega | f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$. Die Norm auf diesem Raum $||f||_p$ wird p-Norm genannt.

Der Raum L^∞ enthält alle wesentlich beschränkten Funktionen, die Norm auf diesem Raum $||f||_\infty$ ist das wesentliche Supremum.
$||f||_\infty = \text{essup}|f(x)| := \inf_{N \in \mathcal{A}, \mu(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|$.

Definition 2.1 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann heißt*

$$\mathcal{F}[f](t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot t} dx$$

die Fouriertransformierte der Funktion f.

Satz 2.2 *Eigenschaften der Fouriertransformation sind:*

1. *Die Abbildung $f \mapsto \mathcal{F}[f]$ ist eine beschränkte lineare Transformation von L^1 auf L^∞. D.h. es gilt $||\mathcal{F}[f]||_\infty \leq ||f||_1$.*
2. *Sei $f \in L^1$, dann ist $\mathcal{F}[f]$ gleichmäßig stetig.*
3. *Sei $f \in L^1$, dann gilt $\lim_{|t| \to \infty} \mathcal{F}[f](t) = 0$ (Riemann-Lebesgue).*

Beweis:

1. Falls $t_i \to t$, folgt $e^{-ix \cdot t_i} \to e^{-ix \cdot t}$ und wegen der Lebesgue dominierten Konvergenz $\mathcal{F}[f](t_i) \to \mathcal{F}[f](t)$.
2. Folgt aus Punkt 1.

3. Sei $X \subset L^1$ die Menge der Funktionen f, die $\lim_{|t|\to\infty} \mathcal{F}[f](t) = 0$ erfüllen. X ist ein Vektorraum und wegen 1. abgeschlossen bezüglich der L^1-Norm. Wir können die Fouriertransformation der charakteristischen Funktion des n-dimensionalen Intervalls $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x \leq b_i\}$ explizit als iteriertes Integral berechnen und es folgt, dass die charakteristische Funktion in X liegt. Da endliche Linearkombinationen davon dicht in L^1 liegen, folgt schon $X = L^1$.

□

Die Fouriertransformation lässt sich auf endliche Borelmaße μ verallgemeinern. Die Fouriertransformation ist dann definiert durch

$$\mathcal{F}[\mu](t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot t} d\mu(x).$$

Die ersten zwei Punkte von Satz 2.2 gelten analog, wenn man die L^1-Norm durch die totale Variation von μ ersetzt.

Wir haben bei den Distributionen bereits die Faltung kennen gelernt. Für zwei Funktionen $f, g \in L^1$ ist die Faltung

$$h(x) = (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

h ist eine messbare Funktion und indem man die Integrationsreihenfolge vertauscht (Satz von Fubini), kann man $h(x) \in L^1$ und $||h||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$ zeigen.

Wir können die Faltung auch zwischen einer Funktion $f \in L^p$ und einem endlichen Borelmaß μ definieren

$$h(x) = (f * d\mu)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)d\mu(y).$$

Wiederum gilt die eben beschriebene Ungleichung, wenn man die L^1-Norm durch die totale Variation von μ ersetzt.

Eine zentrale Eigenschaft der Fouriertransformation wird nun im folgenden Satz beschrieben

Satz 2.3 *Für $f, g \in L^1$ gilt*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g].$$

Beweis: Wir verwenden für den Beweis wieder den Satz von Fubini. Es gilt

$$\mathcal{F}[f * g](t) = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)e^{-ix\cdot t}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot t} f(x-y)g(y)dxdy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-y\cdot t}\mathcal{F}[f](t)g(y)dy = \mathcal{F}[f](t)\mathcal{F}[g](t).$$

□

Eine vor allem in den Anwendungen häufig ausgenutzte Eigenschaft der Fouriertransformation ist

Satz 2.4 *Sei $f(x)$ und seien $x_i f(x)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ für alle i in L^1, dann gilt*

- $\frac{\partial}{\partial t_i}\mathcal{F}[f](t) = \mathcal{F}[-ixf](t)$
- $\mathcal{F}[\frac{\partial f}{\partial x_i}](t) = it_i\mathcal{F}[f](t)$

Diese Eigenschaften lassen sich klarerweise auf höhere Ableitungen verallgemeinern

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha f](t) = (it)^\alpha \mathcal{F}[f](t).$$

Ein weiteres zentrales Resultat ist die Multiplikationsformel

Satz 2.5 *Für $f, g \in L^1$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}[g](x)dx.$$

Beweis: Wir verwenden erneut den Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-ix\cdot t}dt\right)g(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-ix\cdot t}dx\right)f(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\mathcal{F}[g](t)dt$$

□

Eine sehr wichtige Fouriertransformation ist

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|t|}e^{-ix\cdot t}dt = \frac{1}{\omega_n}\frac{a}{(a^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

wobei

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

die halbe Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$ darstellt. Diese Funktion heißt Poissonkern $P_a(x)$ und wird uns bei der Darstellung von harmonischen Funktionen durch ihre Randwerte noch begegnen. Der Poissonkern erfüllt folgende Eigenschaften ($\epsilon > 0$):

- $P_\epsilon(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$
- $\int_{\mathbb{R}^n} P_\epsilon(x)dx = 1$

- $\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus I} P_\epsilon(x)dx = 0$ für alle offenen Intervalle um 0 I

Eine Familie von Funktionen $\{\phi_\epsilon(x), \epsilon > 0\}$, die diese Eigenschaften erfüllen nennt man **approximierende Eins**. Eine Eigenschaft, die eine approximierende Eins besitzt, ist $||f * \phi_\epsilon - f||_1 \to 0$.

Satz 2.6 *Sei $f \in L^1$, dann gilt für alle $\epsilon > 0$*

$$|| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)P_\epsilon(x-t)dt - f(x)||_1 \to 0 \text{ für } \epsilon \to 0.$$

Beweis: Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)P_\epsilon(x-t)dt - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)P_\epsilon(x-t)dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(t)P_\epsilon(t)dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-t) - f(x)]P_\epsilon(t)dt$$

können wir mit der Minkowski-Ungleichung abschätzen

$$|| \int_{\mathbb{R}^n} f(t)P_\epsilon(x-t)dt - f(x)||_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) - f(x)dx \right) |P_\epsilon(t)|dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-\epsilon t) - f(x)dx \right) |P_1(t)|dt.$$

und mit der Lebesgue dominierten Konvergenz gilt das Gewünschte. □

Wir haben jetzt gesehen, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf dem Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert ist und auf stetige beschränkte Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, die im Unendlichen verschwinden, abbildet. Wir wollen nun zeigen, dass diese Fouriertransformation eine Umkehrung besitzt.

Satz 2.7 *Falls sowohl f als auch die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[f]$ integrierbar sind, gilt für fast alle x*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](t)e^{ix\cdot t}dt.$$

Beweis: Aus der Multiplikationsformel folgt

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](x)e^{-ix\cdot t}e^{-\epsilon|x|}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P_\epsilon(x-t)dx.$$

Wegen Satz 2.6 konvergiert dieses Integral gegen $f(x)$. Wir können damit, indem wir ϵ gegen 0 gehen lassen, zeigen, dass auch $\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](t)e^{ix\cdot t}dt$ gegen f in der L^1-Norm strebt, was den Satz beweist. □

Wieder durch Anwendung von Satz 2.6 können wir die Eindeutigkeit der Fouriertransformation zeigen. Dafür müssen wir den Satz auf $f = f_1 - f_2$ anwenden.

Satz 2.8 *Falls $f_1, f_2 \in L^1$ und $\mathcal{F}[f_1](x) = \mathcal{F}[f_2](x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, dann folgt $f_1(t) = f_2(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}^n$.*

2.1.1 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$

Wir wollen nun die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ einführen. Dass dieser Raum besonders dafür geeignet ist, zeigt folgender Satz.

Satz 2.9 *Die Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-ix\cdot t}dt$$

ist ein Isomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ (d.h. eine bijektive stetige Abbildung, deren Inverse ebenfalls stetig ist). Die inverse Fouriertransformation ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{ix\cdot t}dt$$

und es gilt für alle $f \in \mathcal{S}$

$$\partial^\alpha \mathcal{F}[f](t) = \mathcal{F}[(-it)^\alpha f](t)$$
$$\mathcal{F}[\partial^\alpha f](t) = (it)^\alpha \mathcal{F}[f](t).$$

Beweis: Für $f \in \mathcal{S}; \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$t^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}[f](t) = t^\alpha (-1)^{|\beta|}\mathcal{F}[x^\beta f](t) = \mathcal{F}[\partial^\alpha (-x)^\beta f](t)$$

Für $m > \frac{n}{2}$ folgt damit

$$|t^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}[f](t)| = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot t}\partial^\alpha (-x)^\beta f(x)dx$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-m}(1+|x|^2)^m|\partial^\alpha x^\beta f(x)|dx,$$

Mit einem geeigneten $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m|\partial^\alpha x^\beta f(x)| \leq P_{\gamma,\alpha}(f)$$

wobei $P_{\alpha,\gamma}(f) < \infty$, da $f \in \mathcal{S}$ ist. Damit können wir mit $C_m := \int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-m}dx$

$$P_{\alpha,\beta}(f) \leq C_m P_{\alpha,\gamma}(f)$$

abschätzen. Da $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist, wäre damit gezeigt, dass $\mathcal{F}[f]$ in $\mathcal{S}$ liegt, sowie dass $\mathcal{F}$ stetig ist.

Die durch $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{ix\cdot t}dt = \mathcal{F}[f](-x)$ definierte Abbildung $\mathcal{F}^{-1}$ besitzt die gleichen Eigenschaften wie $\mathcal{F}$, es verbleibt uns also zu zeigen, dass

$$\mathcal{F}^{-1}\circ\mathcal{F} = \mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1} = \mathrm{id}|_{\mathcal{S}}$$

gilt. Da $\mathcal{F}$ den Raum $\mathcal{S}$ auf sich selbst abbildet und $\mathcal{S} \subset L_1$ gilt, folgt es aus der für L_1 bewiesenen Fourierinversionsformel.

Die restlichen zwei Eigenschaften folgen daher ebenfalls aus den bereits für L_1 bewiesenen Resultaten. □

2.2 Die Fortsetzung auf $\mathcal{S}'$

Definition 2.10 *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine temperierte Distribution, dann ist die Fouriertransformation über die Fouriertransformation der Testfunktionen definiert:*

$$\langle \mathcal{F}[T], \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\phi] \rangle \text{ für alle } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Diese Definition ist sinnvoll, da wir festgestellt haben, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}$ sind. Sie ist überdies mit der identischen Einbettung $f \mapsto I_f$ der Funktionen verträglich.

$$\langle \mathcal{F}[I_f], \phi \rangle = \langle I_f, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}[\phi](x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(t)e^{-it\cdot x}dtdx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[f](t)\phi(t)dt = \langle I_{\mathcal{F}[f]}, \phi \rangle.$$

Die Umkehrung der Fouriertransformierten ist dazu analog durch

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[T], \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}[\phi] \rangle$$

definiert.

Satz 2.11 *Die in Definition 2.10 für Distributionen definierte Fouriertransformation ist ein Isomorphismus von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und es gelten folgende Rechenregeln:*

$$\partial^\alpha \mathcal{F}[T](t) = \mathcal{F}[(-it)^\alpha T](t)$$
$$\mathcal{F}[\partial^\alpha T](t) = (it)^\alpha \mathcal{F}[T](t).$$

Beweis: Die Linearität der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$ folgt aus der Linearität auf $\mathcal{S}$. Die Injektivität ergibt sich aus

$$\mathcal{F}[T] = 0 \Rightarrow \langle T, \mathcal{F}[\phi] \rangle \forall \phi \in \mathcal{S} \Rightarrow T = 0.$$

Die Bijektivität von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}'$ folgt wegen $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[T] = T$,

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[T](\phi) = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\phi] \rangle = \langle T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Die Stetigkeit überträgt sich ebenfalls von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}'$, da aus $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}[T_n] = \mathcal{F}[T]$ folgt:

$$\mathcal{F}[T_n](\phi) = \langle T_n, \mathcal{F}[\phi] \rangle \to \langle T, \mathcal{F}[\phi] \rangle = \mathcal{F}[T](\phi) \forall \phi \in \mathcal{S}.$$

Die Rechenregeln gelten, da für alle $\phi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\langle \partial^\alpha \mathcal{F}[T], \phi \rangle = (-1)^\alpha \langle \mathcal{F}[T], \partial^\alpha \phi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, \mathcal{F}[\partial^\alpha \phi] \rangle$$
$$= (-1)^\alpha \langle T, (ix)^\alpha \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle \mathcal{F}[(-ix)^\alpha T], \phi \rangle.$$
$$\langle \mathcal{F}[\partial^\alpha T], \phi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha \mathcal{F}[\phi] \rangle = (-1)^\alpha \langle T, \mathcal{F}[(-ix)^\alpha \phi] \rangle = \langle (it)^\alpha \mathcal{F}[T], \phi \rangle.$$

□

2.3 Die Laplacetransformation

2.3.1 Die klassische Laplacetransformation

Definition 2.12 *Die Laplacetransformierte einer Funktion $f(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ ist durch*

$$\mathcal{L}[f](z) := \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, für die das Integral existiert, definiert.

Die Existenz der Laplacetransformierten $\mathcal{L}[f](z)$ für $\mathrm{Re} z = x > \sigma$ ist für stückweise stetige Funktionen $f(t)$ gewährleistet, die höchstens exponentielles Wachstum bestitzen, also für welche Konstanten $M, \alpha > 0$ mit

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

existieren. Dies folgt aus

$$\int_0^\tau |e^{-zt}|f(t)dt \leq M\int_0^\tau |e^{-(x-\alpha)t}|f(t)dt$$

$$= M\frac{e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha}|_{t=0}^\tau = M\frac{1}{x-\alpha} - M\frac{e^{-(x-\alpha)\tau}}{x-\alpha}$$

weswegen für $x > \alpha$, $\tau \to \infty$

$$\int_0^\infty |e^{-zt}f(t)|dt \leq \frac{M}{x-\alpha}$$

gilt, was schlussendlich zeigt, dass die Laplacetransformation absolut konvergiert.

Des weiteren ist die Laplacetransformierte einer Funktion, die alle genannten Eigenschaften erfüllt, analytisch für $x > \sigma$. Das beweisen wir mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Eine Diskussion der analytischen Funktionen folgt noch in Kapitel 3.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f(t)$ reellwertig ist. Für $z = x + iy$ gilt

$$\int_0^\infty f(t)e^{-(x+iy)t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\cos(yt)dt - i\int_0^\infty f(t)e^{-xt}\sin(yt)dt$$

$$:= u + v$$

Das Integral

$$|\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}f(t)e^{-xt}\cos(yt)dt|$$

konvergiert gleichmäßig für $x > \alpha$ genau wie das Integral

$$|\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}f(t)e^{-xt}\sin(yt)dt|$$

für y. Die Abschätzung hierzu ist analog zur bereits für die Laplacetransformation gemachten. Da die Laplacetransformation gleichmäßig konvergiert, können wir die Differentiation unter das Integral ziehen und erhalten insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} f(t)e^{-xt}\cos(yt)dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(t)e^{-xt} - \sin(yt)dt = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y).$$

Analog lässt sich $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$ zeigen.

Zuletzt wollen wir noch die Inverse der Laplacetransformation betrachten, sie ist durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt}\mathcal{L}[f](z)dz$$

gegeben. Um die Existenz zu sichern, müssen wir zusätzlich noch $e^{zt}\mathcal{L}[f](z) \in L_1$ fordern.

