Diplomarbeit

Ein Minimax-Prinzip zur Charakterisierung der Eigenwerte selbstadjungierter Operatorscharen

ausgeführt am

Institut für Analysis, Technischer Mathematik
und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

o. Univ. Prof. Dr. Heinz Langer

durch

David Eschwé
Graf Starhemberggasse 6/12
1040 Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Für einen beschränkten selbstadjungierten Operator A in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist bekannt, daß sich die Eigenwerte, die nicht im wesentlichen Spektrum des Operators liegen, durch ein Minimax-Prinzip charakterisieren lassen. Definieren wir $\tau := \min \sigma_{ess}(A)$ und $\tau' := \max \sigma_{ess}(A)$ und seien $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ die Eigenwerte kleiner als τ und $\lambda'_1 \ge \lambda'_2 \ge \dots$ die Eigenwerte größer als τ', dann gilt:

$$\lambda_j = \min_{\dim M = j} \max_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} (Ax, x) \tag{1}$$

$$\lambda'_j = \max_{\dim M = j} \min_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} (Ax, x). \tag{2}$$

In Kapitel 2 werden wir dieses Minimax-Prinzip für selbstadjungierte Operatoren beweisen. E.H. Rogers und in weiterer Folge B. Werner (siehe [BW], [R]) haben solche Minimax-Prinzipe auf sogenannte Rogersche Operatorscharen verallgemeinert.

Sei L eine auf $[\alpha, \beta]$ stetige und auf (α, β) bezüglich der Norm in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ stetig differenzierbare Operatorschar. Ist $L(\alpha)$ ein nichtnegativer Operator und besitzen die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ für alle $x \neq 0$ genau eine Nullstelle $p(x)$ und gilt dort für die Ableitung $(L'(p(x))x, x) < 0$, dann bleiben die Gleichungen (1), (2) gültig, wenn man (Ax, x) durch $p(x)$ ersetzt, wobei $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ wieder die Eigenwerte unterhalb und $\lambda'_1 \ge \lambda'_2 \ge \dots$ die Eigenwerte oberhalb des wesentlichen Spektrums bezeichnen (siehe [BW]).

In dieser Arbeit behandeln wir stetige Operatorscharen L auf einem Intervall $[\alpha, \beta)$, wobei $L(\alpha)$ ein nichtnegativer Operator ist. Allerdings fordern wir nicht, daß die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ für alle $x \neq 0$ eine Nullstelle besitzen müssen. In Kapitel 3 und Kapitel 4 werden wir zeigen, daß sich auch in diesem allgemeineren Fall die Eigenwerte außerhalb des wesentlichen Spektrums durch ein Minimax-Prinzip charakterisieren lassen.

In Kapitel 6 werden wir drei Beispiele von Operatorscharen angeben, auf die sich das verallgemeinerte Minimax-Prinzip anwenden läßt. Am ausführlichsten werden wir ein quadratisches Operatorpolynom der Form

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + A$$

besprechen. Ist der Operator B nichtnegativ und ist das negative Spektrum des Operators A diskret, so werden wir mit Hilfe des Minimax-Prinzips zeigen, daß L genausoviele positive Eigenwerte besitzt wie der Operator A negative. Weiters behandeln wir eine symmetrische Operatormatrix und zeigen, daß sich mit dem verallgemeinerten Minimax-Prinzip auch Teile des diskreten Spektrums der Operatormatrix charakterisieren lassen, die mit dem klassischen Minimax-Prinzip nicht beschrieben werden können. Und als letztes Beispiel zeigen wir für einen konkreten selbstadjungierten Operator in einem Kreinraum, daß sich seine Eigenwerte durch das verallgemeinerte Minimax-Prinzip charakterisieren lassen. Allgemeine Variationsprinzipien in Kreinräumen findet man in [BN], [T].

An dieser Stelle möchte ich Prof. Heinz Langer für seine sorgfältige Betreuung während des Entstehens dieser Arbeit danken.

Wien, Oktober 1996

2 Das Minimaxprinzip für selbstadjungierte Operatoren

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit beschränkten selbstadjungierten Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und untersuchen die Eigenschaften der Werte

$$\mu_j = \inf_{M \in \mathcal{M}_j} \max_{x \in M^1} (Ax, x) \tag{3}$$

eines Operators A . Dabei bezeichnen wir für $j \in I\!N$ die Gesamtheit aller j-dimensionalen Teilräume von $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{M}_j$ und die Einheitskugel im Teilraum $M \in \mathcal{M}_j$ mit M^1. Weiters erinnern wir daran, daß die Menge

$$\{(Ax, x) \mid x \in \mathcal{H}, \quad \| x \| = 1\}$$

als numerischer Wertebereich des Operators A bezeichnet wird. Wird in (3) das Minimum angenommen, dann nennen wir μ_j einen minmax-Wert.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß alle μ_j im Spektrum $\sigma(A)$ des Operators A liegen, und sich alle Spektralpunkte außerhalb des wesentlichen Spektrums durch minmax-Werte charakterisieren lassen. Alle Aussagen und die meisten Beweise dieses Kapitels sind [BW] entnommen.

Definition 1 *Das wesentliche Spektrum oder auch Häufungsspektrum $\sigma_{ess}(A)$ eines selbstadjungierten Operators A ist die Gesamtheit aller nichtisolierten Wachstumspunkte der zum Operator A gehörenden Zerlegung der Einheit E_t und der Eigenwerte unendlicher Vielfachheit.*

Remark 1 Die Menge $\sigma(A) \backslash \sigma_{ess}(A)$ ist diskret und besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit.

Aus Definition 1 folgt sofort, daß $\sigma_{ess}(A)$ abgeschlossen ist und daher einen kleinsten Punkt besitzt, den wir mit τ bezeichnen: $\tau := \min \sigma_{ess}(A)$.

Als erstes beschäftigen wir uns mit μ_1, dem Infimum des numerischen Wertebereichs, zum einen, weil die Tatsache, daß μ_1 im Spektrum von A liegt, wohlbekannt und leicht zu beweisen ist, zum anderen, weil es sich für das Folgende als überaus nützlich erweisen wird, über den jeweils kleinsten Spektralpunkt eines Operators Bescheid zu wissen. Für eine genauere Beschreibung des numerischen Wertebereichs eines beschränkten Operators siehe [Ha].

Lemma 1 *Sei A selbstadjungiert und beschränkt. Dann gilt*

1. $\mu_1 \in \sigma(A)$
2. μ_1 *ist Eigenwert* $\Longleftrightarrow \mu_1 = \min\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$
3. *Ist* μ_1 *kein Eigenwert* $\Longrightarrow \mu_1 = \tau$

Proof : 1. Aus der Definition von μ_1 folgt einerseits die Existenz einer Folge normierter Vektoren (x_n) mit $(Ax_n, x_n) \to \mu_1$ und andererseits, daß

$$((A - \mu_1)x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

gilt. Daher kann man definieren

$$[x, y] := ((A - \mu_1)x, y)$$

und erhält ein positiv semidefinites Skalarprodukt im Raum $\mathcal{H}$. Da die Schwarz'sche Ungleichung auch für positiv semidefinite Skalarprodukte gültig bleibt, erhält man

$$\begin{aligned}
\| (A - \mu_1)x_n \|^4 &= | [x_n, (A - \mu_1)x_n] |^2 \leq \\
&\leq [x_n, x_n][(A - \mu_1)x_n, (A - \mu_1)x_n] = \\
&= ((A - \mu_1)x_n, x_n)((A - \mu_1)^2 x_n, (A - \mu_1)x_n) \leq \\
&\leq ((A - \mu_1)x_n, x_n) \| A - \mu_1 \|^3 .
\end{aligned}$$

Wegen $((A - \mu_1)x_n, x_n) \to 0$ und der Beschränktheit von $\| A - \mu_1 \|^3$ folgt

$$\| (A - \mu_1)x_n \|^4 \to 0.$$

Und daraus schließt man , daß $(A - \mu_1)$ nicht beschränkt invertierbar sein kann und μ_1 daher im Spektrum des Operators A liegen muß.

2. Ist μ_1 ein Eigenwert, dann existiert ein normierter Vektor $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$, mit $Ax = \mu_1 x$. Daher gilt $\mu_1 = (Ax, x)$ und das Minimum wird tatsächlich angenommen. Umgekehrt sei x ein Vektor mit $\mu_1 = (Ax, x)$. Da der Operator $T := A - \mu_1 I$ ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator ist, folgt, daß der Operator $T^{\frac{1}{2}}$ existiert. Wegen $0 = (Tx, x) = (T^{\frac{1}{2}}x, T^{\frac{1}{2}}x)$ folgt, daß $T^{\frac{1}{2}}x = 0$ gilt. Daraus erhalten wir aber $Tx = 0$, und schließen, daß x ein Eigenvektor des Operators A zum Eigenwert μ_1 ist.

3. Da μ_1 der kleinste Spektralpunkt ist, gilt immer $\mu_1 \leq \tau$. Wenn μ_1 aber kein Eigenwert ist, muß andererseits auch $\mu_1 \geq \tau$ gelten, was die Gleichheit dieser beiden Größen impliziert.

$\square$

Sei nun μ_1 ein Eigenwert, x_1 ein dazugehöriger Eigenvektor und bezeichne $\mathcal{H}_1$ das orthogonale Komplement von x_1 in $\mathcal{H}$, dann reduziert der Teilraum $\mathcal{H}_1$ den Operator A und der in $\mathcal{H}_1$ liegende Teil von A ist gegeben durch

$$A_1 := A_{|\mathcal{H}_1} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1.$$

Bezeichnen wir mit μ_j^* die zu (3) analogen Werte des Operators A_1, dann gilt folgende Beziehung

Lemma 2 *Es seien μ_1 ein Eigenwert von A und x_1, $\mathcal{H}_1$ wie oben definiert. Dann gilt*

$$\mu_{j+1} = \mu_j^* := \inf_{\substack{M \in \mathcal{M}_j \\ M \subset \mathcal{H}_1}} \max_{x \in M^1} (A_1 x, x).$$

Weiters ist μ_{j+1} genau dann minmax-Wert, wenn μ_j^* ein minmax-Wert ist.

Proof : 1. Sei $M \in \mathcal{M}_{j+1}$ und $N := M \cap \mathcal{H}_1$. Dann ist $\dim N \geq j$ und es gilt

$$\max_{x \in N^1} (A_1 x, x) \leq \max_{x \in M^1} (Ax, x).$$

Daraus folgt $\mu_j^* \leq \mu_{j+1}$.

2. Sei umgekehrt $N \in \mathcal{M}_j$ mit $N \subset \mathcal{H}_1$ und sei M der von N und x_1 aufgespannte (j+1)-dimensionale Unterraum. Dann gilt

$$\max_{x \in N^1} (A_1 x, x) = \max_{x \in M^1} (Ax, x),$$

da x_1 zum kleinsten Eigenwert von A gehört. Aus dieser Überlegung folgt $\mu_j^* \geq \mu_{j+1}$.

Beide Ungleichungen zusammen ergeben $\mu_{j+1} = \mu_j^*$. Ist nun μ_j^* ein minmax-Wert, und wird das Minimum im Unterraum N angenommen, dann erweist sich μ_{j+1} auch als minmax-Wert, da gilt

$$\mu_j^* \leq \mu_{j+1} \leq \max_{x \in M^1} (Ax, x) = \max_{x \in N^1} (A_1 x, x) = \mu_j^*,$$

wobei M den Teilraum $N \bigoplus < x >$ bezeichnet. Sei umgekehrt μ_{j+1} ein minmax-Wert, und werde das Minimum im Teilraum M angenommen. Definieren wir $N := M \cap \mathcal{H}_1$, dann sind zwei Fälle möglich:

1. $\dim N = j$
2. $\dim N = j+1$

Im ersten Fall gilt offensichtlich

$$\max_{x\in N^1}(A_1x,x) = \max_{x\in M^1}(Ax,x),$$

und man schließt wie oben, daß μ_j^* ein minmax-Wert ist. Im zweiten Fall gilt $\mu_{j+1} = (Ax_M, x_M)$ für ein $x_M \in M$. Ergänzen wir x_M mit $j-1$ linear unabhängigen Vektoren aus M zu einer Basis eines j-dimensionalen Teilraums $\hat{N}$ von M, dann gilt

$$\max_{x\in \hat{N}^1}(A_1x,x) = \max_{x\in M^1}(Ax,x),$$

und es folgt ebenfalls, daß μ_j^* ein minmax-Wert sein muß.