2.4 Die Laplacetransformation auf $\mathcal{D}'_+$

In Analogie zur klassischen Laplacetransformation, wollen wir die Laplacetransformation für Distributionen definieren. Am allgemeinsten ist die Definition der Laplacetransformation für Distributionen $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Definition 2.13 *Sei $T(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine Distribution, dann definieren wir für $x \in \mathbb{R}$ mit $e^{-xt}T(t) \in \mathcal{S}'$, die Laplacetransformation durch $\mathcal{L}[T](z) = \mathcal{L}[T](x+iy) := \mathcal{F}[T(t)e^{-xt}](y)$.*

Diese Definition ist mit der klassischen Laplacetransformation verträglich. Erweitern wir die Funktion $f(t), t \geq 0$ durch 0 auf $t < 0$, dann gilt

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-xt}] = \langle f(t)e^{-xt}, e^{-iyt}\rangle = \langle f(t), e^{-(x+iy)t}\rangle = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

was der klassischen Laplacetransformierten entspricht.

Wir werden in Folge nur die Laplacetransformation der Distributionen $\mathcal{D}_+(\mathbb{R})$ benötigen.

Satz 2.14 *Sei $T(t) \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ und sei $e^{-xt}T(t) \in \mathcal{S}'$ für $x > x_0$, dann gilt*

$$\mathcal{L}[T](z) = \langle T(t), e^{-zt}\rangle$$

für $\mathrm{Re} z > x_0$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\langle T(t), e^{-zt}\rangle$ der Definition der Laplacetransformation $\mathcal{F}[T(t), e^{-zt}]$ entspricht. Für alle Testfunktionen ϕ gilt

$$\langle \mathcal{F}[T(t)e^{-zt}](s), \phi(s)\rangle = \langle T(t)e^{-zt}, \mathcal{F}[\phi](t)\rangle.$$

Andererseits gilt

$$\langle\langle T(t), e^{-zt}\rangle, \phi(y)\rangle = \langle\langle e^{-xt}T(t), e^{-iyt}\rangle, \phi(y)\rangle = \langle e^{-xt}T(t)\langle \phi(y), e^{-iyt}\rangle\rangle.$$

□

Die Laplacetransformation erfüllt folgenden zentralen Satz:

Als Vorarbeit benötigen wir noch die Menge der für $\mathrm{Re} z > 0$ analytischen und durch

$$|f(z)| \leq M|z|^l.$$

beschränkten Funktionen, die wir mit H_+ bezeichnen. Sie werden uns bei den distributionellen ($\mathcal{D}'_{L_2}$) Randwerten noch in Kapitel 6 begegnen.

Satz 2.15 *Sei $T \in \mathcal{D}'$ mit $e^{-xt}T(t) \in \mathcal{S}'$ für $\mathrm{Re} z = x \geq 0$ oder äquivalent sei $T \in \mathcal{S}'_+ := \mathcal{S}' \cap \mathcal{D}'_+$, dann gilt $\mathcal{L}[T](z) \in H_+$.*

Umgekehrt ist für $f(z) \in H_+$, $f(z)$ die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[T](z)$ einer Distribution $T \in \mathcal{D}'$, die für $x \geq 0$ $T(t)e^{-xt} \in \mathcal{S}'$ erfüllt.

Beweis: Sei $\mathrm{Re} z = x > 0$ sowie $x_1 > 0$, dann gilt

$$\langle f(t), e^{-zt}\rangle = \langle f(t)e^{x_1 t}, e^{-(z-x_1)t}\rangle :$$

Da $f(t)e^{x_1 t} \in \mathcal{S}'$, können wir den Satz 1.53 anwenden und es gilt

$$f(t)e^{x_1 t} = \partial^l g(t)$$

für eine stetige Funktion g mit Träger in $\mathbb{R}_+$ und höchstens polynomialem Wachstum, also

$$\langle \partial^l g(t), e^{-(z-x_1)t}\rangle = (z - x_1)^l \langle g(t), e^{-(z-x_1)t}\rangle.$$

Da dies einem Integral entspricht, können wir die in Kapitel 2.3.1 besprochene klassische Theorie für Laplacetransformationen verwenden, woraus die Analytizität folgt. Die im klassischen Fall gleichmäßige Beschränktheit wird wegen des Vorfaktors $(z - x_1)^l$ zur gleichmäßig höchstens polynomialen Beschränktheit.

Ist umgekehrt $f(z) \in H_+$, gilt $\frac{f(z)}{z^{l+2}} \in L_1$ und wir können die inverse Laplacetransformation

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt}\frac{f(z)}{z^{l+2}}dz$$

verwenden und deshalb ist $e^{xt}g(t)$ beschränkt. Da sich $g(t)$ nicht mit x verändert, entspricht dies der distributionellen Fouriertransformation und wir erhalten

$$\frac{f(z)}{z^{l+2}} = \mathcal{F}[e^{-xt}g(t)](y) = \mathcal{L}[g] = \langle g(t), e^{-zt}\rangle$$

sowie

$$\langle g^{(l+2)}(t), e^{-zt}\rangle = z^{l+2}\langle g(t), e^{-zt}\rangle = f(z)$$

Wir haben hiermit eine Distribution $g^{(l+2)}(t) \in \mathcal{D}'_+$ gefunden, die Gewünschtes liefert. □

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Fourier und Laplace Transformation einer Distribution:

Satz 2.16 *Sei $e^{-xt}T(t) \in \mathcal{S}'$ für $x \geq 0$, dann gilt $\lim_{x\to x_1} \mathcal{L}[T](x+iy) = \mathcal{F}[T(t)e^{-x_1 t}](y)$.*

Beweis:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}[T](x+iy), \phi(y)\rangle &= \langle \mathcal{F}[Te^{-xt}](y), \phi(y)\rangle \\ &= \langle T(t), \mathcal{F}[\phi](t)e^{-xt}\rangle\end{aligned}$$

Lassen wir nun x gegen Null gehen, erhalten wir

$$\langle T(t), \mathcal{F}[\phi](t)\rangle = \langle \mathcal{F}[T](y), \phi(y)\rangle.$$

□

Satz 2.17 *Falls $T \in \mathcal{S}'_+$, dann gilt $\mathcal{L}[T] \in H^+$ und $\lim_{x\to 0} \mathcal{L}[T](x+iy) = \mathcal{F}[T](y)$ (im $\mathcal{S}'$-Sinn).*

Umgekehrt gilt falls $h(z) \in H_+$ und falls $h(z)$ einen Randwert $\lim_{x\to 0} h(z) = g(y)$ besitzt, dass $h(z) = \mathcal{L}[T](z)$ für ein $T \in S'_+$ und $g = \mathcal{F}[T]$ gilt.

Beweis: Wie wir bereits im Beweis zu Satz 2.15 gesehen haben, folgt aus $T \in S'_+$, dass $\mathcal{L}[T](z) \in H_+$ liegt. Für $\phi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\langle \mathcal{L}[T](x+iy), \phi(y)\rangle = \langle T(t), \mathcal{F}[\phi](t)e^{-xt}\rangle$$

was analog zum Beweis von Satz 2.16 für x gegen 0 gegen

$$\langle \mathcal{F}[T](y), \phi(y)\rangle$$

geht.

Umgekehrt wissen wir bereits aus Satz 2.15, dass sich jedes $h(z) \in H_+$ als Laplacetransformation einer Distribution $T \in D'_+$ schreiben lässt. Da für $\phi \in \mathcal{S}$

$$\lim_{x\to 0}\langle \mathcal{L}[T](x+iy), \phi(y)\rangle = \langle g(y), \phi(y)\rangle$$

gilt, folgt $g \in \mathcal{S}'$ und es existiert daher ein $S \in \mathcal{S}'$ mit $g = \mathcal{F}[T]$. Wegen Satz 2.16 gilt sogar $g = \mathcal{F}[S]$ und damit auch $T \in \mathcal{D}'_+ \cup \mathcal{S}' = \mathcal{S}'_+$. □

Dieser Satz besagt daher, dass wir die Randwerte g der Funktionen $h \in H_+$ als Laplace- und Fouriertransformation ($g = \mathcal{F}[T]$, $h = \mathcal{L}[T]$) einer Distribution $T \in \mathcal{S}'_+$ auffassen können und umgekehrt, und stellt daher das zentrale Resultat für Kapitel 6 dar, in dem wir Randwerte von den Funktionen aus H_+ betrachten werden.

Kapitel 3

Harmonische und analytische Funktionen

3.1 Analytische Funktionen

Wir wiederholen kurz die grundlegenden Eigenschaften der analytischen Funktionen. Eine Funktion f von einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ heißt analytisch auf Ω, wenn zu jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

existiert, die auf einer Umgebung von z_0 gegen f konvergiert. Für die komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir $x = \mathrm{Re} z$ und $y = \mathrm{Im} z$, mit $\bar{z}$ bezeichnen wir $x - iy$.

Eine weitere wichtige Klasse bilden die holomorphen Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Das sind genau die komplex differenzierbaren Funktionen, also Funktionen, für die

$$\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert.

Wie wir später zeigen werden, entsprechen die analytischen und holomorphen Funktionen einander. Die Menge der analytischen bzw. holomorphen Funktionen auf Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(\Omega)$.

Die komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ in einer Umgebung ist äquivalent dazu, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

in dieser Umgebung erfüllt sind.

Damit folgt, dass eine Funktion analytisch auf Ω ist, falls

$$\bar{\partial} f = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})f = 0$$

auf Ω gilt, denn das ist genau dann der Fall, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind.

Wir werden nun einige zentrale Sätze der Funktionentheorie herleiten, wobei wir dafür nicht die klassischen Beweismethoden verwenden werden, sondern die Theorie der Distributionen. Der Differentialoperator $\bar{\partial}$ wird dabei eine große Rolle spielen.

Wir benötigen zunächst folgenden Satz, weiters werden wir die Folgerung aus der Formel von Green-Riemann verwenden:

$$\int_B \bar{\partial} a(x) dxdy = \frac{1}{2i} \oint_{\partial B} a(x,y)(dx + idy) \tag{3.1}$$

Satz 3.1 *Die reguläre Distribution* $\frac{1}{\pi(x+iy)}$ *ist eine Elementarlösung des Differentialoperators* $\bar{\partial}$ *auf* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$*:*

$$\bar{\partial}\frac{1}{\pi(x+iy)} = \delta$$

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\langle \bar{\partial}\frac{1}{\pi(x+iy)}, \phi(x,y)\rangle = \phi(0,0)$ für alle Testfunktionen ϕ gilt. Für $\phi \in \mathcal{D}'$ mit supp$\phi \subset B(0,R)$ gilt

$$\langle \bar{\partial}\frac{1}{\pi(x+iy)}, \phi(x,y)\rangle = -\langle \frac{1}{\pi(x+iy)}, \bar{\partial}\phi(x,y)\rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi(x+iy)} \bar{\partial}\phi(x,y) dxdy = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon \le \sqrt{x^2+y^2} \le R} \frac{1}{\pi(x+iy)} \bar{\partial}\phi(x,y) dxdy$$

was möglich ist, da der Integrand absolut integrierbar ist. Da $\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})\frac{1}{\pi(x+iy)}$ für $(x,y) \neq 0$ 0 ist, folgt mittels partieller Integration

$$= -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon \le \sqrt{x^2+y^2} \le R} \partial \frac{\phi(\bar{x},y)}{\pi(x+iy)} dxdy.$$

Wegen der Formel von Green-Riemann 3.1 folgt weiter

$$= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\sqrt{x^2+y^2}=\epsilon} \frac{\phi(x,y)}{x+iy}(dx + idy)$$

und mit der Einführung von Polarkoordinaten $x = \epsilon\cos(\theta), y = \epsilon\sin(\theta)$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \phi(x,y) d\theta = \phi(0,0)$$

□

Da ein Differentialoperator genau dann hypoelliptisch ist, wenn er eine Elementarlösung in $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ besizt, folgt aus Satz 3.1 direkt:

Satz 3.2 *$\bar{\partial}$ ist ein hypoelliptischer Differentialoperator in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$: Das heißt, falls für eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\bar{\partial}T$ eine C^∞-Funktion ist, dann ist T auf Ω selbst eine C^∞-Funktion.*

Für den Kern gilt damit folglich

$$\mathrm{Ker}\bar{\partial} = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) : \bar{\partial}T = 0\} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) : \bar{\partial}f = 0\}.$$

Analoges gilt für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Wir führen jetzt die holomorphen Funktionen auf der Menge Ω als

$$\mathcal{H} = \{a : \Omega \to \mathbb{C} : \bar{\partial}a = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)\} = \{a \in C^\infty(\Omega) : \bar{\partial}a = 0\}$$

ein. $\mathcal{H}(\Omega)$ ist eine Algebra bezüglich Addition und Multiplikation. Da $\bar{\partial} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ eine stetige Abbildung und damit der Kern abgeschlossen ist, ist auch $\mathcal{H}(\Omega)$ abgeschlossen, also jede konvergente Folge von Elementen aus $\mathcal{H}(\Omega)$ konvergiert in $\mathcal{H}(\Omega)$.

Satz 3.3 (Satz von Cauchy) *Für alle $a \in \mathcal{H}(\Omega)$ und alle offenen Teilmengen B mit glattem Rand ∂B, für die $\bar{B}$ eine kompakte Teilmenge von Ω ist, gilt*

$$\oint_{\partial B} a(z)dz = 0.$$

Beweis: Erneut wegen Green-Riemann 3.1 folgt

$$\int_B \bar{\partial}a(x)dxdy = \frac{1}{2i}\oint_{\partial B} a(x,y)(dx + idy).$$

Da aber $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}\bar{\partial}$ gilt, folgt das Gewünschte. □

Satz 3.4 (Integralformel von Cauchy) *Für alle $a \in \mathcal{H}(\Omega)$ und jede hinreichend glatte Kurve Γ, die der orientierte Rand einer kompakten Teilmenge K ist, gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{a(z)}{z - z_0}dz = \begin{cases} 0, & \text{falls } z_0 \notin K \\ a(z_0), & \text{falls } z_0 \in K \setminus \Gamma \end{cases}$$

Beweis: Sei $a \in \mathcal{H}(\Omega)$ und χ die charakteristische Funktion, dann ist $T = \chi_{K\setminus\Gamma}a$ eine reguläre Distribution mit Träger in K. Wegen $\bar{\partial}a = 0$ gilt daher für jede Testfunktion ϕ

$$\langle\bar{\partial}T, \phi\rangle = -\langle T, \bar{\partial}\phi\rangle = -\int_{K\setminus\Gamma} a(z)\bar{\partial}\phi dxdy$$

$$= -\int_{K\setminus\Gamma} \bar{\partial}(a\phi)dxdy = -\frac{1}{2i}\oint_\Gamma a(z)\phi(z)dx$$

wobei wir wieder die Folgerung aus der Formel von Green-Riemann verwenden

$$\int_B \bar{\partial} a(x)dxdy = \frac{1}{2i}\oint_{\partial B} a(x,y)(dx+idy).$$

Wegen Satz 3.1, also $\bar{\partial}\frac{1}{\pi}\frac{1}{z} = \delta$, gilt

$$T(z_0) = \frac{1}{\pi}\langle \bar{\partial} T(z), \frac{1}{z-z_0}\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{a(z)}{z-z_0}dz.$$

□

Wir können nun, wie bereits in der Einführung angedeutet, die Menge der analytischen Funktionen einführen:

$\{a : \Omega \to \mathbb{C} : a$ ist in einer Umgebung um jeden Punkt in eine Potenzreihe

entwickelbar $\}$.

Alle Funktionen $a(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ sind holomorphe Funktionen und damit ist die Menge der analytischen Funktionen eine Teilmenge der Menge der holomorphen Funktionen. Wir werden nun beweisen, dass sogar Gleichheit gilt. Das zeigen wir, indem wir jede holomorphe Funktion für $z_0 \in \Omega$ in der Umgebung $B(z_0, r) \subset \Omega$ in eine Potenzreihe entwickeln.

Zur Berechnung dieser Potenzreihe verwenden wir die Integralformel von Cauchy:

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\tilde{z}-z_0|=r} \frac{a(\tilde{z})}{\tilde{z}-z}d\tilde{z}$$

Indem wir in eine geometrische Reihe entwickeln, erhalten wir

$$\frac{1}{\tilde{z}-z} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\tilde{z}-z}\right)^n.$$

Da die Reihe gleichmäßig konvergiert, können wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\tilde{z}-z_0|=r}\frac{a(\tilde{z})}{(\tilde{z}-z)^{n+1}}d\tilde{z}\right)(z-z_0)^n.$$

Satz 3.5 *Die Gesamtheit der auf Ω holomorphen Funktionen ist gleich der Gesamtheit der auf Ω analytischen Funktionen.*

3.2 Darstellung durch analytische Funktionen

Die Darstellung von Funktionen $f(x), x \in \mathbb{R}$ mittels analytischer Funktionen $a(z), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tritt in natürlicher Weise auf, wenn man die inverse Fouriertransformation betrachtet (sei $f \in L^1$)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itz} \mathcal{F}[f](t) dt.$$

Wir können diese Gleichung umschreiben zu

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{itz} \mathcal{F}[f](t) dt}_{f_+(z)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{itz} \mathcal{F}[f](t) dt}_{f_-(z)}.$$

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann ist, wie wir noch beweisen werden, f_+ analytisch auf der oberen Halbebene $\mathbb{C}_+$ und f_- analytisch auf der unteren Halbebene $\mathbb{C}_-$. Wir können weiters eine neue Funktion $\hat{f}(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ einführen, die auf der oberen Halbebene f_+ und auf der unteren Halbebene f_- entspricht. Wegen Satz von Fubini gilt

$$f_+(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{isz} \mathcal{F}[f](s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{isz} \int_{-\infty}^\infty e^{ist} f(t) dt ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \int_0^\infty e^{is(z-t)} dt ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt, \text{ Im} z > 0.$$

Analog erhalten wir

$$f_- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt, \text{ Im} z > 0,$$

und insgesamt

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{t-z} dt, \; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

$\hat{f}(z)$ nennen wir Cauchy-Transformation der Funktion $f(t), t \in \mathbb{R}$. Wir werden die Cauchy-Transformierte von f mit $S[f](z)$ bezeichnen.

Da für alle $\epsilon > 0$ $\hat{f}(x + i\epsilon) - \hat{f}(x + i\epsilon)$ die inverse Fouriertransformation von $e^{-\epsilon|t|} \mathcal{F}[f](t), t \in \mathbb{R}$ ist, gilt

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{-\epsilon|t|} \mathcal{F}[f](t) e^{-t \cdot x} dt =$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0+} [\hat{f}(x + i\epsilon) - \hat{f}(x - i\epsilon)],$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig ist. Damit können wir die Inverse der Cauchy-Transformation schreiben als

$$S^{-1}[\hat{f}](x) = \lim_{\epsilon \to 0+} [\hat{f}(x + i\epsilon) - \hat{f}(x - i\epsilon)].$$

Wir wollen nun der Motivation folgend die Cauchy-Transformation rigoros einführen:

Satz 3.6 (Cauchy-Transformation) *Falls das Integral*

$$S[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

konvergiert, definiert es eine analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass $S[f](z)$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist. Falls $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{S[f](z) - S[f](z_1)}{z - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-z)(t-z_1)} dt.$$

Bezeichnen wir mit $F_1(t)$ die (beschränkte und stetige) Stammfunktion von $\frac{f(t)}{(t-z_1)}$, dann gilt

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \left[\frac{F_1(t)}{t-z} \right] |_a^b + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(t)}{(t-z)^2} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(t)}{(t-z)^2} dt$$

Dieses Integral ist absolut konvergent, damit erhalten wir für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dz} S[f](z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{S[f](z) - S[f](z_1)}{z - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(t)}{(t-z_1)^2} dt.$$

Womit gezeigt wäre, dass $S[f](z)$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist. □

Falls das Integral für ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert es in ganz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wählen wir speziell $z_0 = i$, so lautet die Bedingung, dass für f $\frac{f(t)}{t-i} \in L^1$ gilt. Wir werden die Klasse von Funktionen, die diese Bedingung erfüllen, $L^{i,1}$ nennen.

Die häufig auftretenden Funktionen $f \in L^p$ erfüllen die Bedingung, wie folgender Satz zeigt.

Satz 3.7 *Sei $f \in L^p, 1 \leq p < \infty$, dann folgt $f \in L^{i,1}$ sowie*

$$|S[f](z)| \leq \frac{C}{\mathrm{Im} z}, \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Beweis: Für $z = x + iy, y \neq 0$ gilt

$$|S[f](z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{\sqrt{(t-x)^2 + y^2}} dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}||f||_p \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left((t-x)^2 + y^2\right)^{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} dt \leq C_q \frac{||f||_q}{2\pi |y|^{\frac{1}{p}}}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

□

Die Cauchy-Transformation S ist daher eine lineare Abbildung von $L^{i,1}$ auf $\mathcal{H}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{C})$. Für $f'(t) \in L^1$ gilt, wie eine kurze Überlegung zeigt

$$S[f'](z) = \frac{d}{dz} S[f](z).$$

Man kann für die Cauchy-Transformation sogar eine Inverse angeben:

Satz 3.8 (Inverse Cauchy-Transformation) *Sei $f \in L^{i,1}$ und sei $\hat{f}(z) = S[f](z)$, dann gilt*

$$S^{-1}[\hat{f}](x) = \lim_{\epsilon \to 0+} [\hat{f}(x + i\epsilon) - \hat{f}(x - i\epsilon)] = f(x).$$

für alle Stetigkeitspunkte von f.

3.3 Harmonische Funktionen auf $\mathbb{C}$

Definition 3.9 *Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, sei $u : \Omega \to \mathbb{C}$ und sei $u(z)$, als Funktion der Variablen $x = Re(z)$ und $y = Im(z)$ zwei mal stetig differenzierbar, dann heißt u harmonisch, falls*

$$(\Delta u)(z) := \frac{\partial^2 u}{x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{y^2}(z) \equiv 0$$

auf Ω gilt.

Harmonische Funktionen sind eng mit analytischen Funktionen verbunden. Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist für eine analytische Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$, jede der Funktionen $f, \bar{f}, Re(f), Im(f)$ harmonisch auf Ω. Für reellwertige harmonische Funktionen gilt sogar, dass sie sich stets als Realteil einer analytischen Funktion schreiben lassen.

Wegen $\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}$ ist eine Funktion u genau dann harmonisch, wenn $\frac{\partial u}{\partial z} : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch ist. Es folgt ebenfalls, dass eine harmonische Funktion unendlich oft differenzierbar ist. Sei weiters $a : \Omega' \to \Omega$ eine analytische Funktion und sei $u : \Omega \to \mathbb{C}$ eine harmonische Funktion, dann ist $u \circ a : \Omega' \to \mathbb{C}$ harmonisch.

Die in Ω harmonischen Funktionen bilden wegen der Linearität des Laplaceoperators (Δ) einen Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine zentrale Eigenschaft der harmonischen Funktionen ist das Eindeutigkeitsprinzip:

Satz 3.10 *Sei Ω eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit Rand $\partial\Omega$. Sei weiters u eine auf $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ stetige und auf Ω harmonische Funktion. Dann gilt das Eindeutigkeitsprinzip: Ist $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$, dann folgt $u \equiv 0$ auf Ω.*

Beweis: Es reicht den Satz für u reellwertig zu beweisen, denn mit u sind ebenso $Re(u)$ und $Im(u)$ stetig auf $\bar{\Omega}$ und harmonisch auf Ω. Wir führen den Beweis indirekt: Existiere ein $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) > 0$. Da Ω beschränkt ist, existiert ein $M > 0$ mit $|z - z_0|^2 < M$ für alle $z \in \bar{\Omega}$. Wähle $\delta > 0$ sodass $\delta M < u(z_0)$, dann ist die Funktion $g(z) := u(z) + \delta(|z - z_0|^2 - M)$ auf $z \in \bar{\Omega}$ stetig. $g(z)$ nimmt daher auf $z_1 \in \bar{\Omega}$ ein Maximum an. Da $g(z)$ negativ auf $\partial\Omega$ und positiv in z_0 ist, liegt z_1 in Ω. Es folgt $(\Delta g)(z_1) = \frac{\partial^2 u}{x^2}(z_1) + \frac{\partial^2 u}{y^2}(z_1) > 0$ Andererseits folgt aus u harmonisch $(\Delta g)(z) = (\Delta u)(z) + 4\delta = 4\delta > 0, z \in \Omega$, was ein Widerspruch ist.
Für $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) < 0$ ersetzen wir einfach u durch $-u$. $\square$

Weitere Eigenschaften wie die Mittelwerteigenschaft werden wir später im allgemeineren Rahmen des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ beweisen.

3.4 Das Poissonintegral

Für die weitere Betrachtung werden wir reellwertige harmonische Funktionen auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ betrachten. Komplexwertige harmonische Funktionen können wir in Real- und Imaginärteil aufteilen. Mit $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ bezeichnen wir den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ sowie mit $\mathbb{T} = \left\{e^{it} : t \in \mathbb{R}\right\}$ den Rand von $\mathbb{D}$. Des weiteren führen wir den Raum

$$\mathcal{H}_D(\mathbb{D}) := \{u : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R} : u \text{ ist stetig auf } \bar{\mathbb{D}} \text{ und harmonisch auf } \mathbb{D}\}$$

ein. Für reellwertige harmonische Funktionen gilt überdies das Maximumprinzip. Falls eine harmonische Funktion u auf einem Bereich $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein lokales Maximum oder Minimum hat, dann ist u konstant. Das Maximumprinzip werden wir für euklidische Vektorräume in Satz 3.18 beweisen.

$\mathcal{H}_D(\mathbb{D})$ ist ein Vektorraum, den wir mit der Supremumsnorm $||u||_\infty := \sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}} |u(z)|$ ausstatten werden. Weiters definieren wir die Einschränkung auf $\mathbb{T}$ durch $R\,u := u|_{\mathbb{T}}$. Wegen des Maximumprinzips bleibt die Norm durch die Abbildung R erhalten und weiters ist

$$R : \mathcal{H}_D(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T})\ u \mapsto u|_{\mathbb{T}}$$

eine stetige lineare Abbildung.

Für die Umkehrung dieser Abbildung, also die Darstellung einer harmonischen Funktion durch die Randwerte, benötigen wir den Poissonkern, den wir durch

$$P(z, e^{it}) := \mathrm{Re}\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}.$$

definieren. Verwenden wir Polarkoordinaten $z = re^{i\theta}$, dann definieren wir den Poissonkern über

$$P_r(t) := \frac{1-r^2}{1-2rcos(t)+r^2} = \sum_{N=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{int}$$

für $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$.

Damit können wir nun das Poissonintegral einer Funktion $f \in C(\mathbb{T})$ durch

$$\mathcal{P}[f](re^{i\theta}) := \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(e^{it})dt = \int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)f(\zeta)d\lambda(\zeta)$$

definieren. Wir können das Poissonintegral $\mathcal{P}[f]$ daher sehr elegant als Faltung der Funktion f mit dem Poissonkern auffassen. Mit λ bezeichnen wir stets das normierte Lebesgue-Maß auf $\mathbb{T}$ mit $\lambda(\{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : \alpha > \theta > \beta\}) = \frac{1}{2\pi}(\beta - \alpha)$.
Wir definieren nun für $f \in C(\mathbb{T})$ eine Abbildung durch

$$Pf(z) = \begin{cases} f(z): & z \in \mathbb{T} \\ \mathcal{P}[f](z): & z \in \mathbb{D} \end{cases}.$$

Es gilt:

Satz 3.11 *Für $f \in C(\mathbb{T})$ liegt Pf in $\mathcal{H}_D(\mathbb{D})$.*

Beweis: Für $z \in \mathbb{D}$ setzen wir

$$u(z) := \mathcal{P}[f](z) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}d\lambda(\zeta).$$

Das Integral ist auf $\mathbb{T}$ analytisch, womit gezeigt wäre, dass $\mathcal{P}[f](z)$ harmonisch ist.

Wir müssen nun noch zeigen, dass Pf stetig auf $\bar{\mathbb{D}}$ ist. Sei $0 < r < 1$ und sei $u_r(\zeta) = u(r\zeta)$, dann ist jedes u_r stetig am Einheitskreis und es reicht zu zeigen, dass für $r \to 1$ u_r gleichmäßig gegen f konvergiert. Speziell für 1 liefert die obige Formel

$$1 = \mathcal{P}[1](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}d\lambda(\zeta)$$

und wir erhalten daher für jedes $\mu \in \mathbb{T}$

$$|f(\nu) - u_r(\nu)| = \left| \int_{\mathbb{T}} (f(\nu) - f(\zeta))\frac{1-r^2}{|\zeta - r\nu|^2}d\lambda(\zeta) \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{T}} |f(\nu) - f(\zeta)|\frac{1-r^2}{|\zeta - r\nu|^2}d\lambda(\zeta).$$

Da $\mathbb{T}$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig und daher existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(\nu) - f(\zeta)| < \epsilon$ für $|\nu - \zeta| < \delta$. Für $|\nu - \zeta| \geq \delta$ gilt

$$\frac{1-r^2}{|\zeta - r\nu|^2} \leq \frac{1-r^2}{|(\zeta-\nu)+(1-r)\nu|^2} \leq \frac{1-r^2}{(\delta-(1-r))^2}.$$

Da die rechte Seite für $r \to 1$ gegen 0 geht, existiert ein r_0 mit

$$\frac{1-r^2}{|\zeta - r\nu|^2} \leq \epsilon \text{ für } r_0 < r < 1,\ |\nu - \zeta| \geq \delta.$$

Und wir erhalten daher

$$|f(\nu)-u_r(\nu)| \leq \int_{|\nu-\zeta|<\delta} |f(\nu)-f(\zeta)| \frac{1-r^2}{|\zeta - r\nu|^2} d\lambda(\zeta) + \int_{|\nu-\zeta|\geq\delta} \frac{1-r^2}{|\zeta - r\nu|^2} d\lambda(\zeta)$$

$$\leq \int_{|\nu-\zeta|<\delta} \epsilon \frac{1-r^2}{|\zeta - r\nu|^2} d\lambda(\zeta) + \int_{|\nu-\zeta|\geq\delta} 2\epsilon||f||_\infty d\lambda(\zeta) \leq \epsilon + 2\epsilon||f||_\infty.$$

Hiermit wäre gezeigt, dass für $r \to 1$ u_r gleichmäßig gegen f konvergiert. □

Mit dem Poissonintegral lässt sich das **Dirichletproblem** für den Einheitskreis lösen. Es besteht darin, für eine auf $\mathbb{T}$ stetige Funktion f eine auf $\bar{\mathbb{D}}$ stetige Funktion h zu finden, die auf $\mathbb{T}$ mit f übereinstimmt sowie auf $\mathbb{D}$ harmonisch ist. Wie wir gesehen haben, erfüllt $h = Pf$ diese Eigenschaften. Wir können außerdem noch eine weitere Aussage über die Abbildungen P und R treffen:

Satz 3.12 *Die Abbildungen $R : \mathcal{H}_D(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{T})$ sowie $P : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{H}_D(\mathbb{D})$ sind zueinander inverse lineare Isometrien.*