□

Es gilt also, daß μ_1^*, das Infimum des numerischen Wertebereichs des Operators A_1, mit μ_2 übereinstimmt. Ist nun μ_2 ein minmax-Wert, dann ist μ_1^* auch ein minmax-Wert. Mit Lemma 1 schließt man, daß μ_1^* ein Eigenwert des Operators A_1 und damit auch von A sein muß, und damit erhält man, daß μ_2 ein Eigenwert des Operators A ist. Jetzt kann man mit dem Operator A_1 genauso verfahren, wie ursprünglich mit dem Operator A, das heißt man spaltet einen zu μ_2 gehörenden Eigenvektor x_2 ab und betrachtet, den im orthogonalen Komplement des Vektors x_2 bezüglich $\mathcal{H}_1$ liegenden Teil des Operators A_1 und wendet Lemma 2 an. Wenn man sukzessive dieses Verfahren fortführt, erhält man das folgende Lemma.

Lemma 3 *Sind $\mu_1, \ldots, \mu_k$, minmax-Werte, so sind sie Eigenwerte von A. Ist $\mathcal{H}_m$ das orthogonale Komplement von zugehörigen Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_m$ und bezeichnet A_m die Restriktion von A auf $\mathcal{H}_m$, dann gilt*

$$\mu_{j+m} = \mu_j^* := \inf_{\substack{M\in\mathcal{M}_j\\ M\subset\mathcal{H}_m}} \max_{x\in M^1}(A_mx,x).$$

Insbesondere gilt mit $j=1$

$$\mu_{m+1} = \inf_{x\in\mathcal{H}_m^1}(A_mx,x).$$

Weiters ist μ_j^* genau dann minmax-Wert, wenn μ_{j+m} einer ist.

Wird in (3) das Minimum angenommen, so zeigt Lemma 3, daß der betreffende Wert μ_j ein Eigenwert ist und damit im Spektrum des Operators liegt. Als nächstes müssen wir uns überlegen, was passiert, wenn das Minimum in (3) nicht angenommen wird. Dazu zeigen wir zunächst, daß die μ_j nicht größer als τ werden können.

Lemma 4 *Sei A selbstadjungiert, beschränkt und die μ_j wie in (3) definiert. Dann gilt*

$$\mu_j \le \tau \qquad \forall j \in I\!N.$$

Proof : Wie in Definition 1 sei E_t die zu A gehörende Zerlegung der Einheit. Dann gilt bekanntlich

$$(Ax, x) = \int_{r-}^{R+} t(dE_t x, x),$$

wobei r das Infimum und R das Supremum des numerischen Wertebereichs des Operators A bezeichnen. Da $\tau \in \sigma_{ess}(A)$ gilt, folgt nach wohlbekannten Sätzen über die Zerlegung der Einheit (siehe [AG]) für jedes $\varepsilon > 0$

$$\dim E(\varepsilon) = \infty \qquad \text{mit} \quad E(\varepsilon) := (E_{\tau+\varepsilon} - E_{\tau-\varepsilon}).$$

Daher ist $E(\varepsilon)$ eine Projektion auf einen unendlichdimensionalen Unterraum H_ε. Es ist für alle $x \in H_\varepsilon$

$$\begin{array}{lllll} E_t E(\varepsilon)x & = & E(\varepsilon) & = & x & \text{für} \quad t > \tau + \varepsilon \\ E_t E(\varepsilon)x & = & 0 & & & \text{für} \quad t < \tau - \varepsilon \end{array}$$

Das heißt, daß $(dE_t x, x) = 0$ gilt für alle t mit $\mid t - \tau \mid > \varepsilon$. Mit der Definition des Integrals folgt dann für alle $x \in H_\varepsilon$

$$(Ax, x) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} t(dE_t x, x) \le (\tau + \varepsilon) \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} (dE_t x, x) = (\tau + \varepsilon)(x, x).$$

Also gilt

$$(Ax, x) \le \tau + \varepsilon \qquad \forall x \in H_\varepsilon^1.$$

Da H_ε ein unendlichdimensionaler Unterraum ist, gibt es zu jedem j einen j-dimensionalen Unterraum M von H_ε mit

$$\max_{x \in M^1} (Ax, x) \le \tau + \varepsilon.$$

Daher schließt man mit der Definition der μ_j nun $\mu_j \le \tau + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, woraus die Behauptung folgt.

□

Damit sind wir in der Lage, die Frage, ob diejenigen Werte μ_j, die keine minmax-Werte sind, im Spektrum des Operators liegen, positiv zu beantworten.

Lemma 5 *Für ein $j \in \mathbb{N}$ sei μ_j kein minmax-Wert. Dann gilt*

$$\tau = \mu_k \qquad \forall k \geq j.$$

Proof : Sei j der kleinste Index, für den μ_j kein minmax-Wert ist. Aus Lemma 3 folgt

$$\mu_j = \inf_{x \in \mathcal{H}^1_{j-1}} (A_{j-1}x, x),$$

wobei $A_0 := A$ und $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}$ gesetzt wird. Aus Lemma 1 erhält man

$$\mu_j \in \sigma_{ess}(A_{j-1}) \subset \sigma_{ess}(A)$$

und es folgt

$$\tau \leq \mu_j.$$

Mit Lemma 4 und der Tatsache, daß die μ_j nicht fallend sind, folgt

$$\tau \leq \mu_j \leq \mu_k \leq \tau \qquad\qquad \forall k \geq j$$

und damit die Behauptung.

□

Zusammenfassend erhält man nun folgenden Satz.

Theorem 1 *Sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator, τ und μ_j wie oben definiert. Dann gilt:*

1. *Ist μ_j ein minmax-Wert, so auch $\mu_1, \ldots, \mu_{j-1}$, und $\mu_1, \ldots, \mu_j$ sind Eigenwerte von A. Ist μ_j kein minmax-Wert, so ist $\mu_j \in \sigma_{ess}(A)$ und $\mu_k = \tau$ für alle $k \geq j$.*

2. *Ist $\mu_j < \tau$, so ist μ_j Eigenwert von A und minmax-Wert.*

3. *Es gilt $\tau = \lim_{j \to \infty} \mu_j$.*

4. *Ist $\mu \in \sigma(A)$ und gilt $\mu < \tau$, so ist $\mu = \mu_j$ für ein $j \in \mathbb{N}$.*

Proof : Die ersten zwei Punkte des Satzes folgen unmittelbar aus den obigen Überlegungen. Es muß also nur mehr 3. und 4. gezeigt werden.
3. Da die nicht fallende Folge der μ_j nach oben durch τ beschränkt ist, existiert der Grenzwert $\tau_1 := \lim_{j \to \infty} \mu_j$. Aus der Tatsache, daß $\tau \geq \mu_j$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

gilt, folgt nun $\tau \geq \tau_1$. Da aber τ_1 offensichtlich ein Häufungspunkt des Spektrums und damit ein Punkt des wesentlichen Spektrums ist, folgt $\tau \leq \tau_1$.

4. Wegen $\mu < \tau$ ist μ ein Eigenwert endlicher Vielfachheit von A. Aus 3. folgt nun, daß es einen Index j gibt mit

$$\mu_j \leq \mu \leq \mu_{j+1}.$$

Angenommen, es ist

$$\mu_j < \mu < \mu_{j+1}.$$

Dann ist μ_j nach 2. ein minmax-Wert und mit Lemma 3 erhält man

$$\mu_{j+1} = \inf_{x \in \mathcal{H}_j^1} (Ax, x).$$

Ist y ein zu μ gehörender normierter Eigenvektor, so ist $y \in \mathcal{H}_j^1$ und $(Ay, y) = \mu$, was $\mu \geq \mu_{j+1}$ impliziert im Widerspruch zu $\mu_{j+1} > \mu$.

□

Remark 2

1. Alle Aussagen dieses Kapitels bleiben richtig, wenn man in (3) das Infimum durch das Supremum und gleichzeitig das Maximum durch das Minimum ersetzt. Die Eigenwerte endlicher Vielfachheit in nichtaufsteigender Reihenfolge und entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt, die größer als $\tau' := \max \sigma_{ess}(A)$ sind, werden dann gegeben durch

$$\hat{\mu}_j = \max_{M \in \mathcal{M}_j} \min_{x \in M^1} (Ax, x).$$

2. Wir sehen somit, daß sich die Spektralpunkte außerhalb des Intervalls $[\tau, \tau']$ wie die Eigenwerte eines kompakten Operators verhalten und sich genauso charakterisieren lassen.

3 Das Minimaxprinzip für selbstadjungierte Scharen

Nachdem wir uns im ersten Kapitel nur mit selbstadjungierten Operatoren beschäftigt haben, wenden wir uns nun Scharen beschränkter selbstadjungierter Operatoren zu. Zunächst werden wir die Voraussetzungen, unter denen wir unsere Aussagen beweisen werden, und die zu ihrer Formulierung notwendigen Definitionen angeben. Dann werden wir die zu (3) analogen Werte π_j einer Schar einführen, ihre Eigenschaften besprechen und am Schluß des Kapitels ihre Lage relativ zum Spektrum der Schar untersuchen.

Definition 2 *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, U eine Teilmenge der komplexen Zahlen und bezeichnet $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die Menge aller linearen, beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$, dann nennen wir eine Abbildung*

$$L : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

eine Schar beschränkter Operatoren oder einfach operatorwertige Funktion. Weiters heißt eine Schar stetig, differnzierbar bzw. holomorph, wenn die Abbildung L stetig, differenzierbar bzw. holomorph bezüglich der Norm in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist.

Es ist nun klar, was unter einer Schar beschränkter, selbstadjungierter Operatoren zu verstehen ist.

Remark 3 Liegt die Menge U in obiger Definition symmetrisch zur reellen Achse und gilt $(L(\lambda))^* = L(\overline{\lambda})$ für alle $\lambda \in U$, dann spricht man auch von einer selbstadjungierten Schar von Operatoren.

Da wir in dieser Arbeit ausschließlich beschränkte, selbstadjungierte Operatoren betrachten, wird im Folgenden diese Tatsache nicht mehr ausdrücklich erwähnt werden. Im Zusammenhang mit Minimax-Prinzipien ist als Definitionsbereich der Schar nur ein reelles Intervall sinnvoll.

Voraussetzung 1: Die Schar L sei auf dem Intervall $[\alpha, \beta)$ selbstadjungiert und stetig.

Im Folgenden sei L immer eine Schar, die Voraussetzung 1 erfüllt. Da wir das Spektrum und die Eigenwerte einer Schar untersuchen wollen, müssen wir uns überlegen, wie man diese Begriffe für Scharen verallgemeinern kann. Dazu betrachten wir zunächst die lineare Schar $L(\lambda) = A - \lambda I$, wobei I den Einheitsoperator im Raum $\mathcal{H}$ bezeichnet. Bekanntlich liegt λ_o genau dann im Punktspektrum des Operators A , wenn der Operator $A - \lambda_o I$ nicht injektiv ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn 0 im Punktspektrum des Operators $L(\lambda_o)$ liegt. Diese Überlegung führt unmittelbar zur Definition des Punktspektrums und in weiterer Folge zur Definition des Spektrums einer Operatorschar.

Definition 3
Der Punkt λ_o gehört zum Punktspektrum $\sigma_p(L)$, zum kontinuierlichen Spektrum $\sigma_c(L)$ bzw. zur Resolventenmenge $\rho(L)$ der Schar L dann und nur dann, wenn 0 im Punktspektrum, im kontinuierlichen Spektrum bzw. in der Resolventenmenge des Operators $L(\lambda_o)$ liegt.
Die Punkte $\lambda \in \sigma_p(L)$ werden Eigenwerte und der Raum $kerL(\lambda_o)$ wird geometrischer Eigenraum genannt.

Remark 4

1. Die Resolventenmenge der Schar L besteht also genau aus denjenigen Punkten $\lambda \in U$, für die der inverse Operator $L(\lambda)^{-1}$ existiert, überall definiert und beschränkt ist.

2. Ein Punkt λ_o ist Eigenwert der Schar L genau dann, wenn ein Vektor $x_o \in \mathcal{H}, x_o \neq 0$ existiert für den gilt $L(\lambda_o)x_o = 0$.

Als Motivation für die Verallgemeinerung des Minimax-Prinzips aus dem vorherigen Kapitel auf Operatorscharen betrachten wir wieder die lineare Schar $L(\lambda) = A - \lambda I$, und berechnen uns die Nullstellen $p(x)$ der reellwertigen Funktion $(L(\lambda)x, x) = (Ax, x) - \lambda(x, x), \lambda \in [- \parallel A \parallel, \infty)$. Es folgt

$$p(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \qquad \forall x \neq 0.$$

Das waren aber genau die Größen, die schon beim Minimax-Prinzip aus dem ersten Kapitel eine große Rolle gespielt haben. Später wird sich herausstellen, daß die Nullstellen der Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ mit $\lambda \in [\alpha, \beta)$ im Zusammenhang mit Minimax-Prinzipien von nichtlinearen Scharen dieselbe Rolle spielen , wie bei linearen. Die zusätzlichen Bedingungen, die wir an die Schar L stellen müssen, betreffen daher die Existenz und die Anzahl von Nullstellen dieser Funktionen $(L(\lambda)x, x)$.

Definition 4

1. *Wir definieren in $\mathcal{H}$ die folgenden Mengen:*

$$\begin{aligned} C_\lambda^+ &:= \{x \in \mathcal{H} \mid (L(\lambda)x, x) > 0, \quad \lambda \in [\alpha, \beta)\} \\ C_\lambda^o &:= \{x \in \mathcal{H} \mid (L(\lambda)x, x) = 0, \quad \lambda \in [\alpha, \beta)\} \\ C_\lambda^- &:= \{x \in \mathcal{H} \mid (L(\lambda)x, x) < 0, \quad \lambda \in [\alpha, \beta)\} \\ C_\beta &:= \bigcup_{\lambda \in [\alpha, \beta)} C_\lambda^- \cup C_\alpha^o \end{aligned}$$

2. *Eine Funktion $f : [\alpha, \beta) \to I\!R$ heißt fallend (bzw. wachsend) bei Null, wenn $f(\lambda_o) = 0$ für ein $\lambda \in [\alpha, \beta)$ impliziert, daß für alle $\lambda \in [\alpha, \beta)$ gilt*

$$\begin{aligned} f(\lambda) > (\textit{bzw.} <) 0 &\iff \lambda < \lambda_o \\ f(\lambda) < (\textit{bzw.} >) 0 &\iff \lambda > \lambda_o. \end{aligned}$$

Remark 5

1. Die Menge C_β besteht also genau aus denjenigen $x \in \mathcal{H}$ für die es ein $\lambda \in [\alpha, \beta)$ gibt mit $(L(\lambda)x, x) < 0$.

2. Besitzt die einmal differenzierbare Funktion $f : [\alpha, \beta) \to I\!R$ im Intervall $[\alpha, \beta)$ genau eine Nullstelle ξ mit $f'(\xi) < 0$ und gilt $f(x) > 0$ für ein $x \in [\alpha, \xi)$, dann ist f fallend bei Null.

Schließlich definieren wir noch κ als die maximale Dimension eines Teilraumes, der in der Menge C_β enthalten ist. Obige Definitionen versetzen uns nun in die Lage, die weiteren Voraussetzungen an die Schar L durch das Verhalten der Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ zu charakterisieren.

Voraussetzung 2: Die Menge C_β ist nicht leer und es gilt

$$(L(\alpha)x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Voraussetzung 3: Für alle $x \in \mathcal{H}$ sind die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ fallend bei Null.

Der erste Teil von Voraussetzung 2 gewährleistet, daß $1 \leq \kappa \leq \infty$ gilt. Andernfalls wären die folgenden Resultate dieses Kapitels trivial. Die wichtigste Annahme ist aber Voraussetzung 3. Sie hat nämlich zur Folge, daß die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ für alle $x \in C_\beta$ genau eine Nullstelle $p(x) \in [\alpha, \beta)$ besitzen mit der Eigenschaft, daß für alle $\lambda \in [\alpha, \beta)$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda < p(x) &\iff (L(\lambda)x, x) > 0 \\ \lambda = p(x) &\iff (L(\lambda)x, x) = 0 \\ \lambda > p(x) &\iff (L(\lambda)x, x) < 0. \end{aligned}$$

Für die restlichen Vektoren $x \in C_\alpha^+ \setminus C_\beta$ setzen wir

$$p(x) = +\infty \qquad \forall x \in C_\alpha^+ \setminus C_\beta.$$

Remark 6 Wegen $(L(\lambda)\alpha x, \alpha x) = \alpha^2(L(\lambda)x, x)$ gilt $p(\alpha x) = p(x)$ für alle reellen α und $x \in \mathcal{H}$. Es genügt daher das Funktional $p(x)$ auf der Einheitskugel zu betrachten.

Definition 5

1. *Wir definieren*
$$\pi_j := \inf_{M \in \mathcal{M}_j} \max_{x \in M^1} p(x) \tag{4}$$

2. *Für $\lambda \in [\alpha, \beta)$*
$$\mu_j(\lambda) := \inf_{M \in \mathcal{M}_j} \max_{x \in M^1} (L(\lambda)x, x) \tag{5}$$

In Abhängigkeit von κ bilden die π_j eine endliche oder unendliche nichtfallende Folge reeller Zahlen. Im Fall $\kappa < \infty$ gilt nämlich

$$\pi_j = +\infty \qquad \forall j > \kappa.$$

Analog zum ersten Kapitel sprechen wir von minmax-Werten, wenn das Minimum in (4) angenommen wird. Die Hilfsgrößen $\mu_j(\lambda)$ werden uns helfen, die wichtigsten Aussagen aus dem vorangegangenen Kapitel auf die Werte π_j zu übertragen.

Lemma 6 *Seien die π_j wie in (4) definiert.*

1. $\pi_j < \infty \Longleftrightarrow \mu_j(\pi_j) = 0$
2. $\mu_j(\lambda) < 0 \Longleftrightarrow \pi_j < \lambda$

Proof : Wir unterteilen den Beweis des ersten Teils des Lemmas in 3 Schritte:

1. Es gilt $\mu_j(\pi_j) \geq 0$.
2. Sei für alle $M \in \mathcal{M}_j$ der normierte Vektor y_M definiert durch
$$(L(\pi_j)y_M, y_M) = \max_{x \in M^1} (L(\pi_j)x, x), \tag{6}$$
dann gilt
$$\pi_j = \inf_{M \in \mathcal{M}_j} p(y_M). \tag{7}$$
3. Aus 1. und 2. folgt dann $\mu_j(\pi_j) = 0$.

1. Aus der Definition der π_j folgt unmittelbar, daß es zu jedem Teilraum $M \in \mathcal{M}_j$ einen Vektor $x_M \in M$ gibt, mit $\pi_j \leq p(x_M)$. Es sind nun zwei Fälle möglich:

1. $p(x_M) \in [\alpha, \beta)$
2. $p(x_M) = +\infty$

Im ersten Fall gilt wegen Voraussetzung 3

$$\max_{x \in M^1} (L(\pi_j)x, x) \geq (L(\pi_j)x_M, x_M) \geq 0.$$

Im zweiten Fall existiert ein Vektor $x \in M$ mit $(L(\pi_j)x, x) \geq 0$. Damit erhält man wie oben

$$\max_{x \in M^1} (L(\pi_j)x, x) \geq 0.$$

Insgesamt folgt daher $\mu_j(\pi_j) \geq 0$.

2. Da wir bereits wissen, daß $\mu_j(\pi_j) \geq 0$ ist, folgt

$$(L(\pi_j)y_M, y_M) \geq \mu_j(\pi_j) \geq 0.$$

Daraus erhält man wegen Voraussetzung 3

$$\pi_j \leq p(y_M) \qquad \forall M \in \mathcal{M}_j$$

und folglich

$$\pi_j \leq \inf_{M \in \mathcal{M}_j} p(y_M).$$

Andererseits gilt aber

$$p(y_M) \leq \max_{x \in M^1} p(x) \qquad \forall M \in \mathcal{M}_j$$

und daraus folgt

$$\inf_{M \in \mathcal{M}_j} p(y_M) \leq \inf_{M \in \mathcal{M}_j} \max_{x \in M^1} p(x) = \pi_j.$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben die Behauptung.

3. Jetzt berücksichtigen wir nur Teilräume $M \in \mathcal{M}_j$ für die $p(y_M) \in (\alpha, \beta]$ gilt. Dann erhalten wir unter Benützung der Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & \mu_j(\lambda_j) & \leq & (L(\lambda_j y_M, y_M) & = \\ & = & ((L(\pi_j) - L(p(y_M))y_M, y_M) & \leq & \\ & \leq & \| L(\pi_j) - L(p(y_M)) \| \,. & & \end{array}$$

Aus der Stetigkeit von L und der Tatsache, daß $\pi_j = \inf p(y_M)$ gilt, folgt die Behauptung.

Für den Beweis des zweiten Teils des Lemmas erinnern wir daran, daß $\mu_j(\lambda) < 0$ genau dann gilt, wenn es einen Teilraum M gibt mit $(L(\lambda)x, x) < 0$ für alle $x \in M$. Nach Voraussetzung 3 gilt $(L(\lambda)x, x) < 0$ aber dann und nur dann, wenn $\lambda > p(x)$ für alle $x \in M$ oder, damit gleichbedeutend, $\lambda > \pi_j$ gilt.

$\square$

Lemma 7 *Seien die π_j und $\mu_j(\lambda)$ wie in (4) und (5) definiert. Dann gilt*

1. *Wenn π_j ein minmax-Wert ist, dann ist $\mu_j(\pi_j)$ ein minmax-Wert und es gilt $\mu_j(\pi_j) = 0$.*
2. *Wenn $\mu_j(\lambda)$ für ein $\lambda \in [\alpha, \beta)$ ein minmax-Wert ist und $\mu_j(\lambda) = 0$ gilt, dann folgt, daß π_j ein minmax-Wert und $\lambda = \pi_j$ ist.*

Proof : 1. Sei π_j ein minmax-Wert. Dann existiert ein Teilraum $M_j \in \mathcal{M}_j$ mit

$$\pi_j = p(x_{M_j}) = \max_{x \in M_j^1} p(x).$$

Wegen Voraussetzung 3 gilt dann $(L(\pi_j)x, x) \leq 0$ für alle $x \in M_j$ und man erhält unmittelbar

$$0 = (L(\pi_j)x_{M_j}, x_{M_j}) = \max_{x \in M_j^1} (L(\pi_j)x, x).$$

Aus dem Beweis des obigen Lemmas wissen wir, daß immer $\mu_j(\pi_j) \geq 0$ gilt und erhalten schließlich

$$\mu_j(\pi_j) = \min_{M \in \mathcal{M}_j} \max_{x \in M_j^1} (L(\pi_j)x, x) = 0.$$

2. Auf Grund der Voraussetzungen gibt es einen Teilraum M_j mit

$$0 = (L(\lambda)x_{M_j}, x_{M_j}) \geq (L(\lambda)x, x) \qquad \forall x \in M_j$$

Da die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ genau eine Nullstelle besitzen, folgt aus obiger Zeile, daß $\lambda = p(x_{M_j})$ gilt. Es bleibt daher nur mehr $\lambda = \pi_j$ zu zeigen. Aus Voraussetzung 3 schließt man, daß $\lambda \geq p(x)$ für alle $x \in M_j$. Einsetzen in die Definition von π_j liefert $\lambda \geq \pi_j$. Umgekehrt folgt aus $\mu_j(\lambda) = 0$ unmittelbar

$$\max_{x \in M^1} (L(\lambda)x, x) = (L(\lambda)x_M, x_M) \geq 0,$$

und damit
$$\lambda \le p(x_M) \le \max_{x \in M^1} p(x)$$
für alle $M \in \mathcal{M}_j$. Daher erhält man $\lambda \le \pi_j$ und daraus die Behauptung.