Beweis: Dass R linear ist und die Norm erhält, haben wir bereits gezeigt. Außerdem haben wir gezeigt, dass P linear ist und $R\ P$ die Identität liefert. Außerdem ist R surjektiv, denn für $R\ u_1 = R\ u_2$ gilt, dass die Differenz $u = u_1 - u_2 \in \mathcal{H}_D(\mathbb{D})$ auf $\mathbb{T}$ Null ist, und mit dem Maximumprinzip folgt daraus bereits, dass $u \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{D}$ ist. Damit ist R sogar bijektiv und die Inverse von P. Da R eine Isometrie ist, muss P auch notwendigerweise eine Isometrie sein. □

3.5 Hardy-Räume

Wir wollen nun das Poissonintegral auf Borel-Maße verallgemeinern. Die Menge aller Borel-Maße auf $\mathbb{T}$ bezeichnen wir mit $M(\mathbb{T})$.

$$\mathcal{P}[\mu](z) := \int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta) d\mu(\zeta),\ z \in \mathbb{D}.$$

Als Spezialfall betrachten wir die bereits in 2.1 kennengelernten Funktionen $L^p(\mathbb{T})$. Sie stellen die Menge von Äquivalenzklassen λ-fast überall gleicher meßbarer Funktionen auf $\mathbb{T}$ dar, die $||f||_p < \infty$ erfüllen. Und für $0 < p < \infty$ bezeichnet

$$||f||_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p d\lambda(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}$$

sowie für $p = \infty$

$$||f||_\infty := \text{essup}_{\zeta \in \mathbb{T}} |f(\zeta)|.$$

Damit gilt nun für $f \in L^p(\mathbb{T})$

$$\mathcal{P}[f](z) := \int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta) f(\zeta) d\lambda(\zeta), \ z \in \mathbb{D}.$$

Wir sind nun in der Lage, die harmonischen Hardy-Räume h_p für $0 < p \leq \infty$ zu definieren:

$$h_p(\mathbb{D}) := \{u : \mathbb{D} \to \mathbb{R} : u \text{ harmonisch }, \sup_{0 \leq r < 1} ||u_r||_p < \infty\},$$

wobei $u_r(z) := u(rz)$. Wir bezeichnen $||u||_{H_p} := \sup_{0 \leq r < 1} ||u_r||_p$. Die Verbindung mit dem Poissonintegral ist gegeben durch:

Satz 3.13 1. *$p = 1$: Eine harmonische Funktion $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $h_1(\mathbb{D})$ wenn ein Borel-Maß $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $u = \mathcal{P}[\mu]$ existiert.*

In diesem Fall gilt $u_r \cdot \lambda$ konvergiert in der schwach Topologie gegen μ für $r \to 1$ und $||u||_{H_1} = ||\mu||$.*

2. *$1 < p < \infty$: Eine harmonische Funktion $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $h_p(\mathbb{D})$, wenn eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{T})$ mit $u = \mathcal{P}[f](z)$ existiert.*

   In diesem Fall gilt u_r konvergiert in der L^p Topologie gegen f für $r \to 1$ und $||u||_{H_p} = ||f||$.

3. *$p = \infty$: Eine harmonische Funktion $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $h_\infty(\mathbb{D})$, wenn eine Funktion $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ mit $u = \mathcal{P}[f](z)$ existiert.*

   In diesem Fall gilt: u_r konvergiert in der schwach Topologie gegen f für $r \to 1$ und $||u||_{H_\infty} = ||f||$.*

Beweis: (i) $p = 1$ Wir haben bereits gezeigt, dass für jedes $\mu \in M(\mathbb{T})$, $\mathcal{P}[\mu] \in h_1(\mathbb{D})$ erfüllt ist und dass $||u||_{H_1} \leq ||\mu||$ gilt. Sei umgekehrt $u \in h_1(\mathbb{D})$, dann liegen die Maße $u_r \cdot \lambda$ in einem Ball vom Radius $||u||_{H_1}$. Nach dem Satz von Bourbaki-Alaoglu folgt, dass dieser Ball kompakt in der schwach* Topologie ist. Daher existiert ein Maß $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $||\mu|| \leq ||u||_{H_1}$ und eine Folge r_n, die gegen 1 strebt, und $u_{r_n} \cdot \lambda \to \mu$ in der schwach* Topologie erfüllt. Damit folgt für jede Funktion $\in C(\mathbb{T})$ und $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{T}} f(\zeta) u_{r_n}(\zeta) d\lambda(\zeta) \to \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Wenden wir das speziell für $f(\zeta) = P(z, \zeta)$ an, erhalten wir $u_{r_n} \to \int_{\mathbb{T}} P(z, \zeta) d\mu(\zeta)$, also $u = \mathcal{P}[\mu]$.

Wir müssen noch zeigen, dass genau ein Maß μ mit $u = \mathcal{P}[\mu]$ existiert. Falls $f \in C(\mathbb{T})$ und $v = \mathcal{P}[f]$, dann gilt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{T}} v_r(\zeta) d\mu(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} P(r\zeta, \tilde{\zeta}) f(\tilde{\zeta}) d\lambda(\tilde{\zeta}) d\mu(\zeta)$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} P(r\tilde{\zeta}, \zeta) f(\zeta) d\mu(\zeta) d\lambda(\tilde{\zeta}) = \int_{\mathbb{T}} u_r(\zeta) f(\zeta) d\lambda(\zeta).$$

Damit folgt mit Satz 3.11, dass v_r gleichmäßig gegen f für $r \to 1$ konvergiert und damit

$$\int_{\mathbb{T}} f d\mu = \lim_{r \to 1} \int_{\mathbb{T}} u_r(\zeta) f(\zeta) d\lambda(\zeta)$$

folgt, also muss μ der schwach* Grenzwert von $u_r \lambda$ sein.

Für (ii) und (iii) verlaufen die Beweise ähnlich. □

Die Hardyräume H_p auf dem Einheitskreis sind definiert als:

$$H_p(\mathbb{D}) := \{F : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : F \text{ analytisch }, \sup_{0 \le r < 1} ||F_r||_p < \infty\}.$$

H_p besteht daher aus jenen Funktionen in h_p, die sogar analytisch sind. Eine Funktion ist weiters genau dann in H_p, wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil in h_p liegen. Mit diesem Resultat können wir die Ergebnisse des Satzes 3.13 für h_p einfach auf H_p umlegen.

Es gibt für Funktionen aus H_p zusätzlich noch die Darstellung über das Cauchyintegral. Sei $F \in H_p(\mathbb{D})$ für ein $p > 1$, dann konvergiert F schwach* gegen eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{T})$ für $r \to 1$. Wählen wir ein $z_0 \in \mathbb{D}$ und ein $r < 1$, dann folgt mit der Cauchyschen Darstellungsformel:

$$F_r(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{F_r(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F_r(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - z_0} i e^{i\theta} d\theta = \int_{\mathbb{T}} \frac{F_r(\zeta)}{1 - z_0 \bar{\zeta}} d\lambda(\zeta).$$

Die Funktion $\zeta \to \frac{1}{1 - z_0 \bar{\zeta}}$ ist stetig, damit folgt

$$F(z_0) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - z_0 \bar{\zeta}} d\lambda(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

und wir sehen, dass F durch das Cauchyintegral von F gegeben ist. Es folgt für $|z_0| > 1$ analog

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{F_r(z)}{z - z_0} dz \quad \text{aus} \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

3.6 Der Raum $H^p(\mathbb{C}_+)$

Nachdem wir Hardyräume am Einheitskreis $\mathbb{D}$ betrachtet haben, wenden wir uns jetzt Hardyräumen auf der oberen Halbebene $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ zu. Wir definieren dafür die Räume

$$H^p(\mathbb{C}_+) := \{F(z) \text{ analytisch auf } \mathbb{C}_+ : \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p dx < \infty\}.$$

Um zwischen dem Einheitskreis und der oberen Halbebene transformieren zu können, benötigen wir folgende konforme Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+, \ z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$$

$$\beta : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}, \ z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Für die obere Halbebene definieren wir mit $z = x + iy$ das Poissonintegral durch

$$\mathcal{P}[f](z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \ y > 0.$$

Das Cauchyintegral definieren wir durch

$$C[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, y \neq 0.$$

Wie eine kurze Überlegung zeigt, lässt sich mittels der Abbildungen α, β Satz 3.11 auf die obere Halbebene übertragen, indem wir für $z \in \mathbb{C}_+$ $u(z) = (u \circ \alpha)(\beta(z)) = \mathcal{P}[(u \circ \alpha)(e^{it})](u \circ \alpha)$ benützen. $\mathcal{P}$ ist hier das Poissonintegral am Einheitskreis.

Satz 3.14 *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und sei $F(z)$ so, dass $F \circ \alpha \in H_p(\mathbb{D})$, was insbesondere für $F \in H^p(\mathbb{C}_+)$ erfüllt ist. Sei weiters $f(x)$ der Randwert von $F(z)$, dann ist $\frac{f(x)}{1+x^2} \in L^1(-\infty, \infty)$ und für $y > 0$ gilt*

$$F(z) = \mathcal{P}[f](z).$$

Das Cauchyintegral erfüllt:

Satz 3.15 *Sei $1 \leq p < \infty$ und sei $F(z) \in H^p(\mathbb{C}_+)$ mit Randwert $f(x)$, dann gilt $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$ und für $y > 0$ $F(z) = C[f](z)$ sowie für $y < 0$ $0 = C[f](z)$.*

Sei umgekehrt $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$ und gelte $C[f](z) = 0$ für $y < 0$, dann gilt

$$F(z) = C[f](z) = \mathcal{P}[f](z) \text{ für } y > 0.$$

$F(z)$ ist außerdem in $H^p(\mathbb{C}_+)$ und der L^p Grenzwert ist fast überall gleich $f(x)$.

Speziell gilt für eine Funktion $F(z)$ aus $H^2(\mathbb{C}_+)$, dass sie genau dann der L^2 Randwert einer Funktion $f(x)$ aus $L^2(-\infty, \infty)$ ist, falls

$$C[f](z) = 0 \text{ für } y < 0$$

also falls

$$F(z) = C[f](z) = \mathcal{P}[f](z) \text{ für } y > 0$$

gilt. Das Poisson- und Cauchyintegral $\mathbb{C}_+$ sowie dieses Resultat werden wir in Kapitel 6 auf Distributionen erweitern.

3.7 Harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Definition 3.16 *Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, sei $u : \Omega \to \mathbb{C}$ und sei $u(x) = u(x_1, ..., x_n)$ nach jeder Variablen zwei mal stetig differenzierbar, dann heißt u harmonisch, falls*

$$(\Delta u)(x) := \frac{\partial^2 u}{x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{x_n^2}(x) \equiv 0$$

auf Ω gilt.

Sei u eine harmonische Funktion auf Ω und $y \in \mathbb{R}^n$, dann gilt für die um y verschobene Funktion, die durch $\tilde{u}(x) := u(x - y)$ (im Bereich $y + \Omega$) definiert ist, dass sie ebenfalls harmonisch ist. Definieren wir die um den Faktor r gestreckte Funktion durch $u_r(x) := u(rx)$ (im Bereich $\frac{1}{r}\Omega$), dann gilt $\Delta u_r = r^2(\Delta u)_r$, womit die um den Faktor r gestreckte Funktion ebenfalls wieder harmonisch ist.

Satz 3.17 (Mittelwerteigenschaft) *Sei u harmonisch auf der abgeschlossenen Kugel $\bar{B}(a, r)$, dann lässt sich die $u(a)$ durch ein Mittel über den Rand $\partial B(a, r)$ darstellen:*

$$u(a) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_S u(a + rs) ds,$$

wobei $S := \partial B(0, 1)$, und ω_{n-1} die halbe Oberfläche von S ist.

Beweis:

Wir beweisen den Satz zuerst für $n > 2$. Wegen der Verschiebungseigenschaften können wir $a = 0$ annehmen. Der Satz von Green besagt

$$\int_\Omega (u \triangle v - v \triangle u) dV = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\mathbf{n}} v - v \partial_{\mathbf{n}} u) ds.$$

Der Satz von Green folgt direkt aus dem Satz von Gauss

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{F} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

angewandt auf die Funktion $(u\triangle v - v\triangle u)$. Wenden wir diesen auf $u(x)$ und $v(x) := |x|^{2-n}$ mit dem Bereich $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon < |x| < 1\}$ an, erhalten wir

$$0 = (2-n)\int_S uds - (2-n)\epsilon^{1-n}\int_{\epsilon S} uds - \int_S \partial_{\mathbf{n}} uds - \epsilon^{2-n}\int_{\epsilon S} \partial_{\mathbf{n}} udx.$$

Da aus dem Satz von Green mit $v = 1$ und u harmonisch

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} uds$$

folgt, sind die letzten zwei Terme 0 und es gilt

$$\int_S uds = \epsilon^{1-n}\int_{\epsilon S} uds,$$

was für $\epsilon \to 0$ unter Verwendung der Stetigkeit von u bei 0 den Satz beweist.

Für $n = 2$ gehen wir analog mit $v := \log|x|$ vor. □

Die Mittelwerteigenschaft ist wie wir sehen werden eine zentrale Eigenschaft der harmonischen Funktionen. Man kann sogar zeigen, dass die harmonischen Funktionen durch diese Eigenschaften charakterisiert werden. Gehen wir zu Polarkoordinaten (s, $r = 1$) über

$$\frac{1}{V(B(0,1))}\int_{B(0,1)} udV = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_S u(s)ds,$$

erhalten wir eine äquivalente Formulierung

$$u(a) = \frac{1}{V(B(a,r))}\int_{V(B(a,r)} udV.$$

Satz 3.18 (Maxiumprinzip) *Sei Ω zusammenhängend und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reellwertige harmonische Funktion. Wenn u auf Ω ein Maximum oder Minimum annimmt, dann ist u konstant.*

Beweis: Angenommen u nimmt sein Maximum bei $a \in \Omega$ an. Wir wählen ein $r > 0$ mit $\bar{B}(a,r) \subset \Omega$. Wäre u für einen Punkt in $B(a,r)$ kleiner als $u(a)$, würde das der äquivalenten Formulierung von Satz 3.17 widersprechen. Damit muss u konstant auf $B_r(a)$ sein. Damit ist die Menge, auf der u das Maximum annimmt, offen in Ω und wegen der Stetigkeit auch abgeschlossen. Da Ω zusammenhängend ist, muss daher u auf ganz Ω konstant sein.

Falls u ein Minimum annimmt, gehen wir analog für $-u$ vor. □

Eine äquivalente Formulierung dazu ist, dass, falls u stetig auf $\bar{\Omega}$ (Ω beschränkt) und harmonisch auf Ω ist, ein Maximum/Minimum nur am Rand $\partial\Omega$ angenommen werden kann. Wenden wir diese Aussage auf $u_1(x) - u_2(x)$ an, erhalten wir direkt:

Satz 3.19 *Seien u_1, u_2 stetig auf $\bar{\Omega}$ (Ω beschränkt), harmonisch auf Ω und gleich auf dem Rand $\partial\Omega$, dann gilt $u_1 = u_2$ auf ganz $\bar{\Omega}$*

Wir wollen uns jetzt dem bereits in $\mathbb{C}$ besprochenen Dirichletproblem zuwenden, also für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine auf $\partial\Omega$ gegebene stetige Funktion f eine auf $\bar{\Omega}$ definierte stetige Funktion u finden. Die Einschränkung von u auf Ω soll dabei harmonisch sein und auf $\partial\Omega$ soll $u(x) = f(x)$ gelten.

Die für den Einheitskreis hergeleitete Darstellung mittels Poissonintegral ist auch für die n-dimensionale Einheitskugel möglich und sie löst das Dirichletproblem für die n-dimensionale Einheiskugel.

$$u(x) = \int_S f(s)p(s,x)ds,$$

wobei der Poissonkern für die Einheitskugel

$$p(s,x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-|x|^2}{|x-s|^n} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta + r^2)^{\frac{n}{2}}}$$

ist. Dabei ist $r = |x| > 1 = |s|$ und θ der Winkel zwischen den Vektoren x und s.