□

Jetzt sind wir in der Lage das Hauptresultat dieses Kapitels zu zeigen.

Theorem 2 *Seien die π_j wie in (4) definiert und erfülle die Schar L die Voraussetzungen 1-3. Dann gilt*

1. *Ist π_j endlich, dann folgt $\pi_j \in \sigma(L)$.*
2. *Ist π_j ein minmax-Wert und wird das Minimum im Teilraum $M^* \in \mathcal{M}_j$ angenommen, dann folgt $\pi_j \in \sigma_p(L)$ mit einem zugehörigen Eigenvektor in M^*.*

Proof : Aus $\pi_j < \infty$ und Lemma 6 folgt $\mu_j(\pi_j) = 0$. Mit Satz 1 schließen wir
$$0 \in \sigma(L(\pi_j)).$$
Definition 2 impliziert dann $\pi_j \in \sigma(L)$. Ist π_j minmax-Wert, dann gilt mit Lemma 7, daß $\mu_j(\pi_j) = 0$ auch minmax-Wert ist. Wieder mit Satz 1 folgt, daß $0 \in \sigma_p(L(\pi_j))$ und somit $\pi_j \in \sigma_p(L)$ gilt. Wird das Minimum im Teilraum M^* angenommen, dann zeigt Lemma 7, daß $\mu_j(\pi_j) = \max_{x \in M^{*1}} (L(\pi_j)x, x) = 0$ gilt. Aus Lemma 1 und Lemma 3 ergibt sich, daß ein Vektor in M^* existiert mit $L(\pi_j)x = 0$, und das ist genau, was wir zeigen wollten.

□

Remark 7 Sei L eine selbstadjungierte, stetige Schar auf dem Intervall $(\beta, \alpha]$ und gelte $(L(\alpha)x, x) \ge 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Definiert man
$$C_\beta := \{x \in \mathcal{H} \mid \exists \lambda \in (\beta, \alpha] : (L(\lambda)x, x) < 0\}$$
und fordert, daß für alle $x \in C_\beta$ die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ wachsend bei Null sind und bezeichnen wir für solche x die einzige Nullstelle von $(L(\lambda)x, x)$ mit $p(x)$, dann gilt für die Größen
$$\hat{\pi}_j = \sup_{M \in \mathcal{M}_j} \min_{x \in m^1} p(x)$$
ein Analogon zu Satz 2.

4 Charakterisierung der Eigenwerte

Bis jetzt wissen wir nur, daß die Werte π_j, wie sie in (4) definiert sind, Spektralpunkte der Schar L sind. Wir wollen in diesem Kapitel aber ähnlich wie bei selbstadjungierten Operatoren die Eigenwerte mit endlichdimensionalem geometrischem Eigenraum durch ein Minimax-Prinzip charakterisieren. Wir führen daher das diskrete Spektrum und das wesentliche Spektrum einer Schar ein.

Definition 6

1. *Die Menge* $\sigma_d(L) := \{\lambda \in [\alpha, \beta) \mid 0 \in \sigma_d(L(\lambda))\}$ *nennen wir das diskrete Spektrum der Schar L im Intervall* $[\alpha, \beta)$.
2. *Die Menge* $\sigma_{ess}(L) := [\alpha, \beta) \backslash (\sigma_d(L) \cup \rho(L))$ *nennen wir das wesentliche Spektrum der Schar L im Intervall* $[\alpha, \beta)$.

In diesem Zusammenhang möchten wir daran erinnern, daß das diskrete Spektrum eines selbstadjungierten Operators als die Menge aller isolierten Eigenwerte endlicher Vielfachheit definiert ist. Wenn λ_o ein Punkt aus dem diskreten Spektrum der Schar ist, gilt daher, daß der Teilraum $\ker L(\lambda_o)$ endlichdimensional und der Bildbereich $\mathcal{R}(L(\lambda_o))$ des Operators $L(\lambda_o)$ abgeschlossen ist. Außerdem läßt sich der Raum $\mathcal{H}$ als direkte Summe dieser beiden Teilräume schreiben: $\mathcal{H} = \ker L(\lambda_o) \bigoplus \mathcal{R}(L(\lambda_o))$. Unter alleiniger Voraussetzung der Stetigkeit einer Schar kann man allerdings nicht schließen, daß das oben definierte diskrete Spektrum einer Operatorschar nur aus isolierten Punkten besteht. Zum Beispiel besteht das diskrete Spektrum aus dem ganzen Intervall $[\alpha, \beta)$, wenn wir annehmen, daß die Schar L gar nicht vom Parameter λ abhängt und $0 \in \sigma_d(L(\alpha))$ gilt. Wir formulieren im folgenden Satz Voraussetzungen, die gewährleisten, daß die Punkte aus $\sigma_d(L)$ isolierte Punkte von $\sigma(L)$ sind.

Theorem 3 *Sei* $\lambda_o \in \sigma_d(L)$. *Hat die Schar L an der Stelle* λ_o *eine Ableitung* $L'(\lambda_o)$ *bezüglich der Norm in* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *und gilt*

$$L(\lambda_o)x_o = 0, x_o \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (L'(\lambda_o)x_o, x_o) \neq 0$$

dann ist λ_o *ein isolierter Punkt von* $\sigma(L)$.

Proof : Sei $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \sigma(L)$ eine streng monoton fallende Folge aus dem Spektrum der Schar mit

$$\lambda_n \to \lambda_o \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Dann existiert zu jedem Folgenglied λ_n eine Folge von normierten Vektoren $(x_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ aus dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit der Eigenschaft

$$\| L(\lambda_n)x_{n,k} \| \to 0 \qquad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Jetzt wählen wir eine beliebige Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ und eine dazugehörige Folge von Indizes k_n, sodaß gilt

$$\| L(\lambda_n)x_{n,k_n} \| < \varepsilon_n \mid \lambda_n - \lambda_o \mid .$$

Für das Folgende bezeichnen wir die Vektoren x_{n,k_n} mit $\hat{x}_n$. Wir erhalten

$$\left| \frac{((L(\lambda_n) - L(\lambda_o))x_o, \hat{x}_n)}{\lambda_n - \lambda_o} \right| \leq \varepsilon_n \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Da $\| L(\lambda_n)\hat{x}_n \| \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, erhält man unmittelbar aus der Stetigkeit der Schar und der Konvergenz der Folge $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\| L(\lambda_o)\hat{x}_n \| \leq \| (L(\lambda_o) - L(\lambda_n))\hat{x}_n \| + \| L(\lambda_n)\hat{x}_n \| \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Wie wir oben schon angemerkt haben, können wir, weil 0 Eigenwert endlicher Vielfachheit des Operators $L(\lambda_o)$ ist, den Hilbertraum $\mathcal{H}$ folgendermaßen zerlegen

$$\mathcal{H} = \ker L(\lambda_o) \bigoplus \mathcal{R}(L(\lambda_o)).$$

Das heißt jeder Vektor $\hat{x}_n$ läßt sich schreiben als $\hat{x}_n = \hat{x}_n^o + \hat{x}_n^1$ mit $\hat{x}_n^o \in \ker L(\lambda_o)$ und $\hat{x}_n^1 \in \mathcal{R}(L(\lambda_o)$. Mit (9) folgt, daß $L(\lambda_o)\hat{x}_n^1 \to 0$ gilt, und mit der Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(L(\lambda_o))$ schließt man $\| \hat{x}_n^1 \| \to 0$ für $n \to \infty$. Auf Grund der Normiertheit der Vektoren $\hat{x}_n$ folgt daher $\| \hat{x}_n^o \| \to 1$. Die Folge $(\hat{x}_n^o)$ ist daher insbesondere beschränkt und enthält eine schwach konvergente Teilfolge, die wir der Einfachheit halber wieder mit $(\hat{x}_n^o)$ bezeichnen. Aus der Konvergenz der Normen der Vektoren $\hat{x}_n^o$ folgt aber sogar die starke Konvergenz der Folge. Es existiert daher ein normierter Vektor $x_o \in \ker L(\lambda_o)$ mit

$$\| \hat{x}_n - x_o \| \to 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Aus der Existenz der Ableitung der Schar an der Stelle λ_o folgt

$$\left| \frac{((L(\lambda_n) - L(\lambda_o))x_o, \hat{x}_n)}{\lambda_n - \lambda_o} - (L'(\lambda_o)x_o, \hat{x}_n) \right| \to 0.$$

Damit gilt wegen der Konvergenz der Folge $(\hat{x}_n)$

$$\left| \frac{((L(\lambda_n) - L(\lambda_o))x_o, \hat{x}_n)}{\lambda_n - \lambda_o} - (L'(\lambda_o)x_o, x_o) \right| \to 0,$$

was mit (8) ein Widerspruch zur Annahme $(L'(\lambda_o)x_o, x_o) \neq 0$ ist.

$\square$

Da wir alle Punkte außerhalb des wesentlichen Spektrums durch minmax-Werte π_j beschreiben wollen, definieren wir:

Definition 7

$$\lambda_e := \left\{ \begin{array}{cc} \min \sigma_{ess}(L) & \sigma_{ess}(L) \neq \emptyset \\ \\ \beta & sonst \end{array} \right\}$$

Bevor wir zeigen, daß das wesentliche Spektrum einer Schar abgeschlossen und damit obige Definition von λ_e sinnvoll ist, benötigen wir noch eine Charakterisierung des wesentlichen Spektrums eines selbstadjungierten Operators (für den Beweis siehe [RN]).

Lemma 8 *Sei A ein beschränkter, selbstadjungierter Operator. Dann ist $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ genau dann, wenn eine schwache Nullfolge normierter Vektoren (x_n) existiert mit $(A - \lambda I)x_n \to 0$.*

Mit diesem Lemma ist der Beweis der Abgeschlossenheit des wesentlichen Spektrums einer Schar sehr einfach.

Proof : Sei $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \sigma_{ess}(L)$ eine Folge von Punkten aus dem wesentlichen Spektrum mit $\lambda_n \to \lambda$. Zu zeigen ist $\lambda \in \sigma_{ess}(L)$. Nach Definition des wesentlichen Spektrums einer Schar gilt $0 \in \sigma_{ess}(L(\lambda_n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit existiert nach obigem Lemma zu jedem λ_n eine schwache Nullfolge normierter Vektoren (x_n^k) mit $L(\lambda_n)x_n^k \to 0$ für $k \to \infty$. Sei ε_n eine beliebige Nullfolge, dann finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index k_n mit

$$\begin{array}{rcll} \| L(\lambda_n)x_n^{k_n} \| & \leq & \varepsilon_n & \\ | (x_n^{k_n}, f) | & \leq & \varepsilon_n & \forall f \in \mathcal{H}. \end{array}$$

Die so definierte Folge $(x_n^{k_n})$ ist natürlich eine schwache Nullfolge normierter Vektoren und mit der Stetigkeit der Schar L erhält man sofort

$$\| L(\lambda)x_n^{k_n} \| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Unter abermaliger Anwendung von Lemma 8 schließt man, daß $0 \in \sigma_{ess}(L(\lambda))$ gilt, was wiederum die Behauptung impliziert.

$\square$

Im ersten Kapitel haben wir gesehen, daß für alle Werte μ_j eines selbstadjungierten Operators A

$$\mu_j \leq \tau := \min \sigma_{ess}(A) \qquad j = 1, 2, \ldots$$

gilt, wobei Gleichheit nur für solche μ_j besteht, die keine minmax-Werte sind. Für eine Operatorschar muß die analoge Ungleichung mit λ_e statt τ nicht gelten, da es möglich ist, daß die Werte π_j Punkte aus $\sigma_{ess}(L)$ auslassen, wenn diese nicht als Nullstellen geeigneter Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ auftreten . Es kann also durchaus passieren, daß es Werte π_j gibt, die größer als λ_e sind, selbst wenn es sich bei π_j um einen Eigenwert mit endlichdimensionalem geometrischen Eigenraum handeln sollte. Der folgende Satz charaktersisiert daher nur die Eigenwerte, die kleiner als λ_e sind.

Theorem 4 *Die Schar L erfülle die Voraussetzungen 1 - 3 und sei $\lambda_e < \beta$, dh. $[\alpha, \lambda_e) \subset \sigma_d(L) \cup \rho(L)$. Weiters bestehe die Menge $[\alpha, \lambda_e) \cap \sigma_d(L)$ nur aus isolierten Punkten, und bezeichne λ_j die Eigenwerte im Intervall $[\alpha, \lambda_e)$ in aufsteigender Reihenfolge und entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Dann gilt*

$$\lambda_j = \min_{M \in \mathcal{M}_j} \max_{x \in M^1} p(x).$$

Gilt zusätzlich, daß es unendlich viele Punkte in $[\alpha, \lambda_e) \cap \sigma_d(L)$ gibt, dann gilt

$$\lambda_e = \lim_{j \to \infty} \pi_j$$

Proof : 1. Sei $\lambda \in (\lambda_e, \beta) \cap \sigma_d(L)$. Laut Definition gilt dann $0 \in \sigma_d(L(\lambda))$, dh. 0 liegt nicht im wesentlichen Spektrum des Operators $L(\lambda)$. Da es im Intervall $[\alpha, \lambda)$ nur endlich viele Eigenwerte der Schar L gibt, ist die Dimension eines maximalen Teilraumes M, für den

$$(L(\lambda)x, x) < 0 \qquad \forall x \in M$$

gilt, endlich. Demzufolge muß $0 < \min \sigma_{ess}(L(\lambda))$ gelten. Mit Hilfe von Satz 1 schließt man, daß ein $j \in I\!N$ existiert, sodaß $\mu_j(\lambda) = 0$ gilt. Da $\mu_j(\lambda)$ außerdem noch ein minmax-Wert ist, folgt mit Lemma 7, daß einerseits $\lambda = \pi_j$ gilt und andererseits π_j ebenfalls ein minmax-Wert ist, was unmittelbar die Behauptung zur Folge hat.

2. Gibt es unendlich viele Punkte in $[\alpha, \lambda_e) \cap \sigma_d(L)$, dann bilden die π_j eine nicht fallende Folge, die nach oben durch λ_e beschränkt ist. Demzufolge existiert der Grenzwert $\lambda^* = \lim_{j\to\infty} \pi_j$ und es gilt $\lambda^* \leq \lambda_e$. Der Grenzwert λ^* kann einerseits nicht in der Resolventenmenge liegen, da der Operator $L(\lambda^*)$ Grenzwert von singulären Operatoren ist.Andererseits kann λ^* als nicht isolierter Punkt auch nicht im Intervall $[\alpha, \lambda_e)$ liegen. Daher erhalten wir $\lambda^* \geq \lambda_e$ und damit die Gleichheit.

□

Remark 8 Man könnte in obigem Satz natürlich auch fordern, daß die Ableitung $L'(\lambda)$ ein negativer Operator auf der Menge $[\alpha, \lambda_e) \cap \sigma_d(L)$ ist.

5 Operatorpolynome und Kreinräume

In diesem Kapitel fassen wir einige Aussagen zusammen, die später in den Anwendungsbeispielen des Minimax-Prinzips zum Tragen kommen.

5.1 Operatorpolynome

In diesem Abschnitt behandeln wir einige Eigenschaften von Operatorpolynomen. Die Definitionen und Beweise dieses Abschnitts sind [M] entnommen.

Definition 8 *Eine Operatorenschar der Form*

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k \qquad (n \geq 1, A_n \neq 0)$$

mit $A_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt ein Operatorpolynom der Ordnung n. Die Operatoren A_k heißen die Koeffizienten des Polynoms. Ein Operatorpolynom erster Ordnung heißt linear, eines zweiter Ordnung heißt quadratisch.

Remark 9 Genauso wie komplexwertige Polynome einer komplexen Veränderlichen sind auch Operatorpolynome in der gesamten komplexen Ebene holomorph. In Kapitel 2 haben wir die Holomorphie einer Schar bezüglich der Operatornorm definiert. Ganz analog ließe sich aber auch die schwache oder die starke Topologie in einem Hilbertraum zur Definition der Holomorphie heranziehen. Intuitiv würde man erwarten, daß man auf diese Weise in gewissem Sinne schwächere Holomorphiebegriffe erhält. Interessanter Weise läßt sich aber zeigen, daß es bei operatorwertigen Funktionen nicht darauf ankommt, ob man den Begriff der Holomorphie bezüglich der schwachen, der starken oder der gleichmäßigen Konvergenz in einem Hilbertraum definiert.

Wir wissen bereits, wie das Spektrum und die Eigenwerte eines Operatorpolynoms definiert sind, da es sich bei Polynomen nur um spezielle Operatorenscharen handelt. Vom Spektrum eines beschränkten linearen Operators ist wohlbekannt, daß es eine kompakte also insbesondere beschränkte Teilmenge der komplexen Zahlen ist. Das Spektrum einer Operatorschar ist aber im allgemeinen unbeschränkt, wie das folgende einfache Beispiel zeigt.

Beispiel: Sei A ein linearer, beschränkter Operator, der nicht invertierbar ist. Dann ist das Spektrum des konstanten Polynoms $L(\lambda) = A$ unbeschränkt.

Für Operatorpolynome läßt sich aber leicht einen Bedingung angeben, die gewährleistet, daß das Spektrum des Polynoms, wie das Spektrum eines beschränkten, linearen Operators aussieht.

Theorem 5 *Sei L ein Operatorpolynom vom Grade n und sei weiters der Führungskoeffizient A_n invertierbar, dann ist das Spektrum von L nicht leer und kompakt.*

Proof : Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}^n$ das n-fache kartesische Produkt des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ mit sich selber, und beschreiben Operatoren, die auf $\mathcal{H}^n$ operieren, als Matrizen $\mathcal{A} = (A_{jk})_{j,k=1}^n$ mit $A_{jk} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann assoziieren wir zum Polynom L ein lineares Polynom im Raum $\mathcal{H}^n$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \mathcal{A}_o - \lambda \mathcal{A}_1$$

mit

$$\mathcal{A}_o = \begin{pmatrix} A_o & A_1 & \dots & A_{n-1} \\ & I & & \\ & & \ddots & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -A_n \\ I & & & \\ & \ddots & & \\ & & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Da Matrizen im Raum $\mathcal{H}^n$ genauso multipliziert werden, wie im $\mathbb{R}^n$, verifiziert man durch nachrechnen, daß $\mathcal{A}(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)\mathrm{diag}(L(\lambda), I, \dots, I)\mathcal{D}(\lambda)$ gilt, mit

$$\mathcal{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} I & \sum\limits_{k=1}^n \lambda^{k-1} A_k & \sum\limits_{k=2}^n \lambda^{k-2} A_2 & \dots & A_{n-1} + \lambda A_n \\ & I & & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\lambda)\begin{pmatrix} I & & & \\ -\lambda I & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda I & I \end{pmatrix}.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Operatoren $\mathcal{B}(\lambda)$ und $\mathcal{D}(\lambda)$ für alle komplexen λ invertierbar sind. Daher stimmen die Spektren von L und $\mathcal{A}$ überein. Ist der Operator A_n invertierbar, dann ist das auch der Operator $\mathcal{A}_1$. Daher ist $\mathcal{A}(\lambda)$ invertierbar, genau dann, wenn $\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}(\lambda) = \mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_o - \lambda \mathrm{diag}(I, \ldots, I)$ invertierbar ist. Daher stimmt das Spektrum des Polynoms L überein mit dem Spektrum des linearen Operators $\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A}_o$. Daher hat $\sigma(L)$ dieselben Eigenschaften, wie das Spektrum eines linearen Operators, ist also es insbesondere nicht leer und kompakt.

$\square$

Remark 10 Die Bedingung des obigen Satzes ist insbesondere erfüllt, wenn der Führungskoeffizient des Polynoms der Einheitsoperator ist, wenn es sich also um ein sogenanntes monisches Polynom handelt.

Sind die Koeffizienten des Polynoms selbstadjungiert, dann handelt es sich nach einer Bemerkung aus dem dritten Kapitel um ein selbstadjungiertes Operatorpolynom. In diesem Fall liegt das Spektrum des Polynoms sogar symmetrisch zur reellen Achse, da ein Operator und sein adjungierter Operator immer nur gemeinsam invertierbar sind.

Zum Schluß führen wir noch hyperbolische Operatorpolynome ein.

Definition 9 *Ein selbstadjungiertes Operatorpolynom* $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k L_k$ *mit* $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *heißt hyperbolisch, wenn* L_n *strikt positiv ist und für alle* $x \in \mathcal{H}$ *die Wurzeln des Polynoms* $(L(\lambda)x, x)$ *reell und verschieden sind.*

Sei $L(\lambda)$ ein hyperbolisches Operatorpolynom vom Grade n, dann bezeichnen wir mit $(p_k(x))_{k=1}^n$ die in aufsteigender Reihenfolge gezählten Wurzeln des Polynoms $(L(\lambda)x, x)$ $x \neq 0$. Definieren wir für $k = 1, \ldots, n$

$$\Delta_k := \{p_k(x) \mid x \in \mathcal{H}^1\},$$

dann gilt:

Theorem 6 *Ist* $L(\lambda)$ *ein hyperbolisches Polynom, dann sind die Mengen* Δ_k *disjunkt für* $k = 1, \ldots, n$.

Um den Satz beweisen zu können, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 9 *Seien A, B beschränkte, selbstadjungierte Operatoren. Existieren Vektoren x_1 und x_2 mit*

$$(Ax_1, x_1) > 0, \quad (Ax_2, x_2) < 0, \quad (Bx_1, x_1) = (Bx_2, x_2) = 0,$$

dann gibt es einen Vektor x, sodaß

$$(Ax, x) = (Bx, x) = 0$$

gilt.

Proof : Wir führen den Operator $C := A + iB$ ein. Dann gilt auf Grund der Voraussetzungen $(Cx_1, x_1) > 0$ und $(Cx_2, x_2) < 0$. Das heißt, daß der numerische Wertebereich des Operators C mindestens eine positive und eine negative Zahl enthält. Da der numerische Wertebereich für alle beschränkten Operatoren konvex ist (siehe [M]), folgt die Existenz eines Vektors x mit $(Cx, x) = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

□

Kommen wir nun zum Beweis des obigen Satzes

Proof : Da alle Wurzeln der Polynome $(L(\lambda)x, x)$ reell und verschieden sind, folgt, daß die Ableitungen in den Nullstellen verschiedene Vorzeichen haben müssen. Es gilt also

$$(-1)^{k-1}(L'(p_k(x))x, x) > 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

Angenommen der Durchschnitt von Δ_i und Δ_j, $i \neq j$, ist nicht leer. Es existiert also eine reelle Zahl α mit

$$\alpha = p_i(x) = p_j(y).$$

Wegen $(L'(\alpha)x, x)(L'(\alpha)y, y) < 0$ und dem obigen Lemma, folgt $(L(\alpha)z, z) = (L'(\alpha)z, z)$ für ein $z \neq 0$. Das ist aber ein Widerspruch, weil alle Nullstellen eines hyperbolischen Polynoms einfach sind.

□

.

5.2 Kreinräume

Definition 10 *Ein linearer Raum K mit dem indefiniten Skalarprodukt $[.,.]$ heißt Kreinraum, falls Teilräume $\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-$ von $\mathcal{K}$ existieren, sodaß gilt*

1. *($\mathcal{K}_+$, $[.,.]$) und ($\mathcal{K}_-$, -$[.,.]$) sind Hilberträume.*
2. $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+[\dot{+}]\mathcal{K}_-$

Das Symbol $[\dot{+}]$ bezeichnet die direkte orthogonale Summe bezüglich des indefiniten Skalarprodukts.