3.8 Das Poissonintegral auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$

Wir wollen aber nicht auf der Einheitskugel, sondern auf dem oberen Halbraum $\mathbb{R}_+^{n+1} := \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ arbeiten, der Rand von $\mathbb{R}_+^{n+1}$ ist $\mathbb{R}^n$. Wir erhalten folgende Poissondarstellung:

Satz 3.20 *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, und sei*

$$u(x,y) = \mathcal{P}[f](x,y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t)P_y(x-t)dt$$

das Poissonintegral von f, dann ist u harmonisch auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Es gilt $\lim_{y\to 0+} u(x,y) = f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$||u(x,y)||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||f||_p$$

für alle $y > 0$. Außerdem gilt für $y \to 0+$

$$||u(x,y) - f||_p \to 0.$$

Beweis: Ohne Beweis. □

Auch auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$ lassen sich die harmonischen Hardyräume durch

$$h_p(\mathbb{R}_+^{n+1}) := \{u : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R} : u \text{ harmonisch}, \sup_{y>0} ||u(x,y)||_p < \infty\}$$

definieren. Wir bezeichnen $||u||_{h_p} := \sup_{y>0} ||u(x,y)||_p$. Erneut in Analogie zum bereits auf $\mathbb{D}$ besprochenen Fall gilt für $1 < p \leq \infty$, dass die Abbildung $f \mapsto \mathcal{P}[f]$ eine Isometrie von $L^p(\mathbb{R}^n)$ auf $h_p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ist.

Mithilfe der alternativen Formulierung der Mittelwerteigenschaft lässt sich, wie eine kurze Rechnung zeigt, eine Funktion $u \in h_p(\mathbb{R}^n_+)$ durch

$$|u(x,y)| \leq \frac{C||u||_{h_p}}{y^{\frac{n-1}{p}}}$$

abschätzen, mit natürlichem n und einer Konstanten C, die nur von p abhängt.

Das Poissonintegral auf dem oberen Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$ werden wir im folgenden Kapitel auf Distributionen erweitert. Dafür benötigen wir aber noch einige weitere Eigenschaften von harmonischen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die wir ohne Beweis anführen:

Satz 3.21 *Sei u eine Funktion im $\mathbb{R}^n$, die harmonisch in der Einheitskugel ($|x| < 1$) und stetig in der abgeschlossenen Einheitskugel ($|x| \leq 1$), ist, dann existiert eine Reihenentwicklung*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)}(x)$$

wobei $a^{(k)}(x)$ homogene harmonische Polynome von Grad k sind. Die Reihe ist absolut konvergent in $|x| < 1$ und gleichmäßig konvergent in $|x| \leq r < 1$.

Satz 3.22 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein symmetrischer Bereich, für den aus $(x,y) = (x_1, ..., x_n, y) \in \Omega$ auch $(x,-y) \in \Omega$ folgt. Sei u eine stetige Funktion auf Ω, die $u(x,y) = -(x,-y)$ erfüllt und die weiters harmonisch auf $\Omega_+ := \{(x,y) \in \Omega, y > 0\}$ ist, dann ist u auf ganz Ω harmonisch.*

Kapitel 4

Distributionelle Randwerte harmonischer Funktionen

Definition 4.1 *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dann heißt eine harmonische Funktion $u(x,y) : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{C}$ harmonische Darstellung von T (im oberen Halbraum), falls für alle $\phi \in \mathcal{D}$ gilt:*

$$\lim_{y \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} u(x,y)\phi(x)dx = \langle T, \phi \rangle.$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{R}_+^{n+1}$ den oberen Halbraum $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Man kann aber auch analog zu dieser Definition eine harmonische Darstellung auf der unteren Halbebene definieren.

Dieser Grenzwert lässt sich eleganter als Grenzwert im distributionellen Sinn schreiben, indem man die harmonische Funktion u als Distribution I_u auffasst. Wir werden in Folge aber nicht mehr zwischen u und I_u unterscheiden, wenn aus der Gleichung klar ist, ob wir eine Funktion als Distribution auffassen wollen.

$$\lim_{y \to 0+} u(x,y) = T.$$

Die harmonische Darstellung von Distributionen ist daher genau analog zur harmonischen Darstellung, die wir in Abschnitt 3.7 eingeführt haben, nur mit dem Unterschied, dass sie einen distributionellen Randwert besitzt.

Direkt aus der Definition kann man bereits einige Eigenschaften der harmonischen Darstellung ablesen. Sind $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ harmonische Darstellungen der Distributionen T_1 und T_2, dann ist $u_1(x,y) + u_2(x,y)$ eine harmonische Darstellung von $T_1 + T_2$. Außerdem ist für $c \in \mathbb{C}$, $cu(x,y)$ eine harmonische Darstellung von cT.

Darüber hinaus gilt mit $\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, dass $\partial_x^\alpha u(x,y)$ eine harmonische Darstellung von $\partial_x^\alpha T$ ist. Denn $\partial_x^\alpha u(x,y)$ ist als Ableitung einer harmonischen Funktion wieder harmonisch und wegen

$$\lim_{y \to 0+} \int \partial_x^\alpha u(x,y)\phi(x)dx = \lim_{y \to 0+} (-1)^{|\alpha|} \int u(x,y)\partial_x^\alpha \phi(x)dx =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial_x^\alpha \phi(x)\rangle = \langle \partial_x^\alpha T, \phi\rangle$$

folgt, dass es eine harmonische Darstellung von $\partial_x^\alpha T$ ist.

Seien $u_1(x,y)$ und $u_2(x,y)$ zwei harmonische Darstellungen der Distribution T, dann ist $u_2(x,y) - u_1(x,y)$ eine harmonische Darstellung der Nulldistribution. Harmonische Darstellungen sind daher bis auf eine harmonische Darstellung der Nulldistribution eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen die Menge der harmonischen Darstellungen der Nulldistribution mit $\mathcal{H}_0$.

4.1 Distributionen aus $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Die Distributionen $\mathcal{E}'$ besitzen einen kompakten Träger supp$T$ und stellen daher den einfachsten Fall dar. Wir werden beginnen, die klassische Theorie auf diese Distributionen zu übertragen. Für die Darstellung mittels harmonischer Funktionen benötigen wir analog zum klassischen Fall den Poissonkern für die obere Halbebene $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

$$P_y(x) := \frac{1}{\omega_n} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Damit können wir in Anlehnung an Satz 3.20 das verallgemeinerte Poissonintegral formulieren:

Definition 4.2 *Sei $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, dann nennen wir*

$$P[T](x,y) = \langle T(t), P_y(x-t)\rangle, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

das verallgemeinerte Poissonintegral von T.

Diese Definition ist sinnvoll, da $P[T](x,y)$ für $y \neq 0$, wohldefiniert ist und $P_y(x-\zeta) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Wie wir schon im klassischen Fall angemerkt haben, lässt sich das verallgemeinerte Poissonintegral eleganter über eine Faltung mit dem Poissonkern schreiben

$$P[T](x,y) = (P_y * T)(x).$$

Auf eine Testfunktion angewandt, lässt sich der Poissonkern auf diese übertragen. Es gilt für $y > 0$

$$\langle P[T](x,y), \phi\rangle = \langle T, P_y * \phi\rangle,$$

da $\int P[T](x,y)\phi(x)dx = \int \langle T(t), P_y(x-t)\rangle \phi(x)dx =$
$\langle T(t), \int P_y(x-t)\phi(x)dx\rangle = \langle T, P_y * \phi\rangle$ gilt.

Satz 4.3 *Das Poissonintegral der Distribution $T \in \mathcal{E}'$ ist eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus$ supp$T$. Es besitzt außerdem die Symmetrieeigenschaft $P[T](x,y) = -P[T](x,-y)$ $(x \neq 0)$.*

Beweis: Die Symmetrieeigenschaft folgt direkt aus der Form des Poissonkerns.
Um zu zeigen, dass $P[T](x,y)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathrm{supp}T$ ist, verwenden wir Satz 3.22. Wir müssen daher zeigen, dass $P[T](x,y)$ harmonisch auf $\mathbb{R}^{n+1}$ für $y \neq 0$ ist und stetig auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathrm{supp}T$.

$P[T](x,y)$ ist für $y \neq 0$ harmonisch, denn wegen $\frac{\partial}{\partial x_i} P[T](x,y) =$
$= \langle T(\zeta), \frac{\partial}{\partial x_i} P_y(x-t)\rangle$ und Analogem für $\frac{\partial}{\partial y}$ gilt

$$\Delta P[T](x,y) = \langle T(t), \Delta P_y(x-t)\rangle = 0.$$

Um die Stetigkeit zu beweisen, zeigen wir für $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}T$, dass $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} P[T](x,y) = 0$ gilt. Da $x_0 \notin \mathrm{supp}T$, existiert eine Umgebung U von $\mathrm{supp}T$, die $x_0 \notin \bar{U}$ erfüllt. Wir setzen $\lambda(t)$ eine Funktion $\lambda(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, die die Bedingung erfüllt:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1: & t \in \text{einer Umgebung von } \mathrm{supp}T \subset U \\ 0: & t \notin U. \end{cases}$$

Damit gilt $\mathrm{supp}T \subset \mathrm{supp}\lambda(t) \subset \bar{U}$.

Für $y \neq 0$ gilt $P[T](x,y) = \langle T(t), P_y(x-t)\rangle = \langle T(t), \lambda(t)P_y(x-t)\rangle$, wir müssen daher $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \lambda(t)P_y(x-t) = 0$ zeigen.
Falls $t \notin U$, gilt sogar $\lambda(t)P_y(x-t) \equiv 0$, wir müssen daher nur mehr zeigen, dass $\lambda(t)P_y(x-t)$ in $\mathcal{E}(\bar{U})$ gegen 0 konvergiert. Das ist erfüllt, da $x_0 \notin \bar{U}$ ist. □

Satz 4.4 *Sei $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, dann gilt im Sinne des distributionellen Grenzwerts* $\lim_{y\to 0+} P[T](x,y) = T$.

Beweis: Wir müssen zeigen, dass $\lim_{y\to 0+}\langle P[T](x,y), \phi(x)\rangle = \langle T, \phi\rangle$ gilt. Dazu schreiben wir die Gleichung zunächst zu $\lim_{y\to 0+}\langle T, P_y * \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle$ um. Damit reicht es, $\lim_{y\to 0+}(P_y * \phi)(t) = \phi(t)$ in $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ für alle Testfunktionen ϕ zu zeigen.

Für ein beliebiges ∂_t^α und ϕ gilt $\partial_t^\alpha (P_y * \phi)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t^\alpha P_y(t-x)\phi(x)dx$ $= -\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha P_y(t-x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(t-x)\partial^\alpha\phi(x)dx = (P_y * \partial^\alpha\phi)(t)$, da nach Satz 3.20 $\lim_{y\to 0+} P_y * \partial^\alpha\phi = \partial^\alpha\phi$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ konvergiert. □

Wir haben damit gezeigt, dass für eine Distribution mit kompaktem Träger T auf $\mathbb{R}^n$ $P[T](x,y)$ eine harmonische Funktion auf dem oberen Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$ ist und

$$\lim_{y\to 0+} P[T](x,y) = T$$

erfüllt, woraus folgt, dass $P[T](x,y)$ eine harmonische Darstellung von T ist.

4.2 Distributionen aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Um eine harmonische Darstellung $u(x,y)$ für eine Distribution $T \in \mathcal{D}'$ zu finden, können wir nicht einfach genau wie für $\mathcal{E}'$ das Poissonintegral auf $\mathcal{D}'$ übertragen, da das Poissonintegral nicht für jede Distribution in $\mathcal{D}'$ definiert ist. Wir werden daher die Distributionen in eine lokal endliche Summe von Distributionen mit kompaktem Träger zerlegen. Des weiteren werden wir die Tatsache verwenden, dass sich jede harmonische Funktion in eine Reihe entwickeln lässt, wie wir in Satz 3.21 gesehen haben.

Satz 4.5 *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dann existiert ein $u(x,y)$, das harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathrm{supp} T$ ist und für das im Sinne der Distributionen $\lim_{y\to 0+} u(x,y) = T(x)$ gilt.*

Beweis: Seien $\nu \in \mathbb{Z}^n$ die Punkte in $\mathbb{R}^n$ mit ganzzahligen Koordinaten, dann ist die Menge aller Einheitskugeln $\{B_x(\nu,1) : \nu \in \mathbb{Z}^n\}$ eine offene Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Es existiert eine Zerlegung der 1 für diese offene Überdeckung, also eine Menge $\{\lambda_\nu(t) : \nu \in \mathbb{Z}^n\}$, die erfüllt: $\lambda_\nu(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $0 \le \lambda_\nu(t) \le 1$; $\lambda_\nu(t) = 0$ außerhalb von $B(\nu,1)$; $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \lambda_\nu(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$.

Es gilt nun mit dieser Zerlegung für jedes $\phi \in \mathcal{D}$, $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \phi\lambda_\nu = \phi$, und für jedes $T \in \mathcal{D}'$,

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} T\lambda_\nu = T.$$

Bezeichnen wir nun $T_\nu := \lambda_\nu T$, dann gilt $T_\nu \in \mathcal{E}$, da die Distribution wegen $\mathrm{supp} T_\nu \subset \bar{B}_x(\nu,1)$ einen kompakten Träger besitzt. Das Poissonintegral $P[T_\nu](x,y)$ ist demnach gemäß Satz 4.3 harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bar{B}_n(\nu,1)$ und es gilt außerdem

$$P[T_\nu](x,y) = -P[T_\nu](x,-y).$$

Deshalb ist für $|\nu| \ge 2$ speziell $P[T_\nu](x,y)$ auch harmonisch in $\sqrt{|x|^2+y^2} < |\nu| - 1$ und wir können Satz 3.21 anwenden, sodass wir eine Reihenentwicklung bekommen

$$P[T_\nu](x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,y),$$

wobei $a_k(x,y)$ homogene harmonische Polynome von Grad k auf $\mathbb{R}^{n+1}$ sind. Des weiteren ist diese Reihe auf $\sqrt{|x|^2+y^2} \le |\nu| - 2$ gleichmäßig konvergent.

Wir definieren nun die in y ungerade Funktion $b_k(x,y) := \frac{a_k(x,y)-a_k(x,-y)}{2}$. Die $b_k(x,y)$ sind wiederum harmonische Polynome vom Grad k und es gilt ebenfalls

$$P[T_\nu](x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,y).$$

Auch diese Reihe ist auf $\sqrt{|x|^2+y^2} \le |\nu| - 2$ gleichmäßig konvergent.

Sei $h_\nu = \sum_{k=0}^{n_\nu} b_k(x,y)$, so dass in $\sqrt{|x|^2+y^2} \le |\nu| - 2$, $|P[T_\nu](x,y) - h_\nu| < 2^{-|\nu|}$ gilt. Wir setzen weiters

$$u(x,y) := \sum_{|\nu|\le 2} P[T_\nu](x,y) + \sum_{|\nu|\ge 3} [P[T_\nu](x,y) - h_\nu(x,y)].$$

Es handelt sich hier um eine Reihe von harmonischen Funktionen. Außerdem ist die Reihe $\sum_{|\nu|\ge N+2}[P[T_\nu](x,y) - h_\nu(x,y)]$ gleichmäßig konvergent in $\sqrt{|x|^2+y^2} \le N$, da $\sum_{|\nu|\ge N+2} 2^{-|\nu|} < \infty$. Damit können wir folgern, dass $u(x,y)$ harmonisch in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_\nu \mathrm{supp} T_\nu$ ist und damit in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathrm{supp} T$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\lim_{y\to 0+} u(x,y) = T(x)$ gilt. Sei $\phi \in \mathcal{D}$ mit $\mathrm{supp}\phi \subset \{x : |x| \le N\}$, dann gilt $u(x,y) =$

$$= \sum_{|\nu|\le N+2} P[T_\nu](x,y) - \sum_{3\le|\nu|\le N+2} h_\nu(x,y) + \sum_{|\nu|\ge N+3} [P[T_\nu](x,y) - h_\nu(x,y)],$$

und setzen wir

$$g(x,y) := \sum_{3\le|\nu|\le N+2} h_\nu(x,y) \in \mathcal{H}_0, \text{ sowie}$$

$$f(x,y) := \sum_{|\nu|\ge N+3} [P[T_\nu](x,y) - h_\nu(x,y)],$$

eine Reihe von harmonischen Funktionen, die gleichmäßig konvergent in $|x| \le N, |y| \le 1$ ist. Daher ist in diesem Bereich $f(x,y)$ auch eine harmonische Funktion. Weiters gilt $f(x,0) = 0$, womit auch $\lim_{y\to 0+} f(x,y) = 0$ gleichmäßig in $|x| \le N$ gilt. Bilden wir von $\langle u(x,y), \phi(x)\rangle =$

$$= \sum_{|\nu|\le N+2} \langle P[T_\nu](x,y), \phi(x)\rangle - \langle g(x,y), \phi(x)\rangle + \int_{|x|\le N+2} f(x,y)\phi(x)dx$$

den Grenzwert $y \to 0+$, so ergibt das

$$\sum_{|\nu|\le N+2} \langle T_\nu, \phi\rangle = \langle T, \sum_{|\nu|\le N+2} \lambda_\nu \phi\rangle = \langle T, \phi\rangle,$$

womit $\lim_{y\to 0+} u(x,y) = T(x)$ gezeigt wäre. □

4.3 Klassifizierung der harmonischen Darstellungen

Wir haben in Satz 4.5 gezeigt, dass jede Distribution T eine harmonische Darstellung besitzt, also dass sich jede Distribution als Randwert einer harmonischen Funktion darstellen lässt. Als nächstes wollen wir betrachten, welche harmonischen Funktionen wirklich eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ als Randwert annehmen. Wir werden damit in Satz 4.12 die harmonischen Darstellungen von Distributionen klassifizieren.

Wir definieren dafür die Menge $\mathcal{H}_+$ der lokal langsam wachsenden harmonischen Funktionen.

Definition 4.6 *Eine harmonische Funktion u auf $\mathbb{R}_+^{n+1}$ liegt in $\mathcal{H}_+$, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt: Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $\eta > 0$ existiert eine Konstante M und eine ganze Zahl $m \geq 1$, sodass gilt*

$$|u(x,y)| \leq My^{-m}, \ (x,y) \in K \times (0,\eta].$$

Wir zeigen zuerst, dass jede harmonische Darstellung eine lokal langsam wachsende harmonische Funktion ist.

Satz 4.7 *Sei $u(x,y)$ eine harmonische Darstellung von $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $u(x,y) \in \mathcal{H}_+$.*

Beweis: Wie wir in der Einführung über Distributionen gesehen haben, existiert für eine Distribution T und eine beliebige kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ein α und eine stetige Funktion f, sodass $\partial^\alpha f|_K = T|_K$ gilt. Wählen wir nun eine Funktion $\psi \in \mathcal{D}$, sodass $\psi \equiv 1$ auf K ist und sei

$$P[\psi f](x,y) = \langle \psi(t) f(t), P_y(t-x) \rangle, y > 0,$$

mit dem Poissonkern $P_y(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, eine harmonische Darstellung von ψf. Dann gelten für das verallgemeinerte Poissonintegral $P[\partial^\alpha \psi f](x,y)$ und alle $\phi \in \mathcal{D}(K)$ die Gleichungen:

$$\lim_{y \to 0+} \int_K P[\partial^\alpha \psi f](x,y) \phi(x) dx = \langle T, \phi \rangle$$

$$\lim_{y \to 0+} \int_K u(x,y) \phi(x) dx = \langle T, \phi \rangle.$$

Damit lässt sich $u(x,y) - P[\partial^\alpha \psi f](x,y)$ zu einer stetigen Funktion $h(x,y)$ auf $\mathbb{R}_+^{n+1} \cup U$ fortsetzen.

Wir betrachten nun das Wachstum von $P[\partial^\alpha \psi f](x,y)$. Es gilt

$$P[\partial^\alpha \psi f](x,y) = (-1)^{|\alpha|} \langle \psi(t) f(t), \partial^\alpha P_y(t-x) \rangle.$$

Für die Ableitung des Poissonkerns gilt

$$\partial^\alpha P_y(x) = \frac{q(x,y)}{(|x|^2+y^2)^s}, \ s \in \mathbb{R}_+, \ q(x,y) \text{ Polynom.}$$

t liegt in suppψ und x in K, damit liegt $t-x$ in einer beschränkten Menge $V \subset \mathbb{R}^n$. Es existiert ein N mit

$$|q(x-t)| \leq N \text{ für } x-t \in V, \ 0 < y \leq 1.$$

Damit können wir weiters abschätzen, dass $|\partial^\alpha P_y(t-x)| \leq Ny^{-2s}$ ist (wieder $t \in$ suppψ und $x \in K$).

Da nun $u(x,y) = P[\partial^\alpha \psi f](x,y) + h(x,y)$ gilt, ist es einfach, Konstanten M, m zu finden, sodass für alle $\nu > 0$

$$|u(x,y)| \leq My^{-m} \text{ für } (x,y) \in K \times (0,\nu]$$

gilt, womit $u(x,y) \in \mathcal{H}_+$ gezeigt wäre. □

Wir führen des weiteren für $u(x,y)$ und einen beliebigen Punkt (x_0,y_0), die Funktion $u^{(-1)}(x,y)$ als Mittelwert der Funktion $u(x,y)$ auf dem Liniensegment von (x,y) nach (x_0,y_0) ein.

Definition 4.8 *Für $u(x,y) \in \mathcal{H}_+$ definieren wir für einen beliebigen Punkt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$:*

$$u^{(-1)}(x,y) = \int_0^1 u(x_0 + t(x-x_0), y + t(y-y_0))dt.$$

Die so definierte Funktion ist harmonisch auf $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Indem wir $u^{(-2)}(x,y)$ als Mittelwert der Funktion $u^{(-1)}(x,y)$ auf dem Liniensegment von (x,y) nach (x_0,y_0) definieren und das iterativ fortsetzen, können wir für alle $m \in \mathbb{N}$ die Funktionen $u^{(-m)}(x,y)$ für einen beliebigen Punkt (x_0,y_0) definieren.

Satz 4.9 . *Sei $u_+(x,y)$ harmonisch auf $\Omega_+ := \Omega \cap \mathbb{R}^{n+1}_+$ und existiert*

$$\lim_{y \to 0+} \int_\Omega u_+(x,y)\phi(x)dx = \langle T_+, \phi \rangle$$

für jede Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dann existiert

$$\lim_{y \to 0+} \int_\Omega \phi(x) \frac{\partial u_+(x,y)}{\partial y} dx$$

ebenfalls.

Beweis: Sei K der Träger von ϕ, dann gilt für hinreichend kleines $\epsilon > 0$, $K \times (0,\epsilon] \subset U_+$ und

$$\frac{\partial u_+}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_+}{\partial y}(x,\epsilon) + \int_\epsilon^y \frac{\partial^2 u_+}{\partial y^2}(x,y)dy$$

$$= \frac{\partial u_+}{\partial y}(x,\epsilon) - \int_\epsilon^y \triangle_x u_+(x,y)dy, \; x \in K, \; 0 < y \leq \epsilon.$$

Wegen $\lim_{y \to 0+} \int_\Omega u_+(x,y)\phi(x)dx = \langle T_+(x), \phi(x) \rangle$ gilt auch

$$\lim_{y \to 0+} \int_\Omega \triangle_x u_+(x,y)\phi(x)dx = \langle T_+(x), \triangle_x \phi(x) \rangle$$

und daher können wir die auf $(0,\epsilon]$ stetige Funktion

$$\lim_{y\to 0+}\int_\Omega \triangle_x u_+(x,y)\phi(x)dx$$

stetig auf $[0,\epsilon]$ fortsetzen. Daraus folgt dass

$$\lim_{y\to 0+}\int_\Omega \phi(x)\int_\epsilon^y \triangle_x u_+(x,y)dydx = \lim_{y\to 0+}\int_\epsilon^y\int_\Omega \phi(x)\triangle_x u_+(x,y)dxdy$$

existiert und somit auch

$$\lim_{y\to 0+}\int_\Omega \phi(x)\frac{\partial u_+(x,y)}{\partial y}dx.$$

□

Damit können wir folgern:

Satz 4.10 *Wenn der Grenzwert* $\lim_{y\to 0+} u^{(-1)}(x,y)$ *bezüglich* $\mathcal{D}'$ *existiert, dann existiert auch der Grenzwert* $\lim_{y\to 0+} u(x,y)$ *bezüglich* $\mathcal{D}'$.

Beweis: Wir wählen Polarkoordinaten (r,w) in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Ursprung (x_0,y_0). Dabei sei $r\in[0,\infty)$ und $w\in B_n$. Damit vereinfacht sich die Definition zu

$$u^{(-1)}(r,w)=\frac{1}{r}\int_0^r u(r,w)dr$$

und daraus folgt wegen $\frac{\partial}{\partial r}u^{(-1)}(r,w) = -\frac{1}{r^2}\int_0^r u(r,w)dr + \frac{1}{r}u(r,w) =$
$= -\frac{1}{r}u^{(-1)}(r,w)+\frac{1}{r}u(r,w)$ die Beziehung

$$u(r,w) = r\frac{\partial}{\partial r}u^{(-1)}(r,w)+u^{(-1)}(r,w).$$

Wir wollen nun wieder zurück zu kartesischen Koordinaten wechseln. Es gilt $\frac{\partial}{\partial r}=\sum_{i=1}^n w_i\frac{\partial}{\partial x_i}+w_{n+1}\frac{\partial}{\partial y}=\sum_{i=1}^n\frac{x_i-x_{0i}}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{y-y_0}{r}\frac{\partial}{\partial y}$. Damit erhalten wir

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{0i})\frac{\partial}{\partial x_i}u^{(-1)}(x,y)+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}u^{(-1)}(x,y)+u^{(-1)}(x,y).$$

Aus der Existenz von $\lim_{y\to 0+}u^{(-1)}(x,y)$ in $\mathcal{D}'(U)$ folgt sofort die Existenz von $\lim_{y\to 0+}\frac{\partial}{\partial x_i}u^{(-1)}(x,y)$. Da $u^{(-1)}(x,y)$ harmonisch ist, folgt aus Satz 4.9, dass $\lim_{y\to 0+}\frac{\partial}{\partial y}u^{(-1)}(x,y)$ existiert. □

Satz 4.11 *Sei* $u(x,y)$ *eine harmonische Funktion auf* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *und sei* $\bar{B}_n(x_0,a):=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|\le a\}$. *Falls eine Konstante* M *und ein* $m\in\mathbb{N}$ *existieren, sodass*

$$|u(x,y)|\le My^{-m}, (x,y)\in\bar{B}_n(x_0,a)\times(0,y_0]$$

gilt, dann lässt sich $u^{(-m-2)}(x,y)$ *stetig auf* $\mathbb{R}^{n+1}_+\cup\bar{B}(x_0,a)$ *fortsetzen.*

Beweis: Sei zuerst $m > 1$. Dann gilt für $(x, y) \in \bar{B}_n(x_0, a) \times (0, y_0]$,

$$|u^{(-1)}(x,y)| = |\int_0^1 u(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))dt|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{M}{(y_0 + t(y - y_0))^m} dt = \frac{M}{m(y_0 - y)}(y_0 + t(y - y_0))^{-m+1}|_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{M}{m(y_0 - y)}(y^{-m+1} - y_0^{-m+1}) \leq N y^{-m+1},$$

wobei N eine Konstante ist.

Sei nun $m = 1$, dann gilt für $(x, y) \in \bar{B}_n(x_0, a) \times (0, y_0]$,

$$|u^{(-1)}(x,y)| \leq \int_0^1 \frac{M}{(y_0 + t(y - y_0))} dt = \frac{M}{y - y_0} \ln(y_0 + t(y - y_0))|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{M}{y - y_0}(\ln y - lny_0) \leq N(\ln y^{-1} + N),$$

wobei N wieder eine Konstante ist.

Es gilt daher für $m \geq 1$, $|u^{(-m)}(x, y)| \leq N(\ln y^{-1} + N)$ und damit auch

$$|u^{(-m-1)}(x,y)| \leq \int_0^1 N(\ln(y_0 + t(y - y_0))^{-1} + N)dt$$

$$= \frac{N}{y - y_0} \int_{y_0}^{y} (\ln t^{-1} + N)dt \leq \tilde{N},$$

mit einer Konstanten $\tilde{N}$.

Als nächstes zeigen wir, dass $u^{(-m-2)}(x, y)$ stetig auf $\mathbb{R}_+^{n+1} \bigcup \bar{B}(x_0, a)$ fortgesetzt werden kann. Da $u^{(-m-1)}(x, 0)$ beschränkt auf $\bar{B}(x_0, a) \times (0, y_0]$ ist, existiert $u^{(-m-2)}(x, 0) = \int_0^1 u^{(-m-1)}(x_0 + t(x - x_0), (1 - t)y_0)dt$.

Für $x_y, x_2 \in \bar{B}(x_0, a), y_0 > \epsilon > 0$ gilt

$$|u^{(-m-2)}(x_2, 0) - u^{(-m-2)}(x_1, 0)| \leq 2\tilde{N}\epsilon +$$

$$+|\int_0^{1-\epsilon} [u^{(-m-1)}(x_0+t(x_2-x_0), (1-t)y_0) - u^{(-m-1)}(x_0+t(x_1-x_0), (1-t)y_0)]dt|.$$

Da $u^{(-m-1)}(x, y)$ gleichmäßig stetig auf $\bar{B}_n(x_0, a) \times [\epsilon, y_0]$ ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $|x_1 - x_2| < \delta$

$$|u^{(-m-2)}(x_2, 0) - u^{(-m-2)}(x_1, 0)| < (2\tilde{N} + 1)\epsilon$$

gilt. Sei nun (x, y) mit $y < \epsilon$ ein Punkt auf der Verbindungslinie zwischen $(x_2, 0)$ und (x_0, y_0), außerdem gilt

$$|u^{(-m-2)}(x, y) - u^{(-m-2)}(x_2, 0)| \leq \tilde{N}\epsilon.$$

Dann gilt

$$|u^{(-m-2)}(x,y) - u^{(-m-2)}(x_1,0)| < (3\tilde{N}+1)\epsilon,$$

da $|x_1 - x_2| < \delta$. Dies zeigt die Stetigkeit von $u^{(-m-2)}(x,y)$ bei $(x_1,0)$ und damit auch auf $\bar{B}_n(x_0,a)$. □

Wir können nun jene harmonischen Funktionen klassifizieren, die harmonische Darstellungen von Distributionen $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sind.

Satz 4.12 *Sei $u(x,y)$ eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}_+$, dann ist u genau dann eine harmonische Darstellung von einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, wenn $u \in \mathcal{H}_+$.*

Beweis: Wir haben in Satz 4.7 gezeigt, dass jede harmonische Darstellung in $\mathcal{H}_+$ liegt. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass jede Funktion $u \in \mathcal{H}_+$ eine harmonische Darstellung ist.