Eine typische Situation, in der Kreinräume auftreten ist die folgende. Sei $(\mathcal{H}, (.,.))$ ein Hilbertraum, G ein beschränkter, selbstadjungierter Operator und $0 \in \rho(G)$. Definiert man $[x, y] := (Gx, y)$, dann ist der Raum $(\mathcal{H}, [.,.])$ ein Kreinraum. Sei nämlich E_t, die zu G gehörende Zerlegung der Einheit, dann ist, weil 0 in der Resolventenmenge von G liegt, der Operator E_o eine Projektion auf denjenigen Teilraum von $\mathcal{H}$, der zum negativen Teil des Spektrums $\sigma(G)$ gehört. Dementsprechend projiziert $(I - E_o)$ auf den zum positiven Teil des Spektrums $\sigma(G)$ gehörenden Teilraum. Definiert man $\mathcal{K}_+ := (I - E_o)\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}_- := E_o\mathcal{H}$, dann erhält man eine Zerlegung des Raumes, wie sie in obiger Definition gefordert wird. In diesem Zuammenhang wird der Operator G auch Gramoperator genannt.

Ist $\mathcal{K}$ ein Kreinraum, so kann jedes Element $x \in \mathcal{K}$ geschrieben werden als $x = x_+ + x_-$ mit $x_{\pm} \in \mathcal{K}_{\pm}$. Führt man in $\mathcal{K}$ das Skalarprodukt $(x, y) := [x_+, y_+] - [x_-, y_-]$ ein, dann wird der Raum $(\mathcal{K}, (.,.))$ zu einem Hilbertraum. Definiert man $Jx := x_+ - x_-$, dann folgt

$$\begin{aligned} (x, y) &= [Jx, y] \qquad \forall x, y \in \mathcal{K} \\ (Jx, y) &= [x, y] \qquad \forall x, y \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Der Operator J ist bezüglich beider Skalarprodukte selbstadjungiert und heißt Fundamentalsymmetrie. Ein Kreinraum $\mathcal{K}$ wird daher mit $(x, y) := [Jx, y]$ zu einem Hilbertraum. Die Abbildung J wird dabei durch die gegebene Zerlegung $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+[\dot{+}]\mathcal{K}_-$ definiert. Da diese Zerlegung nicht eindeutig ist, gibt es im allgemeinen viele verschiedene Abbildungen J, die jeweils Hilbertraumnormen induzieren. Es zeigt sich aber, daß alle diese Normen zueinander äquivalent sind. Alle topologischen Aussagen in einem Kreinraum beziehen sich daher immer auf eine durch eine Fundamentalsymmetrie induzierte Norm.

Definition 11 *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreinraum. Ein in ganz $\mathcal{K}$ definierter linearer Operator A heißt selbstadjungiert, wenn gilt*

$$[Ax, y] = [x, Ay] \qquad \forall x, y \in \mathcal{K}.$$

Damit kommen wir zurück zu den Operatorpolynomen. Sei L ein monisches Operatorpolynom der Form

$$L(\lambda) = \lambda^n I + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \ldots + A_o.$$

Dann betrachten wir im Raum $\mathcal{H}^n$ die folgende Linearisierung des Polynoms (siehe auch [DL])

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -A_{n-1} & -A_{n-2} & \ldots & -A_o \\ I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & I & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

und erhalten

$$L(\lambda)^{-1} = \mathcal{Q}(\mathcal{A} - \lambda)^{-1}\mathcal{P},$$

wobei die Matrizen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ gegeben sind durch

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Es zeigt sich, daß das Spektrum des Operators $\mathcal{A}$ mit dem Spektrum des Polynoms übereinstimmt. Darüber hinaus besteht ein bijektiver Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren des Polynoms und denen des Operators $\mathcal{A}$. Sei nämlich x_o ein Eigenwert von L zum Eigenwert λ_o und definieren wir

$$\hat{x}_o = \begin{pmatrix} \lambda_o^{n-1} x_o \\ \vdots \\ \lambda_o x_o \\ x_o \end{pmatrix},$$

dann verifiziert man leicht, daß $\mathcal{A}\hat{x}_o = \lambda_o \hat{x}_o$ gilt. Ist umgekehrt $\hat{x}_o$ ein Eigenvektor des Operators $\mathcal{A}$ zum Eigenwert λ_o und ist x_n die n-te Komponente von $\hat{x}_o$, dann zeigt sich, daß x_n ein Eigenvektor von L zum Eigenwert λ_o ist. Es besteht daher ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren des Polynoms und denen des Operators $\mathcal{A}$.

Offensichtlich ist der Operator $\mathcal{A}$ im Raum $\mathcal{H}^n$ nicht selbstadjungiert. Führt man aber den Gramoperator

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & I \\ 0 & \cdots & & I & A_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & I & & & A_2 \\ I & A_{n-1} & \cdots & A_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

ein und definiert man ein neues Skalarprodukt

$$[\hat{x}, \hat{y}] := (\mathcal{G}\hat{x}, \hat{y}) \qquad \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{H}^n,$$

dann ist $\mathcal{A}$ ein selbstadjungierter Operator bezüglich dieses neuen Skalarproduktes. Da $\mathcal{G}$ ein invertierbarer Matrixoperator ist, folgt, daß der Raum $(\mathcal{H}^n, [.,.])$ ein Kreinraum ist.

Definition 12 *Sei A ein selbstadjungierter Operator in einem Kreinraum $\mathcal{K}$. Ein Spektralpunkt λ des Operators A heißt Spektralpunkt positiven (bzw. negativen) Typs, genau dann, wenn für alle Folgen normierter Vektoren (x_n) mit $\| (A - \lambda)x_n \| \to 0$ folgt, daß $\liminf[x_n, x_n] > 0$ (bzw. $\limsup[x_n, x_n] < 0$) gilt.*

Die Bedeutung von Spektralpunkten positiven (bzw. negativen) Typs, besteht darin, daß lokal um diese Punkte eine Spektralfunktion für den Operator A existiert (siehe [LMM]).

Theorem 7 *Sei L ein Operatorpolynom und $\mathcal{A}$ die Linearisierung aus (10). Sei weiters λ ein Eigenwert des Polynoms mit endlichdimensionalem geometrischen Eigenraum. Gilt $(L'(\lambda)x, x) > 0$ für alle $x \in kerL(\lambda)$, dann ist λ ein Eigenwert positiven Typs für die Linearisierung $\mathcal{A}$.*

Proof : Sei x ein Eigenvektor des Polynoms zum Eigenwert λ, dann gilt für den zugeordneten Eigenvektor $\hat{x}$ von $\mathcal{A}$

$$[\hat{x}, \hat{x}] = (L'(\lambda)x, x) > 0.$$

Wir betrachten jetzt eine Folge normierter Vektoren $(\hat{x}_n)$ in $\mathcal{H}^n$ mit

$$\| (\mathcal{A} - \lambda)\hat{x}_n \| \to 0.$$

Da wegen $(L'(\lambda)x, x) > 0$ der Punkt λ ein isolierter Punkt von $\sigma(L)$ und damit auch vom Spektrum von $\mathcal{A}$ ist, folgt, wie im Beweis von Satz 3, die Existenz eines normierten Vektors $\hat{x} \in \ker(\mathcal{A} - \lambda)$ mit

$$\| \hat{x}_n - \hat{x} \| \to 0.$$

Daher erhält man

$$\begin{aligned} | [\hat{x}, \hat{x}] - [\hat{x}_n, \hat{x}_n] | &= | [\hat{x} - \hat{x}_n, \hat{x}] - [\hat{x}_n, \hat{x} - \hat{x}_n] | \leq \\ &\leq 2 \| \hat{x} - \hat{x}_n \| \to 0. \end{aligned}$$

Somit gilt $\lim_{n\to\infty} [\hat{x}_n, \hat{x}_n] = [\hat{x}, \hat{x}] > 0$.

□

Definition 13 *Sei L ein monisches Polynom. Ein Punkt $\lambda \in \sigma_d(L)$ mit $(L'(\lambda)x, x) > 0$ für alle $x \in kerL(\lambda)$ heißt ein Eigenwert positiven Typs. Analog definiert man Eigenwerte negativen Typs.*

6 Anwendungen und Beispiele

6.1 Beispiel 1

Als erstes Anwendungsbeispiel des Minimax-Prinzips aus Kapitel 4 betrachten wir ein quadratisches Operatorpolynom der Form

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + A \tag{11}$$

mit beschränkten selbstadjungierten Operatoren A und B. Durch lösen der Gleichung $(L(\lambda)x, x) = 0$ erhält man die beiden Funktionale

$$p_{\pm}(x) = \frac{-(Bx, x) \pm \sqrt{(Bx, x)^2 - 4(Ax, x)(x, x)}}{2(x, x)}. \tag{12}$$

Definiert man die Menge $\mathcal{M}$ wie folgt

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathcal{H} \mid (Bx, x)^2 \geq 4(Ax, x)\},$$

dann ist klar, daß die in (12) definierten Funktionale auf $\mathcal{M}$ reell sind und die Ungleichung $p_-(x) \leq p_+(x)$ erfüllen. Weiters führen wir folgende Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned} \pi_+ &:= \sup_{x \in \mathcal{M}^1} p_+(x) \quad , \quad \pi'_+ := \inf_{x \in \mathcal{M}^1} p_+(x) \\ \pi_- &:= \inf_{x \in \mathcal{M}^1} p_-(x) \quad , \quad \pi'_- := \sup_{x \in \mathcal{M}^1} p_-(x). \end{aligned}$$

Da wir das diskrete Spektrum des Polynoms in einem Intervall der Form $(\beta, \pi_+]$, $\beta \geq \pi'_-$, charakterisieren wollen, müssen wir uns überlegen, daß die Größe π_+ beschränkt ist. Dazu beweisen wir folgendes Lemma (siehe [M]).

Lemma 10 *Sei $T(\lambda)$ ein beliebiges Operatorpolynom vom Grade n mit gleichmäßig positivem (bzw. gleichmäßig negativem) Führungskoeffizienten T_n. Bezeichnen wir die Menge aller Nullstellen der Funktionen $(T(\lambda)x, x)$ mit $R(T)$, dann existiert ein $r > 0$, sodaß $R(T) \subset D_r$ gilt, wobei D_r die offene Kreisscheibe mit Radius r bezeichnet.*

Proof : Wir definieren

$$\begin{aligned} a &:= \inf_{\|x\|=1} | (T_n x, x) | > 0 \\ r &:= (\frac{1}{a} \max_{k<n} \| T_k \|) + 1. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $|\lambda| \geq r$ und $x \in \mathcal{H}^1$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} (T_k x, x) \lambda^k \right| &\leq \max_{k<n} \| T_k \| \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^k \\ &\leq a(|\lambda| - 1) \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^k \\ &< |a\lambda^n| \leq |\lambda^n| \, (T_n x, x). \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $(T(\lambda)x, x)$ für kein $x \in \mathcal{H}$ außerhalb der offenen Kreisscheibe D_r eine Nullstelle haben kann.

$\square$

Remark 11 Obiges Lemma zeigt insbesondere, daß die Funktionale p_+, p_- beschränkt sind.