Sei für beliebiges $a > 0$, $U := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < a\}$. Aus der Definition von $\mathcal{H}_+$ wissen wir, dass eine Konstante M und eine ganze Zahl $m \geq 1$ existieren, sodass gilt

$$|u(x,y)| \leq My^{-m}, \ (x,y) \in \bar{U} \times (0, y_0].$$

Aus dem vorherigen Satz können wir folgern, dass $u^{(-m-2)}(x,y)$ zu einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^{n+1}_+ \bigcup \bar{U}$ fortgesetzt werden kann und dass daher $\lim_{y\to 0+} u^{(-m-2)}(x,y)$ (in $\mathcal{D}'(U)$) existiert.

Wegen Satz 4.10 existiert damit auch $\lim_{y\to 0+} u(x,y)$ in $\mathcal{D}'(U)$. Da a beliebig war, existiert auch der Grenzwert in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. □

Da wir gezeigt haben, dass die harmonischen Darstellungen von $\mathcal{D}'$ genau $\mathcal{H}_+$ sind, sowie dass sie bis auf harmonische Darstellungen der 0, also einer Funktion aus $\mathcal{H}_0$, eindeutig sind, gilt folgende Äquivalenzdarstellung:

$$\mathcal{D}' \cong \mathcal{H}_+ / \mathcal{H}_0.$$

Kapitel 5

Darstellung von Distributionen mittels analytischer Funktionen

5.1 Distributionen auf $\mathbb{R}$

Definition 5.1 *Sei $T(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $\hat{T}(x, y)$ eine analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann heißt $\hat{T}$ analytische Darstellung von T, falls*

$$\lim_{y \to 0+} [\hat{T}(x + iy) - \hat{T}(x - iy)] = T$$

als Grenzwert im distributionellen Sinn gilt.

Analog zur harmonischen Darstellung können wir den Grenzwert auch als

$$\lim_{y \to 0+} \int_{\mathbb{R}} (\hat{T}(x + iy) - \hat{T}(x - iy))\phi(x)dx = \langle T, \phi \rangle,$$

für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ schreiben.

In einer Dimension besteht eine Bijektion zwischen analytischen Darstellungen und harmonischen Darstellungen. Sei $\hat{T}$ eine analytische Darstellung der Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, dann ist

$$u(x, y) := \hat{T}(x + iy) - \hat{T}(x - iy), \ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0}$$

eine harmonische Darstellung von T. Denn da analytische Funktionen harmonisch sind, muss u harmonisch sein. Dass u eine harmonische Darstellung von T ist, lässt sich direkt aus der Definition ablesen.

Sei nun umgekehrt $u(x, y)$ eine harmonische Darstellung und sei für ein $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0}$,

$$v(x, y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y')dy' - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(x', y_0)dx'.$$

Dann ist $v(x,y)$ die harmonische Konjugierte von $u(x,y)$, denn es gilt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ sowie $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Die komplexe Funktion

$$w(x+iy) := \begin{cases} \frac{1}{2}(u(x,y) + iv(x,y)) : & y > 0 \\ \frac{1}{2}(-u(x,-y) + iv(x,-y)) : & y < 0 \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ analytisch und erfüllt für $y > 0$

$$w(x+iy) - w(x-iy) = u(x,y).$$

Damit ist die Bijektion zwischen harmonischen und analytischen Darstellungen gezeigt.

5.2 Cauchy-Transformation

5.2.1 Darstellung in $\mathcal{E}'$

In Analogie zur Cauchy-Transformation, die wir in Satz 3.6 über das Integral

$$S[f](z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt,\ Im(z) \neq 0$$

eingeführt haben, führen wir für Distributionen die Cauchy-Transformation über ein verallgemeinertes Integral ein.

Definition 5.2 *Sei $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, dann nennen wir*

$$S[T](z) := \frac{1}{2\pi i}\langle T(t), \frac{1}{t-z}\rangle,\ Im(z) \neq 0$$

die Cauchy-Transformation von T.

Da $\frac{1}{2\pi i(t-z)}$ für $\mathrm{Im} z \neq 0$ in $\mathcal{E}$ liegt, ist $S[T](z)$ für $\mathrm{Im} z \neq 0$ definiert.

Satz 5.3 *$S[T](z)$ erfüllt folgende Eigenschaften:*

- *$S[T](z)$ ist eine analytische Funktion in $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(T)$.*
- $\frac{d^n}{dz^n}S[T](z) = S[T^{(n)}](z)$

Beweis: Für die Ableitung gilt

$$\frac{d}{dz}S[T](z) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\langle T(t), \frac{1}{h}(\frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z})\rangle.$$

Da im Sinn von $\mathcal{E}$ $\frac{1}{h}(\frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z})$ gegen $\frac{1}{(t-z)^2}$ konvergiert, gilt

$$\frac{d}{dz}S[T](z) = \frac{1}{2\pi i}\langle T(t), \frac{1}{(t-z)^2}\rangle.$$

$S[T](z)$ ist komplex differenzierbar für alle z mit Im$z \neq 0$, womit folgt, dass $S[T](z)$ für Im$z \neq 0$ analytisch ist. Außerdem gilt

$$\frac{d}{dz} S[T](z) = S[T'](z),$$

was wegen $\frac{d}{dz} S[T](z) = \frac{1}{2\pi i} \langle T(t), \frac{1}{(t-z)^2} \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \langle T(t), \frac{d}{dt} \frac{1}{t-z} \rangle = S[T'](z)$ folgt. Setzen wir das induktiv fort, folgt weiter

$$\frac{d^n}{dz^n} S[T](z) = S[T^{(n)}](z).$$

Zu zeigen bleibt noch, dass $S[T](z)$ außerhalb von $K = \text{supp}(T)$ auch analytisch für Im$z \neq 0$ ist. Sei nun $\lambda(t) \in \mathcal{D}$ so, dass $\lambda(t) \equiv 1$ in K und supp$\lambda = K$, dann gilt

$$\langle T(t), \frac{1}{t-z} \rangle = \langle T(t), \lambda(t) \frac{1}{t-z} \rangle.$$

Für einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus K$ gilt im Sinn von $\mathcal{E}$, dass für $x_0 \to z$ $\lambda(t) \frac{1}{t-z}$ gegen $\lambda(t) \frac{1}{t-x_0}$ konvergiert. Damit folgt

$$\lim_{z \to x_0} S[T](z) = \langle T_t, \lambda(t) \frac{1}{t-x_0} \rangle.$$

Aus der Stetigkeit von $S[T](z)$ folgt, dass $S[T](z)$ auch analytisch in $\mathbb{R} \setminus K$ und damit in $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(T)$ ist. □

Die Cauchy-Transformierte ist daher insbesondere auf der oberen sowie unteren Halbebene analytisch. Wir wollen uns nun dem Wachstumsverhalten der Cauchy-Transformierten zuwenden.

Satz 5.4 *Sei $T \in \mathcal{E}'$, dann gilt*

- $|S[T](z)| = O(|z|^{-1})$
- $S[T](x+iy) - S[T](x-iy) = O(|z|^{-2})$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass für $|z| \to \infty$, $S[T](z)$ verschwindet. Dafür führen wir wieder eine Funktion $\lambda(t) \in \mathcal{D}$ ein, sodass $\lambda(t) \equiv 1$ auf K gilt. Damit konvergiert $\lambda(t) \frac{1}{t-z})$ gegen 0 im Sinn von $\mathcal{E}$.

$S[T](z)$ besitzt eine Laurententwicklung

$$S[T](z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ...,$$

die außerhalb einer Kreisscheibe, die supp$T$ enthält, sicher konvergiert. Da $S[T](z)$ für $|z| \to \infty$ gegen Null geht, muss $a_0 = 0$ gelten, womit

$$|S[T](z)| = O(|z|^{-1})$$

gezeigt ist. Da $S[T](z) - S[T](\bar{z})| = \frac{2iy\ a_i}{|z|^2} = O(|z|^{-1})$ gilt, folgt sofort

$$S[T](x+i\epsilon) - S[T](x-i\epsilon) = O(|z|^{-2}).$$

□

Dass die Cauchy-Transformierte wirklich eine analytische Darstellung ist, zeigen wir, indem wir auf das verallgemeinerte Poissonintegral für $\mathcal{S}'$ zurückgreifen.

Satz 5.5 *Sei $T \in \mathcal{E}'$, dann gilt*

$$\lim_{\epsilon \to 0+} [S[T](x+i\epsilon) - S[T](x-i\epsilon)] = T.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} S[T](z) - S[T](\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi i}\langle T(t), \frac{1}{t-z}\rangle + \frac{1}{2\pi i}\langle T(t), \frac{1}{t-\bar{z}}\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\langle T(t), \frac{y}{|t-z|^2}\rangle = P[T](x,y). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Resultat direkt aus $\lim_{y \to 0+} P[T](x,y) = T$. □

5.2.2 Darstellung in $\mathcal{O}'_{-1}$

Die Cauchy-Darstellung

$$\frac{1}{2\pi i}\langle T(t), \frac{1}{t-z}\rangle$$

existiert nicht für alle Distributionen $T \in \mathcal{D}'$, da $\frac{1}{t-z} \notin \mathcal{D}$. Distributionen aus $\mathcal{E}'$ lassen sich, wie wir bereits gesehen haben, mit dem Cauchykern darstellen.

Um eine möglichst große Klasse von Distributionen mit dem Cauchykern darzustellen, verwenden wir den in Kapitel 1.4.3 eingeführten Bremermann-Raum $\mathcal{O}'_{-1}$. Wir haben $\mathcal{O}_{-1}$ als den Raum der C^∞ Funktionen $\phi(t)$ eingeführt, die $\phi(t) = O(|t|^{-1})$, $\phi(t)^{(k)} = O(|t|^{-1})$ für alle k erfüllen. Der Raum $\mathcal{O}'_{-1}$, der zwischen $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{E}'$ liegt, ist mit diesen Wachstumsbedingungen genau der Cauchydarstellung angepasst.

Satz 5.6 *Sei $T \in \mathcal{O}'_{-1}$, dann nennen wir*

$$S[T](z) := \frac{1}{2\pi i}\langle T(t), \frac{1}{t-z}\rangle,\ Im(z) \neq 0$$

die Cauchy-Darstellung von T.
$S[T](z)$ ist eine analytische Funktion in $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(T)$ und sogar eine analytische Darstellung von T

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} [S[T](x+i\epsilon) - S[T](x-i\epsilon)]\phi(x)dx = \langle T, \phi\rangle$$

für alle Testfunktionen $\phi \in \mathcal{D}$.

Beweis: Wir übertragen dazu die Resultate von $\mathcal{E}'$ auf $\mathcal{O}_{-1}$. Für Im$z \neq 0$ gilt $\frac{1}{t-z} = O(|t|^{-1}) \in \mathcal{O}_{-1}$. Daraus folgt die Existenz von $S[T](z)$. Außerdem gilt, dass

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{t-z-h} - \frac{1}{t-z}\right) \to \frac{1}{(t-z)^2}$$

auch in $\mathcal{O}_{-1}$ konvergiert, womit gezeigt wäre, dass $S[T](z)$ für Im$z \neq 0$ analytisch ist. Um zu zeigen, dass $S[T](z)$ auch auf $\mathbb{R} \setminus \mathrm{supp}T$ analytisch ist, führen wir eine Funktion $\lambda(t) \in \mathcal{D}$ ein, die auf supp$T$ identisch 1 ist. Außerhalb des Trägers von $\lambda(t)$ ist $\langle T(t), \lambda(t)\frac{1}{t-z}\rangle$ analytisch und da wir den Träger beliebig nah am Träger von T wählen können, gilt das Gewünschte.

Über die Verbindung mit dem Poissonintegral folgt dann, analog zum Beweis in $\mathcal{E}'$, dass es eine analytische Darstellung ist. □

5.3 Darstellung in $\mathcal{D}'$

Wir wollen nun die Darstellung auf den ganzen Distributionenraum $\mathcal{D}'$ ausdehnen. Da wir am Anfang des Kapitels eine Bijektion zwischen harmonischen und analytischen Darstellungen bewiesen haben, folgt die Darstellung mit analytischen Funktionen direkt aus der Darstellung von Distributionen durch harmonische Funktionen, die wir in Satz 4.5 bewiesen haben.

Satz 5.7 *Sei $T \in \mathcal{D}'$, dann existiert eine Funktion $\hat{T}(z)$, die analytisch in $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(T)$ ist und*

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{T}(x+i\epsilon) - \hat{T}(x-i\epsilon)]\phi(x)dx = \langle T, \phi \rangle$$

für alle Testfunktionen $\phi \in \mathcal{D}$ erfüllt.

5.4 Eindeutigkeit der analytischen Darstellung

Die analytische Darstellung einer Distribution T ist nicht eindeutig. Sei $\hat{T}(z)$ eine analytische Darstellung von T, dann gilt für jede ganze Funktion $g(z)$, dass $\hat{T}(z) + g(z)$ ebenfalls eine analytische Darstellung von T ist. Das resultiert aus der Bedingung für analytische Darstellungen

$$\lim_{y \to 0+} [\hat{T}(x+iy) - \hat{T}(x-iy)] = T.$$

Wir können nun analog zu den harmonischen Funktionen eine Äquivalenzdarstellung herleiten. Dafür führen wir den Raum $\mathcal{H}_*(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ ein. $\mathcal{H}_*(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ ist der Raum aller Funktionen $g(z)$ in $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, für die es in $0 \leq r = |z| < \infty$ stetige monoton wachsende Funktionen $M(r)$ und $n(r)$ gibt, sodass

$$|g(z)| \leq M(r)|y|^{n(r)}$$

für alle $0 < |y| \leq 1$ erfüllt ist.

Sei $\hat{T}$ eine analytische Darstellung der Distribution $T \in \mathcal{D}'$, dann ist diese nur bis auf eine ganze Funktion $g(z)$ bestimmt. Seien I_m die Intervalle $(m-1, m+1)$, die eine offene Überdeckung des $\mathbb{R}$ bilden. Dann führen wir, in Analogie zum harmonischen Fall, eine Zerlegung der Distribution

$$T = \sum_m T_m$$

ein, wobei wir T_m so wählen, dass es Träger in I_m hat. Sei nun $\hat{T}_m(z)$ eine analytische Darstellung von T_m, dann ist diese nur bis auf eine ganze Funktion $g_m(z)$ bestimmt. Wir führen daher eine neue analytische Darstellung

$$\tilde{T}_m(z) = \hat{T}_m(z) - g_m(z)$$

ein, wobei wir g_m so wählen, dass

$$|\hat{T}_m(z) - g(z)| < 2^{-m} \text{ auf } |z| \leq |m| - 2$$

gilt. Es gilt nun auf $|z| \leq m_0 - 2$ mit $\tilde{T} = \sum_m \tilde{T}_m$

$$|\tilde{T}_(z)| \leq \sum_{|m| \leq m_0} (|\hat{T}_m(z)| + |g_m(z)|) + \sum_{|m| > m_0} |\hat{T}_m(z) + g_m(z)|$$

$$\leq \sum_{|m| \leq m_0} M_m y^{-k_m} + \sum_{|m| \leq m_0} |g_m(z)| + \sum_{|m| > m_0} 2^{-m} \leq N_{m_0} y^{n_{m_0}} \text{ für } |y| \leq 1$$

Daraus können wir direkt folgende Äquivalenzdarstellung herleiten:

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}_*(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \diagup \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Kapitel 6

Distributionelle Randwerte von H_+

In diesem Kapitel werden wir die distributionellen Randwerte der polynomial beschränkten analytischen Funktionen H_+ betrachten. In Satz 2.17 haben wir bewiesen, dass wir die Randwerte g der Funktionen $h \in H_+$ als Laplace und Fouriertransformation ($g = \mathcal{F}[T]$, $h = \mathcal{L}[T]$) einer Distribution $T \in \mathcal{S}'_+$ auffassen können und umgekehrt. Dieser Satz stellt daher das zentrale Resultat dar, das wir für dieses Kapitel benötigen. Die Grenzwerte sind, wenn nicht anders angegeben, stets im Sinn $\mathcal{S}'$ zu verstehen.

Definition 6.1 *Sei $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$ eine Distribution, dann definieren wir das verallgemeinerte Cauchyintegral von T als*

$$\tilde{C}[T](z) = \frac{1}{2\pi}\langle T(t), \frac{1}{z - it}\rangle, \ x \neq 0.$$

Das verallgemeinerte Cauchyintegral entspricht dem in Kapitel 3.6 auf der oberen Halbebene eingeführten klassischen Cauchyintegral

$$C[f](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z}dt, \ y \neq 0.$$

Der Unterschied besteht nur darin, dass wir für das verallgemeinerte Cauchyintegral auf der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re} z > 0\}$ arbeiten werden, die beiden Integrale entsprechen einander daher bis auf eine Drehung.

Die grundlegenden Eigenschaften des verallgemeinerten Cauchyintegrals werden in folgendem Satz zusammengefasst:

Satz 6.2 *Sei $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$ eine Distribution, dann existiert das verallgemeinerte Cauchyintegral $\tilde{C}[T](z)$ und ist analytisch für* $\mathrm{Re} z \neq 0$.
$\tilde{C}[T](z)$ konvergiert für $x \to 0+$ im Sinne von $\mathcal{S}'$ gegen eine Distribution in $\mathcal{D}'_{L_2}$. Falls die Distribution $T(t)$ außerdem der ($\mathcal{S}'$-)Randwert einer auf der

rechten Halbebene definierten Funktion aus H_+ ist, dann konvergiert $\tilde{C}[T](z)$ sogar gegen die Distribution T.

Analoges gilt natürlich für die linke Halbebene für $x \to 0-$, wenn man $\tilde{C}[T](z)$ durch $-\tilde{C}[T](z)$ ersetzt.

Beweis: Für festes z mit Re$z \neq 0$ gilt $\frac{1}{z-it} \in \mathcal{D}'_{L_2}$ und damit existiert

$$\tilde{C}[T](z) = \frac{1}{2\pi}\langle T(t), \frac{1}{z-it}\rangle \text{ für } T \in \mathcal{D}'_{L_2}.$$

Außerdem gilt im Sinne von $\mathcal{D}'_{L_2}$ für Re$z \neq 0$

$$\lim_{z' \to z}\left(\frac{1}{z'-it} - \frac{1}{z-it}\right)\frac{1}{z'-z} = -\frac{1}{(z-it)^2}.$$

$\phi_n \to \phi$ falls $\int_{-\infty}^{\infty} |\partial^k(\phi_n - \phi)|dx \to 0$ für alle $k \geq 0$. Daher gilt aus Stetigkeitsgründen

$$\frac{d}{dz}\langle T, \frac{1}{z-it}\rangle = \lim_{z' \to z}\langle T, \left(\frac{1}{z'-it} - \frac{1}{z-it}\right)\frac{1}{z'-z}\rangle = \langle T, -\frac{1}{(z-it)^2}\rangle,$$

womit folgt, dass $\tilde{C}[T](z)$ für z $\neq 0$ analytisch ist.

Für $x > 0$ gilt $e^{-xt}\theta(t) \in \mathcal{S}'$ und $\mathcal{F}[e^{-xt}\theta(t)](y) = \frac{1}{x+iy}$, wobei $\theta(t)$ die bereits in der Einführung kennengelernte Heaviside Sprungfunktion ist.

Da $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$, gilt für die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}[T] \in \mathcal{S}'$ Des weiteren folgt aus der Definition der Laplace Transformation, dass für $S \in \mathcal{S}'$ und $x > 0$ $\mathcal{L}[S\theta] = \mathcal{F}[S(t)e^{-xt}\theta(t)]$ gilt.

Damit können wir aus Satz 2.2 folgern

$$\mathcal{L}[\mathcal{F}^{-1}[T]\theta] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T](t)e^{-xt}\theta(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}T(y) * \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{2\pi}\langle T(t), \frac{1}{z-it}\rangle = \tilde{C}[T](z)$$

für Re$(z) > 0$.

Aus Satz 2.17 folgt wegen $\mathcal{F}^{-1}[T] \in \mathcal{S}'$, dass die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[\mathcal{F}^{-1}[T]\theta]$ und damit auch das verallgemeinerte Cauchyintegral $\tilde{C}[T](z)$ für $x \to 0+$ im Sinne von $\mathcal{S}'$ gegen eine Distribution konvergiert. Diese liegt in $\mathcal{D}'_{L_2}$, da $\mathcal{F}^{-1}[T]\theta$ in $\mathcal{S}'$ ist.

Wenn T nun außerdem der ($\mathcal{S}'$-)Randwert einer, auf der oberen Halbebene definierten, Funktion $f(z) \in \mathcal{H}_+$ ist, dann gilt wegen Satz 2.17, $f(z) = \mathcal{L}[\mathcal{F}^{-1}[T]] = \mathcal{L}[\mathcal{F}^{-1}[T]\theta] = \tilde{C}[T](z)$ für Re$(z) > 0$. Es gilt $\lim_{x\to 0}\tilde{C}[T](z) = \lim_{x\to 0}\mathcal{L}[\mathcal{F}^{-1}[T]](z) = T(y)$ für $x \to 0+$ im Sinne von $\mathcal{S}'$. $\square$

Eine Folgerung von diesem Satz ist folgender Darstellungssatz:

Satz 6.3 *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Distribution $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$ der Randwert ($x \to 0+$) einer Funktion $h(x+iy) \in H_+$ ist, also dass eine Distribution $S \in \mathcal{D}'_+$ existiert mit $h(z) = \mathcal{L}[S](z)$ und $T = \mathcal{F}[S]$, ist:*

$$\tilde{C}[T](z) = 0 \text{ für } \mathrm{Re}(z) < 0.$$

In diesem Fall gilt:

$$h(z) = \tilde{C}[T](z) \text{ für } \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Beweis: Wegen Satz 6.2 gilt $\tilde{C}[T](z) = \mathcal{L}[S](z)$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ sowie $-\tilde{C}[T](z) = \langle S, e^{-zt}\theta(-t)\rangle$ für $\mathrm{Re}(z) < 0$, was aufgrund $S = 0$ für $t < 0$ gleich 0 ist.

Umgekehrt folgt für $T = \mathcal{F}[S] \in \mathcal{D}'_{L_2}$ aus $\langle T, e^{-zt}\theta(-t)\rangle = 0$ für $\mathrm{Re}(z) < 0$ nach Satz 2.17 $S \in \mathcal{D}'_+$ □

In Analogie zu den klassischen Ableitungsformeln für das Cauchyintegral erhalten wir

Satz 6.4 *Sei $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$, dann gilt für* $\mathrm{Re} z \neq 0$.

$$\frac{d^k}{dz^k}\tilde{C}[T](z) = \frac{(-1)^k k!}{2\pi}\langle T, \frac{1}{(z-it)^{k+1}}\rangle = (-i)^k \tilde{C}[T^{(k)}](z).$$

Beweis: Seien $T, T^{(k)} \in \mathcal{D}'_{L_2}$, dann existieren nach Satz 6.2 $\tilde{C}[T](z)$ sowie $\tilde{C}[T^{(k)}](z)$ und es gilt für $\mathrm{Re}(z) \neq 0$

$$\tilde{C}[T^{(k)}](z) = \frac{1}{2\pi}\langle T^{(k)}(t), \frac{1}{z-it}\rangle = \frac{(-1)^k k!}{2\pi}\langle T, \frac{1}{(z-it)^{k+1}}\rangle =$$

Durch mehrfache Anwendung des im Beweis von Satz 6.2 hergeleiteten Gleichung

$$\frac{d}{dz}\langle T, \frac{1}{z-it}\rangle = \langle T, -\frac{1}{(z-it)^2}\rangle$$

erhalten wir daraus

$$= \frac{(-i)^k}{2\pi}\frac{d^k}{dz^k}\langle T, \frac{1}{z-it}\rangle = (-i)^k \tilde{C}[T^{(k)}](z)$$

□

Ein weiterer bedeutender Darstellungssatz ist:

Satz 6.5 *Sei $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$ ein Randwert von $h(z) \in H_+$, dann gilt für die Halbebene* $\mathrm{Re} z > 0$

$$h(z) = \frac{1}{\pi}\langle \mathrm{Re} h, \frac{1}{z-it}\rangle = \frac{i}{\pi}\langle \mathrm{Im} h, \frac{1}{z-it}\rangle.$$

Beweis: Aus Satz 6.3 folgt für Re$z < 0$ $\frac{1}{2\pi}\langle T, \frac{1}{z-it}\rangle = 0$ oder für Re$z > 0$ $\frac{1}{2\pi}\langle T, \frac{1}{-\bar{z}-it}\rangle = 0$, was, wenn man Real- und Imaginärteil trennt, zu

$$\frac{1}{2\pi}\langle \mathrm{Re}T, \frac{1}{-\bar{z}-it}\rangle = -\frac{i}{2\pi}\langle \mathrm{Im}T, \frac{1}{-\bar{z}-it}\rangle \text{ für Re}z < 0$$

wird. Wegen

$$h(z) = \tilde{C}[T](z) = \frac{1}{2\pi}\langle \mathrm{Re}T + i\mathrm{Im}T, \frac{1}{z-it}\rangle$$

folgt hieraus der zu beweisende Satz. □

Die Darstellung durch das verallgemeinerte Cauchyintegral steht in Verbindung zum verallgemeinerten Poissonintegral. Für $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$ und Re$z > 0$ gilt

$$\tilde{P}[T](z) = \tilde{C}[T](z) - \tilde{C}[T](\bar{z}) = \frac{x}{\pi}\langle T(t), \frac{1}{x^2+(y-t)^2}\rangle.$$

Analog zum Cauchyintegral entspricht dieses verallgemeinerte Poissonintegral $\tilde{P}[T](z)$ bis auf die Drehung, also die Vertauschung von x und y, dem in Kapitel 3.6 klassischen und dem in Kapitel 4 für $\mathbb{R}^{n+1}_+$ eingeführten verallgemeinerten Poissonintegral.

$\tilde{P}[T](z)$ ist nicht notwendigerweise analytisch in Re$z \neq 0$, da $-\tilde{C}[T](\bar{z})$ nicht analytisch sein muss, das verallgemeinerte Poissonintegral ist aber harmonisch.

Satz 6.6 *Sei $T \in \mathcal{D}'_{L_2}$, dann ist $\tilde{P}[T](z)$ für* Re$z > 0$ *eine harmonische Funktion, die gegen den Randwert T konvergiert.*

Beweis: Wir benötigen zuerst das Hilfsresultat, dass für den Randwert von $\tilde{C}[T](z)$ in Re$z > 0$ T_1 sowie den Randwert von $-\tilde{C}[T](z)$ in Re$z < 0$ T_2, $T = T_1 + T_2$ gilt.

Es gilt außerdem

$$-\tilde{C}[T](z)|_{\mathrm{Re}z<0} = -\tilde{C}[T](\bar{z})|_{\mathrm{Re}z>0},$$

also $-\tilde{C}[T](z)|_{\mathrm{Re}z<0} \to T_2$ und damit

$$\tilde{C}[T](z) - \tilde{C}[T](\bar{z}) \to T_1 + T_2 = T.$$

Dass $\tilde{P}[T](z)$ für Re$z > 0$ eine harmonische Funktion ist, lässt sich analog zum Kapitel 4 nachweisen. □

Zuletzt zeigen wir noch

Satz 6.7 *$T \in \mathcal{D}'_{L_2}$ ist der Randwert einer Funktion $h(z) \in H_+$ auf* Re$z > 0$, *genau dann, wenn gilt*

$$h(z) = \tilde{C}[T](z) = \tilde{P}[T](z).$$

Beweis: Wegen Satz 6.3 gilt, da T der Randwert einer Funktion in H_+ ist,

$$-\tilde{C}[T](z)|_{\mathrm{Re}z<0} = -\tilde{C}[T](\bar{z})|_{\mathrm{Re}z>0} = 0, \text{ also}$$

$$h(z) = \tilde{C}[T](z) = \tilde{P}[T](z), \ \mathrm{Re}z > 0.$$

□

Die vorangegangenen Sätze folgen als Spezialfall der in Kapitel 3.6 für die obere Halbebene $\mathbb{C}^+$ hergeleiteten Poisson- und Cauchydarstellungen mittels Integralen, wenn man die Distributionen auf Funktionen in L_2 einschränkt und die distributionelle Konvergenz gegen die Randwerte durch eine normierte Konvergenz ersetzt.

Die Distributionen $\mathcal{D}'_{L_2}$ stehen daher als Randwerte von den polynomial beschränkten analytischen Funktionen H_+ in gleicher Verbindung zueinander, wie L_2 zum Hardy Raum H^2. Da $H^2 \subset H_+$ sowie $L_2 \subset \mathcal{D}'_{L_2}$ haben wir daher die klassische Theorie erweitert.

Literaturverzeichnis

Kapitel 1

[Rud91] W. Rudin *Functional Analysis*. McGra-Hill, 1991

[Wor05] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck *Funktionalanalysis 1*. Skriptum, SS 2005

[Krie06] Andreas Kriegl *Ausgewählte Kapitel aus Funktionalanalysis - Lokalkonvexe Theorie*. Skriptum, WS 2006

[Nol04] Andre Noll *Distributionen*. Skriptum, Version 23 (26.10.2004)

[Bla93] Ph. Blanchard, E. Brünning *Distributionen und Hilbertraumoperatoren*. Springer-Verlag, 1993

[Hos94] R. F. Hoskin, J. Sousa Pinto *Distributions, ultradistributions and other generalised functions*. Ellis Horwood Limited, 1994

Kapitel 2-3

[End94] Kurt Endl, Wolfgang Luh *Analysis III*. AULA-Verlag Wiesbaden, 1994

[Föl00] Otto Föllinger *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. Heidelberg, 2000

[Axl92] Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey *Harmonic function theory*. Springer-Verlag, 1992

[Ste71] Elias M. Stein, Guido Weiss *Introduction to fourier analysis on euclidean spaces*. Princeton University Press, 1971

[Wor04] Harald Woracek *Komplexe Analysis im Einheitskreis 1,2*. Skriptum, WS 2004/05, SS 2005

[Ros94] Marvin Rosenblum, James Rovnyak *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*. Birkhäuser Verlag 1994

Kapitel 4-6

[Bel66] E. J. Beltrami, M. R. Wohlers *Distributions and the Boundary Values of Analytic Functions.* Academic Press, 1966

[Car89] Richard D. Carmichael, Dragisa Mitrovic *Distributions and analytic functions.* Longman Scientific & Technical, 1989

[Brem65] H. J. Bremermann *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms.* Addison-Wesley, 1965

[Til53] H.G. Tillmann: *Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen.* Math. Z. 59/1953.

[Til61] H.G. Tillmann: *Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen II.* Math. Z. 76/1961.

[Con71] F. Constantinescu: *Analytic properties of nonstrictly localizable fields.* J. Math. Phys. 12/1971.

[Con68] F. Constantinescu: *Boundary values of analytical functions.* Commun. math. Phys. 7/1968.

[Con68] F. Constantinescu: *Boundary values of analytical functions II.* Commun. math. Phys. 8/1968.

[LiB85] Li Banghe, Li Yaquing: *On the harmonic and analytic representations of distributions.* Scientia Scinica, Ser. A. 28/1985.

[LiS84] Li Shangping: *Distributions in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ as boundary values of harmonic functions. On the harmonic and analytic representations of distributions.* Scientia Scinica, Ser. A. 27/1984.

[Boi98] Volker Boie: *Multiplication of distributions.* Comment. Math. Univ. Carolinae. 39,2/1998.