Theorem 8 *Sei $L(\lambda)$ das Polynom aus (11), $\mathcal{M} \neq \emptyset$ und $\pi'_- < \pi_+$. Dann sind die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ auf dem Intervall $(\pi'_-, \pi_+]$ wachsend bei Null für alle $x \in \mathcal{M}$. Außerdem sind die Größen*

$$\pi_j := \sup_{\substack{M \in \mathcal{M}_j \\ M \subset \mathcal{M}}} \min_{x \in M^1} p_+(x)$$

für alle $j \in I\!N$ Spektralpunkte der Schar L und liegen im Intervall $(\pi'_-, \pi_+]$. Insbesondere gilt $\pi_+ \in \sigma(L)$. Liegen in einem Intervall der Form $(\beta, \pi_+], \beta \geq \pi'_-$ nur Punkte des diskreten Spektrums von L und bezeichnen wir mit (λ_j) die Eigenwerte in nichtaufsteigender Reihenfolge gezählt, dann werden sie gegeben durch

$$\lambda_j = \max_{\substack{M \in \mathcal{M}_j \\ M \subset \mathcal{M}}} \min_{x \in M^1} p_+(x).$$

Proof : Zuerst bemerken wir, daß die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ für $x \in \mathcal{M}$ im Intervall $(\pi'_-, \pi_+]$ genau eine Nullstelle besitzen, die durch $p_+(x)$ gegeben wird. Um zu zeigen, daß $(L(\lambda)x, x)$ wachsend bei Null ist, genügt es daher zu verifizieren, daß $(L'(p_+(x))x, x) > 0$ gilt für alle $x \in \mathcal{M}$. Wir entwickeln daher das Polynom $(L(\lambda)x, x)$ um die Stelle π'_-

$$(L(\pi'_-)x, x) = (L'(p_+(x))x, x)(\pi'_- - p_+(x)) + (x, x)(\pi'_- - p_+(x))^2. \tag{13}$$

Da $p_-(x) \leq \pi'_-$ für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt, folgt $(L(\pi'_-)x, x) \leq 0$. Daher schließt man mit (13)

$$(L'(p_+(x))x, x) \geq p_+(x) - \pi'_- > 0.$$

Um die Aussage über die Werte π_j zu zeigen, muß man einfach die Beweise aus den vorangegangenen Kapiteln in geeigneter Weise adaptieren. Konkret muß man überprüfen, ob die Beweise von Lemma 6, Lemma 7, Satz 2 und Satz 4 auch unter diesen Voraussetzungen gültig bleiben. Da die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ wachsend bei Null sind, müssen die Hilfsgrößen $\mu_j(\lambda)$ durch

$$\hat{\mu}_j(\lambda) := \sup_{M \in \mathcal{M}_j} \min_{x \in M^1} (-L(\lambda)x, x)$$

ersetzt werden. Wir zeigen nur den ersten Teil des Beweises von Lemma 6 , nämlich, daß $\hat{\mu}_j(\lambda_j) \leq 0$ gilt. Aus der Definition der λ_j folgt, daß zu jedem Teilraum $M \in \mathcal{M}_j, M \subset \mathcal{M}$ ein normierter Vektor x_M existiert mit $\lambda_j \geq p_+(x_M)$. Da $(L(\lambda)x, x)$ wachsende bei Null ist für alle $x \in \mathcal{M}$ folgt

$$\min_{x \in M^1} (-(L(\lambda_j)x, x) \leq (-(L(\lambda_j)x, x) \leq 0.$$

Ist N ein beliebiger j-dimensionaler Teilraum mit $N \not\subset \mathcal{M}$, dann enthält er einen Vektor $x_N \notin \mathcal{M}$. Für diesen Vektor gilt aber, daß das Polynom $(L(\lambda)x_N, x_N)$ zwei komplexe Nullstellen hat. Da das Polynom konvex ist, folgt $(L(\lambda)x_N, x_N) \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Also gilt insbesondere $(L(\lambda_j)x_N, x_N) \geq 0$. Man schließt daher auch für beliebige Teilräume N, daß

$$\min_{x \in N^1} (-L(\lambda_j)x, x) \leq 0,$$

gilt, was unmittelbar $\hat{\mu}_j(\lambda_j) \leq 0$ zur Folge hat.

□

Remark 12 Die Punkte des diskreten Spektrums im Intervall $[\pi_-, \pi'_+)$ lassen sich analog charakterisieren.

Setzen wir $\mathcal{M}$ als nicht leer voraus und fordern zusätzlich

$$p_-(x) < p_+(x) \qquad \forall x \in \mathcal{M}, \tag{14}$$

dann ist das Polynom aus (11) hyperbolisch. Nehmen wir nämlich an, daß $p_+(y)$ nicht reell ist für einen Vektor $y \in \mathcal{H}$, dann ist $(L(\lambda)y, y) > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Schar $F(t, \lambda) := (L(\lambda)ty + (1-t)x, ty + (1-t)x)$ mit $x \in \mathcal{M}$ und $t \in [0, 1]$. Für $t = 1$ hat $F(1, \lambda)$ keine reellen Nullstellen und für $t = 0$ hat $F(0, \lambda)$ zwei verschiedene reelle Nullstellen. Aus Stetigkeitsgründen folgt die Existenz eines t_o, sodaß das Polynom $F(t_o, \lambda)$ eine doppelte Nullstelle besitzt. Da $t_o y + (1 - t_o)x$ in der Mengen $\mathcal{M}$ enthalten ist, erhalten wir damit einen Widerspruch zu (14). Da die Funktionale $p_{\pm}(x)$ auf der Einheitskugel stetig und beschränkt sind, folgt für die Mengen $\Delta_{\pm}$, daß sie beschränkte, zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, also Intervalle. Wie wir aus dem vorigen Kapitel wissen, sind die Mengen Δ_+, Δ_- disjunkt. Daher erhält man $\pi'_- \leq \pi'_+$.

Gilt sogar $\pi'_- = \pi'_+ =: \pi$ und ist π ein Eigenwert des Polynoms aus (11), dann impliziert Bedingung (14), daß π entweder ein Eigenwert postiven oder ein Eigenwert negativen Typs ist.

Proof : Für jeden beliebigen Eigenvektor x zum Eigenwert π gilt wegen (14) entweder $p_-(x) < \pi$ oder $p_+(x) > \pi$. Da Δ_- und Δ_+ disjunkt sind, folgt, daß eine der beiden Ungleichungen für alle Eigenvektoren gelten muß. Sei zum Beispiel $p_+(x) > \pi$ für alle Eigenvektoren x erfüllt, dann erhält man wie schon in Satz 9 die Ungleichung $(L'(\pi)x, x) > 0$ und damit die gewünschte Aussage.

□

Theorem 9 *Sei $L(\lambda)$ wie in (11) definiert und erfülle Bedingung (14). Sei weiters π ein Eigenwert positiven Typs mit endlichdimensionalem geometrischen Eigenraum. Besteht nun das Spektrum $\sigma(L)$ im Intervall $[\pi, \pi_+]$ nur aus Punkten des diskreten Spektrums der Schar und bezeichnen wir die Eigenwerte positiven Typs im Intervall $[\pi, \pi_+]$ in absteigender Reihenfolge gezählt mit (λ_j), dann werden sie gegeben durch*

$$\lambda_j = \max_{M \in \mathcal{M}_j} \min_{x \in M^1} p_+(x).$$

Proof : Da alle Eigenwerte im Intervall $[\pi, \pi_+]$ Eigenwerte positiven Typs sind, ist der Satz eine einfache Folgerung von Satz 4.

□

Wir nehmen jetzt den Operator B in (11) als nichtnegativ an. Zerlegen wir den Operator A in seinen positiven und negativen Teil, dh. $A = A_+ - A_-$ mit $A_{\pm} \geq 0$, wobei wir A_- als nicht trivial voraussetzen, folgt

$$\mathcal{A}_- := \{x \in \mathcal{H} \mid (Ax, x) < 0\} \subset \mathcal{M}.$$

Offensichtlich ist $p_-(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathcal{A}_-$. Außerdem folgt, daß $p_+(x)$ auf $\mathcal{A}_-$ reell und positiv ist. Daher ist $\pi'_- \leq 0 < \pi_+$. Wählt man $\beta = 0$, sind alle Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt, und man erhält, daß alle

$$\pi_j := \sup_{\substack{M \in \mathcal{M}_j \\ M \subset \mathcal{A}_-}} \min_{x \in M^1} p_+(x) > 0 \tag{15}$$

im Spektrum der Schar L liegen. Setzt man zusätzlich A_- als kompakt voraus, dh. das Spektrum von A_- ist diskret und besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit mit dem Punkt 0 als einzigem möglichen Häufungspunkt, dann hat die Schar L genausoviele positive Eigenwerte wie der Operator A negative Eigenwerte hat. Bevor wir diesen Satz zeigen, zitieren wir noch folgendes Lemma (siehe [AG]).

Lemma 11 *Die Anzahl der Punkte des Spektrums eines beschränkten selbstadjungierten Operators T, die links von einem gegebenen Punkt λ_o liegen, ist gleich der maximalen Dimension der linearen Mannigfaltigkeiten G, auf denen die Ungleichung*

$$(Tx - \lambda_o x, x) < 0$$

erfüllt ist

Angewendet auf den Operator A, erhält man, daß die maximale Dimension der linearen Mannigfaltigkeiten, auf denen $(Ax - \lambda_o x, x) < 0$ erfüllt ist, endlich sein muß für alle $\lambda_o < 0$.

Theorem 10 *Sei $L(\lambda)$ wie in (11) definiert, wobei B ein nichtnegativer Operator ist und der Operator A einen kompakten negativen Teil hat.*
Dann gilt

1. *Alle positiven Eigenwerte des Polynoms $L(\lambda)$ haben einen endlichdimensionalen geometrischen Eigenraum.*

2. *Das Polynom L hat genausoviele positive Eigenwerte, wie der Operator A negative Eigenwerte, wobei die Eigenwerte ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt werden.*

Proof : 1. Angenommen es gibt einen positiven Eigenwert mit unendlichdimensionalem Eigenraum, dh.

$$\exists M \subset \mathcal{H} : \dim M = \infty \quad \wedge \quad L(\lambda)x = 0 \quad \forall x \in M.$$

Dann erhält man auf Grund der Nichtnegativität des Operators B und der Positivität von λ die Abschätzung

$$\begin{aligned} (Ax, x) &= -\lambda^2(x,x) - \lambda(Bx,x) \leq \\ &\leq -\lambda^2(x,x). \end{aligned}$$

Setzen wir nun $\mu := -\lambda^2$, dann gilt $\mu < 0$. Wählen wir jetzt ein $\varepsilon > 0$ geeignet, sodaß $\mu + \varepsilon < 0$ gilt, erhalten wir

$$((A - (\mu + \varepsilon))x, x) < 0 \qquad \forall x \in M$$

im Widerspruch zu Lemma 11.

2. Zuerst beweisen wir, daß alle Werte π_j aus (15) Eigenwerte sind. Wir nehmen nun an, daß es einen Index N gibt, sodaß λ_N kein maxmin-Wert, also kein Eigenwert, ist:

$$\lambda_N = \sup_{\substack{M \in \mathcal{M}_j \\ M \subset \mathcal{A}_-}} \min_{x \in M^1} p_+(x)$$

Aus der Definition des Supremums folgt die Existenz einer Folge von normierten linear unabhängigen Vektoren $(x_n) \subset \mathcal{H}$ mit

$$\| x \| = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} p_+(x_n) = \lambda_N \qquad \text{und} \quad p_+(x_n) < \lambda_N \quad \forall n \in I\!N.$$

Die Folge (x_n) ist unendlich, da andernfalls das Maximum angenommen würde und λ_N somit ein Eigenwert wäre, was wir aber ausgeschlossen haben. Mit der Definition der $p_+(x_n)$ und ähnlich, wie im ersten Teil dieses Beweis erhält man

$$\begin{aligned}(Ax_n, x_n) &= -p(x_n)^2(x_n, x_n) - p(x_n)(Bx_n, x_n) \leq \\ &\leq -p(x_n)^2(x_n, x_n).\end{aligned}$$

Setzt man $\varepsilon := \frac{\lambda_N}{2} > 0$, dann folgt die Existenz eines Index $N(\varepsilon)$ mit

$$\frac{\lambda_N}{2} < p(x_n) < \lambda_N \qquad \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Damit können wir (Ax_n, x_n) weiter abschätzen.

$$(Ax_n, x_n) \leq -p(x_n)^2(x_n, x_n) < -\frac{\lambda_N^2}{4}(x_n, x_n) < 0$$

Setzen wir $\mu = -\frac{\lambda_N^2}{4} < 0$, dann folgt die Existenz von unendlich vielen linear unabhängigen Vektoren, die die Ungleichung

$$((A - \mu)x, x) < 0$$

erfüllen, im Widerspruch zur Diskretheit des negativen Spektrums von A. Daraus folgt, daß alle π_j Eigenwerte sein müssen.

Sei umgekehrt λ ein beliebiger positiver Eigenwert von L mit x_λ als zugehörigem Eigenvektor. Dann zeigen wir, daß ein Index j existiert mit $\lambda = \pi_j$. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\exists j \in \mathbb{N}$ mit $\pi_j \leq \lambda < \pi_{j-1}$
2. $\lambda < \pi_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$

Im ersten Fall existiert ein Teilraum $M \in \mathcal{M}_{j-1}, M \subset \mathcal{A}_-$ mit

$$\lambda < \min_{x \in M^1} p_+(x). \tag{16}$$

Bilden wir $N := M \bigoplus < x_\lambda >$, dann folgt einerseits $\dim N = j$ und andererseits mit einem beliebigen Vektor $x \in M$

$$\begin{aligned}(L(\lambda)x_\lambda + x, x_\lambda + x) &= (L(\lambda)x_\lambda, x_\lambda) + (L(\lambda)x_\lambda, x) + \\ &\quad + (L(\lambda)x, x_\lambda) + (L\lambda)x, x) \\ &= (L(\lambda)x, x) \leq 0.\end{aligned}$$

Damit erhält man auf Grund der Nichtnegativität von B, daß $N \subset \mathcal{A}_-$ gilt. Daher gilt

$$\lambda = \min_{x \in N} p_+(x).$$

Obige Gleichung impliziert aber, daß $\lambda \leq \pi_j$ gelten muß. Daher muß $\lambda = \pi_j$ gelten. Für die Behandlung des zweiten Falles bezeichnen wir die zu π_j gehörenden Eigenvektoren mit x_j und bemerken, daß $(L(\lambda)x_j, x_j) < 0$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$. Wegen $B \geq 0$ folgt, daß die maximale Dimension eines Teilraumes, auf dem die Ungleichung $((A + \lambda^2)x, x) < 0$ erfüllt ist, unendlich ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Kompaktheit des negativen Teils des Operators A.

Zusammenfassend haben wir bis jetzt gezeigt, daß L genausoviele positive Eigenwerte besitzt wie es Werte π_j gibt. Die Anzahl der π_j ist aber identisch, mit der maximalen Dimension eines Teilraumes, der in $\mathcal{A}_-$ enthalten ist. Dies ist aber gleichzeitig die Anzahl der negativen Eigenwerte des Operators A, womit auch die zweite Aussage des Satzes bewiesen wäre.

□

Remark 13 Hat der Operator A unendlich viele negative Eigenwerte, dann zeigt obiger Beweis, daß entweder eine Folge von positiven Eigenwerten der Schar L existiert, die gegen 0 konvergiert, oder ein Punkt der positiven reellen Halbachse im wesentlichen Spektrum der Schar liegt.

6.2 Beispiel 2

Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ zwei Hilberträume und $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2$ deren kartesische Summe. Wir betrachten die folgende Operatormatrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \tag{17}$$

mit einem selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, einem selbstadjungierten Operator $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ und einem Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Der Operator $\mathcal{A}$ ist selbstadjungiert im Hilbertraum $\hat{\mathcal{H}}$. Daher kann man seine Eigenwerte außerhalb des wesentlichen Spektrums $\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ durch das klassische Minimax-Prinzip aus dem zweiten Kapitel charakterisieren. Mit Hilfe des verallgemeinerten Minimax-Prinzips gelingt es aber, auch andere Teile des diskreten Spektrums $\sigma_d(\mathcal{A})$ zu charakterisieren.

Wir betrachten für das Folgende die Situation

$$\max \sigma(D) < \min \sigma(A).$$

Führen wir die Bezeichnungen $\delta_o := \max \sigma(D)$ und $\alpha_o := \min \sigma_{ess}(A)$, dann behaupten wir, daß das Spektrum des Operators $\mathcal{A}$ im Intervall (δ_o, α_o) nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht, die sich gegen α_o hin häufen können.

Proof : Seien $(\lambda_j(A))$ die Eigenwerte des Operators A, die kleiner als α_o sind, in aufsteigender Reihenfolge, dann bilden sie eine endliche oder unendliche Folge. Zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ existiert ein Index N_ε mit $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \ldots \leq \lambda_{N_\varepsilon}(A) < \alpha_o - \varepsilon$ und $\lambda_{N_\varepsilon+1}(A) \geq \alpha_o - \varepsilon$, sofern $\lambda_{N_\varepsilon+1}(A)$ überhaupt existiert. Sei $\{x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon}\}$ eine orthonormierte Basis des zugehörigen Eigenraumes, dann ersetzen wir in (17) den Operator A durch A_o

$$A_o = A + \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} (\alpha_o - \lambda_j(A))(., x_j)x_j.$$

Für den Operator

$$\mathcal{A}_o = \begin{pmatrix} A_o & B \\ B^* & D \end{pmatrix} \tag{18}$$

erhält man dann $(\delta_o, \lambda_{N_\varepsilon}(A)] \subset \rho(\mathcal{A}_o)$. Um das zu sehen, bemerken wir, daß das wesentliche Spektrum von A_o mit dem des Operators A übereinstimmt ,weil der Operator A_o eine kompakte Störung des Operators A ist (siehe [AG]). Der Operator A_o kann im Intervall $(\delta_o, \lambda_{N_\varepsilon}(A)]$ aber auch keine Eigenwerte haben, denn angenommen für den Operator A_o existiert im Intervall $(\delta_o, \lambda_{N_\varepsilon}(A)]$ ein Eigenwert λ, dann sieht man sofort durch einsetzen, daß der zugehörige Eigenvektor x_λ im orthogonalen Komplement der Vektoren $x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon}$ liegen muß. Daraus folgt, daß x_λ die Gleichung $(A - \lambda)x_\lambda = 0$ erfüllen muß. Da aber der Operator A im Intervall $(\delta_o, \lambda_{N_\varepsilon}(A)]$ nur die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_\varepsilon}$ besitzt, muß x_λ gleich einem der Vektoren $x_1, \ldots, x_{N_\varepsilon}$ sein im Widerspruch zur Orthogonalität. Das Intervall $(\delta_o, \lambda_{N_\varepsilon}(A)]$ liegt also in der Resolventenmenge des Operators $\mathcal{A}$. Und da $\mathcal{A}_o$ eine endlichdimensionale Störung von $\mathcal{A}$ ist, folgt, daß $\sigma(\mathcal{A})$ diskret ist in diesem Intervall und aus höchstens endlich vielen Eigenwerten besteht.

□

Der Operator $\mathcal{A}$ ist die Linearisierung folgender Operatorschar

$$L(\lambda) = A - \lambda - B(D - \lambda)^{-1}B^*.$$

Auf $\rho(D)$ ist L holomorph und das Spektrum $\sigma(L)$ stimmt dort mit dem Spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ überein. Bezeichnen wir mit α den kleinsten Eigenwert von $\mathcal{A}$ im Intervall (δ_o, α_o), dann können wir die Eigenwerte von L im Intervall $[\alpha, \alpha_o)$ durch minmax-Werte charakterisieren.

Proof : Betrachten wir L auf dem Intervall $[\alpha, \alpha_o)$, dann folgt

$$L'(\lambda) = -I - B(D - \lambda)^{-2}B^* < 0 \qquad \forall \lambda \in [\alpha, \alpha_o).$$

Wegen $\lambda < \alpha$ für alle $\lambda \in \sigma(D)$ folgt $-(B(D-\alpha)^{-1}B^*x, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Da zusätzlich links vom Punkt α keine Punkte aus dem Spektrum des Operators A liegen können (siehe Lemma 10), folgt, daß

$$(L(\alpha)x, x) \geq ((A-\alpha)x, x) - (B(D-\alpha)^{-1}B^*x, x) \geq ((A-\alpha)x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

ist. Auf Grund der Negativität der Ableitung schließt man damit, daß die Funktionen $(L(\lambda)x, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}^1$ im Intervall $[\alpha, \alpha_o)$ eine eindeutig definierte Nullstelle $p(x)$ haben. Daher sind alle Voraussetzungen von Satze 4 erfüllt und man erhält die gewünschte Aussage.

□

6.3 Beispiel 3

Sei wieder $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_1 \bigoplus \mathcal{H}_2$ und der Operator $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & D \end{pmatrix}$$

mit $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$, $D = D^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Dann ist der Operator $\mathcal{A}$ selbstadjungiert, wenn man im Raum $\mathcal{H}$ das neue Skalarprodukt $[.,.] = (\mathcal{G}.,.)$ einführt, mit dem Gramoperator

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Das klassische Minimax-Prinzip ist also nicht anwendbar. Sei $\sigma(A) = [a_1, a_2]$ und $\sigma(D) = [d_1, d_2]$ mit $d_2 < a_1$. Weiters existiere ein a mit

$$d_2 + \parallel B \parallel < a < a_1 - \parallel B \parallel .$$

Der Operator $\mathcal{A}$ ist eine Linearisierung der Schar

$$L(\lambda) = A - \lambda + B(D-\lambda)^{-1}B^*.$$

Außerhalb des Spektrums von D stimmt das Spektrum des Operators $\mathcal{A}$ mit dem Spektrum der Schar überein. Wenn das Spektrum $\sigma(L)$ im Intervall $[a, \beta)$, $\beta \leq a_2 + \parallel B \parallel$, nur aus Punkten des diskreten Spektrum besteht, dann können diese Punkte durch das Minimax-Prinzip aus Kapitel 4 beschrieben werden.

Proof : Sei $\lambda \notin \sigma(D)$ und bezeichne $\delta(\sigma(D), \lambda)$ den Abstand des Punktes λ zum Spektrum des Operators D. Dann gilt bekanntlich

$$\| (D - \lambda)^{-1} \| < \frac{1}{\delta(\sigma(D), \lambda)}.$$

Daher gilt für alle $\lambda > d_2 + \| B \|$ die Ungleichung $\| (D - \lambda)^{-1} B^* \| < 1$, und wir erhalten für die Ableitung

$$(L'(\lambda)x, x) = -(x, x) + ((B(D - \lambda)^{-2} B^*)x, x) < 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Da auf Grund der Lage des Punktes a für alle x einerseits $((A - a)x, x) \geq \| B \| (x, x)$ und andererseits

$$| ((D - a)^{-1} B^* x, B^* x) | \leq \| (D - \lambda)^{-1} B^* \| \| B \| (x, x)$$

gilt, folgt unmittelbar $(L(a)x, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Daher sind alle Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt.

$\square$

Literatur

[BW] B. WERNER, Das Spektrum von Operatorenscharen mit verallgemeinerten Rayleighquotienten, Arch. Rational Mech. Anal. 42 (1971), 223 - 238.

[DL] A. DIJSKMA, H. LANGER, Operator Theory and Ordinary Differential Operators, erschienen in Lectures on operator theory and its applications, Fields Instute Monographs (1996)

[LMM] H. LANGER, M.S. MARKUS, V. MATSAEV, Locally definite operators in indefinite inner product spaces, preprint

[AG] N.I. ACHIESER, I.M. GLASSMANN, Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, Verlag Harri Deutsch, 1981

[M] A.S. MARKUS, Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils, Translations of Mathematical Monographs Volume 71, 1980

[H] S. HILDEBRANDT, Uber den numerischen Wertebereich eines Operators, Math. Ann 163, 230 - 247 (1966)

[RN] F. RIESZ, F. u. B. NAGY, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1968

[T] B. TEXTORIUS, Minimaxprinzipe zur Bestimmung der Eigenwerte J-Nichtnegativer Operatoren, Math. Scand. 35 (1974), 105 - 114

[A] Yu. Sh. ABRAMOV, Variational Principles for nonlinear Eigenvalue Problems, übersetzt von Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya Vol. 7, No. 4 (1973), 76 - 77

[Ha] K.P. HADELER, Variationsprinzipien bei nichtlinearen Eigenwertaufgaben, Arch. Rat. Mech. Anal. 30 (1968), 297 - 307

[P] V.N. PIVOVARCHIK, Eigenvalues of a certain quadratic pencil of operators, übersetzt von Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya Vol. 23, No. 1 (1989), 80 - 81

[BN] P. BINDING, B. NAJMAN, A variational principle in Krein space, American mathematical Society Vol. 342, No. 2 (1994), 489 - 499

[R] E.H. ROGERS, A minimax theory for overdamped systems, Arch. Rational. Mech. Anal 16, 89 - 96 (1964)